ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ПРОФИЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика
очной формы обучения, группы 02041302
Туренко Анастасии Андреевны

Научный руководитель
к. ф.- м. н., доцент
Бугаевская А.Н.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРОФИЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ……………………………………………………………6

1.1. История возникновения комплексных чисел…......................................6

1.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа 11

1.3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа...................... 15

1.4. Психолого-педагогические особенности восприятия темы "Комплексные числа" в старших классах……………………………...……21

ГЛАВА II.МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ТЕМЫ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ПРОФИЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ…………….........25

2.1. Тематическое и поурочное планирование..24

2.2. Разработка плана-конспекта урока на тему «Комплексные числа и арифметические операции над ними»……………………………………27

2.3. Контрольно-проверочные материалы по теме «Комплексные числа».35

2.4. Проверка методических разработок …………………..………………36

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 39

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 40

ВВЕДЕНИЕ

Современное общество предъявляет выпускнику школы достаточно высокие требования. Эти требования касаются и общей культуры выпускника и научной культуры. В нашем случае мы будем говорить о математической культуре, а еще точнее – об алгебраической.

С первого класса и до окончания школы главным понятием алгебры является понятие числа. Изучение чисел идет последовательно – натуральные числа, дроби, целые числа, иррациональные, действительные. На этом общеобразовательная программа ставит точку, оставляя существенный пробел в знаниях ученика, так как естественным и логически правильным является формирование более общего понятия – понятия комплексного числа. И на это есть несколько причин.

Во-первых, тема «Комплексные числа» традиционно входила в программы по математике старшей школы с углубленным изучением математики.

Во-вторых, эта тема включена в государственный стандарт среднего (полного) образования по математике (профильный уровень). В частности, приведем выдержку из стандарта (раздел «Числовые и буквенные выражения»): «Комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Действительная и мнимая часть, модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Комплексно сопряженные числа. Возведение в натуральную степень (формула Муавра). Основная теорема алгебры».

В-третьих, комплексные числа важны как область математики, в которой в полную силу работают знания и умения, полученные учащимися при обучении алгебре и тригонометрии.

В-четвертых, переход от действительных чисел к комплексным является шагом во всем изучении понятия числа в школьном курсе математики.

К старшим классам ученики обладают уже достаточно зрелым математическим развитием: они в состоянии понимать и уважать нужды самой математической науки. Введение комплексных чисел представляет собой едва ли не самую яркую на протяжении школьного курса иллюстрацию диалектического развития математических понятий, логической простоты и завершенности [13, с.144]. Понятие о числе выстраивается в единое целое. Кратко говоря, множество комплексных чисел получается из множества действительных чисел «добавлением» только одного нового числа i, для которого $i^2 = -1$, и всех линейных комбинаций вида $a + bi$ с действительными коэффициентами a и b. При «добавлении» единственного корня специального квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$ мы переходим к числам, в которых и любое квадратное, и любое кубическое, и любое уравнение n-ой степени имеет корни. Вполне естественно также, что только в старших классах уместен полный, систематизирующий взгляд на развитие понятия числа [3, с.74].

Актуальность работы определяется тем, что учащиеся должны иметь представление о множестве комплексных чисел, операций над ними, их различных приложений.

Объектом выпускной классификационной работы является методика преподавания темы «Комплексные числа» в старших классах.

Целью выпускной классификационной работы является разработка тематического и поурочного планирования, а так же составление контрольной работы по теме «Комплексные числа».

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1) выявить психолого-педагогические особенности восприятия темы «Комплексные числа» в старших классах;

2) разработать тематическое и поурочное планирование по учебнику А.Г. Мордковича «Алгебра и начала математического анализа»;

3) разработать план-конспект урока по теме «Комплексные числа и арифметические операции над ними»;

4) разработать контрольно-проверочные материалы по теме «Комплексные числа» по учебнику А.Г. Мордковича «Алгебра и начала математического анализа», 10 класс.

Основные методы исследования: изучение психолого-педагогической, математической и методической литературы.

Практическая значимость. Результаты работы могут быть использованы в учебном процессе математической подготовки учащихся в системе общего среднего образования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРОФИЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.

1.1. История возникновения комплексных чисел

Древнегреческие математики считали «настоящими» только натуральные числа. Постепенно складывалось понятие о бесконечности множества натуральных чисел.

В III веке древнегреческий математик Архимед разработал систему обозначения вплоть до такого большого, как $10^{8\cdot 10^{16}}$. Наряду с натуральными числами применила дроби - числа, состоящие из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за 2000 лет до нашей эры в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий математик и философ учил, что «… элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом». Сильный удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороны. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно для того, чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной единица. Предполагается, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно [6, с.43].

Следующим этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел - это было сделано китайскими математиками за 2 века до нашей эры. Отрицательные числа применял в III веке древнегреческий математик Диофан, знавший уже правила действий над ними, а в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые, которые сравнили такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет 2 значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя, то есть нет такого числа x, чтобы $x^2 = -9$. В XVI веке, в связи с изучением кубических уравнений, оказалось необходимым извлечь квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида $x^3 + px + q = 0$ кубические и квадратные корни:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень (например, $x^3 + 3x - 4 = 0$), а если оно имеет три действительных корня ($x^3 - 7x + 6 = 0$), то под знаком квадратного корня оказалось отрицательное число. Получилось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Вслед за тем, как были решены уравнения четвертой степени, ученые искали формулу для решения уравнений пятой степени. Но Руффини на рубеже XVII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

нельзя решить алгебраически, точнее, нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) [6, с.76].

В 1830 году Галуа доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее, всякое уравнение n-й степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней. В этом математики были убеждены еще в XVII веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 году предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases},$$

не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, $y = 5 \pm \sqrt{-15}$, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать, что $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a.$ Кардано называл такие величины «чисто отрицательными» и даже «софистически отрицательными», считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название «мнимые числа» ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века – Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова $imaginaire$ (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин «комплексные числа» также был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского complexus) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и так далее, образующих единое целое [6, с. 82].

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел, возможности дать им геометрическое обоснование.

Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII столетий была построена общая теория корней n-ых степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = \cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi$$

С помощью этой формулы можно было так же вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг. Л. Эйлер вывел в 1748 году формулу:

$$e^{i \cdot x} = cosx + i \cdot sinx,$$

которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью этой формулы можно было возводить число e в любую комплексную степень. Интересно, например, что $e^{i \cdot \pi} = -1$.

Можно находить синус и косинус чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного.

В конце XIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, к примеру, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для решения интегралов.

Хотя в течение XIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и так далее, однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский математик П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел,-только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами [6, с.85].

В конце XIII века и начале XIX было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин К. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число $z = a + b \cdot i$ точкой $M(a, b)$ на координатной плоскости.

Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой M, а вектором $\overline{OM}$, идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложение и вычитание комплексных чисел соответствуют этим же операциям над векторами. Вектор $\overline{OM}$ можно задавать не только его координатами a и b, но также длиной r и углом j, который он образует с положительным направлением оси абсцисс. При этом $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$ и число z принимает вид $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$. Число φ называют аргументом z и обозначают Arg z. Заметим, что если $z = 0$, значение Arg z не определено, а при $z \neq 0$ оно определено с точностью до кратного 2π. Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде

$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ (показательная форма комплексного числа).

Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения.

Стало ясно, что комплексные числа полезны на плоскости, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании «гиперкомплексных» чисел – чисел с несколькими «мнимыми» единицами. Такую систему вида

$$a + bi + c\mathrm{j} + dk,$$

где $i^2 = \mathrm{j}^2 = k^2 = -1$, построил в 1843 году ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их «кватернионами». Правила действия над кватернионами напоминает правила обычной алгебры, однако их умножение не обладает свойством коммутативности [6, с.169].

1.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Комплексное число имеет вид:

$$z = x + iy;$$

здесь x и y — действительные числа, а i — число нового рода, называемое мнимой единицей. «Мнимые» числа составляют частный вид комплексных чисел (когда $x = 0$). С другой стороны, и действительные (т. е. положительные и отрицательные) числа являются частным видом комплексных чисел (когда $y = 0$).

Действительное число x называется абсциссой комплексного числа $x + iy$; действительное число y — ординатой комплексного числа $x + iy$. Основное свойство числа i состоит в том, что произведение ii равно -1, т. е.

$$i^2 = -1$$

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называют комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1.1)$$

а произведением $z_1 z_2$ этих комплексных чисел — комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.2)$$

Элемент $O = (0,0)$ поля комплексных чисел является нейтральным относительно операции сложения, и его называют нулевым элементом этого поля. На плоскости xOy он совпадает с началом координат. Элемент (1,0) является нейтральным относительно операции умножения, и его называют единицей поля комплексных чисел [12, с.168].

Особую роль играет комплексное число (0, 1), которое обозначают iи называют мнимой единицей. Согласно (1.2), имеем

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0), \; i(y, 0) = (0, 1)(y, 0) = (0, y). \quad (1.3)$$

Каждую упорядоченную пару $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ сопоставим с числом$x \in \mathbb{R}$. Возникает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{R}$

действительных чисел и множеством упорядоченных пар вида $(x, 0)$, при котором сумме и произведению действительных чисел отвечают сумма и произведение соответствующих им упорядоченных пар. Поэтому каждую упорядоченную пару вида $(x, 0)$ отождествляют с числом x. В этом случае каждую упорядоченную пару можно представить в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)\,(y, 0) = x + iy. \quad (1.4)$$

Выражение $z = x + iy$ представляет собой алгебраическую (или декартову) форму записи (представления) комплексного числа. В этой записи x и y — действительные числа, причем x называют действительной частью комплексного числа zи обозначают Rez, а y называют мнимой частью комплексного числа zи обозначают Im z. Таким образом, в записи (1.4)

$$x = \operatorname{Re} z \ \text{ и } \ y = \operatorname{Im} z. \quad (1.5)$$

Комплексное число равно нулю ($z = 0$) в том и только в том случае, когда его действительная и мнимая части одновременно равны нулю. Элементы поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел можно отождествить с точками плоскости, рассматривая действительную x и мнимую y части комплексного числа $x + iy$ как координаты точки M (x, y) в некоторой фиксированной прямоугольной системе координат Oxy (рис. 1.1).

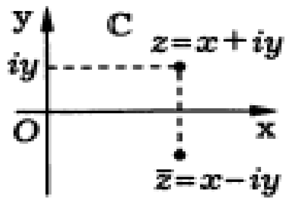


Рис. 1.1

В этом случае плоскость xOy называют комплексной плоскостью (или плоскостью комплексных чисел) и обозначают либо (как и это поле) символом $\mathbb{C}$, либо заключенным в круглые скобки обозначением комплексного числа: (z), (w). Произвольному действительному числу x соответствует точка $(x{,}0)$ комплексной плоскости, лежащая на оси абсцисс, которую применительно к плоскости $\mathbb{C}$ называют действительной (или вещественной) осью. Чисто мнимому числу iy соответствует точка $(0; y)$ плоскости $\mathbb{C}$, расположенная на оси ординат, называемой в данном случае мнимой осью (но по традиции обозначаемой y, а не iy!) [12, с.172].

Комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка М (x , y) комплексной плоскости. При этом абсцисса точки совпадает с действительной частью комплексного числа, а ордината точки — с его мнимой частью. Интерпретация комплексных чисел как точек плоскости позволяет говорить о геометрической форме представления комплексного числа. Далее точку М(x , y) плоскости $\mathbb{C}$ с координатами x и y будем обозначать так же, как и соответствующее ей комплексное число $z = x + iy$.

Операции сложения (1.1) и умножения (1.2) обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, а умножение обладает свойством дистрибутивности относительно сложения.

Два комплексных числа, записанных в алгебраической форме, равны в том и только в том случае, когда равны соответственно их действительные и мнимые части. Применительно к этой форме записи правила (1.1) и (1.2) дают

$$z_1 + z_2 = (x_1, iy_1) + (x_2, iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (1.6)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, iy_1)(x_2, iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (1.7)$$

и приводят практически к простому условию, что все действия над комплексными числами аналогичны действиям над многочленами, но с учетом свойств мнимой единицы

$$i^2 = ii = -1, \; i^3 = i^2 \; i = -i, \; i^4 = 1 \text{ и т.д.} \quad (1.8)$$

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x + iy$ называют комплексно сопряженными. На плоскости $\mathbb{C}$ им соответствуют точки, расположенные симметрично относительно действительной оси (см. рис. 1.1) [12, с.190].

Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами, а разность — чисто мнимым числом:

$$z+\bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}z, z\bar{z} = \mathrm{x}^2 + y^2, z-\bar{z} = 2iy = 2i\mathrm{Im}z. \quad (1.9)$$

Для сложения и умножения существуют обратные операции: соответственно вычитание и деление (кроме деления на нуль), которые в алгебраической форме можно записать следующим образом:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2), \quad (1.10)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, z_2 \neq 0. \quad (1.11)$$

Пример 1. Найти значение выражения $(z_1+2z_2)\cdot z_3$, если $z_1 = 2+3i,\quad z_2 = 3+2i,\quad z_3 = 5-2i.$

Решение: $2z_2 = 6+4i,$

$z_1 + 2z_2 = (2+6)+(3+4)i = 8+7i,$

$(z_1+2z_2)\cdot z_3 = (8+7i)(5-2i) = (40+14)+(-16+35)i = 54+19i.$

Ответ: $54+19i.$

Пример 2. Найти значение выражения $\frac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$**,** где

$z_1 = 4+5i,\quad z_2 = 1+i,\quad z_3 = 7-9i.$

Решение: $z_2+z_3 = (1+i)+(7-9i) = (7+1)+(1-9)i = 8-8i,$

$z_1(z_2+z_3) = (4+5i)\cdot(8-8i) = (32+40)+i(-32+40) = 72+8i,$

$$\frac{z_1(z_2+z_3)}{z_2} = \frac{72+8i}{1+i} = \frac{(72+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(72+8)+i(-72+8)}{1+1} =$$

$$= \frac{80-64i}{2} = 40-32i$$

Ответ: $40-32i.$

Пример 3. Вычислите: $(2+6i)-(3-5i)(-1+2i)$

Решение: $(2+6i)-(3-5i)(-1+2i) = 2+6i-(-3+6i+5i+$
$+10 = 2+6i-7+11i = -5-5i$

Ответ: $= -5-5i.$

Пример 4. Докажите, что $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z_1}\cdot\bar{z_2}$ для любых комплексных чисел z_1 и z_2.

Решение: Представим данные числа в алгебраической форме:

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2.$$

Тогда $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)$,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Далее,

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 - x_2y_1) = \overline{z_1 \cdot z_2},$$

что и требовалось доказать.

1.3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Каждому комплексному числу z можно поставить в соответствие на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ радиус-вектор точки, изображающей это число (рис. 1.2). Из (1.6) и (1.10) следует, что сложение и вычитание комплексных чисел аналогично нахождению суммы и разности векторов в комплексной плоскости по правилу параллелограмма (рис. 1.3).

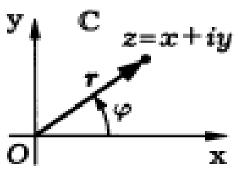


Рис. 1.2

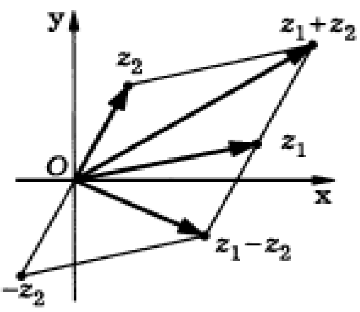


Рис. 1.3

Введенная в (1.1) алгебраическая форма записи комплексного числа удобна для выполнения операции сложения и обратной к ней операции вычитания. Однако, как видно из (1.7) и (1.11), умножение и деление при этом представлении комплексного числа выполнить не столь просто. Для умножения и деления комплексных чисел, а также для возведения в степень комплексного числа и извлечения корня из комплексного числа, удобна тригонометрическая (или полярная) форма записи комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (1.12)$$

Такое представление комплексного числа получается из алгебраической формы записи (1.4) переходом к полярным координатам точки, изображающей комплексное число:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \quad (1.13)$$

Полярными координатами точки, изображающей комплексное число z, являются полярный радиус r, равный длине радиус-вектора точки z, и полярный угол φ, равный углу между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки z (см. рис. 1.2) [8, с. 94].

Полярные координаты r и φточки, изображающей комплексное число z на комплексной плоскости, называют соответственно модулем и аргументом комплексного числа и обозначают $|z|$ и Arg z. Нетрудно увидеть, что

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \mathrm{tg}(Argz) = \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (1.14)$$

При $x = 0, y \neq 0$ имеем мнимое число $z = iy$. В этом случае аргумент комплексного числа имеет значения

$$\mathrm{Arg}\ z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, \text{ при } y > 0$$

$$\mathrm{Arg}\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ при } y < 0.$$

Поэтому второе равенство (1.14) можно считать верным и при $x = 0, y \neq 0$.

Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен.

Модуль комплексного числа определен однозначно, а аргумент — с точностью до слагаемого, кратного 2π. Угол φ отсчитывают так же, как в тригонометрии: положительным направлением изменения угла считают направление против часовой стрелки. Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен. Это комплексное число определяют единственным условием $r = |z| = 0$. Итак, в форме (1.12) можно представить любое комплексное число z. Отметим еще раз, что для $z = 0$ модуль r обязательно равен нулю, а аргумент φможет иметь любое значение [12, с.193].

Для модулей комплексных чисел z_1 иz_2справедливы неравенства

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1|+|z_2|, |z_1 - z_2| \geq |z_1|-|z_2|, \quad (1.15)$$

геометрический смысл которых ясен из рис. 1.3.

Главное значение аргумента комплексного числа, обозначаемое arg z, есть значение аргумента комплексного числа, удовлетворяющее условию

$$-\pi < \arg z \leq \pi. \quad (1.16)$$

Каждому комплексному числу $z \neq 0$ соответствует единственное главное значение его аргумента. Так,

Arg l = 0, arg (—3) = π, arg $(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, arg $(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$, arg $(-i) = -\frac{\pi}{2}$. Очевидно, что

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.17)$$

Иногда под главным значением аргумента понимают то, которое попадает в промежуток $[0, 2\pi)$. В этом случае главное значение аргумента также определено однозначно.

С учетом ограничений (1.16), налагаемых на главное значение аргумента комплексного числа $z = x + iy$, с помощью тригонометрической функции arctg$x$ получаем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0 \text{ и } y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x < 0 \text{ и } y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ и } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ и } y < 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Это нетрудно установить, рассматривая в каждом из указанных в (1.18) случаев произвольную точку, изображающую комплексное число.

Очевидно, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π.

Используя для комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

записанных в тригонометрической форме, равенство (1.7), можно установить, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1.19)$$

и в случае $z_2 \neq 0$ (а значит, и $r_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))(1.20)$$

Согласно (1.19) и (1.20), при умножении комплексных чисел их модули следует перемножить, а аргументы сложить, а при делении — модуль делимого разделить на модуль делителя, а аргумент делителя вычесть из аргумента делимого (рис. 1.4).

Итак,

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2; \ (1.21)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2. \ (1.22)$$

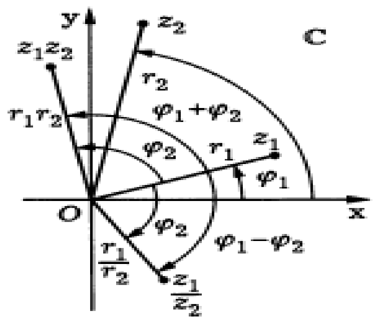


Рис. 1.4

Учитывая (1.14), получаем

$$|\bar{z}| = |z|, \ |\bar{z}z| = |z^2|, \quad \mathrm{Arg}\,\overline{z} = -\mathrm{Arg}\,z. \qquad (1.23)$$

Рассматривая возведение комплексного числа zв натуральную степень как умножение z на себя nраз, находим

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.24)$$

Это соотношение называют формулой Муавра возведения комплексного числа в целую положительную степень. Отметим, что при вычислении z^n по формуле (1.24) можно считать, что $\varphi = \arg z$, поскольку в силу периодичности тригонометрических функций $\cos x$ и $\sin x$ слагаемое, кратное 2π, можно не писать [12, с.211].

Извлечение корня — это операция, обратная возведению в степень, т.е.

$$w = \sqrt[n]{z}, \text{ если } w^n = z. \quad (1.25)$$

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $w = \rho(\cos\upsilon + i\sin\upsilon)$, то, согласно (1.24), (1.25) и условию равенства комплексных чисел в тригонометрической форме, имеем

$$\rho^n = r \text{ и } n\upsilon = \varphi + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \upsilon = \frac{\varphi + 2l\pi}{n} = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

и в итоге

$$\begin{cases} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right), \\ k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Из этого соотношения, называемого формулой Муавра извлечения корня целой положительной степени из комплексного числа, следует, что среди возможных значений $\sqrt[n]{z}$ различными будут n значений, соответствующих, например, значениям $k = \overline{0, n-1}$. Нетрудно установить, что при других значениях k значения $\sqrt[n]{z}$ повторяются. В формуле (1.26) вместо указанных n значений параметра k можно было бы указать любой другой набор значений, среди которых нет чисел, различающихся на слагаемое, кратное n, например $k = 1, 2, \dots, n$.

Все n различных значений для $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, а их аргументы отличны на углы, кратные $2\pi/n$. Значениям $\sqrt[n]{z}$ отвечают точки комплексной плоскости, расположенные в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. При этом радиус-вектор одной из вершин образует с осью Ox угол $\arg z/n$.

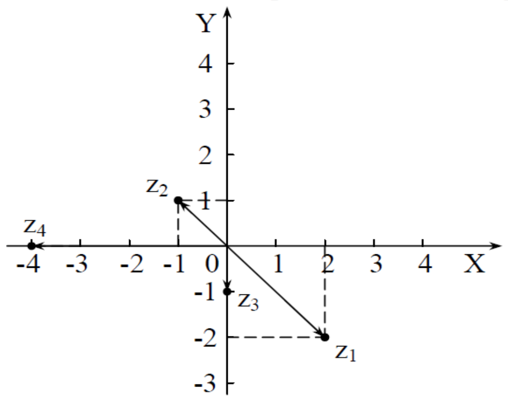
Из (1.24) и (1.26) следует формула для возведения комплексного числа в рациональную степень. Возведение комплексного числа $z \neq 0$ в рациональную степень $q = m/n$, где m/n — несократимая дробь, можно рассматривать как две последовательные операции: сперва возведение комплексного числа в целую степень $m \in \mathbb{Z}$, а затем извлечение из результата корня n-й степени. Учитывая, что Arg (z^m) = m Arg z, получаем

$$\begin{cases} z^q = r^q \left(\cos \frac{\mathrm{m arg z} + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\mathrm{m arg z} + 2\pi k}{n} \right) \\ k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \qquad (1.27)\ [12, с.215].$$

Примеры. Представить в тригонометрической форме числа и изобразить их на комплексной плоскости:

а) $z_1 = 2 - 2i$; б) $z_2 = -1 + i$; в) $z_3 = -i$; г) $z_4 = -4$

Решения. Изобразим числа векторами на координатной плоскости.



а) $z_1 = 2 - 2i.$

Следовательно, $x_1 = 2,$, $y_2 = -2$ и $|z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$

$argz_1 = arctg \frac{(-2)}{2} = -\frac{\pi}{4}$ Отсюда z_1 в тригонометрической форме имеет вид:

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$

б) $z_2 = -1 + i.$

Здесь $x_2 = -1,$, $y_2 = 1$ и $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$

$argz_2 = arctg \frac{1}{(-1)} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$

Таким образом, $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\, sin\frac{3\pi}{4}\right).$

в) $z_3 = -i.$

В данном случае $x_3 = 0,$, $y_3 = -1$

и $|z_3| = \sqrt{0 + (-1)^2} = 1$,

так как точка (0; -1) лежит на отрицательной части оси Oy, то $argz_3 = -\frac{\pi}{2}$ и

$z_3 = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

г) $z_4 = -4$

$x_4 = -4,$, $y_4 = 0$ $|z_4| = 4$, так как точка (-4; 0) лежит на отрицательной части оси *Ox,* то $argz_4 = \pi$ и $z_4 = 4(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$.

1.4. Психолого-педагогические особенности восприятия темы «Комплексные числа» в старших классах

Помимо общих целей обучения перед учителем математики стоят и другие цели, определяемые особенностями педагогической науки. Это формирование и развитие логического, математического, абстрактного мышления, формирование общей и математической культуры учеников.

Если говорить иначе об алгебраической культуре, то стоит выделить, что в общеобразовательных классах не рассматривается понятие комплексного числа, а ограничиваются лишь изучением действительных чисел. В старших классах ученики уже обладают достаточно зрелым математическим образованием и могут сами понимать необходимость расширения понятия о числе. С точки зрения общего развития, знания о комплексных числах применяются в технике и естественных науках, что важно для школьника в процессе выбора профессии. Некоторые авторы учебников включают изучение данной темы как обязательной в свои учебники по алгебре и началам математического анализа для профильных уровней, что предусмотрено государственным стандартом [16, с.34].

Проанализируем, с какими трудностями сталкивается учитель и учащийся в процессе изучения темы «Комплексные числа».

Во-первых, обозначим, что данная тема вводится как обязательная только в старших классах профильного уровня. А в старших классах мышление у школьников более глубокое, полное, разностороннее. Изменяются мотивы учения.

Впрочем, даже в старших классах у многих учеников плохо развито абстрактное мышление, или сложно представить себе «мнимую, воображаемую» единицу, понять различия между координатной и комплексной плоскостью. Или иначе, школьник оперирует абстрактными понятиями в отрыве от их реального содержания.

Выдающийся советский педагог В. А. Сухомлинский говорил, что трудности в старших классах связаны со сложившейся ранее установкой на запоминание, заучивание обобщений, не основанных на самостоятельном анализе фактов. Причина трудностей, которые испытывают некоторые ученики-старшеклассники, заключаются, по мнению педагога, в неумении пользоваться обобщающими понятиями в целях познания окружающей действительности, а неумение это рождается потому, что обобщающие понятия, выводы, умозаключения не формируются путем исследования явлений и фактов, а заучиваются [17, с.61].

Старшеклассники сами замечают, что многие из них плохо подготовлены к обучению в 10-11 классах, они не умеют работать с материалами, поступающие от других, внеурочных источников.

С методической точки зрения тема «Комплексные числа» развивает и углубляет заложенные в основном курсе математики представления о многочленах и числах, в известном смысле завершая путь развития понятия числа в средней школе.

Изучение данной темы преследует следующие цели:

- Углубление представлений о понятии числа;

- Повышение математической культуры учащихся;
- Дальнейшее развитие представлений о единстве математики как науки.

Стоит сказать, что прикладное значение данной темы ввиду обилия приложения изучаемых понятий как внутри самой математики, так и в различных областях техники, физики и других естественных науках.

После изучения темы «Комплексные числа» ученики должны иметь четкое представление о комплексных числах, знать алгебраическую, тригонометрическую и геометрическую формы комплексного числа.

Ученики должны уметь производить над ними операции умножения, сложения, вычитания, деления, возведение в степень, извлечение корня из комплексного числа; переводить комплексное число из алгебраической формы в тригонометрическую, иметь представление о геометрической модели комплексных чисел, решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами [16, с.54].

Впрочем, по теме «Комплексные числа» существует ограниченное количество пособий, методических разработок. Учителю предоставляется право самостоятельно выбрать методический путь и прием обучения этой теме.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ТЕМЫ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ПРОФИЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

2.1. Тематическое и поурочное планирование

Тематическое и поурочное планирование было разработано по учебнику А.Г. Мордковича, П.В. Семенова «Алгебра и начала анализа» профильный уровень, 10 класс совместно с учителем математики МБОУ «СОШ №4» г. Шебекино Кудыкиной Мариной Владимировной.

Тема урока	Количество выделенных часов (ч.)
Комплексные числа и арифметические операции над ними	2
Комплексные числа и координатная плоскость	1
Тригонометрическая форма записи комплексного числа	2
Комплексные числа и квадратные уравнения	1
Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа	2
Контрольная работа по теме «Комплексные числа	1

Тематическое планирование по теме «Комплексные числа»

Цели:

– формирование представления о комплексных числах и операциях над ними;

- формирование умения использования двух форм записи комплексного числа при решении задач;
- овладение умением решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, возведение комплексного числа в степень, извлечение кубического корня из комплексного числа.

Урок 1, 2.

Тема урока: Комплексные числа и арифметические операции над ними.

Количество часов: 2.

Тип урока: урок получения новых знаний, закрепление и освоение нового материала.

Элементы содержания: комплексные числа, мнимая единица, действительная и мнимая часть комплексного числа, сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел.

Ученики должны иметь представление, что такое комплексные числа, должны определять действительную и мнимую часть. Выполнять арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Уметь определять понятия, приводить доказательства.

На уроке планируется объяснение темы, фронтальный опрос, решение упражнений.

Урок 3

Тема урока: Комплексные числа и координатная плоскость.

Количество часов: 1.

Тип урока: урок получения новых знаний, закрепление и освоение нового материала.

Элементы содержания: координатная плоскость, отождествление комплексного числа с точкой плоскости, вектор суммы, вектор разности, вектор произведения.

Ученики должны усвоить геометрическую интерпретацию комплексных чисел, действительную и мнимую части комплексного числа, должны находить модуль и аргумент комплексного числа. Уметь определять понятия, приводить доказательства.

На уроке планируется объяснение темы, фронтальный опрос, решение упражнений.

Урок 4, 5

Темы урока: Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Количество часов: 2.

Типы уроков: проблемный, комбинированный.

Элементы содержания: модуль комплексного числа, модуль произведения, свойства модулей комплексных чисел, неравенство треугольника, тригонометрическая форма записи комплексного числа, аргумент, равенство комплексных чисел.

Дети должны иметь представление, как определить действительную и мнимую часть.

Урок будет состоять из фронтального опроса, объяснения темы, решения упражнений и проблемных задач, модуль и аргумент комплексного числа, записывать комплексные числа в тригонометрической форме.

Урок 6

Тема урока: Комплексные числа и квадратные уравнения.

Количество часов: 1.

Тип урока: урок получения и закрепления новых знаний.

Элементы содержания: корень из комплексного числа, уравнение, алгоритм извлечения квадратного корня из комплексного числа.

Ученики должны усвоять как найти корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

Изучение новой темы, фронтальный опрос, решение упражнений.

Урок 7, 8

Тема урока: Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа.

Количество часов: 2.

Типы уроков: урок получения и закрепления новых знаний, объяснительно-иллюстративный.

Элементы содержания: формула Муавра, возведение комплексного числа в степень, тригонометрическая форма записи комплексного числа, алгоритм извлечения кубического корня из комплексного числа.

Ученики должны научиться выполнять арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Знать комплексно сопряженные числа.

На уроке должен присутствовать индивидуальный опрос, работа с раздаточными материалами.

Урок 9

Тема урока: Контрольная работа по теме: «Комплексные числа».

Количество часов: 1.

Тип урока: урок контрольного учета, обобщения и коррекции знаний.

Индивидуальное решение контрольных заданий.

Учащиеся демонстрируют теоретические и практические знания по теме «Комплексные числа». Умеют передавать, информацию сжато, полно, выборочно. Умеют, развернуто обосновывать суждения. Свободно применяют знания и умения по теме «Комплексные числа». Могут объяснить изученные положения на подобранных конкретных примерах.

2.2. Разработка плана-конспекта урока на тему «Комплексные числа и арифметические операции над ними»

Тема «Комплексные числа и арифметические операции над ними» включает в себя 2 часа.

Урок 1

Класс: 10

Тема: «Комплексные числа и арифметические операции над ними»

Цели урока:

- Образовательные: рассмотреть «плюсы» и «минусы» основных числовых систем, ввести понятие комплексного числа, изучить арифметические операции над комплексными числами;

- Развивающие: развитие у учащихся навыков быстрого мышления, умения анализировать, научить сопоставлять и делать выводы, развитие самостоятельности;

- Воспитательные: содействовать воспитанию интереса к предмету.

Средства обучения: учебник Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009.- 424 с.,

Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. - 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 323 с.

Тип урока: урок получения новых знаний.

Ход урока

1. Организационный момент (1 мин.)

Здравствуйте, дети. Садитесь.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя.

2. Постановка целей урока (1 мин.)

Сегодня мы начнем новую тему урока, введем понятия комплексного числа и научимся выполнять арифметические операции над ними.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя.

3. Изучение нового материала (25 мин.)

Числа – один из основных математических объектов. Вам уже знакомы натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа. Все они образуют множество действительных чисел. В этой главе мы познакомимся с новой числовой системой -системой комплексных чисел. Система комплексных чисел обозначается буквой С.

Перечисли минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

1) Существует комплексное число, квадрат которого равен -1.

2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий.

Условия 1 и 2 заставляют добавить к множеству действительных чисел, как минимум, один новый элемент и по определению считать, что квадрат этого элемента равен -1. Такой элемент называют *мнимой единицей* и обозначают i.

$$i^2 = -1, i - \text{мнимая единица.}$$

Введем определение комплексного числа. *Комплексным числом* называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in C \leftrightarrow a \in R, b \in R, i - \text{мнимая единица}$$

В записи $z = a + bi$ число a называют действительной частью комплексного числа z, а число b- мнимой частью комплексного числа z.

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные и равны их мнимые части.

$$a + bi = c + di \leftrightarrow a = c, b = d.$$

Арифметические операции над комплексными числами выполняются в соответствии с условием 3. Например, найдем сумму комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Аналогично находится разность комплексных чисел:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Для произведения комплексных чисел формула получается более сложной. Вот она:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Рассмотрим уравнение $(c + di)z = a + bi$, где комплексное число $c + di$ отлично от нуля. Умножим обе части уравнения на $c - di$. Получим:

$$(c - di)(c + di)z = (c - di)(c + di),$$

$$(c^2 - (di)^2)z = ac - (di)a + c(bi) - bdi^2,$$

$$(c^2 + d^2)z = (ac + bd) + (bc - ad)i,$$

$$z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному. Если данное комплексное число обозначено буквой z, то сопряженное число обозначают $\bar{z}$: $z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi.$

Форма: фронтальная

Методы: слово учителя, элементы беседы;

Средства: тетрадь, учебник, мел, доска.

4. Практическая часть урока (15 мин.)

Открываем учебники на странице 176. Сегодня решаем № 32.1 (а,б), 32,3 (б,в), 32.4.

№ 32.1

а) $x + 6 = 0$

б) $3x = 5$

№ 32.3

$2x^2 + 4x + a = 0$

б) $a = 1{,}5$

в) $a = 1$

№ 32.4

$z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 3 + i, z_1 = -7i.$

а) $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(3 + i) = 3 - 6i + i - 2i^2 = 3 - 5i + 2 = 5 - 5i = 5(1 - i)$

б) $z_1 + z_2 z_3 = (1 - 2i) + (3 + i)(-7i) = 1 - 2i - 21i - 7i^2 = 8 - 23i$

в) $z_1(z_2 - z_3) = (1 - 2i)(3 + i + 7i) = (1 - 2i)(3 + 8i) = 3 - 6i + 8i - 16i^2 = 19 + 2i$

г) $z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3$

Найдем отдельно второе и третье слагаемые:

$(z_2)^2 = (3 + i)(3 + i) = 9 + 3i + 3i + i^2 = 8 + 6i$

$(z_3)^3 = (-7i)(-7i)(-7i) = (-7i)^3 i^3 = -343(i^2) = 343i$

$z_1 + (z_2)^2 + (z_3)^3 = (1 - 2i) + (8 + 6i) + 343i = 9 + 347i$

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя, слово ученикам;

Средства: классный журнал, мел, лоска.

5. Подведение итогов урока (2 мин.)

Итак, наш урок подходит к концу. Хотелось бы узнать, что вы сегодня узнали нового? Какие были сложности с пониманием этой темы?

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя, слово ученикам.

6. Сообщение домашнего задания (1 мин).

Откройте дневник, запишите домашнее задание: № 32.1 (в,г), № 32,3 (а,г), № 32.4 (в,г).

Урок окончен, до свидания.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя;

Средства: учебник, дневник ученика.

Урок 2.

Класс: 10

Тема: «Комплексные числа и арифметические операции над ними»

Цели урока:

- Образовательные: научиться выполнять арифметические операции над комплексными числами;

- Развивающие: развитие у учащихся памяти, познавательных и индивидуальных способностей;

- Воспитательные: содействовать воспитанию интереса к предмету.

Средства обучения: учебник Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009.- 424 с., Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] под ред. А.Г. Мордковича. - 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 323 с.

Тип урока: закрепление и освоение новых знаний.

Ход урока

1. Организационный момент (1 мин.)

Здравствуйте, дети. Садитесь.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя.

2. Постановка целей урока (1 мин.)

Дети, напомните мне прошлую тему урока. (Комплексные числа и арифметические операции над ними). Сегодня мы продолжим эту тему.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя.

3. Актуализация опорных знаний (5 мин)

Перечислите условия, которым должны удовлетворять мнимые числа? Что такое комплексное число? Какие комплексные числа называют равными? Напишите на доске формулу произведения и частного комплексных чисел.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя, слово учащихся.

4. Закрепление изученного материала (30 мин.)

Открываем учебники на странице 180. Сегодня решаем № 32.5 (а,б), 32.7 (в,г), 32. 8 (в), 32.9 В конце урока будет самостоятельная работа.

№ 32.5

а) $i^3 = i^2 \cdot i = -i$

б) $i^5 = i^3 \cdot i^2 = i$

№ 32.7

$z^2 + 361$

в) $z = -11i$

(-11$i)^2 + 361 = 121i^2 + 361 - 121 = 240$

г) $z = -19(-i)^3$

$(-19(-i)^3) + 361 = -361 + 361 = 0$

№ 32.8

$(1 + i)z = 3 - i$

Обе части уравнения домножим на 1- i.

$(1 - i)(1 + i)z = (1 - i)(3 - i)$,

$(1^2 - i^2)z = 3 - 3i - i + i^2$,

$2z = 2 - 4i$,

$z = 1 - 2i$,

№ 32.9

$z^2 + 16 = z^2 - (4i)^2 = (z - 4i)(z + 4i);$

$z^4 - 25 = (z^2 - 5)(z^2 + 5) = (z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5 \cdot i})(z + \sqrt{5 \cdot i}).$

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя, слово учащихся;

Средства: учебник, мел, доска.

5. Самостоятельная работа (10 мин.)

Записываем «Самостоятельная работа». Задания на доске. У вас 10 минут.

1. Вычислите $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 2i - 3$;
2. Вычислить $z_3(z_1 - z_2)$, если $z_1 = 9 - 6i$, $z_2 = 5i - 3$ $z_3 = 4i - 2$;
3. Решить уравнение $(1 - i)z = 5 + i$.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя;

6. Подведение итогов урока (2 мин.)

Итак, наш урок подходит к концу.

Сдаем тетради с самостоятельной работой. Какие сложности возникли с самостоятельной работой?

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя, слово ученикам.

7. Сообщение домашнего задания (1 мин).

Откройте дневник, запишите домашнее задание: № 32.5 (в,г), № 32,7 (а,б), № 32.8 (г).

Урок окончен, до свидания.

Форма: фронтальная;

Методы: слово учителя;

Средства: учебник, дневник ученика.

2.3 Контрольно-проверочные материалы по теме «Комплексные числа»

Вариант 1.

1. Вычислите $z_1 z_2$, если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2i + 1$;
2. Вычислить модуль и аргумент комплексного числа $z = 9 + 3\sqrt{3}i$;
3. Решить уравнение $z^2 - 4z + 5 = 0$;
4. Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих заданному условию: $|z + 2| = 3$, $|z - 1| = 3$;
5. Вычислите z^{12}, если $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

Вариант 2.

1. Вычислите $z_1 + z_2$, если $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 4i + 4$;
2. Вычислить модуль и аргумент комплексного числа $z = -9 + 3\sqrt{3}i$;
3. Решить уравнение $z^2 - 6z + 25 = 0$;
4. Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих заданному условию: $|z + 1| = 4$, $|z - 2| = 4$;
5. Вычислите z^{12}, если $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

Вариант 3.

1. Вычислите $z_1 - z_2$, если $z_1 = 6 - 3i$, $z_2 = 2i + 5$;
2. Вычислить модуль и аргумент комплексного числа $z = 9 - 3\sqrt{3}i$;
3. Решить уравнение $z^2 + 10z + 61 = 0$;
4. Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих заданному условию: $|z + 2| = 2$, $|z - 3| = 2$;
5. Вычислите z^{12}, если $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

2.4 Проверка методических разработок

Проверка проводилась в МБОУ «СОШ № 4» г. Шебекино в 10 «а» классе. В классе учатся 16 учеников, среди них 9 мальчиков и 7 девочек. Детей с серьезными нарушениями здоровья нет. Класс профильный, успеваемость средняя: 2 отличника, 7 хорошистов, 7 неуспевающих. 15% учащихся воспитывается в неполной семье. Неблагополучных семей нет.

В классе присутствует как дети с высокой степенью развития познавательного интереса, так и с проблемами в обучении. Эти учащиеся не имеют мотивации к обучению, учатся без интереса. Регулярно проводятся беседы с родителями и с самими учениками. Большая часть родителей активно принимают участие в жизни класса.

Класс достаточно общительный, дружный. Есть ребята, которые немного в стороне от коллектива, но это особенности их характера. Присутствуют учащиеся, которые увлекаются несколькими предметами. У этих учащихся широкий кругозор и разносторонние интересы. Они достаточно активны, охотно отвечают на уроках и занимаются творческой деятельностью.

В целом, класс работоспособный, активный, ребята разносторонние, доброжелательные. Большая часть класса правильно реагирует на критику.

Проводилось 8 уроков учителем математики по составленному нами поурочному планированию и контрольная работа после завершения темы «Комплексные числа».

Анализирую результаты усвоения темы «Комплексные числа», можно сделать вывод, что большинство учащихся ее усвоили. По результатам контрольной работы по этой теме качество знаний – 68,7%. Тема была усвоена довольно успешно, больших затруднений не возникло, так как учащиеся обладают необходимыми знаниями для усвоения этой темы.

Результаты контрольной работы по теме «Комплексные числа»

Таблица 1

№	Фамилия, имя	Оценка
1	Бакшеев Владислав	3
2	Ветрова Валентина	4
3	Войтенко Матвей	4
4	Габуев Олег	5
5	Жеребцова Варвара	4
6	Калина Дарья	3
7	Кобзин Дмитрий	5
8	Лёвченко Инна	3
9	Лоскутова Анастасия	4
10	Мищенко Виктория	5
11	Мозговой Владислав	4
12	Неронов Артём	4
13	Паняев Георгий	3
14	Стадников Илья	3
15	Шатерников Сергей	4
16	Языджан Мария	4

В результате проверки уровень обучаемости составил 100%, то есть все учащиеся справились с контрольной работой. Качество знаний по этой теме - 68,7%.

Основные ошибки учащихся в контрольной работе.

- неглубокое понимание понятий и определений (модуль комплексного числа, корень из комплексного числа, уравнения);
- невнимательность;

- недостаточное знание предыдущих тем (тригонометрия, формулы сокращенного умножения).

В целом, учитывая ошибки по содержанию и качество знаний по данной теме можно сделать вывод, что контрольная работа выполнена успешно, что и говорит об удачном завершении формирования понятия комплексного числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Изучение темы «Комплексные числа» в настоящее время предлагается либо на факультативах, либо изучается в профильных классах старшей школы.
2. Изучение этой темы преследует следующие основные цели:
   - углубление представлений о понятии числа;
   - дальнейшее развитие представлений о единстве математики как науки;
   - повышение математической культуры в целом.
3. Проверка методических разработок показала, что учащиеся 10 класса способны усвоить понятие комплексного числа.
4. Учащиеся вполне успешно усваивают содержание и объем понятия комплексного числа, а так же умеют применять это при решении практических задач.
5. При изучении темы «Комплексные числа» в силу особенностей старшего школьного возраста у учителей и учеников существуют как проблемы, так и положительные моменты.
6. Изучение этой темы в старших классах средней школы способствует повышению уровня знаний, умений и навыков во многих других разделах школьного курса.
7. Можно утверждать, что поставленные цели и задачи были полностью достигнуты, а именно:
   - было разработано тематическое и поурочное планирование;
   - выявлены психолого-педагогические особенности восприятия темы «Комплексные числа» в старших классах;
   - разработан план-конспект урока и контрольная работа по теме «Комплексные числа и арифметические операции над ними»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., – М.: Мнемозина, 2009. - 424 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович [и др.] под ред. А.Г. Мордковича. - 6-е изд., – М.: Мнемозина, 2009. - 323 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. – М.: Илекса, 2012. – 432 с.

4. Башмаков М.И. Задачи по математике. Алгебра и анализ / М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой; Под ред. К. Фадеева. – М.: Наука, 1982. – 192 с.

5. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. — М.: Астрель, 2006. - 514 с.

6. Глейзер, Г.И. История математики в школе. IX – X кл.: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.

7. Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников: книга для учителей и класных руководителей / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.

8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учеб. / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975. – 431 с.

9. Ляпин Е.С. Алгебра и теория чисел. Ч 1. Числа. Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. институтов /Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. – М.: Просвещение. – 381 с.

10. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения / А.И. Маркушевич. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. - 55 с.

11. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.

12. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 264 с.

13. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного/ В.Д. Морозова; ред. д-ра техн. наук, проф. В.С. Зарубина и д-ра физ.-мат. наук А.П. Крищенко.— Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 521 с.

14. Немов, Р.С. Психология. Общие основы психологии : Кн. 1: учеб. для студентов высших учебных заведений / Р.С. Немов – 4-е изд. – М.: Владос, 2003. – 688 с.

15. Никольский С.М. Элементы математического анализа: учебное пособие / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 159 с.

16. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / М. Я. Выгодский, А. С. Якимова. — М.: Высшая школа, 2001. — 445 с.

17. Пичурин, Л.Ф. Вопросы общей методики преподавания математики: учеб. пособие для ст. заочников III-IV курсов физ.-мат. фак-тов пед. институтов / Л.Ф. Пичурин, В.В. Репьев. – М.: Просвещение, 1979. – 80 с.

18. Поспелов. Н. Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников / Н. Н. Поспелов, И.Н. Поспелов. – М.: Педагогика, 1989. – 157 с.

19. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика: для сред. и ст. шк. возраста / А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1985. – 351 с.

20. Сластенин, В.А. Педагогика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин, И.Ф. Исаев, Е.Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. – М.: Академия, 2002. – 576 с.

21. Шарова О.П. Комплексные числа в курсе математики средней школы: Автореф. дисс. к пед. наук. / О.П. Шарова. – Ярославль, 1969. – 16 с.