ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041203
Цыбульник Анастасии Сергеевны

Научный руководитель
к. ф.- м. н., доцент
Зинченко Н.А.

БЕЛГОРОД 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В настоящее время, идёт становление новой системы образования, ориентированной на вхождение в мировое образовательное пространство. Происходят существенные изменения в педагогической теории и практике учебно-воспитательного процесса. Содержание образования обогащается новыми процессуальными умениями, развитием способностей оперировать информацией, творчески решать педагогические проблемы.

Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Одним из сложных разделов алгебры, изучаемых в школьной программе, являются иррациональные уравнения и неравенства. Изучению этой темы в программе средней школы отводится минимум часов, что не соответствует объему необходимого для усвоения материала, иррациональные неравенства же изучаются только в ознакомительном порядке. Однако, каждый вариант заданий ГИА и ЕГЭ содержит не менее 2-х заданий по данной теме.

Обучающиеся в недостаточной степени овладевают умением решать иррациональные уравнения и неравенства, часто допускают ошибки при их решении. Трудности при изучении данного вида уравнений и неравенств связаны с отсутствием четкого алгоритма решения иррациональных уравнений и неравенств. Так как в большинстве случаев в школе применяются тождественные преобразования, то чаще всего возникают ошибки, которые обычно связаны с потерей или приобретением посторонних корней в процессе решения. Поэтому необходимо рассмотреть такие ситуации, показать, как их распознавать и как с ними можно бороться.

Выше изложенное обусловило проблему исследования: обучение школьников решению иррациональных уравнений и неравенств, используя при этом основные методы решения иррациональных уравнений различных видов.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре и началам анализа в 10-11 классах.

Предметом исследования являются различные виды иррациональных уравнений и неравенств и методы их решения.

Цель работы: разработать методику обучения решению иррациональных уравнений и неравенств в школе, а также выявить возможности использования общих методов решения уравнений при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Гипотеза исследования: освоение умения различать основные виды иррациональных уравнений и неравенств, умения применять необходимые приемы и методы их решения позволит учащимся решать иррациональные уравнения и неравенства на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный способ решения, применять разные способы решения, в том числе те, которые не рассмотрены в школьных учебниках.

Структура работы: в первой главе рассматривается теоретическая база исследования данной темы. Начинать изучение иррациональных уравнений и неравенств следует с повторения свойств степени с рациональным показателем. Данная информация содержится в первом пункте первой главе. Далее, показаны иррациональные уравнения и неравенства простейшего вида, которые в настоящее время встречаются в задании B5 на ЕГЭ. Затем описана методика обучения решению иррациональных уравнений и неравенств. Во второй главе данной работы рассмотрены примеры проектов учебных занятий на данную тему.

1. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1. Свойства степеней с рациональным показателем

Обучение решению иррациональных уравнений и неравенств, как правило, начинается с изучения свойств степеней с рациональным показателем, так как знание этих свойств необходимо для преобразования уравнений и неравенств.

Рациональными числами называют числа вида $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное число. Также, каждое целое число m является рациональным, так как его можно представить в виде $\frac{m}{1}$. Таким образом, степень с рациональным показателем и основанием a можно представить в общем виде – $a^{\frac{n}{m}}$, где a– целое положительное число.

В учебнике для 10-11 класса авторов А.Н. Колмогорова, А.М. Абрамова приводится следующее определение: степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m– целое число, аn – натуральное ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. [17]

Определение дается так, чтобы степени с рациональным показателем обладали, хотя бы частично, теми же свойствами, что и степени с целым показателем. Тогда, n-я степень числа $a^{\frac{m}{n}}$ должна быть равна a^m. Действительно, если свойство степени с целым показателем $(a^{c})^k = a^{c*k}$ выполняется, то

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}*n} = a^m.$$

Корнем n-й степени из неотрицательного числа a (n=2, 3, 4, …) называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a; это число обозначают $\sqrt[n]{a}$.Данное тождество означает, по определению корня n-й степени, что число $a^{\frac{m}{n}}$ должно быть корнем n-й степени из числа a^m. Справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.[25]

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием. А именно для любых рациональных чисел p и q и любых $a>0$ и $b>0$ верны равенства:

1. $a^p * a^q = a^{p+q}$;
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{p*q}$;
4. $(a*b)^p = a^p * b^q$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

В основе доказательства этих свойств лежат свойства корней. Например, докажем свойства1, 3 и 4. [1]

- Пусть $p = \frac{m}{n}$ и $q = \frac{k}{l}$, где n и l – натуральные числа, m и k – целые числа. Нужно доказать, что $a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$.

Приведя дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ к общему знаменателю, запишем левую часть полученного равенства в виде: $a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} * a^{\frac{kn}{nl}}$.

Используя определение степени с рациональным показателем, свойства корня и степени с целым показателем, получаем:

$$a^{\frac{m}{n}} * a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} * a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} * \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml} * a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{ml}{nl}+\frac{kn}{ln}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}.$$ [3]

- Пусть $p = \frac{m}{n}$ и $q = \frac{k}{l}$, где n и l – натуральные числа, m и k – целые числа. Нужно доказать, что$(a^p)^q = a^{p*q}$:

$$(a^p)^q = \sqrt[l]{(a^p)^k} = \sqrt[l]{(\sqrt[n]{a^m})^k} = \sqrt[nl]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nl}} = a^{p*q}.$$

- Пусть $p = \frac{m}{n}$ и $q = \frac{k}{l}$, где n и l – натуральные числа, m и k – целые числа. Нужно доказать, что $(a*b)^p = a^p * b^q$.

$(a*b)^p = \sqrt[n]{(a*b)^m} = \sqrt[n]{a^m*b^m} = \sqrt[n]{a^m}*\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}*b^{\frac{m}{n}} = a^p*b^q$.[17]

Аналогично доказываются остальные свойства степени с рациональным показателем.

Также, отмечаются следующие два свойства степени с рациональным показателем:

6. Пусть p – рациональное число и $0<a<b$. Тогда

$a^p < b^p$ при $p>0$,

$a^p > b^p$ при $p<0$.

7. Для любых рациональных чисел pиq из неравенства $p>q$ следует, что

$$a^p > a^q \quad \text{при } a>1,$$

$$a^p > a^q \quad \text{при } 0<a<1.$$

Также, переходя к обучению решению иррациональных уравнений и неравенств, следует изучить свойства корня n-й степени:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$;

2. Корень n-й степени ($n=2, 3, 4, \ldots$) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-й степени этих чисел:

$\sqrt[n]{a*b} = \sqrt[n]{a}*\sqrt[n]{b}$;

3. Если $a\geq 0$, $b>0$ и n – натуральное число, больше 1, то справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

То есть, корень частного равен частному корней;

4. Если $a\geq 0$,k– натуральное число иn – натуральное число, больше 1, то справедливо равенство:

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Иными словами, чтобы возвести корень в натуральную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение;

5. Если *a≥0* ,*kиn* – натуральные числа, больше 1, то справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

То есть, чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить показатели корней;

6. Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится:

$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$. [24]

Используя данные формулы, можно осуществлять тождественные преобразования выражений, содержащих операцию извлечения корня, то есть выражений с радикалами, - такие выражения называют иррациональными. [24]

1.2. Простейшие иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональным называют уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Например, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2} = 2x - 1$; $x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0$. [25]

К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида:

$\sqrt{U(x)} = V(x)$, $\sqrt{U(x)} = \sqrt{V(x)}$.

Аналогично, простейшие неравенства имеют вид:

$\sqrt{U(x)} \geq V(x)$; $\sqrt{U(x)} \geq \sqrt{V(x)}$; $\sqrt{U(x)} > V(x)$; $\sqrt{U(x)} > \sqrt{V(x)}$; $\sqrt{U(x)} \leq V(x)$; $\sqrt{U(x)} \leq \sqrt{V(x)}$; $\sqrt{U(x)} < V(x)$; $\sqrt{U(x)} < \sqrt{V(x)}$. [4]

В настоящее время, уравнения или неравенства такого вида можно встретить в задании В5 в ЕГЭ по математике. В открытом банке заданий на сайте ФИПИ можно найти примеры таких заданий:

Найдите корень уравнения:

- $\sqrt{3x-8}=5$;
- $\sqrt{13-x}=3$;
- $\sqrt{14-5x}=3$;
- $\sqrt{28-2x}=2$;
- $\sqrt{2x-31}=9$;
- $\sqrt[3]{x+3}=5$;
- $\sqrt[3]{x-6}=2$;
- $\sqrt{40+3x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.[26]

В учебно-методическом пособии по подготовке к ЕГЭ приводятся следующие примеры:

- Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{3x-51}}=\frac{1}{6}$;
- Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{19+3x}}=0{,}25$;
- Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{2x+11}=-5$;
- Найдите корень уравнения $\sqrt{5x-16}=7$;
- Найдите корень уравнения $\sqrt{0{,}4-1{,}8x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них;
- Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{23}{4}x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из корней. [21]

Подобные уравнения можно встретить в сборнике задач для обучающихся 8-9 класса с углубленным изучением математики М.Л. Галицкого:

Решить уравнение:

- $\sqrt[3]{2x-3}=2$;
- $\sqrt[4]{3x+5}=3$;

- $3 * \sqrt[5]{3x-1} + 2 = 0;$
- $2 * \sqrt[6]{5x+2} - 1 = 0.$

Также, в данном сборнике можно найти примеры простейших иррациональных уравнений:

- $\sqrt[3]{x-1} < 2;$
- $\sqrt[3]{x+1} \geq 2;$
- $\sqrt[4]{x-2} \geq 3;$
- $\sqrt[4]{x+2} \leq 3.$[8]

Подобные и более сложные примеры иррациональных уравнений и неравенств приводятся в учебно-практическом пособии «Решение экзаменационных задач по математике» Н.В. Дрофеева, А.А. Сапожникова, Е.С. Шубина. Данное пособие содержит также подробное решение уравнений и неравенств.

Иррациональные уравнения:

- $3x + 1 = \sqrt{1-x};$
- $8 - 3x = \sqrt{x+2};$
- $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0;$
- $\sqrt{3x^2 - 4x - 2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1};$
- $2\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1;$
- $4\sqrt{x+6} = x + 1.$

Иррациональные неравенства:

- $(3x+4)\sqrt{-3x - 2x^2 - 1} < 0;$
- $(3x^2 - x - 2)\sqrt{2x-1} \geq 0;$
- $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} > \sqrt{x^2 - 3x + 2};$
- $(4x - x^2 - 3)\sqrt{5x-8} \leq 0.$[12]

1.3. Методика обучения решению иррациональных уравнений

Учебный материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики, а его изучение в современной методике обучения математике организовано в отдельную содержательно-методическую линию. Значимость уравнений определяется как теоретико-математической направленностью, так и с точки зрения развития научного мировоззрения учащихся. [18]

Умение школьников решать уравнения является обязательным компонентом при проведении итоговой аттестации учащихся. При обучении решению определенного класса уравнений, следует выделять общий прием решения, который можно представить следующими этапами:

1. Определить вид уравнения.
2. Определить стандартное оно или нет.
3. Если стандартное, то решить в соответствии с известным правилом, алгоритмом.
4. Если нестандартное, то выяснить, какие преобразования необходимо выполнить, чтобы свести его к стандартному, либо перейти к использованию искусственных приемов решения.
5. Выполнить эти преобразования.
6. Сделать проверку.
7. Записать ответ. [19]

Вполне естественно, что для каждого класса уравнений или неравенств общий прием может претерпевать некоторые уточнения, которые окажут влияние на методику их изучения. Так, относительно иррациональных уравнений важнее показать учащимся основные приемы их решения, чем делать акцент на определении вида уравнения – стандартное оно или нет. [19]

В школьных учебниках определения различных классов иррациональных уравнений, обычно имеют вид: «Уравнение называется иррациональным, если оно содержит неизвестное под знаком корня». Несмотря на формальную расплывчатость, определения такого типа достаточны для того, чтобы указать некоторую область, уравнения из которой решаются способами, изучаемыми при прохождении соответствующей темы. В каждом из таких классов можно указать подклассы простейших уравнений, к которым сводится решение более сложных заданий. [22]

Каждый простейший класс тесно связан с классом соответствующих функций; по существу, формулы решений и исследование простейших уравнений здесь опираются на свойства функций. В начале изучения каждого простейшего класса обучающимся приходится преодолевать трудности, связанные с освоением специфической символики, в частности узнавать новые формы записи чисел и числовых областей, в которых должен быть получен ответ к заданию. При решении заданий часто используются, наряду с известными, специфические для соответствующего класса функций тождества. Значительно чаще, чем в предыдущей части курса, в решении уравнений используются неравносильные преобразования, широко используются подстановки. Поэтому весь материал требует достаточной логической грамотности учащихся. [22]

Специфика иррациональных уравнений заключается в применении характерного преобразования – «освобождение неизвестного от знака корня». [22]

Существует два основных метода решения уравнений – алгебраический и графический. Основная идея алгебраического метода решения иррациональных уравнений – это сведение данного уравнения с помощью различных преобразований к рациональному уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Последнее же решается с помощью уже известных приемов решения. При этом выделяют два основных способа избавления от иррациональности:

1) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень, которую имеет корень, содержащий неизвестное, и последующее «освобождение» от радикалов по формуле $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = f(x)$.[9]

2) введение новой переменной. При этом часто эффективна замена вида $\sqrt{f(x)} = t$. Используя такую замену, имеет смысл дополнять уравнение, полученное для новой переменной, естественным ограничением $t \geq 0$, поскольку во многих случаях это несколько упрощает решение. [19] [31]

Преобразования, применяемые в школьной практике для решения уравнений, разнообразны. Некоторые из них являются универсальными, то есть используются при решении уравнений разных классов. Другие имеют специфический характер и применяются исключительно для решения уравнений определённого вида. В первую очередь, нужно освоить универсальные преобразования. Так, возведение левой и правой частей уравнения в степень является универсальным преобразованием, используемым при решении иррациональных уравнений. [31]

Главное, что необходимо усвоить – это условия равносильности такого перехода. Возведение в любую нечетную степень приводит к равносильному уравнению. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ возвести в четную степень, то полученное уравнение будет следствием исходного. Однако, на множестве где функции $f(x)$ и $g(x)$определены и неотрицательны, исходное уравнение будет равносильно своему следствию. [31]

При возведении уравнения в четную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного, но не всегда тождественным ему. Поэтому возможно появление посторонних решений уравнения, но не возможна потеря корней. [11]

Важно понимать причины, по которым возведение в четную степень может привести к появлению посторонних корней. Таких причин две: расширение области допустимых значений и различие знаков левой и правой частей исходного уравнения при некоторых значениях переменной. [31]

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной в первоначальное уравнение. [11]

Для уравнений выполнение проверки можно осуществить двумя способами: первый состоит в переходе от уравнения к его следствию и проверке корней полученного уравнения подстановкой в исходное. Второй – использование равносильных преобразований, но при этом возникает необходимость переходить к системам. [22]

На практике следует уделять внимание обоим названным способам. В некоторых случаях целесообразно и наиболее просто выполнить проверку подстановкой, иногда же проверка подстановкой может привести к сложным вычислениям – здесь уместно установление равносильности выполняемых преобразований. [19]

Учителю следует на простых примерах показывать обучающимся суть каждого подхода, его преимущества и недостатки. Выбор же того или иного подхода определяется каждым конкретным решаемым уравнением. Прежде чем начинать выполнять преобразования самого уравнения, следует установить систему неравенств, задающих область допустимых значений уравнения, оценить трудоемкость ее решения, а уже потом делать выводы: выполнять ли преобразования уравнения с последующей проверкой корней подстановкой, либо свести решение уравнения к решению равносильной ему системе. Причем, необходимо приучать обучающихся пытаться находить сначала область допустимых значений уравнения, так как в ряде случаев уже по ней можно сделать вывод о решении уравнения (например, если ОДЗ есть пустое множество, то само уравнение не имеет корней; если ОДЗ состоит из нескольких чисел, то достаточно, не решая само уравнение, проверить их подстановкой). [10]

Таким образом, алгебраический метод решения иррационального уравнения предполагает некоторую свободу выбора подхода к его решению. При этом учителю следует добиваться от учащихся осознанного и обоснованного выбора наиболее рационального подхода, причем следует помнить и о том, что наряду с алгебраическим рассматривают графический и другие методы решения иррациональных уравнений. [19]

Прежде чем приступить к решению сложных уравнений обучающиеся должны научиться решать простейшие иррациональные уравнения. К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида: $\sqrt{f(x)} = g(x)$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Рассмотрим подробнее методы решения иррациональных уравнений.

•Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень состоит в следующем:

а) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду

$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$;

б) возводят обе части полученного уравнения в n-ю степень:

$(\sqrt[n]{f(x)})^n = (\sqrt[n]{g(x)})^n$;

в) учитывая, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$, получают уравнение

$f(x) = g(x)$;

г) решают уравнение и в случае четного n, делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней. Эта проверка чаще всего осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение. [25]

● Функционально-графический метод, то есть с использованием геометрической интерпретации. При решении уравнений иногда полезно рассмотреть эскиз графиков их правой и левой частей в одной и той же системе координат. Тогда этот эскиз графиков поможет выяснить, на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения (или неравенства) было очевидно. Эскиз графика лишь помогает найти решение, но писать, что из графика следует ответ, нельзя, ответ еще надо обосновать. [31]

Пример: Показать, что уравнение $\sqrt{x} = -x^2 + 6x - 8$ не имеет решений.

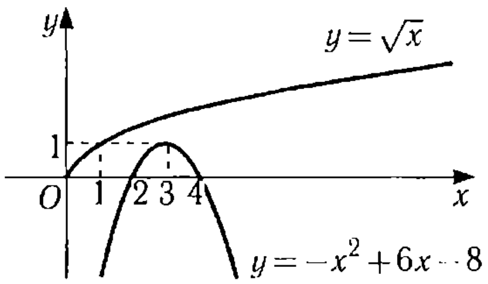

Рисунок 1

Корни данного уравнения являются абсциссами точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -x^2 + 6x - 8$. По рисунку (рис. 1) заключаем, что графики не имеют общих точек, и значит, уравнение не имеет решений.

Дадим аналитическое обоснование. Разобьем область допустимых значений уравнения $[0: +\infty)$ на два промежутка: $[0;\ 2)$ и $[2: +\infty)$.

Если $x \in [0: 2)$, то $\sqrt{x} \geq 0$, $-x^2 + 6x - 8 = 1 - (x-3)^2 < 0$, следовательно, равенство $\sqrt{x} = -x^2 + 6x - 8$ невозможно.

Если $x \in [2: +\infty)$, то $\sqrt{x} \geq \sqrt{2}$, $-x^2 + 6x - 8 = 1 - (x-3)^2 \leq 1$, следовательно, равенство $\sqrt{x} = -x^2 + 6x - 8$ невозможно. [31]

● Метод последовательных упрощений. При решении иррациональных уравнений и неравенств часто приходится применять тождественные преобразования, связанные с использованием известных формул, свойств степени и корня. [30]

Любое уравнение вида $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} = \boldsymbol{g(x)}$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = g^2(x)}, \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0}. \end{cases}$$

Заметим, что в этой системе отсутствует неравенство $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$, определяющее область допустимых значений уравнения. Нет необходимости указывать это условие в смешанной системе, поскольку если некоторое значение $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{f(x) = g^2(x)}$, то оно удовлетворяет и неравенству $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$. [31]

Вернемся к вопросу об использовании равносильных переходов и переходов следствий. Безусловно, до начала решения уравнения трудно определить, что удобнее: отследить условия равносильности переходов или сделать в конце проверку. Можно рекомендовать начинать решение с замены уравнения на его следствия и уже после нахождения корней принимать решение: делать проверку или же еще раз проследить всю цепочку преобразований, дополнив ее условиями равносильности переходов. [31]

Пример. Решить уравнение $3\sqrt{5-x}+1=x$.

Первый способ: область допустимых значений уравнения определяется условием $5-x\geq 0$, или $x\leq 5$. Запишем уравнение в виде: $3\sqrt{5-x}=x-1$. Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то всякое его решение должно удовлетворять ограничению $x-1\geq 0$. Поэтому с учетом ОДЗ решение следует искать на промежутке $1\leq x\leq 5$. На этом промежутке левая и правая части уравнения определены и неотрицательны и, следовательно, возведя их в квадрат, получим уравнение равносильное исходному.

$3\sqrt{5-x}+1=x,$

$9(5-x)=(x-1)^2,$

$x^2+7x-44=0.$

Последнее уравнение имеет два корня $x_1=4$ и $x_2=-11$, но только первый из них удовлетворяет условию $1\leq x\leq 5$. Таким образом, исходное уравнение имеет один корень $x=4$.

Второй способ: возведем обе части уравнения $3\sqrt{5-x}+1=x$ в квадрат. Получим уравнение-следствие $9(5-x)=(x-1)^2$ или $x^2+7x-44=0$. Оно имеет два решения $x_1=4$ и $x_2=-11$. Сделаем проверку:

1) Подставим $x=4$ в исходное уравнение:

$3\sqrt{5-4}=4-1,$

$3=3.$

Следовательно, $x=4$ – корень исходного уравнения.

2) Подставим $x=-11$ в исходное уравнение:

$3\sqrt{5+11} = -11-1,$

$12 = -12.$

Следовательно, $x = -11$ – не является корнем исходного уравнения, то есть, он посторонний.

Ответ: 4.

При решении некоторых иррациональных уравнений рассуждать единым образом во всей области допустимых значений уравнения не удается и приходится перебирать варианты. В большинстве случаев перебор связан с необходимостью занесения некоторого выражения под знак корня, то есть с использованием формулы $\sqrt{\boldsymbol{f^2(x)}} = |\boldsymbol{f(x)}|$. [31]

Пример: Решить уравнение

$$\sqrt{\boldsymbol{x(x+2)}} + (\boldsymbol{x+2})\sqrt{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x+2}}} = \boldsymbol{x+4}.$$

Область допустимых значений уравнения состоит из двух промежутков: $\boldsymbol{x} < -2$ и $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. Уравнение существенно упростится, если внести множитель $\boldsymbol{x+2}$ под знак корня, однако результат этой процедуры зависит от знака данного множителя. Поэтому рассмотрим случаи $\boldsymbol{x} < -2$ и $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ отдельно.

1) Пусть $\boldsymbol{x} < -2$. Тогда $\boldsymbol{x+2} < 0$ и $\boldsymbol{x+2} = -(-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2}) = -|\boldsymbol{x+2}| = -\sqrt{(\boldsymbol{x+2})^2}$. Значит, уравнение можно записать в виде:

$\sqrt{\boldsymbol{x(x+2)}} - \sqrt{(\boldsymbol{x+2})^2}\sqrt{\frac{x}{x+2}} = \boldsymbol{x+4}.$

Далее имеем:

$\sqrt{\boldsymbol{x(x+2)}} - \sqrt{(\boldsymbol{x+2})^2 * \frac{x}{x+2}} = \boldsymbol{x+4};$

$\sqrt{\boldsymbol{x(x+2)}} - \sqrt{(\boldsymbol{x+2}) * \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x+4};$

$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x+4};$

$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{4}.$

Найденное значение удовлетворяет условию $\boldsymbol{x} < -2$, и, следовательно, является корнем исходного уравнения.

2) Пусть $\boldsymbol{x \geq 0}$. Тогда $\boldsymbol{x+2} > 0$ и $\boldsymbol{x+2 = |x+2| = \sqrt{(x+2)^2}}$.

Значит, уравнение можно записать в виде:

$\boldsymbol{\sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x}{x+2}} = x+4}$. Далее имеем:

$\boldsymbol{\sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+2)^2 * \frac{x}{x+2}} = x+4}$;

$\boldsymbol{2\sqrt{x(x+2)} = x+4}$;

$\boldsymbol{4x(x+2) = (x+4)^2}$;

$\boldsymbol{x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}}$.

Из двух найденных значений только $\boldsymbol{x = \frac{4}{\sqrt{3}}}$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{x \geq 0}$, и , следовательно, является корнем исходного уравнения.

Ответ: -4; $\frac{4}{\sqrt{3}}$. [31]

●Метод уединения радикала. При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень представить уравнение в виде $\boldsymbol{C(x) = \sqrt[n]{D(x)}}$.Тогда после возведения обеих частей уравнения в n-ую степень радикал справа исчезнет. [7]

Пример. Решить уравнение $x + \sqrt{2x+3} = 6$.

Метод уединения радикала приводит к уравнению$\sqrt{2x+3} = 6 - x$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+3 = (6-x)^2, \\ 6 - x \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, получим корни $x_1 = 11$ и $x_2 = 3$, но условие $6 - x \geq 0$ выполняется только для$x = 3$.

Ответ: $x = 3$. [2]

● Метод введения новой переменной. Обычно применяется в случае, если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой буквой и попытаться решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом уже найти исходную неизвестную. В ряде случаев удачно введенные новые неизвестные иногда позволяют получить решение быстрее и проще; иногда же без замены решить задачу вообще невозможно. Замена особенно полезна, если в результате достигается новое качество, например, иррациональное уравнение превращается в квадратное. [9]

Пример: Решить уравнение $\mathbf{9\sqrt[4]{x-5}+5=2\sqrt{x-5}}$.

Положим $\boldsymbol{t=\sqrt[4]{x-5}}$, тогда уравнение примет вид: $\mathbf{9t+5=2t^2}$, откуда $\boldsymbol{t_1=-0,5}$, $\boldsymbol{t_2=5}$. Возвращаясь к переменной $\boldsymbol{x}$, получаем уравнение $\boldsymbol{\sqrt[4]{x-5}=-0,5}$, которое не имеет корней, и уравнение $\boldsymbol{\sqrt[4]{x-5}=5}$, имеющее один корень $\boldsymbol{x=630}$.

Ответ: 630. [31]

● Метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений.

Уравнения вида $\sqrt[m]{ax+b}\pm\sqrt[n]{cx+d}=p$ (здесь a, b, c, d – некоторые числа, m, n – натуральные числа) и ряд других уравнений часто удается решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных:

$\sqrt[m]{ax+b}=y$и $\sqrt[n]{cx+d}=z$, где $y,z\geq 0$ и последующего перехода к эквивалентной системе рациональных уравнений. [30]

Пример: Решить уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Введем новые переменные

$y=\sqrt{2x-3}$ и $z=\sqrt{4x+1}$, где $y,z\geq 0$.

Тогда исходное уравнение принимает вид: $y+z=4$. Полученное уравнение обладает одним существенным недостатком: в нем две неизвестных. Но заметим, что величины yи zне являются независимыми переменными – они зависят одна от другой посредством старой переменной x. Выразим xчерез yи z: $2x=y^2+3$и$4x=z^2-1$. Теперь, можно заметить, что если первое уравнение умножить на два и затем вычесть из него второе, то переменная xисключается, и остается связь только между yи z.

$2y^2+6=z^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2-z^2=-7.$

В результате получаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных y и z:

$$\begin{cases} y + z = 4, \\ 2y^2 - z^2 = -7. \end{cases}$$

Решая эту систему методом подстановки, приходим к уравнению $y^2 + 8y - 9 = 0$, корнями которого являются числа $y_1 = 1$ и$y_2 = -9$. Корень y_2 посторонний, поскольку$y \geq 0$. Осталось решить уравнение $\sqrt{2x-3} = 1$, откуда находим $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

● Умножение обеих частей уравнения на функцию.

Иногда иррациональное уравнение удается решить довольно быстро, если обе его части умножить на удачно подобранную функцию. Конечно, при умножении обеих частей уравнения на некоторую функцию могут появиться посторонние решения, ими могут оказаться нули самой этой функции. Поэтому предлагаемый метод требует обязательного исследования получающихся значений. [9]

Пример:Решить уравнение $\frac{1}{4}x = (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)$.

Умножим обе части уравнения на одну и ту же функцию $h(x) = \sqrt{1+x} + 1$. Выражение $\sqrt{1+x} + 1$ называется сопряженным для выражения$\sqrt{1+x} - 1$. Цель такого умножения ясна: использовать тот факт, что произведение двух сопряженных выражений уже не содержит радикалов.

В результате этого умножения и очевидных преобразований приходим к уравнению

$$x\left(\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3\right) = 0,$$

которое равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3 = 0. \end{cases}$$

Уединив первый радикал второго уравнения совокупности, возведем его в квадрат и получим

$$\begin{cases} 1+x=16(1-x)+24\sqrt{1-x}+9 \\ -1\le x\le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x-24=24\sqrt{1-x} \\ -1\le x\le 1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (17x-24)^2=24^2*(1-x) \\ -1\le x\le 1 \\ 17x-24=0. \end{cases}$$

Если внимательно посмотреть на неравенства последней системы, можно заметить, что пересечение множеств $[-1;1]$ и $\left[\frac{24}{17};+\infty\right)$ пусто. Следовательно, уравнение $\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3=0$ решений не имеет. Значит, уравнение $x\left(\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3\right)=0$ имеет единственный корень$x=0$.

Подстановка в исходное уравнение показывает, что $x=0$ – корень.

Ответ:$x=0$.

● Решение иррациональных уравнений с использованием свойств входящих в них функций.

В школьном курсе математики изучаются свойства многих элементарных функций. Их иногда с успехом можно применять и при решении иррациональных уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

1. Использование монотонности функции.

Если уравнение имеет вид

$f(x)=0$,

где $f(x)$возрастает (убывает), или

$$f(x)=g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», т.е. $f(x)$ возрастает, а$g(x)$ убывает и наоборот, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если удается заметить это или привести уравнение к такому виду и при этом нетрудно угадать корень, то он и будет решением данного уравнения. [14]

Пример. $\sqrt{7x+9}+\sqrt{15x+1}=9-\sqrt{2x-1}$.

Это уравнение можно попытаться решить возведением в квадрат (трижды). Однако при этом получится уравнение четвертой степени. Попробуем угадать корень. Это сделать нетрудно: $x=1$. Теперь заметим, что левая часть уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Итак, $x = 1$ – единственный корень.

Ответ: $x = 1$. [2]

2. Использование ОДЗ

Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}$.

Конечно, это иррациональное уравнение можно решить путем традиционного возведения обеих частей в квадрат. Однако, найдя ОДЗ этого уравнения, приходим к выводу, что ОДЗ исходного уравнения – одноэлементное множество $\{2\}$. Подставив $x = 2$ в данное уравнение, приходим к выводу, что $x = 2$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.[14]

1.4. Методика обучения решению иррациональных неравенств

Иррациональные неравенства – довольно сложный раздел школьного курса математики, а если учесть, что на его изучение отведено крайне мало времени, то становится ясно, что обучающиеся, как правило, это раздел не усваивают. Даже у тех, кто успешно решает иррациональные уравнения, часто возникают проблемы при решении иррациональных неравенств. Решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что здесь, как правило, исключена возможность проверки, поэтому надо стараться делать все преобразования равносильными.

Если в любом иррациональном уравнении заменить знак равенства на один из знаков неравенства: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, то получим иррациональное неравенство. Поэтому под иррациональным неравенством будем понимать неравенство, в котором неизвестные величины находятся под знаком корня. [28] [35]

Способ решения таких неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам путем возведения обеих частей неравенства в степень.

Простейшие иррациональные неравенства имеют вид: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt{f(x)} > g(x)$. При этом случаи нестрогих неравенств не вносят принципиальных различий. Решение первого неравенства сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Решение второго неравенства сводится к объединению решений следующих двух систем:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$ [18]

Чтобы избежать ошибок при решении иррациональных неравенств, следует рассматривать только те значения переменной, при которых все входящие в неравенство функции определены, то есть найти ОДЗ этого неравенства, а затем обоснованно осуществлять равносильный переход на всей ОДЗ или ее частях.

При решении иррациональных неравенств следует запомнить правило: при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству. [28]

Но если при решении уравнений в результате возведения четную степень мы могли получить посторонние корни (которые, как правило, легко проверить) и не могли потерять корни, то корни неравенства при бездумном возведении в четную степень могут одновременно и теряться, и приобретаться. [13]

Например, возведя в квадрат:

– верное неравенство $-1 < 2$, мы получим верное неравенство $1 < 4$;

– верное неравенство $-5 < 2$, мы получим неверное неравенство$25 < 4$;

– неверное неравенство $1 < -2$, мы получим верное неравенство $1 < 4$;

– неверное неравенство $5 < 2$, мы получим неверное неравенство $25 < 4$.

Вы видите, что возможны все комбинации верных и неверных неравенств.

Однако верно основное, используемое здесь утверждение: если обе части неравенства возводят в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны. [28]

Рассмотрим основные методы решения иррациональных неравенств.

●Функционально-графический метод.

Пример. Используя графическую интерпретацию, выписать решение неравенства $\sqrt{3+x} > \frac{2}{x}$.

Решение неравенства $\sqrt{3+x} > \frac{2}{x}$ геометрически можно интерпретировать как определение множества значений x, для которых ординаты графика функции $y = \sqrt{3+x}$ больше ординат графика функции $y = \frac{2}{x}$ (рис. 2).

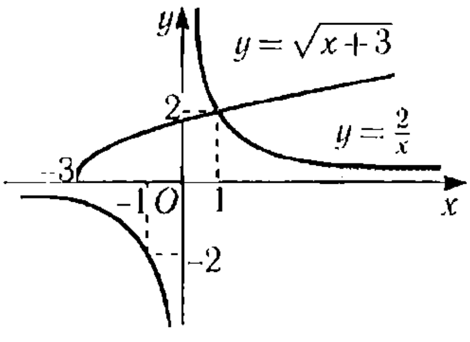

Рисунок 2

Точка пересечения графиков функций легко угадывается. Ее координаты (1; 2). Искомое множество $[-3; 0) \cup (1; +\infty)$. [31]

● Метод последовательных упрощений. Основным преобразованием, используемым при решении иррациональных неравенств, является возведение обеих частей неравенства в степень. Однако, применять это преобразование можно далеко не всегда.

Возведение в нечетную степень не вызывает проблем: это преобразование приводит к неравенству, которое равносильно исходному. С четной степенью все не так просто.

Возводить в четную степень можно только при определенных условиях. Руководством к действию служит следующее утверждение: если функции $f(x)$ и $g(x)$ на некотором множестве определены и неотрицательны, то на этом множестве неравенство $f(x) \geq g(x)$ равносильно неравенству $f^{2n}(x) \geq g^{2n}(x)$.

Однако на практике приходится решать неравенства, части которых принимают как положительные, так и отрицательные значения. Потому в общем случае решение неравенства $f(x) \geq g(x)$ в области его допустимых значений сводится к рассмотрению следующих случаев:

1) $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f^{2n}(x) \geq g^{2n}(x)$;
2) $f(x) \geq 0, g(x) < 0$. [31]

Пример. Решить неравенство: $\sqrt{1+x} \leq \sqrt[4]{11-x}$.

Область допустимых значений неравенства определяется условиями: $1+x \geq 0$, $11-x \geq 0$, или $-1 \leq x \leq 11$. На этом множестве обе части неравенства неотрицательны, следовательно, возведя обе части неравенства в четвертую степень, получим неравенство, равносильное исходному: $(1+x)^2 \leq 11-x$, или $x^2+3x-10 \leq 0, -5 \leq x \leq 2$. Осталось найти общую часть двух промежутков $-1 \leq x \leq 11$ и $-5 \leq x \leq 2$. Это отрезок $[-1; 2]$.

Ответ: $[-1; 2]$. [31]

●Метод интервалов. Широко используется при решении целых рациональных и дробно-рациональных неравенств и не предполагает использование равносильных преобразований. [18]

Сформулируем вначале этапы применения метода интервалов:

1. Привести исходное неравенство (если необходимо) к виду $f(x) > 0$ (знак неравенства может быть другим: "<", "$\leq$ " или "$\geq$"; существенное значение имеет то, что в левой части неравенства стоит некоторая непрерывная в своей области определения функция, а в правой – ноль).

2. Найти область определения функции $y = f(x)$.

3. Найти нули функции $y = f(x)$в области ее непрерывности (т.е. корни уравнения $f(x) = 0$) и точки разрыва (если они существуют).

4. Нанести с учетом области определения на числовую ось полученные точки. Полезно нули функции в случае нестрого неравенства отмечать заштрихованным кругом, в случае строго неравенства – окружностью, точки разрыва – окружностью; граничные точки области определения в случае возможности нахождения в них значения функции$y = f(x)$ – отмечать в соответствии с выполнением истинности неравенства в каждой такой точке.

5. На каждом из интервалов, полученных на числовой оси, определить знак функции $y = f(x)$и поставить его над этим интервалом.

6. Выбрать нужные по условию интервалы (и/или точки) и записать ответ. Как видим, выделенные этапы совпадают с этапами решения рациональных неравенств с той лишь разницей, что здесь необходимо учитывать область определения неравенства. А поскольку большинство обучающихся с решением рациональных неравенств методом интервалов справляются достаточно уверенно, то целесообразно при обучении их применению метода интервалов к решению иррациональных неравенств использование аналогии. [18]

Пример. $x\sqrt{10 - x^2} > x^2 - 6$.

Решение данного неравенства посредством равносильных преобразований довольно сложно, поэтому для его решения воспользуемся методом интервалов.

1. Перенесем слагаемые из правой части неравенства в левую, меняя при этом их знак на противоположный: $x\sqrt{10 - x^2} - x^2 + 6 > 0$.

2. Область определения функции, стоящей в левой части неравенства есть промежуток $(-\sqrt{10}) \le x \le \sqrt{10}$.

3. Решим соответствующее уравнение:

$x\sqrt{10 - x^2} - x^2 + 6 = 0,$

$x\sqrt{10 - x^2} = x^2 - 6,$

$x^2(10 - x^2) = (x^2 - 6)^2,$

$x^4 - 11x^2 + 18 = 0;$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2},\ \ x_{3,4} = \pm 3.$

Проверка показывает, что $x = \sqrt{2},\ x = -3$ – посторонние корни, а $x = -\sqrt{2},\ x = 3$ – корни уравнения. Точек разрыва нет, поэтому переходим к следующему этапу.

4. Нанесем на числовую ось полученные точки $x = -\sqrt{2},\ x = 3$, отметив область определения $(-\sqrt{10}) \le x \le \sqrt{10}$ (рис. 3). При этом точки $x = -\sqrt{2},\ x = 3$ отметим окружностью – они «не закрашены» (поскольку неравенство строгое, а в данных точках левая часть неравенства принимает значение равное нулю), точки $x = \pm\sqrt{10}$ отметим также окружностью (поскольку решаемое неравенство при подстановке данных значений обращается в неверное числовое неравенство).

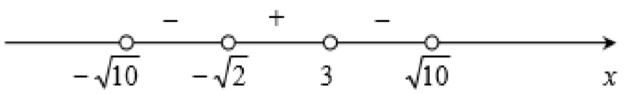

Рисунок 3

5. Определим знаки на каждом из трех интервалов (промежутки $-\infty < x < -\sqrt{10}$и $\sqrt{10} < x < +\infty$ естественно не рассматриваем, как не принадлежащие области определения):

а) на интервале $(-\sqrt{10}) < x < -\sqrt{2}$ возьмем точку $x = -3$, тогда $(-3) * \sqrt{10 - (-3)^2} - (-3)^2 + 6 = -3 * 1 - 9 + 6 = -6$, поскольку $-6 < 0$, то над данным интервалом знак «$-$».

б) на интервале $(-\sqrt{2}) < x < 3$ возьмем точку $x = 0$, тогда $0 * \sqrt{10 - 0^2} - 0^2 + 6 = 6 > 0$, поэтому над данным интервалом ставим знак «+».

г) на интервале $3 < x < \sqrt{10}$ возьмем точку $x = 3{,}1$, тогда $3{,}1 * \sqrt{10 - (3{,}1)^2} - (3{,}1)^2 + 6 = 3{,}1 * \left(\sqrt{10 - (3{,}1)^2} - 3{,}1\right) + 6 = 3{,}1 * (0{,}6245 - 3{,}1) + 6 < 0$, поэтому над данным интервалом знак «$-$».

6. В ответ выбираем те промежутки значений x, где стоит знак «+», при этом учитываем вхождение в ответ точек, являющихся граничными. Получаем, что $x\sqrt{10 - x^2} - x^2 + 6 > 0$ при $(-\sqrt{2}) < x < 3$. Таким образом, ответ исходного неравенства есть промежуток $(-\sqrt{2}) < x < 3$. [18]

● Метод замены переменной.

Одним из общих методов решения иррациональных неравенств является замена переменной. Замена, по возможности, подбирается таким образом, чтобы неравенство, записанное относительно новой переменной, было рациональным. [31]

Пример: Решить неравенство $\frac{1}{2-\sqrt{x}} \geq 3$.

Пусть $t = \sqrt{x},\ t \geq 0$, получим неравенство $\frac{1}{2-t} \geq 3$. Преобразуем его к виду $\frac{3t-5}{2-t} \geq 0$, откуда $\frac{5}{3} \leq t < 2$.

Возвращаясь к переменной x, получаем неравенство $\frac{5}{3} \leq \sqrt{x} < 2$. Все части двойного неравенства неотрицательны, значит, возведение его в квадрат приводит к равносидльному неравенству $2\frac{7}{9} \leq \sqrt{x} < 4$.

Ответ: $\left[2\frac{7}{9};\ 4\right)$. [31]

● Умножение обеих частей неравенства на функцию.

Выражения $\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}$ и $\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}$ называются сопряженными друг другу. Заметим, что их произведение $\alpha^2 a - \beta^2 b$ уже не содержит корней из a и b. Поэтому, в ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}<2x-1$.

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}5x+1\geq 0,\\ x+3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad x\geq -\frac{1}{5}.$$

Умножим обе части данного неравенства на выражение, сопряженное его левой части и, очевидно, положительное в ОДЗ:

$$(5x+1)-(x+3)<(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 2(2x-1)<(2x-1)(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3})$.

Дальнейшее решение зависит, очевидно, от знака общего множителя левой и правой частей полученного неравенства $(2x-1)$.

Если он меньше нуля, то есть $-\frac{1}{5}\leq x<\frac{1}{2}$, сократив на этот отрицательный множитель, переходим к неравенству:

$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}<2$,

из которого находим прямым возведением в квадрат (ведь обе части этого неравенства положительны)$-\frac{1}{5}\leq x<\frac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Во втором случае, если общий множитель положителен (то есть при $x>\frac{1}{2}$), после сокращения на него получаем неравенство

$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}>2$,

из которого прямым возведением в квадрат (ведь обе части этого неравенства положительны) получаем, что оно справедливо при $x>\frac{1}{2}$.

Осталось указать, что в третьем возможном случае – если общий множитель равен нулю, – неравенство не выполняется: мы получаем тогда$0>0$, что неверно.

Ответ:$x\in\left[-\frac{1}{5};\ \frac{4-\sqrt{19}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

● Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций.

1. Использование монотонности функции

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $y = f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x) < c$ (или $f(x) > c$). Если x_0 – корень уравнения $y = f(x)$, причем $a < x_0 < b$, то решения данного неравенства – весь промежуток $(a; x_0)$ (соответственно промежуток $(x_0; b)$). Единственность корня следует из монотонности f. Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число $f(x_0)$, а если функция задана на замкнутом или полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка. [32]

Пример. Решить неравенство $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} < 6$.

Заметим, что левая часть данного неравенства – возрастающая функция (обозначим ее через$f(x)$). При $x = 5$ левая часть равна правой. Учтем ОДЗ исходного неравенства $(x \geq 1)$ и рассмотрим его на промежутке $1 \leq x < 5$. Имеем $f(x) < f(5) = 6$, то есть данное неравенство выполняется. При $x \geq 5$ по той же причине (из-за возрастания функции f) $f(5) \leq f(x)$, то есть данное неравенство не выполняется. Так как исследование проведено при всех допустимых значениях x, решение закончено.

Ответ: $x \in [1; 5)$.

2. Использование ОДЗ.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$.

ОДЗ этого неравенства есть все x из промежутка $-3 \leq x \leq 9$. Разобьем это множество на два промежутка $-3 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq 9$.

Дляxиз промежутка $-3 \leq x \leq 0$ имеем $\sqrt{x+3} \geq 0$, $\sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt{3}$ на этом промежутке, и поэтому исходное неравенство не имеет решений на этом промежутке.

Пусть x принадлежит промежутку $0 \leq x \leq 9$, тогда $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{9-x} \geq 0$. Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$ для таких

x, и, значит, на этом промежутке исходное неравенство также не имеет решений.

Ответ: Корней нет.[32]

2. ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НА ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСАХ

2.1 Программа элективного курса "Решение уравнений и неравенств"

В середине прошлого века в старших классах отечественной школы много внимания и учебного времени уделялось математике. Школьный учебный план содержал три предмета, относящихся к образовательной области «Математика»: алгебра, тригонометрия и геометрия. Изменения учебного плана, произошедшие в ходе реформы 1960-х, привели к тому, что тригонометрия была интегрирована с алгеброй и частично геометрией. Эта ситуация сохранилась до наших дней. Однако сейчас наметилась тенденция наличия в учебном плане школы одного предмета – математика. Можно предположить, что в профильной школе, в классах естественно-научного и математического профиля, сохранится раздельное обучение алгебре и геометрии. А в классах других профилей в учебном плане, вероятнее всего, будет присутствовать интегративный курс математики. Так, снижение количества часов на математику, без изменения целей образования на старшей ступени школы, приводит к необходимости проведения элективных курсов и факультативных занятий. [16]

В качестве основы разработки проектов учебных занятий на тему «Решение иррациональных уравнений и неравенств» возьмем рабочую программу элективного курса по математике «Функции, уравнения, неравенства», составленную Т.В. Андреевой. [5]

Данный элективный курс ориентирован на более глубокое изучение и применение различных свойств функции при решении уравнений и неравенств, расширение знаний учащихся, повышение уровня математической подготовки через решение задач различными способами и методами.

К 10 классу у обучающихся накапливается существенный арсенал различных математических функций. Возникает потребность обобщить, дополнить и систематизировать функциональную связь при решении уравнений и неравенств.

Предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, успешной подготовки сдачи ЕГЭ.

Целью данного элективного курса является формирование и развитие у обучающихся:

— учебно-познавательных, интеллектуальных и практических умений в области решения уравнений, неравенств с учетом свойств функции;

— интереса к изучению математики;

— умения самостоятельно приобретать и применять знания в различных ситуациях;

— творческих способностей;

— коммуникативных навыков (компетенций), которые способствуют развитию умений работать в группе, отстаивать свою точку зрения.

Курс способствует решению следующих задач:

— овладению системой знаний о свойствах функций, решения различных уравнений и неравенств;

— формированию логического мышления учащихся;

— вооружению учащихся специальными умениями, позволяющими им самостоятельно добывать знания по данному разделу.

— эстетическому воспитанию обучающихся и повышению их математической культуры.

— прививать учащимся вкус и навыки к выполнению работы исследовательского характера. [5]

Результатом изучения курса должно стать умение решать различные математические задачи; расширение имеющихся знаний по математике;

развитие самостоятельного, активного, творческого мышления у обучающихся; качественно сдать ЕГЭ по математике.

Содержание курса предполагает работу с разными источниками информации и предусматривает самостоятельную (индивидуальную) или коллективную работу обучающихся. Организация работы должна строиться таким образом, чтобы обучающиеся стремились рассуждать и выдвигать гипотезы.

При проведении занятий необходимо применять различные формы: объяснительно-иллюстрированный, проблемный, частично-поисковый и методы ведения урока: лекции, семинары, практикумы, дискуссия урок решения одной задачи, уроки вопросов и ответов и т.д., учитывая индивидуальные особенности каждого ученика. [5]

Срок реализации рабочей программы – один учебный год.

На изучение элективного курса отводится 34 часа: по 1 часу в неделю.

Формы и методы контроля:

- Для текущего контроля на занятиях учащимся рекомендуется серия заданий, часть которых выполняется в классе, а часть — дома самостоятельно.
- Для самостоятельных и контрольных работ используются материалы ЕГЭ.
- Итоговые контрольные домашние работы будут оцениваться в основном в форме: зачтено/, не зачтено/, не исключено выставление отметок по желанию учащихся в журнал. Уровень достижений обучающихся будет контролироваться таким способом, как наблюдением активности на занятиях, анализ самостоятельных и контрольных работ, беседы с обучающимися.

В процессе обучения обучающиеся приобретают следующие умения:

— решать уравнения, неравенства и их системы с помощью свойств функции;

— исследовать уравнения, неравенства;

— решать задачи повышенной сложности;

— овладеть общими способами и методами решения уравнений и неравенств и применять их при решении;

— анализировать полученный результат;

— применять нестандартные методы при решении уравнений, неравенств, задач.

В результате изучения курса учащиеся должны уметь:

— точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;

— применять изученные алгоритмы для решения заданий;

— применять свойства функций к решению уравнений и неравенств.

— уверенно решать уравнения и неравенства разных видов и степени сложности;

Структура курса представляет собой 2 логически законченных и содержательно взаимосвязанных раздела, изучение которых обеспечит системность и практическую направленность знаний и умений учеников. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся различной степени подготовки. Содержание курса можно варьировать с учетом склонностей, интересов и уровня подготовленности учащихся.[33]

Содержание программы курса.

1. Раздел: Модуль действительного числа.

Цель: помочь повысить уровень понимания и практической подготовки в таких вопросах, как:

- преобразование выражений, содержащих модуль;
- решение уравнений и неравенств, содержащих модуль;
- построение графиков функций со знаком модуля.

— Понятие модуля числа;

— Геометрический смысл модуля;

— Свойства модуля;

— Оценка выражений под знаком модуля;

— Функции, содержащие переменную под знаком модуля и их графики (линейная, квадратичная, арифметический корень, дробно рациональная);

— Понятие сложной функции;

— Способы и методы решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

2. Раздел: Функции, уравнения, неравенства.

Цель: представить единым целым все вопросы, связанные с применением свойств математических функций при решении различных уравнений, неравенств и других математических задач.

— Свойства функций;

— ОДЗ и тождественные преобразования;

— Понятие равносильности уравнений и неравенств;

— Свойства степени с рациональным и действительным показателем;

— Степенная функция, ее свойства и график;

— Иррациональные уравнения и способы их решения;

— Иррациональные неравенства и способы их решения;

— Показательная функция, ее свойства и график;

— Показательные уравнения и способы их решения;

— Показательные неравенства и способы их решения;

— Логарифмическая функция, ее свойства и график;

— Логарифмические уравнения и способы их решения;

— Логарифмические неравенства и способы их решения;

— Системы уравнений и неравенств;

— Понятие сложной экспоненты.

— Логарифмы с переменным основанием;

— Неравенства, содержащие сложную экспоненту или логарифм с переменным основанием.

— Уравнения, содержащие модуль;

— Неравенства, содержащие модуль;

— Важнейшие равносильные преобразования.

В данной программе иррациональные уравнения и неравенства и способы их решения изучаются в разделе «Функции, уравнения, неравенства». Прежде чем перейти к данной теме, обучающиеся осваивают свойства степени с рациональным и действительным показателем, свойства степенной функции. А значит, изучение иррациональных уравнений и неравенств можно начать непосредственно с методов их решения.

Содержательные линии уравнений и неравенств развертываются на протяжении всего школьного курса математики. Учитывая важность и обширность материала данной линии целесообразно на заключительных этапах обучения предлагать достаточно разнообразные и сложные задания, рассчитанные на активизацию наиболее существенных компонентов этой линии, основных понятий и основных приемов решения, исследования и обоснования заданий. [22]

2.2 Реализация проектов учебных занятий

В настоящее время среди различных программ элективных курсов на изучение способов решения иррациональных уравнений и неравенств, часто предлагаемых прямым или косвенным образом в различных заданиях выпускных экзаменов средней школы и в заданиях на ЕГЭ, отводится в среднем от двух до четырех часов.

Цель учебных занятий: выработать умения и навыки, научиться применять основные методы рассуждений и технические приемы, наиболее часто встречающиеся при решении иррациональных уравнений и неравенств; формирование устойчивого интереса учащихся к процессу и содержанию деятельности, а также познавательной и социальной активности.

Каждое занятие состоит из двух частей: задачи, решаемые с учителем, и задачи для самостоятельного (или домашнего) решения. Основные формы организации учебных занятий: лекция, объяснение, практическая работа.

Все занятия направлены на развитие интереса школьников к предмету, на расширение представлений об изучаемом материале, на решение новых и интересных задач.

В результате проведения занятий учащиеся

должны уметь:

–уверенно решать простейшие иррациональные уравнения;

–применять изученные приемы и способы решения иррациональных уравнений на практике при самостоятельном решении;

–уверенно владеть системой определений и алгоритмов;

–решать традиционные и нетрадиционные задания, а также задания из ЕГЭ.

должны знать:

- понятие иррационального уравнения;

- методы решения иррациональных уравнений.

Занятие на тему: Иррациональные уравнения и способы их решения. Иррациональные уравнения и стандартные методы решения иррациональных уравнений.

Цели:

- *Образовательная* – способствовать осознанию основных способов решения иррациональных уравнений.
- *Развивающая* – способствовать формированию умений классифицировать иррациональные уравнения по методам решений, научить применять эти методы.
- *Воспитательная* – стимулировать интерес учащихся к самообучению и саморазвитию в процессе активной работы на занятиях элективного курса.

Тип урока:

- Урок изучения и первичного закрепления новых знаний.

Метод обучения:

- *Репродуктивный*
- *Частично – поисковый*

Формы организации учебной деятельности:

- *Индивидуальная*
- *Фронтальная*
- *Групповая*
- *Взаимопроверка*

План занятия

1. Организационный момент. Постановка цели, мотивация.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Изучение темы. Лекция.
4. Закрепление нового материала.
5. Подведение итогов.

Ход занятия.

1. *Учитель:* Добрый день. На сегодняшнем занятии мы рассмотрим иррациональные уравнения и различные методы их решения. Тема эта актуальна, так как иррациональные уравнения часто встречаются на ЕГЭ в задании B5.Перед вами стоит задача – прослушав лекцию, решив уравнения, показать знания и умения по решению иррациональных уравнений.

2. *Учитель:* Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня. Прежде чем приступить к изучению методов их решения, давайте кратко вспомним свойства корня n-й степени, которые вы изучили на предыдущих занятиях:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a;$
2. $\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b};$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$

4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

6. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$. [24]

3. *Учитель:* Прежде чем приступить к решению сложных уравнений учащиеся должны научиться решать простейшие иррациональные уравнения. К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида: $\sqrt{f(x)} = g(x)$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

Итак, первый метод: возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень. Запишите, пожалуйста, название метода и алгоритм в свои тетради. Метод состоит в следующем:

а) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду

$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$;

б) возводят обе части полученного уравнения в n-ю степень:

$(\sqrt[n]{f(x)})^n = (\sqrt[n]{g(x)})^n$;

в) учитывая, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$, получают уравнение

$f(x) = g(x)$;

г) решают уравнение и в случае четного n, делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней. Эта проверка чаще всего осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение. [25]

Второй метод: метод уединения радикала. При решении иррациональных уравнений полезно перед возведением обеих частей уравнения в некоторую степень представить уравнение в виде $\boldsymbol{C(x)} =$

$\sqrt[n]{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})}$. Тогда после возведения обеих частей уравнения в n-ую степень радикал справа исчезнет. [7]

Следующий метод: Метод введения новой переменной. Обычно применяется в случае, если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Применяется замена вида $\sqrt{f(x)} = t$. Используя такую замену, имеет смысл дополнять уравнение, полученное для новой переменной, естественным ограничением $\mathrm{t} \geq 0$, поскольку во многих случаях это несколько упрощает решение. [31]

И последний, из изучаемых на сегодняшнем занятии: Метод последовательных упрощений. При решении иррациональных уравнений и неравенств часто приходится применять тождественные преобразования, связанные с использованием известных формул, свойств степени и корня. Любое уравнение вида$\sqrt{f(x)} = g(x)$равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что в этой системе отсутствует неравенство $f(x) \geq 0$, определяющее область допустимых значений уравнения. Нет необходимости указывать это условие в смешанной системе, поскольку если некоторое значение x удовлетворяет уравнению $f(x) = g^2(x)$, то оно удовлетворяет и неравенству $f(x) \geq 0$. [31]

Рассмотрим применение данных методов на примерах:

(Учитель записывает на доске с подробным объяснением, обучающиеся дублируют запись в своих тетрадях)

1. Возведение в степень.

$$\sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат (неравносильное преобразование):

$3x - 2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1;$

$6\sqrt{x-1} = 10 - 2x;$

$3\sqrt{x-1} = 5 - x;$

$9(x-1) = 25 - 10x + x^2;$

$x^2 - 19x + 34 = 0;$

$x_1 = 2;\ \ x_2 = 17.$

Так как при решении были использованы неравносильные преобразования, необходимо выполнить проверку:

1) $x = 2.$

$\sqrt{3*2-2} = 3 - \sqrt{2-1}; \sqrt{4} = 3 - 1; 2 = 2$ – верно.

2) $x = 17.$

$\sqrt{3*17-2} = 3 - \sqrt{17-1}; \sqrt{49} = 3 - 4; 7 = -1$ – не верно.

Ответ: $x = 2.$ [34]

2. Уединение радикала.

$$\sqrt{x^2+5x+2} - \sqrt{x^2-3x+3} = 3$$

Решение. Уединив первый радикал, получаем уравнение

$\sqrt{x^2+5x+2} = \sqrt{x^2-3x+3} + 3,$

равносильное исходному.

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получаем уравнение

$x^2 + 5x + 2 = 9 + x^2 - 3x + 3 + 6\sqrt{x^2-3x+3};$

$4x - 5 = 3\sqrt{x^2-3x+3};$

Последнее уравнение является следствием исходного уравнения. Возводя обе части этого уравнения в квадрат, приходим к уравнению:

$16x^2 - 40x + 25 = 9(x^2 - 3x + 3),$

$7^2 - 13x - 2 = 0.$

Это уравнение является следствием уравнения исходного уравнения и имеет корни$x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{7}$. Первый корень удовлетворяет исходному уравнению, а второй – не удовлетворяет.

Ответ.$x = 2.$

3. Введение новой переменной.

Пример: $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0$.

Решение. Перепишем уравнение так: $x^2+3x-10+3\sqrt{x^2+3x}=0$.

Видно, что если ввести новую переменную $t=\sqrt{x^2+3x}$, то уравнение примет вид $t^2+3t-10=0$, откуда $t_1=-5$, $t_2=2$.

Теперь задача сводится к решению уравнения $\sqrt{x^2+3x}=-5$ и уравнения $\sqrt{x^2+3x}=2$. Первое из этих решений не имеет, а из второго получаем $x_1=-4,\ x_2=1$. Оба корня, как показывает проверка, удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ.$x_1=-4,\ x_2=1$.

Рассмотрим более сложный на вид пример: Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-1}}-2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+1}}=1.$$

Введем новую переменную

$$t=\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-1}},\qquad t>0.$$

В результате исходное иррациональное уравнение принимает вид квадратного:

$t-\frac{2}{t}=1;t^2-t-2=0,$

откуда учитывая ограничение$t>0$, получаем $t=2$. Решая уравнение $\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-1}}=2$, получаем корень $x=\frac{5}{2}$. Как показывает проверка, $x=\frac{5}{2}$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ. $x=\frac{5}{2}$.

4. Метод последовательных упрощений.

Пример 1: $\sqrt{x+8}-x+2=0$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x+8}=x-2$, после чего, возведем обе его части в квадрат. После упрощений получим уравнение $x^2-5x-4=0$, которое имеет два решения

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$.

При проверке придется иметь дело с корнем из иррационального выражения, а это совсем не просто. Сложностей можно избежать, если действовать методом равносильных преобразований.

Область допустимых значений уравнения $\sqrt{x+8} = x - 2$ определяется условием $x \geq -8$. Так как левая часть уравнения неотрицательна при любом допустимом значении аргумента, то всякое решение уравнения должно удовлетворять условию $x - 2 \geq 0$. Этот вывод позволяет ограничить поиск решения промежутком $x \geq 2$. На этом промежутке левая и правая части уравнения определены и неотрицательны и, следовательно, возведя их в квадрат, получим уравнение равносильное исходному: $x^2 - 5x - 4 = 0$. Оно имеет два корня

$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}}$,

из которых только один, а именно

$\boldsymbol{x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}}$,

Удовлетворяет условию $x \geq 2$ (этот факт можно утановить грубой прикидкой).

Ответ:$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

Пример 2:$\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$.

Преобразуем уравнения, заботясь только о том, чтобы каждое следующее уравнение было следствием предыдущего:

$\sqrt{2x-6} = 5 - \sqrt{x+4};$

$2x - 6 = \left(5 - \sqrt{x+4}\right)^2; 10\sqrt{x+4} = 35 - x; 100(x+4) = (35 - x)^2;$

$x^2 - 170x + 825 = 0.$

Последнее уравнение имеет два решения: $x_1 = 165$ и $x_2 = 5$. В процессе решения обе части уравнения дважды возводились в квадрат, без ограничений дополнительными условиями. Следовательно, есть вероятность появления посторонних корней. Поэтому сделаем проверку подстановкой:

1) Пусть $x = 165$. Тогда имеем: $\sqrt{2 * 165 - 6} + \sqrt{165 + 4} = 5$, что, очевидно, неверно. Следовательно, $x = 165$ – посторонний корень.

2) Пусть $x = 5$. Тогда имеем: $\sqrt{2 * 5 - 6} + \sqrt{5 + 4} = 5$, что верно. Следовательно, $x = 5$ – корень исходного уравнения.

Ответ: 5. [31]

4. *Учитель:* теперь закрепим на практике полученные знания.

(Обучающиеся, с помощью учителя решают подобные задания на доске)

Учитель: Решить уравнения методом возведения в степень:

1) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$;

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2x^2 - 6x - 1}$. [12]

Ученик:

1) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$;

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$4 - 6x - x^2 = (x + 4)^2$;

Преобразуем полученное уравнение:

$2x^2 + 14x + 12 = 0; x^2 + 7 + 6 = 0;$

Получили квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -1,\ x_2 = -6$.

Проверка: Подставим первый полученный корень в исходное уравнение – получим верное тождество $3 = 3$. Значит, $x = -1$ является корнем уравнения. Подставим второй полученный корень в исходное уравнение – получим неверное тождество $2 = -2$. Значит, $x = -6$ корнем уравнения не является.

Ответ: $x = -1$.

2) $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2x^2 - 6x - 1}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 6x - 1$;

Преобразуем полученное уравнение:

$x^2 - 4x + 3 = 0;$

Получили квадратное уравнение, корни которого $x_1 = 1,\ x_2 = 3.$

Проверка: подставив полученные корни в исходное уравнение, получим отрицательные значения подкоренных выражений, а значит – решений нет.

Ответ: решений нет.

Учитель: Решить уравнения, используя метод уединения радикала:

1) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3;$

2) $\sqrt{5x+6} + x = 0$

Ученик:

1) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

Уединим радикал $\sqrt{3x-2}$:

$\sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1};$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Так как левая и правая часть уравнения не принимают положительные значения для любого значения переменной, то это преобразование будет неравносильным.

$3x - 2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1;$

Преобразуем полученное уравнение:

$6\sqrt{x-1} = 10 - 2x; 3\sqrt{x-1} = 5 - x;$

Еще раз возведем в квадрат:

$9(x-1) = 25 - 10x + x^2; x^2 - 19x + 34 = 0.$

Получили квадратное уравнение, корни которого $x_1 = 2,\ x_2 = 17$

Так как при решении были использованы неравносильные преобразования, необходима проверка:

При $x = 2$, получим $\sqrt{3*2-2} + \sqrt{2-1} = 3;$

$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3; 3 = 3.$

Значит,$x = 2$является корнем исходного уравнения.

При $x = 17$, получим $\sqrt{3*17-2} + \sqrt{17-1} = 3;$

$\sqrt{51-2}+\sqrt{16}=3;$

$11=3$– получили неверное тождество. Значит$x=17$ – не является корнем уравнения.

Ответ: 2.

2) $\sqrt{5x+6}+x=0$

Уединим радикал $\sqrt{5x+6}$:

$\sqrt{5x+6}=-x;$

Так как любое уравнение вида $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}=\boldsymbol{g(x)}$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

получим: $\begin{cases} -x\geq 0, \\ x^2=5x+6 \end{cases};\begin{cases} x\leq 0, \\ x^2-5x-6=0 \end{cases};\begin{cases} x\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}.$

Условию $x\leq 0$ удовлетворяет один корень – $x=-1$.

Ответ: –1.

Учитель: Следующие уравнения решим методом замены переменной:

1) $\sqrt{x^2-2x+1}-6\sqrt{x-1}=7;$

2) $\sqrt{x^2-4x+4}-6=5\sqrt{2-x}$. [20]

Ученик:

1) $\sqrt{x^2-2x+1}-6\sqrt{x-1}=7$

ОДЗ: $x-1\geq 0,\ x\geq 1;$

Пусть $\sqrt{x-1}=a,\ a\geq 0$. Тогда уравнение примет вид:

$a^2-6a-7=0;$

$a_1=7,\ a_2=-1.$

Подставим полученные значения: $\sqrt{x-1}=7$ и $\sqrt{x-1}=-1$.

При $a=7$ корень уравнения равен $x=50$. При $a=-1$ уравнение не будет иметь корней.

Ответ: $x=50$.

2) $\sqrt{x^2-4x+4}-6=5\sqrt{2-x}$

ОДЗ: $2-x\geq 0,\ x\leq 2;$

Пусть $\sqrt{2-x}=a,\ a\geq 0$. Тогда уравнение примет вид:

$a^2-5a-6=0;$

$a_1=6,\ a_2=-1.$

Подставим полученные значения: $\sqrt{2-x}=6$ и $\sqrt{2-x}=-1.$

При $a=6$ корень уравнения равен $x=-34$. При $a=-1$ уравнение не будет иметь корней.

Ответ: $x=-34.$

Учитель: решить уравнения методом последовательных преобразований:

1) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$[20]

Ученик:

1) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3};$

ОДЗ: $x\geq 1;$

$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{3};$

И правая и левая часть уравнения положительна при любом значении переменной. А значит, возведение в квадрат будет являться тождественным преобразованием:

$2x+1=x-1+3+2\sqrt{3x-3};$

$x-1=2\sqrt{3x-3};$

Перенесем правую часть уравнения и преобразуем его:

$\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{3}\right)=0;$

Получим $x_1=1$и$x_2=13$. Так как все преобразования являлись тождественными, оба корня будут верными для исходного уравнения.

Ответ: 1, 13.

5. *Учитель:* Молодцы. В завершении занятия проведем небольшое тестирование. Предлагаемые задания решите в своих тетрадях, затем сверим их с правильными ответами:

А) Решить уравнение $x - 2\sqrt{x+2} + 3 = 0$.

1)	-1;	3)	-7;
2)	3;	4)	0.

Б) Решить уравнение $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+4} = 0$.

1)	-0,5;	3)	-4;
2)	1;	4)	5.

В) Решить уравнение $\sqrt{12-x} = x$.

1)	-4;	3)	3;
2)	4;	4)	-3.

Г) Решить уравнение $x - \sqrt{x-1} = 3$.

1)	5;	3)	0;
2)	1;	4)	3.

Учитель: правильные ответы - А)- 1); Б-4); В)-3); Г)-1). Вы можете самостоятельно оценить свой уровень понимания данного материала и задать вопросы. [20] [37]

Учитель: подведем итог. Что значит решить иррациональное уравнение?

Ученик: Это значит найти все такие значения переменной, при которых уравнение превращается в верное равенство, либо доказать, что таких значений не существует.

Учитель: совершенно верно. Ваше домашнее задание – выбрать подходящий метод и решить задания № 2.4, 2.7, 2.8, 2.9, 2.13 из книги Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень.

Литература для учителя:

1) Лаппо Л.Д. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка к ЕГ. Универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами/ Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. – М.: «Экзамен», 2017. – 351 с

2) Каспржак А.Г. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «Математика»/Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 96 с

3) Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. - 4-е издание - СПб.: "Петроглиф": "Виктория плюс": М.: Издательство МЦНМО 2011. - 216 с. ил.

4) Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2017. – 215 с.

Литература для обучающихся:

1) Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2017. – 215 с.

Занятие на тему: Иррациональные неравенства и способы их решения. Решение иррациональных неравенств.

Цели:

- *Образовательная* – систематизировать, обобщить, расширить знания способов решения иррациональных неравенств среднего и повышенного уровня сложности.
- *Развивающая* – развивать логическое мышление, память, познавательный интерес, продолжать формирование математической речи, вырабатывать умение анализировать и сравнивать;
- *Воспитательная* – способствовать развитию математического кругозора, мышления, речи, внимания, памяти; содействовать воспитанию интереса к математике, активности в труде, самостоятельности.

Тип урока:

- комбинированный.

Метод обучения:

- Объяснительно-иллюстративный
- *Репродуктивный*
- *Частично – поисковый*

Формы организации учебной деятельности:

- *Индивидуальная*
- *Фронтальная*
- *Групповая*
- *Взаимопроверка*

План занятия

1. Организационный момент. Постановка цели, мотивация.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Изучение темы. Лекция.
4. Закрепление нового материала.
5. Подведение итогов.

Ход занятия:

1. Организационный момент:

Учитель: Добрый день.

2. Актуализация прежних знаний.

Учитель: Мы закончили изучение темы «методы решения иррациональных уравнений» и на сегодняшнем занятии перейдем к решению неравенств. Неравенства сами по себе представляют интерес для изучения, т.к. именно с их помощью на символическом языке записываются важнейшие задачи познания реальной действительности. Часто неравенство служит важным вспомогательным средством, позволяющим доказать или опровергнуть существование каких-либо объектов, оценить их количество провести классификацию. Поэтому, с неравенствами приходится сталкиваться не менее часто, чем с уравнениями. Также иррациональные неравенства часто встречаются в заданиях B15 на ЕГЭ.

Сначала давайте вспомним, какие виды неравенств вы умеете решать и какими методами?

Ученики: Линейные, квадратные, рациональные, тригонометрические. Линейные решаем, исходя из свойств неравенств, тригонометрические сводим к простейшим тригонометрическим, решаемым с помощью тригонометрического круга, а остальные, в основном, методом интервалов.

Учитель: На каком утверждении основан метод интервалов?

Ученики: На теореме, утверждающей, что непрерывная функция, необращающаяся в ноль на некотором интервале, сохраняет свой знак на этом интервале.

3. Изучение темы.(На данном этапе занятия учитель устно объясняет материал, выполняя записи на доске. Обучающиеся конспектируют в своих тетрадях.)

Учитель**:** Рассмотрим на примере решение иррационального неравенства методом интервалов:

$$\sqrt{4-x} > \sqrt{x+5}$$

Приведем данное неравенство к равносильной системе:

$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -5 \end{cases}$, таким образом $x \in [-5; 4]$.

Найдем нули функции: $\sqrt{4-x} - \sqrt{x+5} = 0; \quad 4-x = x+5; x = -\frac{1}{2}$.

Нанесем полученные точки на координатную прямую (рис. 4):

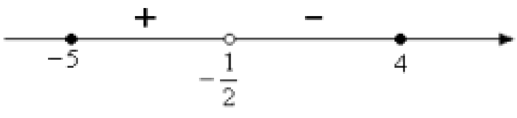

Рисунок 4

Определим знаки функции на каждом интервале, подставив промежуточные значения в функцию.

Ответ: $x \in \left[-5; -\frac{1}{2}\right)$.

Учитель: мы довольно легко решили данное иррациональное неравенство

методом интервалов, фактически сведя его к решению иррационального

уравнения. Но далеко не все неравенства можно решить методом интервалов, так как могут возникнуть трудности с вычислением контрольных точек.

Простейшие иррациональные неравенства имеют вид:$\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} < g(x)$и $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} > g(x)$. При этом случаи нестрогих неравенств не вносят принципиальных различий. Решение первого неравенства сводится к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Решение второго неравенства сводится к объединению решений следующих двух систем:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Основным преобразованием, используемым при решении иррациональных неравенств, является возведение обеих частей неравенства в степень. Однако, применять это преобразование можно далеко не всегда.

Возведение в нечетную степень не вызывает проблем: это преобразование приводит к неравенству, которое равносильно исходному. С четной степенью все не так просто.

Возводить в четную степень можно только при определенных условиях. Руководством к действию служит следующее утверждение: если функции $f(x)$ и $g(x)$ на некотором множестве определены и неотрицательны, то на этом множестве неравенство $f(x) \geq g(x)$ равносильно неравенству $f^{2n}(x) \geq g^{2n}(x)$.

Однако на практике приходится решать неравенства, части которых принимают как положительные так и отрицательные значения. Потому в общем случае решение неравенства $f(x) \geq g(x)$ в области его допустимых значений сводится к рассмотрению следующих случаев:

1) $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, f^{2n}(x) \geq g^{2n}(x)$;
2) $f(x) \geq 0, g(x) < 0$.[31]

Приведем пример. Решить неравенство: $\sqrt{1+x} \leq \sqrt[4]{11-x}$.

Область допустимых значений неравенства определяется условиями: $1+x \geq 0,\ 11-x \geq 0$, или $-1 \leq x \leq 11$. На этом множестве обе части неравенства неотрицательны, следовательно, возведя обе части неравенства в четвертую степень, получим неравенство, равносильное исходному: $(1+x)^2 \leq 11-x$, или $x^2+3x-10 \leq 0, -5 \leq x \leq 2$. Осталось найти общую часть двух промежутков $-1 \leq x \leq 11$ и $-5 \leq x \leq 2$. Это отрезок $[-1; 2]$.

Ответ: $[-1; 2]$. [31]

Одним из общих методов решения иррациональных неравенств является замена переменной. Замена, по возможности, подбирается таким образом, чтобы неравенство, записанное относительно новой переменной, было рациональным. [31]

Приведем пример: решить неравенство $\frac{1}{2-\sqrt{x}} \geq 3$.

Пусть $t = \sqrt{x},\ t \geq 0$, получим неравенство $\frac{1}{2-t} \geq 3$. Преобразуем его к виду $\frac{3t-5}{2-t} \geq 0$, откуда $\frac{5}{3} \leq t < 2$.

Возвращаясь к переменной x, получаем неравенство $\frac{5}{3} \leq \sqrt{x} < 2$. Все части двойного неравенства неотрицательны, значит, возведение его в квадрат приводит к равносильному неравенству $2\frac{7}{9} \leq \sqrt{x} < 4$.

Ответ: $\left[2\frac{7}{9};\ 4\right)$. [31]

Учитель: Итак, мы рассмотрели основные методы решения иррациональных неравенств, а именно – метод интервалов, равносильные переходы к системе неравенств, возведение обеих частей неравенства в степень и замена переменной.

4. *Учитель:* теперь закрепим на практике полученные знания.

(Обучающиеся, с помощью учителя решают подобные задания на доске, комментируют свои решения, а остальные вносят при необходимости коррективы и выполняют записи в тетрадях.)

Учитель: решить неравенства методом интервалов:

1)$\sqrt{5x+6} < -x$;

2) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$.

Ученик:

1) $\sqrt{5x+6} < -x$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 5 + 6 \geq 0 \\ 5x + 6 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -1{,}2 \\ x^2 - 5x - 6 > 0 \end{cases}.$$

Решим уравнение $x^2 - 5x - 6 = 0$ и представим решение неравенств графически (рис. 5):

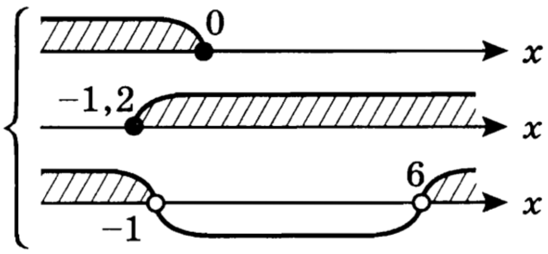

Рисунок 5

Ответ: $[-1{,}2;\ -1)$.

2) $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8 - x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ (x+2)(x-5) \geq 0 \\ (x+2)(x-5) < (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ (x+2)(x-5) \geq 0. \\ 13x < 74 \end{cases}$$

Представим решение неравенств графически (рис. 6):

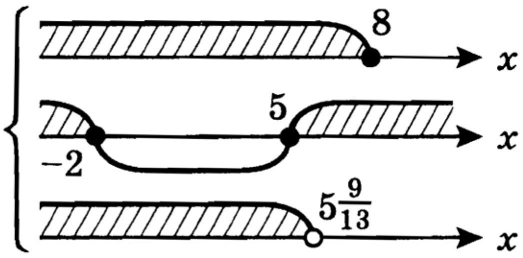

Рисунок 6

Ответ: $(-\infty;\ -2] \cup \left[5; 5\frac{9}{13}\right)$.[34]

Учитель: Умница! Следующие неравенства решить методом равносильных переходов к системе неравенств:

1) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$;

2) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$.

Ученик:

1) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 3-x+2\sqrt{(3-x)(x+1)}+x+1 > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ 2\sqrt{(3-x)(x+1)} > -3\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Последнее неравенство верно для любого $-1 \leq x \leq 3$.

Ответ: $[-1; 3]$.

2) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ x+6 > x+7+2\sqrt{(x+7)(2x-5)}+2x-5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 2{,}5 \\ \sqrt{(x+7)(2x-5)} < 2-x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 2{,}5 \\ 2-x \geq 0 \\ (x+7)(2x-5) \geq 0 \\ (x+7)(2x-5) < (2-x)^2 \end{cases} \quad \emptyset.$$

Отсюда следует, что неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет. [34]

Учитель: Замечательно! Следующие неравенства решить методом возведения обеих частей неравенства в степень:

1) $\sqrt{2+x} > x - 10$

2) $\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}$.

Ученик:

1) $\sqrt{2+x} > x - 10$.

Область допустимых значений неравенства определяется условием $x \geq -2$.

Было бы ошибкой сразу возвести в квадрат обе части неравенства, поскольку неизвестно, какой знак имеет его правая часть. Поэтому рассмотрим два случая.

a) Пусть $x \geq 10$. На этом множестве обе части неравенства определены и неотрицательны, следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\left(\sqrt{2+x}\right)^2 > (x-10)^2$, или $x^2 - 21x + 98 < 0$, $7 < x < 14$. С учетом условия $x \geq 10$ получим $10 \leq x < 14$.

b) Пусть $-2 \leq x < 10$. На этом множестве правая часть отрицательна, следовательно, возводить обе части неравенства в квадрат нельзя. Но очевидно, что для тех x, для которых правая часть отрицательна, а левая больше или равно нулю, неравенство выполнено. Таким образом, в этом случае решением неравенства является промежуток $-2 \leq x < 10$.

Ответ: $[-2; 14)$. [31]

2) $\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}$.

Область допустимых значений неравенства определяется условиями: $3 - x > 0,\ x - 2 \neq 0,$ или $x < 3,\ x \neq 2.$ На этом множестве правая часть неравенства может принимать как положительные так и отрицательные значения. Рассмотрим два случая:

a) Вначале найдем решение неравенства на множестве тех значений переменной x, при которых правая чатсь неравенства меньше нуля: $x - 2 < 0,$ то есть $x < 2$.

При $x < 2$ левая часть исходного неравенства определена и положительна, а правая часть – отрицательна. Следовательно, все значения $x < 2$ являются решениями исходного неравенства.

b) Теперь найдем решение исходного неравенства для тех значений x, при которых правая часть неравенства больше нуля, то есть для $x > 2$. Точнее, с учетом ОДЗ, для $2 < x < 3$.

В промежутке $2 < x < 3$ выражения $\sqrt{3 - x}$ и $x - 2$ положительны, следовательно, умножив обе части неравенства на произведение этих выражений, получим неравенство $x - 2 > \sqrt{3 - x}$, равносильное исходному. Возведя обе положительные части этого последнего неравенства в квадрат, получим равносильное ему на рассматриваемом промежутке неравенство $(x - 2)^2 > 3 - x$, или $x^2 - 3x + 1 > 0$. Следовательно, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3$.

Объединим решения, полученные в обоих случаях: $x \in (-\infty; 2) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 3)$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 3)$. [31]

Учитель: Отлично! Следующие неравенства решить методом замены переменной:

1) $\frac{x^2}{\sqrt{5x-6}} - 4\sqrt{5x - 6} + 3x < 0$

2) $2\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} < 3$

Ученик:

1) $\frac{x^2}{\sqrt{5x-6}} - 4\sqrt{5x-6} + 3x < 0.$

Область допустимых значений неравенства определяется условием $x > \frac{6}{5}$. На этом множестве $\sqrt{5x-6} > 0$ и, значит, разделив обе части на $\sqrt{5x-6}$ получим неравенство, равносильное исходному:

$\frac{x^2}{5x-6} - 4 + 3\frac{x}{\sqrt{5x-6}} < 0.$

Пусть $t = \frac{x}{\sqrt{5x-6}}$, получим $t^2 + 3t - 4 < 0$, откуда $-4 < t < 1$.

Возвратимся к исходной переменной x: $-4 < \frac{x}{\sqrt{5x-6}} < 1$. Для любого x из промежутка $x > \frac{6}{5}$ левая часть двойного неравенства ввыполняется, следовательно, задача сводится к решению неравенства $\frac{x}{\sqrt{5x-6}} < 1$, или $\sqrt{5x-6} < x$. При $x > \frac{6}{5}$ обе части последнего неравенства определены и неотрицательны, значит, неравенство равносильно неравенству $5x - 6 < x^2$. Откуда получим $2 < x < 3$.

Ответ: $(2; 3)$. [31]

2) $2\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} < 3$

Введем подстановку: $\sqrt{x} = t,\ \ t \geq 0$. Тогда $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}$.

Получаем $2t + \frac{1}{t} < 3$; $\frac{2t^2-3t+1}{t} < 0$; $\frac{2(t-1)(t-\frac{1}{2})}{t} < 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 1 \\ \sqrt{x} < 0\ \ (\emptyset) \end{array}\right. ; \frac{1}{4} < x < 1.$$

Ответ: $(\frac{1}{4}; 1)$.[34]

Учитель: Отлично! Молодцы. В завершении занятия проведем небольшую самостоятельную работу. Предлагаемые задания решите в своих тетрадях, выбрав рациональный способ решения. Затем обменяйтесь тетрадями с соседями и проверьте работы друг друга:

1) $\sqrt{x^2 - 3x - 4} > x - 2$;

2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}<3$;

3) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$. [15]

5. Подведение итогов:

Учитель: Подведем итог. Какие способы мы рассмотрели для решения иррациональных неравенств?

Ученики:

1. Метод интервалов;
2. равносильные переходы к системе неравенств;
3. возведение обеих частей неравенства в степень;
4. замена переменной.

Учитель: Замечательно. Вы отлично поработали на сегодняшнем занятии. Ваше домашнее задание – выбрать подходящий метод и решить задания № 2.33, 2.35, 2.36, 2.40 из книги Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень.

Литература для учителя:

1) Лаппо Л.Д. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка к ЕГ. Универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами/ Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. – М.: «Экзамен», 2017. – 351 с

2) Каспржак А.Г. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «Математика»/Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 96 с

3) Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. - 4-е издание - СПб.: "Петроглиф": "Виктория плюс": М.: Издательство МЦНМО 2011. - 216 с. ил.

4) Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2017. – 215 с.

Литература для обучающихся:

1) Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2017. – 215 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены основные методы и приемы решения различных иррациональных уравнений и неравенств в школе. Подробно описаны ситуации, связанные с потерей или приобретением посторонних корней в процессе решения, показано, как распознавать и предотвращать их. Подобраны примеры решения иррациональных уравнений и неравенств для демонстрации излагаемого теоретического материала. Сделана попытка разработать методику обучения решению иррациональных уравнений и неравенств в школе.

Проведенное исследование показало, что в средней школе недостаточное внимание уделяется методам решения различных иррациональных уравнений, в основном, программой предусмотрено формирование у учащихся способности решать простейшие иррациональные уравнения и неравенства. К сожалению, на изучение этой темы в программе средней школы отводится минимум часов, что не соответствует объему необходимого для усвоения материала, иррациональные неравенства изучаются только в ознакомительном порядке.

Данные факты обуславливают необходимость проведения элективных курсов, факультативных занятий, с целью освоения обучающимися умения различать основные виды иррациональных уравнений и неравенств, умения применять необходимые приемы и методы их решения необходимо для решения иррациональных уравнений и неравенств на сознательной основе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1) Аверьянов Д.И., Алтынов П.И., Баврин И.И. Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в ВУЗы [Текст]/ Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин и др. - М.: Дрофа, 1998. - 864 с.: ил.

2) Азаров А.И. Математика для старшеклассников: Методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем: Пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования[Текст] /А. И. Азаров, С.А. Барвенов. – М.: Аверсэв, 2004 – 448 с.

3) Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни[Текст] / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 2016. - 463 с.: ил.

4) Алтынов П.И., Андреев П.А., Балжи А.Б. Краткий справочник школьника. 5-11 кл.[Текст]/ Авт.-сост. П.И. Алтынов, П.А. Андреев, А.Б. Балжи и др. - 2-е изд. - М.: Дрофа, 1998. - 624 с.: ил.

5) Андреева Т.В. Рабочая программа элективного курса по математике «Функции, уравнения, неравенства» [Текст]/ МОУ «СОШ №1» п.Селижарово приказ № 86 от «30» августа 2013. – 6 с.

6) Болтянский В. Г. Математика: лекции, задачи, решения [Текст] / В. Г. Болтянский – Литва: Альфа, 1996. – 637 с.

7) Виленкин Н. Я. и др. Алгебра и математический анализ для 11 класса [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин – М.: Просвещение, 1998. – 288 с.

8) Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: учеб.пособие для 8-9 кл. суглубл. изучением математики 7-е изд.[Текст] / М.Л. Галицкий,А.М. Гольдман, Л.И.Звавич— М.: Просвещение, 2001.—271 с.

9) Григорьев А. М. Иррациональные уравнения [Текст]/ А. М. Григорьев // Квант. – 1972. – №1. – С. 46-49

10) Далингер, В. А. Об одном замечании по поводу появления посторонних корней уравнения [Текст] / В. А. Далингер // Математика в школе. - 2013. - № 9. - С. 32-35.

11) Денищева Л. О. Готовимся к единому государственному экзамену. Математика. [Текст] / Л. О. Денищева – М.: Дрофа, 2004. – 120 с

12) Дрофеев Н.В., Сапожников А.А., Шубин Е.С., Решение экзаменационных задач по математике за 11 класс[Текст]/ Н.В. Дрофеев и др. - М.: Экзамен, 2002. - 384 с.

13) Егоров А. Иррациональные неравенства [Текст] / А Егоров // Математика. Первое сентября. – 2002. – №15. – С. 13-14

14) Егоров А. Иррациональные уравнения [Текст] / А Егоров // Математика. Первое сентября – 2002. – №5. – С. 9-13

15) Ершова А.П. Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов.[Текст]/ А.П.Ершова, В.В. Голобородько – М.: Илекса, 2005, - 208 с.

16) Каспржак А.Г. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область «Математика»[Текст]/Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 96 с

17) Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа. Учеб.для 10-11 кл. сред. шк.[Текст]/ А.Н. Колмогоров – М.: Просвещение, 1991. - 320 с.

18) Костюченко Р.Ю. Обучение учащихся решению иррациональных неравенств. Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» 2007.[Электронный доступ] www.omsk.edu

19) Костюченко Р.Ю. Обучение учащихся решению иррациональных уравнений Электронный научный журнал «Вестник Омского государственного педагогического университета» 2007.[Электронный доступ] www.omsk.edu

20) Лаппо Л.Д. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка к ЕГ. Универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами/ Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. – М.: «Экзамен», 2017. – 351 с

21) Лысенко Ф.Ф. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год: учебно-методическое пособие[Текст]/ Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. - Ростов-на-Дону: Легион, 2015. - 352 с.

22) Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математической специальности.[Текст]/ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дрофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. - М.: Просвещение, 1987. - 416 с.:ил.

23) Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс [Текст]: В двух частях. Ч.2: задачник для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович – М.: Мнемозина, 2004. – 315 с

24) Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы.в 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) [Текст]/ А.Г. Мордкович. - 14-е изд., стер. - М.: Мнемозина, 2013. - 400 с.: ил.

25) Мордкович А.Г. Математика: Полный справочник[Текст]/ А.Г. Мордкович, В.И. Глизбург, Н.Ю. Лаврентьева. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2010. - 351 с.

26) Открытый банк заданий ЕГЭ. Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений»[Электронный доступ]: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-ege

27) Рурукин А.Н. Пособие для интересной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительный, ЕГЭ на 5+ [Текст]/ А.Н. Рурукин– М.: «ВАКО», 2006. – 304 с.

28) Соболь Б. В. Пособие для подготовки к единому государственному экзамену и централизованному тестированию по математике [Текст] / Б. В. Соболь – Ростов на Дону: Феникс, 2003. – 352 с

29) Федорова Н.Е. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10 класс.[Текст]/ Н.Е.Федорова,М.В. Ткачева – М.: Просвещение, 2015. – 224 с.

30) Черкасов О. Ю. Математика: справочник для старшеклассников и поступающих в вузы [Текст]/ О.Ю. Черкасов – М.: АСТ-ПРЕСС, 2001. – 576 с.

31) Шабунин М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 10 класса[Текст]/ М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 448 с.: Ил.

32) Шарова Л. И. Уравнения и неравенства: пособие для подготовительных отделений [Текст]/ Л. И. Шарова – Киев: Вища школа, 1981. – 280 с.

33) Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 класс Учебное пособие.[Текст]/И.Ф.Шарыгин — М.: Просвещение, 1989. — 352 с.

34) Шахмейстер А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. - 4-е издание [Текст]/А.Х. Шахмейстер– М.: МЦНМО 2011. – 216 с. ил.

35) Шувалова Э. З. Повторим математику: уч. пособие для поступающих в вузы [Текст]/ Э. З. Шувалова – М.: Высшая школа, 1974. – 519 с.

36) Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона в 82 т. и 4 доп. т., т. 51. — М.: Терра, 2001. — 500 с.

37) Ященко И.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2[Текст]/ И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: «Экзамен», 2017. – 215 с.