

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
(Н И У « Б е л Г У »)

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

**МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА
«ЦЕПНЫЕ ДРОБИ» В УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ**

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое
образование, профиль Математика и информатика
очной формы обучения, группы 02041203
Юрченко Владимира Александровича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Мотькина Н. Н.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ КУРСЫ	6
1.1 Цели, задачи, функции факультативных курсов в профильном обучении .	6
1.2 Роль факультативных курсов в обучении математике.....	9
1.3 Применение информационных технологий в рамках факультативного курса по математике	13
ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА «ЦЕПНЫЕ ДРОБИ» В УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ.....	21
2.1 Методы, используемые при работе с обучающимися на факультативном курсе.....	21
2.1 Разработка факультативного курса «Цепные дроби»	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	55
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	57

ВВЕДЕНИЕ

На текущем моменте развития общеобразовательная школа огромное внимание уделяет проблеме обеспечения глубокого и фундаментального изучения учащимися учебным материалом, повышению производительности обучения, развитию у школьников стремления к учению. И поэтому преподаватели всегда ищут способы совершенствования учебно-воспитательного процесса. Учёные-педагоги, которые занимаются проблемой исследования уровня знаний учащихся в школе по математике, пришли к выводу, что накопление знаний у учащихся обычной школы по математике должны быть лучше.

Правильная постановка по предмету факультативных занятий — это есть внеклассная работа школьников, которая может быть логичным продолжением учебных занятий, основное предназначение которой — формирование интереса к предмету, склонностей школьников и мудрая организация их собственного времени.

В данной работе представлена методика проведения факультативного курса по математике по изучению цепных дробей. При проведении факультативного курса учителю необходимо знать уровень мотивации обучения учащихся, что актуально при обучении учащихся не только по данной теме.

Проблема: разработка факультативного курса по математике «Цепные дроби» для расширения кругозора по предмету и подготовки к выпускным и возможным вступительным экзаменам.

Объект исследования: факультативные курсы в профильном обучении средней ступени общеобразовательной школы.

Предмет исследования: факультативный курс по математике

Целью данной работы является разработка методики изучения цепных дробей на факультативных занятиях в условиях применения

информационных технологий обучения для учащихся 9-го класса основной школы, позволяющую активизировать учебную деятельность школьников.

Для достижения цели данной работы необходимо решить следующие задачи:

- осуществление поиска и анализа информации и литературы по теме выпускной квалификационной работы;
- обработка теоретического материала (его отбор, а также последовательное и доступное изложение);
- поиск областей применения цепных дробей;
- составление практического материала в форме упражнений;
- разработка факультативного курса по теме «Цепные дроби» и его методическое обеспечение (программу курса, список рекомендуемой литературы и др.).

Актуальность данной темы заключается в том, что она интересна своим применением в различных задачах в том числе и олимпиадного характера, которые встречаются на экзаменах. Действительные числа однозначно отображаются цепными дробями. Главное значение такого изображения состоит в том, что, зная цепную дробь, изображающую действительное число, возможно определить это число с достаточной точностью.

Преимущество цепных дробей по сравнению с десятичными заключается в том, что цепные дроби не связаны ни с какой системой счисления и в своем первоначальном виде отражают свойства изображаемых ими чисел. Так, рациональность и иррациональность изображаемого числа находит отражение в конечности или бесконечности соответствующей ему цепной дроби. Помимо того, периодичность бесконечной цепной дроби указывает на то, что иррациональность – квадратичная.

Требование же практического характера, а именно находить приближенное значение изображаемого числа, цепные дроби удовлетворяют гораздо лучше, чем десятичные дроби. Недостатком цепных дробей является

то, что для них никаких почти приемлемых правил арифметических действий не существует. Поэтому они не получили широкого применения.

Структура выпускной квалификационной работы определена темой, особенностью ее раскрытия и методологией. Работа состоит из введения, первой главы, состоящей из трех параграфов, второй главы, состоящей из двух параграфов, заключения и списка используемой литературы.

ГЛАВА 1. ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ КУРСЫ

1.1 Цели, задачи, функции факультативных курсов в профильном обучении

Ещё до ввода факультативных занятий в нашей стране сложился конкретный комплекс форм математической подготовки учащихся. Большое развитие получали математические олимпиады, школы, и классы с математической специализацией. Повышенная математическая подготовка давала возможность учащимся, которые проявляют склонности и способности в области математики, повысить свой уровень математического развития, получить дополнительные, по сравнению с требованиями обязательного курса, знания, умения и навыки. К несчастью, школьные программы не безграничны и не могут в себя вместить все разделы математики. Среди способов решения данной проблемы одно из главных мест принадлежит введению в общеобразовательную школу факультативных занятий. Общеобразовательные функции факультативных занятий заключается в предоставлении возможностей учащимся, проявляющим интерес и склонности к предмету, получить дополнительные знания, умения и навыки по этому предмету. В этом смысле дополнительные занятия входят в систему повышенной подготовки учащихся, являясь одним из её компонентов. Факультативы являются средним между уроками и внеклассной работой. С первым их объединяет наличие программы, а со вторым - широкий выбор их учащимися.

Главная задача факультативных занятий по математике - это углубление и расширение знаний, развитие интереса учащихся к предмету, развитие их математических способностей, привитие школьникам интереса и вкуса к самостоятельным занятиям математикой, воспитание и совершенствование их инициативы и творчества [15].

Факультативные занятия содействуют профессиональной ориентации учащихся в сфере математики и её приложений, помогая тем самым в выборе профессии и дальнейшее совершенствование в ней. Факультативные занятия - массовая форма повышения математической подготовки учащихся. Они играют большую роль в развитии школьного, в том числе и математического образования. Такие занятия позволяют производить поиск и экспериментальную проверку нового содержания, новых способов обучения, в больших пределах изменять объём и сложность изучаемого материала.

В задачи факультативных занятий входит: учитывая интересы и склонности учащихся, расширить и углубить знания по предмету, обеспечить усвоение ими программного материала, ознакомить школьников с некоторыми общими идеями современной математики, а также раскрыть приложения математики на практике.

Эффективность учебного процесса, в процессе которого формируются умственный и нравственный облик человека, во многом находится в зависимости от успешности усвоения одинакового, обязательного для всех членов общества содержания образования и всемирного удовлетворения и развития духовных запросов, интересов и способностей каждого школьника в отдельности. Без факультативных занятий такой переход осуществляется очень сложно.

Если разделять учебный материал на основной - обязательный для всех учащихся, и на дополнительный, рассчитанный на удовлетворение повышенных интересов отдельных учеников (не является обязательным), то это даст великолепную возможность для повышения уровня общего образования, что в свою очередь удовлетворяет требованиям научно - технического прогресса, не допуская перегрузки учеников обязательными учебными занятиями.

Назначение факультативных занятий состоит в совершенствовании способностей и интересов учащихся в сочетании с общеобразовательной

подготовкой по избранному предмету и на её основе. Положение факультативов в ряду форм углубленного изучения отдельных учебных предметов описывается следующим способом: "Факультативы продолжают оставаться одним из основных средств дифференциации обучения в условиях всеобщего среднего обязательного образования, помогают решать задачи совершенствования содержания и методов обучения, воспитания учащихся, их подготовки к жизни, к труду" [15].

Факультативные занятия по математике ведутся в школе с 8 класса со следующим числом недельных часов: 8 класс - 1 час, 9 класс - 2 часа, 10 класс - 2 часа и 11 класс - 2 часа.

1.2 Роль факультативных курсов в обучении математике

В настоящее время признано, факультативные занятия начинать с 8-го класса. Обучение на факультативных занятиях ведётся по программам, рекомендованным Министерством просвещения. К настоящему времени разработаны пособия по многим темам факультативных занятий. Программа факультативных занятий по математике составлена так, что все вопросы её могут изучаться синхронно с изучением основного курса математики в школе. Порядок тем факультатива не случаен. Он продуман и по возможности связан с построением целого курса математики. Следовательно, факультативные занятия роднит с основным курсом и разделяет с разными типами внеклассной работы наличие программы факультативных занятий, которые лежат в их основе [16].

Для того, чтобы факультативные занятия по математике были эффективными необходимо при их организации учитывать следующее:

- наличие высококвалифицированных учителей или других специалистов, способных вести занятия на высоком научно - методическом уровне;
- так же рекомендуется не менее 15 учащихся, которые желают изучать данный факультативный курс.

Запись учащихся на факультативные курсы должна производиться добровольно и с учетом их интересов. Не нужно принуждать учащихся в обязательном порядке изучать факультативные курсы. Также с вниманием следует относиться к тем ученикам, у которых встречаются трудности в изучении математики или совмещают обучение в школе с другими видами занятий (спорт, музыка и так далее). К достоинствам факультативных занятий следует отнести то обстоятельство, что их содержание в значительной степени устанавливается учителем [15].

Выбирая факультативный курс основная часть школьников ставит на первое место по значимости мотив, связанный с наличием интереса к предмету, подготовленность себя к будущей профессии, желание узнать новое, занимательное. Опора на сильный интерес и склонность старшеклассников к математике является той основной отличительной чертой, которая характеризует факультативные занятия по предмету.

Практика проведения факультативов показывает, что при наличии общего интереса к математике, интересы школьников, посещающих данный факультатив, могут существенно отличаться [17]. Поэтому при построении любого факультативного курса по математике должны учитываться всесторонние интересы школьников к предмету. Таким образом это позволит в большей степени увеличить и разнообразить форму и способы проведения занятий, а также повысить самостоятельность и эффективность работы учащихся. Кроме этого, интерес к одному или нескольким аспектам будет перерастать в интерес ко всей математике. Требования к ученику, участвующему в работе факультатива, такие же, как и в отношении всякого учебного предмета: обязательное посещение занятий, выполнение домашнего задания и других поручений, собранность, дисциплинированность в учёбе и так далее. Возможность 1-2 часа в неделю дополнительно заниматься со школьниками, которые проявляют повышенный интерес и способности к математике, представляет собой одно из проявлений новой формы преподавания математики - дифференциация обучения.

По существу, факультативные занятия являются наиболее динамичной разновидностью дифференциации обучения. Одним из важных моментов факультативных занятий является использование информационных схем. Информационные схемы могут использоваться при изучении новой темы и организации повторения пройденного материала. Такая схема может содержать теоретический материал большого объёма, отражать различные изучаемые понятия и свойства во взаимосвязи. Поэтому их использование на занятиях позволяет формировать у учащихся умение логически мыслить,

анализировать представляемую им зрительную информацию, систематизировать у ребят имеющиеся знания.

У учащихся, которые приступили к изучению математики на факультативных занятиях, безусловно, будут расти возможности интенсификации учения и, главное, трудоспособность по ходу занятий. Этим во многом устанавливается и подход учителя к ведению занятий. Из этого следует необходимость разработки методики обучения, которая помогла бы повысить эффективность занятий. Из методической литературы следует, что в арсенале учителя, ведущего занятия в классах с углубленным изучением предмета или на факультативных занятиях всегда найдут свое место такие средства и методы обучения, которые приводят к наибольшей активности учащихся. Именно на факультативных занятиях можно ставить вопрос об ускорении изучения материала за счет значительной самостоятельности работы учащихся, большего внимания, уделяемого индивидуальному подходу к обучению.

Преподаватель, приступивший к ведению факультатива, должен владеть теми общими методами, которые отличают методику углубленного изучения от методики обязательного курса, и позволяют хорошо усвоить конкретную методику изложения данной проблемы на факультативах.

Дополнительные занятия служат не только приобщению огромного количества учащихся к углубленному изучению математики, но и важным средством индивидуализации обучения, а потому и освобождению от дополнительного к обязательному курсу материала тех учащихся, которые не проявляют интереса к математике, не проявили в ней способностей. Эту сторону дела нельзя забывать учителю, ведущему факультативы по математике. Совместно с тем формирование интереса у слушателей факультативных групп позволяет естественно углублять материал обязательного курса. Используя это, учитель получает возможность придать большую законченность курсу школьной математики, показать его связи с

большой наукой, показать перспективы курса и возможности развития его содержания.

Таким образом, в основе выбора учащимися факультативных занятий по математике лежит серьезный интерес к математике или ее приложениям. Данный интерес удовлетворяется и развивается при рассмотрении тем, имеющих большое общекультурное либо прикладное значение.

1.3 Применение информационных технологий в рамках факультативного курса по математике

Изучению значения информационных технологий в образовательном процессе посвящены работы С. А. Бешенкова, Я. А. Ваграменко, Ю. А. Митенев, А. А. Кузнецова, В. М. Монахова, И. А. Новик, И. В. Роберт, М. А. Родионова, Н. Х. Розова, Е. И. Смирнова, В. Д. Шадрикова и др [19].

Предметом их научных изысканий считается поиск педагогических условий для эффективного использования ИКТ в целях развития личности обучающегося, подготовки преподавателей в условиях информационного общества. Тем не менее, как мне кажется, проблеме создания творческой активности на внеурочных занятиях в этом аспекте уделяется немного внимания, и она требует дальнейшей работы. Помимо того, внедрение ЕГЭ в школьное образование накладывает четкие рамки на содержание урочных занятий, поэтому для становления творческой активности учащихся имеется больше возможностей именно на внеурочных занятиях.

Факультатив, являясь будучи одним из видов внеурочных занятий и особой формой дифференцированного обучения, обладает своей целью увеличения общего кругозора учащихся в определенной предметной области. Помимо того, переход к профильной школе в старшем звене привел к появлению элективных курсов, так называемых «курсов по выбору». В отличие от элективных курсов, факультативные курсы не являются обязательными. Отметим, что факультативные курсы предполагают низкую регламентацию учебной деятельности учащихся, в отличие от элективных курсов, решающих задачи специализированной подготовки старшеклассника в сфере выбранной им будущей профессии. Необходимость выбора факультативной формы проведения занятий в нашем исследовании обусловлена ее более свободными возможностями для развития творческой активности учащихся с внедрением информационных технологий.

Актуальность исследований в области разработки последовательного внедрения ИКТ при обучении математике, обнаружения условий и факторов восприятия учебного материала обучающимися в новой информационной среде не один раз подчеркивалась на разнообразных Международных конференциях.

Происходящие в данный момент изменения в содержании математического образования привели к тому, что появились тенденции обновления содержания внеурочных занятий по математике, тем не менее это не означает, что следует всецело отказаться от тех или иных традиционных вопросов, которые вызывали у учащихся огромный интерес.

Проблема использования информационных технологий разносторонне рассмотрена в научных трудах различных педагогов и психологов. Например, в работах И. В. Роберт изучаются дидактические возможности новых информационных технологий, рассматривается психолого-педагогическая необходимость внедрения тех или иных средств новейших информационных технологий в процессе обучения.

Исследования Е. С. Полат и Я. А. Ваграменко посвящены концептуальным вопросам дистанционного обучения на базе компьютерных телекоммуникаций, а также вопросам дистанционного повышения квалификации учителей. Научные труды А. А. Кузнецова и др. посвящены вопросам развития ИКТ компетентностей учителя, функционирования современной информационно коммуникационной образовательной среды, а также роли и места в ней учебника.

Эти и другие исследователи сходятся во мнении, что компьютерные технологии имеют все шансы и обязаны встать на службу образованию. Явление информатизации образования они характеризуют как логический социальный процесс, исходящий из нужд современного общества. Отмечаются большие возможности передовых информационных технологий по передаче, хранению, обработке и представлению самого широкого спектра информации (текст, звук, графика, видео и др.).

Также частью всемирного проекта компании Intel «Инновации в образовании» служит программа «Учимся с Intel», важными функциями которой являются выравнивание стартовых возможностей для детей, ограниченных в доступе к информационным технологиям, и развитие у них навыков, необходимых для успешной жизни в условиях наукоемкой экономики XXI века. Основной моделью предоставленной программы является – проведение курса в рамках дополнительного образования [19].

Программа курса подразумевает различные организационные формы: кружки – занятия, которые никак не связаны с основной школьной программой; элективные курсы – курсы по выбору для учащихся из разных классов (либо одного класса) одной школьной ступени; а также профильные курсы – курсы в рамках выбранного профильного обучения для учащихся старших классов.

Применение ИКТ на внеурочных занятиях по математике – одно из средств формирования коммуникативных умений учащихся, которое позволяет ускорить образовательный процесс, активизировать творческую активность учащихся, увеличить эффективность занятия.

В итоге после проведенного исследования были установлены нижеперечисленные критерии отбора информационных технологий для проведения внеурочных занятий:

- предоставление доступа к нужной информации;
- широкие возможности для обработки текстовой и графической информации;
- возможность учета индивидуальных особенностей школьника при решении поставленных задач;
- наличие необходимого инструментария для осуществления самостоятельной поисковой работы школьников;
- отсутствие элементов, отвлекающих внимание учеников от занятий математикой.

При планировании внеурочной работы с использованием ИКТ преподавателю нужно пройти следующие этапы:

1. Постановка дидактических целей цикла внеклассных занятий.
2. Определение формы проведения внеурочных занятий.
3. Формулировка темы для внеурочных занятий.
4. Отбор ИКТ в соответствии с поставленными дидактическими целями и формой внеурочных занятий.
5. Постановка целей и задач каждого отдельного занятия и в соответствии с ними – выбор содержания, методов и наиболее подходящих форм работы с ИКТ.

При отборе ИКТ для организации и проведения внеурочных занятий, необходимо также руководствоваться целесообразностью и полезностью их применения.

Следовательно, современный уровень развития информационных технологий обучения не только позволяет создавать эффективные компьютерные обучающие программы, однако и дает педагогам возможность выбора содержания и совершенствования методики обучения. При данном воздействии информационных технологий на содержание определенного учебного предмета имеется несколько аспектов, которые дают возможность расширить содержание;

изменить структуру и компоненты содержания;

позволяет обогатить методику преподавания.

Обучая математике, нужно совершенствовать познавательную, творческую активность учащихся, пробуждать в них потребность в знаниях, формировать навыки самостоятельной учебной работы. Решать эти проблемы можно через факультативы, проводимые как в самой школе, так и за ее пределами. Факультатив организуется не только для углубления знаний учащихся, но и для развития разнообразных интересов и способностей школьников, сознательного отношения к учебе, умения самостоятельно

пополнять знания, ориентироваться в научной информации, знакомиться с важнейшими достижениями науки и техники.

Формирование творческой активности учащихся на основе применения ИКТ на внеурочных занятиях по математике проходит следующие этапы творческой деятельности:

- мотивационный (применение и демонстрация практической значимости математических знаний в смежных школьных дисциплинах; использование диалоговых форм организации учебной деятельности; наличие опыта выполнения математических заданий с анализом и особенностями творческих подходов к их решению; построение системы взаимосвязанных заданий; низкая регламентация поведения в исследовательской деятельности);
- подготовительный (постановка и поиск решения поставленной задачи);
- сбор и анализ данных, возникновение гипотез, анализ возможностей ИКТ;
- проверка адекватности решения);
- исследовательский (наглядное моделирование на основе визуализации объектов и процессов; актуализация множественности решений на основе однозначности данных; прогноз результатов, поиск решения поставленной задачи; проверка гипотез, представление результатов);
- оценочный (оценка истинности гипотез; формулировка выводов в соответствии с полученными результатами; применение выводов к новым данным);
- анализ обобщений и рефлексивный контроль; коррекция результатов).

Факультатив, в основу которого заложена данная модель, органично вписывается в расписание учебных занятий, не требует дополнительных затрат учебного времени, не ведет к перегрузке внепрограммными знаниями, посилен для освоения школьниками, пробуждает интерес к предмету и к учению в целом.

Рассмотрим этапы развития творческой активности учащихся на факультативных занятиях. На первом этапе учащиеся получают задание по созданию творческого продукта по математике (реферат, доклад, презентация и т.п.), в котором должны быть отражены различные математические факты или открытия. Затем они выполняют поиск информации в различных источниках, оформляют работу с использованием ИКТ и выступают с подготовленными творческими работами. Таким образом, учащиеся получают образцы выполнения заданий с анализом и особенностями творческих решений.

На втором этапе идет разбор индивидуальных творческих работ учащихся: происходит анализ возможностей применения ИКТ, умения выстраивать последовательность действий, выдвигать гипотезы. Умение выдвигать гипотезы является важным умением, способствующим формированию творческой активности. На данном этапе происходят такие процессы мышления, как абстракция, сравнение, анализ и синтез, обобщение, посредством которых учащиеся ставят и решают поставленные задачи.

На третьем этапе учащиеся объединяются в малые группы и проанализировав результаты получают задание по созданию нового творческого продукта. Так происходит видение новой проблемы в знакомой ситуации на основе актуализации творческого потенциала учащихся. Решение поставленной задачи строится, опираясь на уже выполненное исходное задание. Перенос знаний в новую ситуацию предполагает аналитико-синтетическую деятельность, в основе которой лежит обобщение и аналогии, визуализация и ассоциация, раскрывающие существенные связи между объектами. В малой группе учащиеся на основе распределения

ролевых функций актуализируют такие приемы творческой деятельности, как создание нестандартных ситуаций с использованием метода мозгового штурма, метода контрольных вопросов, метода проб и ошибок и т.п.

Здесь имеет место отношение каждого учащегося к решаемой проблеме, к другим членам малой группы, при этом проявляются и формируются пробуждения учащегося к мыслительной деятельности, его творческие способности.

На четвертом этапе происходит защита творческих работ, выполненных в малых группах, делаются выводы о полученном результате, дается анализ использования ИКТ, рефлексивный контроль, оценка и возможная коррекция полученного результата.

Следовательно, прохождение данных этапов призвано способствовать развитию творческой активности учащихся на внеурочных занятиях по математике с внедрением ИКТ.

Подводя итог всему сказанному, можно сделать вывод, что применение ИТ позволяет:

сделать процесс обучения более интересным, ярким и увлекательным за счет богатства мультимедийных возможностей современных компьютеров и новизны такой формы работы для учащихся;

эффективно решать проблему наглядности обучения, расширить возможности визуализации учебного материала, делая его более понятным и доступным для учащихся;

индивидуализировать процесс обучения за счет возможности создания и применения разноуровневых заданий, усвоения учащимися учебного материала в индивидуальном темпе, с использованием удобного способа восприятия информации;

раскрепостить учеников при ответе на вопросы, потому что компьютер позволяет фиксировать результаты, корректно и без эмоций реагирует на ошибки;

организовывать учебно-исследовательскую деятельность учащихся (моделирование, метод проектов, разработка презентаций, публикаций и т.д.), развивая тем самым у школьников творческую активность.

Мной замечено, что учащиеся проявляют больший интерес к теме, если на уроке применяются информационные технологии. Даже самые пассивные из учеников с огромным желанием включаются в работу. Дети с нетерпением ждут следующих уроков, а также помогают готовить необходимые материалы и оборудование. Таким образом, любой урок с применением информационных технологий будет интересным и полезным, когда он сопровождается словом учителя.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА «ЦЕПНЫЕ ДРОБИ» В УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ

2.1 Методы, используемые при работе с обучающимися на факультативном курсе

Факультативные занятия по математике должны создаваться таким образом, чтобы быть для учащихся увлекательными, интересными, а подчас и занимательными. Нужно применять естественную любознательность учеников для создания стабильного интереса к своему предмету. Выдающийся французский физик Луи де Бройль писал, что нынешняя наука - «дочь удивления и любопытства, которые всегда являются ее скрытыми движущими силами, обеспечивающими ее непрерывное развитие».

Основными формами проведения факультативных занятий по математике в наше время являются изложение основных вопросов этого факультативного курса учителем (лекционным методом), семинары, собеседования (дискуссии), решение задач, рефераты учащихся (как по теоретическим вопросам, так и по решению круга задач), математические сочинения, доклады учащихся и т. д.

Тем не менее преподавателю не нужно отдавать предпочтение какой-то одной форме или методу изложения. Вместе с тем, помня о том, что на факультативных занятиях по математике самостоятельная работа учащихся должна занять главное место, следует почаще использовать решение задач, рефераты, доклады, семинары дискуссии, чтение учебной и научно-популярной литературы и т.п.

Одной из вероятных форм ведения факультативных занятий по математике считается разделение каждого занятия на две части. Первая часть будет посвящена изучению нового материала, а также самостоятельной работе учащихся по заданиям теоретического характера. По завершении этой

части занятия учащимся предлагается домашнее задание по изучению теорий и ее приложений. Вторая же часть каждого занятия посвящается решению задач повышенной трудности и обсуждению решений в особенности тяжелых либо увлекательных задач. Решая последовательно все задачи независимо или при небольшой помощи преподавателя, ученики постепенно изучают курс при большом личном участии, проявляя активность и самостоятельность, овладевая техникой точного мышления.

Полезно также свободно использовать задачи проблемного характера.

В настоящее время факультативные занятия по математике проводятся по двум основным направлениям: а) исследование курсов по программе «Дополнительные главы и вопросы курса математики»; б) изучение отдельных математических курсов.

Содержание программы «Дополнительные главы и вопросы» систематического курса математики позволяет решить и углубить изучение программного материала, ознакомить учащихся с какими-то общими современными математическими идеями, раскрыть приложение математики в практике, готовя учителя к работе сообразно новейшей программе.

Делая выбор методов и способов обучения на факультативных занятиях нужно учесть содержание факультативного курса, уровень развития и подготовленности учащихся, их интересы к тем либо иным разделам программы. Одно из главных требований к методам состоит в активизации мышления учащихся, развитию самостоятельности в различных формах её проявления. Также необходимо учесть цели и задачи обучения, воспитания, развития, которые будут реализовываться на данном занятии (или на каком-то из его этапов) и в течении исследования всего материала факультативного курса. Методы обучения играют первостепенную роль в образовании не только знаний, но и умений, и умений учащихся.

На факультативном занятии надлежит уделять внимание развитию последующих умений и навыков:

1) умение слушать объяснение нового материала, а также вести конспект занятия.

2) умение работать с учебником по математике, учебно- методической и научной литературой.

3) умение написать реферат на конкретную тему.

4) умение проводить самостоятельные исследования по поставленным задачам.

5) умение подготовить доклад или сообщение по уже прочитанному материалу.

6) умение решать задачи, доказывать теоремы, которые определены программой факультатива.

Выбор преподавателем методов обучения должен опираться на учёт возрастных и отдельных особенностей учащихся. Для старшеклассников в особенности полезными являются способы обучения, направленные на самостоятельную и творческую деятельность.

При разработке данного факультативного курса опирались большей частью на следующие методы обучения:

1.Алгоритмический метод, при котором обеспечивается вероятность выполнения упражнений с необходимыми пояснениями в определённой очередности. Однако не нужно прибегать к данному методу слишком часто, прежде всего, нужно сочетание этого метода с использованием образца ответа.

2.Объяснительно - иллюстративный метод заключается в том, что учитель с помощью слова, учебника, предметов, изобразительных средств, показа действий организует деятельность учащихся на восприятие готовой информации, объясняет её значение. Достоинство этого метода в экономии времени, даёт учащимся примеры логических рассуждений.

3.Исследовательский метод создан для развития творческих возможностей учащихся и создание у них умения использовать знания в новых ситуациях. При применении данного метода необходимо серьезно

подходить к организации процесса управления творческого поиска учащихся для того, чтобы школьники почувствовали «напряжённость поиска и радость открытия». Для этого нужно выбрать задачи посильные для решения, однако требующие отдельного поиска решения, а еще подтверждения верности найденного решения [17].

На факультативах разрешено применять различные формы проведения занятий: лекции, практические работы, обсуждение заданий по дополнительной литературе, доклады учеников, составление рефератов, лабораторные работы, самостоятельное изучение литературы.

Остановимся на некоторых из них:

1) Лекция учителя подразумевает постоянное изложение материала, позволяющее проследить внутрпредметные и межпредметные связи, ознакомить с историей вопроса, возможностей его развития, показать значение изучаемого в практике. На лекции учащиеся получают возможность слышать логически стройную и грамотную роль учения. Опираясь на психологические закономерности, можно добиться того, чтобы во время рассказа учителя максимально активизировать деятельность (мыслительную) школьников. Значит, школьную лекцию наравне с иными формами можно применять при изложении нового материала. При проведении лекции возможны беседы с учениками, обсуждение возникших вопросов, постановка задач и так далее.

2) Подготовка учениками рефератов - выполнение подобных заданий важно прежде всего в отношении воспитания навыков самообразования, удовлетворение индивидуальных интересов учащихся. Одновременно индивидуальное задание должно иметь ценность для всей факультативной группы. Следует стремиться к тому, чтобы подготовленные рефераты заслушивались и обсуждались. К подготовке доклада можно привлечь несколько ребят, заблаговременно изучивших его. Для рефератов нужно подбирать темы, для которых есть легко доступные источники.

3) Семинары уместно проводить для углубления и систематизации знаний по какой-либо теме. В ходе подготовки к семинару школьники получают навыки научного исследования и его оформления, учатся защищать свои умозаключения и убеждения, рецензировать выступления своих товарищей.

4) Практикумы же относятся к числу активных форм учебных занятий. Они проводятся при завершении больших разделов курса и имеют главной целью закрепление и расширение теоретического материала, изложенной лекции.

Но никак нельзя отдавать предпочтение какой - то одной форме или методу изложения. Вместе с тем, не забывая о том, что на факультативном занятии по математике самостоятельная работа должна занять ведущее положение, при организации данного факультативного курса рекомендуется проведение проблемных лекций, семинаров, собеседований, где учащиеся будут выступать со своими сообщениями, практических занятий.

Рассмотрим, какие образовательные технологии и методические приемы могут стать эффективным инструментом обучения в рамках факультативного курса.

Метод проектов

Метод проектов, на взгляд ряда специалистов, является эффективным инструментом для развития самостоятельности, творческого потенциала, алгоритмического мышления [21]. В результате проектной деятельности учащиеся получают базовые знания и умения, получают профессиональную ориентацию [7].

Применение метода проектов на уроках математики позволяет развить необходимые умения и навыки. Школьники при подготовке проекта имеют возможность осмыслить полученные результаты, сформировать к ним собственное отношение [4].

Подводя итог исследованию вопросов эффективного применения проектной технологии в рамках факультативных курсов по математике,

отметим, что в ходе проектирования учитель играет роль консультанта, организатора познавательной деятельности учащихся, направляя тем самым обучающихся к деятельности исследовательского, творческого характера.

Информационно-коммуникационные технологии

Информационные и коммуникационные технологии (ИКТ) – это «широкий спектр цифровых технологий, используемых для создания, передачи и распространения информации и оказания услуг (компьютерное оборудование, программное обеспечение, телефонные линии, сотовая связь, электронная почта, сотовые и спутниковые технологии, сети беспроводной и кабельной связи, мультимедийные средства, а также Интернет)» [14].

В рамках исследования вопросов применения ИКТ на уроках математики остановимся на возможностях применения инструментальных средств для обучения.

Технология развития критического мышления

Особое внимание следует уделить технологии развития критического мышления при обучении математики.

«Непосредственно под технологией развития критического мышления понимается совокупность разнообразных приёмов, направленных на то, чтобы сначала заинтересовать обучающегося» [4], пробудить в нём исследовательскую, творческую активность, после чего сформировать подходящие условия для осмысления материала и, наконец, «помочь ему обобщить приобретённые знания» [7].

Основа технологии – трехфазовая структура урока:

Вызов;

Осмысление;

Рефлексия.

В – Вызов

Обобщение данных по теме, представление о том, что будет изучаться (индивидуальные + групповые формы – первый этап урока).

О – осмысление

Реализация смысла: учащиеся вступают в контакт с новой информацией, систематизируют ее, сопоставляют с новыми знаниями.

Р – рефлексия

Размышление: обобщение полученной информации, выработка собственного отношения к полученной информации, анализ учебного занятия в целом.

Рассмотрим ряд приемов технологии развития критического мышления.

Прием «Кластер»

Этапы работы над кластером могут быть следующие:

В начале урока, в центре чистого листа (классной доски), пишется ключевое слово или предложение, которое является «сердцем» темы.

Вокруг «набрасываются» слова или предложения, выражающие идеи, факты, образы, подходящие для данной темы.

По мере увеличения количества записи, появившиеся слова соединяются прямыми линиями с ключевым понятием. У каждого из «спутников» в свою очередь тоже появляются «спутники», таким образом устанавливаются новые логические связи.

Логично применение кластера при повторении основных вопросов темы на уроках обобщения, подготовки к контрольной работе или на первом уроке после каникул, поскольку такой прием позволяет быстро вспомнить основные вопросы изученного материала.

Чтение со «стопами» (с остановками)

Текст читается дозированно. После каждой смысловой части обязательно делается остановка, задаются «тонкие» или «толстые» вопросы. Во время «стопа» идет обсуждение или дается определенное задание, выполняемое в группах или индивидуально.

В качестве альтернативы такого приема можно предложить продвинутую лекцию. Педагог видоизменяет лекцию, стимулирует учащихся к активному критическому мышлению.

1. Вызов – подготовительная деятельность:

- а) представляет темы, проблемный вопрос по содержанию;
- б) работа в парах, обсуждение и запись имеющихся знаний, информационный прогноз, выступление от пар, запись на доске.

2. Анонс содержания первой части лекции. Задание учащимся до начала:

- по ходу моей лекции один записывает краткую информацию, а другой отмечает в первичных записях (+ -)

3. Осмысление – учитель зачитывает первую часть лекции.

4. Рефлексия – предварительное подведение итогов:

- выделите главную, основную мысль;
- работа в парах, обсуждение услышанного вопроса;
- формулировка общего ответа, подготовка выступления от пар.

Прием Инсерт

Это интерактивная знаковая система записи для эффективного чтения и размышления.

Инсерт Алгоритм:

1 этап инсорта: предлагается система маркировки текста

v «галочкой» помечается то, что уже известно ученикам

- «минусом» помечается то, что противоречит их представлениям

+ «плюсом» помечается то, что для них интересно и неожиданно

? «вопросительный знак» ставится, если что-то неясно, возникло желание узнать больше

2 этап: учащиеся читают предложенный текст по теме и делают соответствующие пометки

3 этап: последовательное обсуждение каждого маркированного фрагмента, план обсуждения:

- 1) Что в этом тексте знакомо «+»
- 2) Что вы узнали нового «v»
- 3) Что требует для вас пояснения «?»

4) Какие ошибки нашли «-»

Работать можно индивидуально и парами, последний способ представляется более эффективным.

Подводя итог анализу применения современных образовательных технологий при изучении математики можно сделать вывод о разнообразии метод и форм проведения учебных занятий, каждый из которых направлен на обучение решению сложных задач.

2.1 Разработка факультативного курса «Цепные дроби»

Вся идеология и теория профильного обучения дает большую степень вариативности в реализации. Поэтому, растет роль предпрофильной подготовки учащихся выпускных классов основной школы. Сущность этой подготовки заключается в том, чтобы создать образовательное пространство, которое будет способствовать самоопределению учащегося через организацию факультативных курсов, информационную работу и профильную ориентацию. Главной задачей предпрофильной подготовки считается комплексная работа с учащимися по обоснованному и жизненно важному выбору предстоящего пути обучения.

Ученик и его родители в основной школе обязаны получить информацию о возможных путях продолжения образования, причем в территориально доступных образовательных учреждениях, наименее затратных по времени, соответствующих интересу и выбираемому профилю дальнейшего обучения.

Пояснительная записка

«Математика как дисциплина и как область деятельности человеческого ума сообразно собственной природе двойственна. С одной стороны, ее объекты, понятия, построения, строго говоря, идеальные и существуют лишь в человеческом воображении (например, прямая линия, не имеющая толщины, так что ее невозможно увидеть). С этой точки зрения математику можно рассматривать как некоторую игру, как, например, игру в шахматы, с определенным набором фигур (понятий) и правил игры. С другой стороны, рассматриваемые математические объекты и понятия являются идеальными воплощениями реальных физических объектов и логические построения в той или иной степени отражают реальные физические законы. Поэтому математические конструкции во многих случаях имеют ту или иную интерпретацию в областях, на первый взгляд далеких от математики.

Проводя аналогию с философией Платона, можно сказать, что математика имеет дело не с вещами, а с идеями вещей. Кстати, сам Платон, как и в целом древнегреческие ученые, очень высоко оценивал занятия математикой: с помощью математики очищается орган души и, как в очищающем огне, пробуждается к новым жизненным силам, в то время как другие занятия его уничтожаются и лишают зрения; он же заслуживает быть сохраненным более, чем тысяча телесных глаз, ибо только он видит истину.

Насколько же теперь отличается понимание значения математики от вышеизложенного? Зачастую на уроках слышны вопросы типа: а зачем нам это надо? или а где это может пригодиться? В целом по вопросу об отношении к математике можно выделить три категории учащихся. Первая – это те, у кого мотивация к изучению математики основана на интересе к самому предмету, другими словами, им нравится играть в эту игру. Вторая включает в себя тех, кто в целом имеет интерес к познавательной деятельности, но круг их интересов сконцентрирован в других областях (типичная ситуация в классах с гуманитарным уклоном). И, наконец, третья категория состоит из учащихся с низкой мотивацией к образовательной деятельности и не имеющих интереса к учебе. И если первой категории при проведении уроков и занятий можно делать упор на углубленное изучение тех или иных разделов математики, то для второй категории обучаемых более целесообразно делать акцент на общекультурный, межпредметный и прикладной аспекты математики, ее роль инструмента познания мира. Поэтому целесообразно в рамках предпрофильной подготовки более широко использовать темы, выходящие за рамки обязательного содержательного минимума государственного стандарта образования» [12].

Данный курс может быть полезен и интересен учащимся с различным уровнем подготовки. Работа с учащимися может проводиться как индивидуально, так и в группах.

Цель - формирование способностей школьников к самообразованию, потребности и умений в их самосовершенствовании.

Курс предназначен для учащихся 8-9 классов на 11 часов по 1 часу в неделю. Одна из целей – дать учащимся, проявившим интерес к математике, возможность углублённого изучения основного курса путём рассмотрения заданий, требующих нестандартного подхода при своём решении. Другой важной целью является формирование мировоззрения учащихся, развитие их логического мышления. Достижению этих целей служат специально подобранные задания, решение которых требует дополнительных знаний, полученных в данном курсе, что развивает сообразительность, логическое мышление и стремление к самосовершенствованию.

В данном курсе рассматриваются задачи по теме «Цепные дроби»

Основные задачи курса:

- формирование устойчивого интереса к изучению математики;
- развитие умения самостоятельно приобретать и применять знания;
- развитие творческих способностей, умения работать в группе, вести дискуссию, отстаивать свою точку зрения;
- повышение уровня математического и логического мышления.

В процессе изучения факультативного курса, учащиеся знакомятся с именами таких ученых, как Архимед, Евклид и другие. Результатом обучения должно стать не количество сообщаемой информации, а качество ее усвоения; умение уверенно применять ее к решению новых, ранее не встречавшихся заданий.

Примерное распределение аудиторной нагрузки по темам

№	Тема	Количество часов	
		Лекция	Практика
1	Вводное занятие	1	
2	Представление рациональных	1	1

	чисел цепными дробями		
3	Подходящие дроби	1	1
4	Цепные дроби и программирование	1	
5	Задача Христиана Гюйгенса	1	
6	Решение диофантовых уравнений		2
7	Античные математики		1
8	Итоговое занятие		1

Темы проектов для творческой работы

1. Античные математики.
2. Трактат по арифметике.
3. Применение цепных дробей с помощью зубчатых передач.
4. Мультимедийное приложение к задачам по теме «Конечные цепные дроби»

Отметим теперь некоторые варианты выполнения учениками зачетных заданий.

В самом простом варианте это может быть:

Ученик решает домашнее индивидуальное задание предложенные учителем задачи из того списка, который завершает каждую тему и называется «Задачи для самостоятельного решения».

Группа учеников решает в качестве домашнего задания предложенные учителем задачи из того же раздела «Задачи для самостоятельного решения» или из любого другого источника, предложенного учителем.

Основываясь на результатах выполнения этого задания, учитель выставляет оценку по традиционной пятибалльной системе.

Возможен третий вариант оценивания учащихся: для промежуточной аттестации учащимся предлагается написать рефераты на темы, предлагаемые учителем (список тем можно сообщить учащимся заранее, чтобы они могли выбрать понравившуюся тему, возможно, ученики сами могут предложить собственные темы) или же сделать презентацию.

Работа над рефератом или презентацией может носить как индивидуальный характер, так и групповой. Темы, предназначенные для работы группы учеников, не исключаются. Ученики могут осуществлять поиск информации по выбранной теме как самостоятельно, так и обратиться к источникам, рекомендованными учителем. По результатам работы над рефератом учащиеся выступают с докладом на уроке или могут принять участие в диспуте на данную тему. Все это соответствующим образом оценивается учителем. Итоговая оценка может выставляться как среднее арифметическое между теми оценками, которые были заслужены учащимися в течение курса. Так же курс может быть завершён написанием итоговой контрольной работы.

Основное содержание курса

Занятие 1

Тема: Вводное занятие

Цели и задачи:

Образовательные: познакомить учащихся с историей становления цепных дробей.

Развивающие: совершенствовать творческую и мыслительную активность учащихся; развивать кругозор и способность к обобщению.

Воспитательные: прививать учащимся интерес к предмету посредством применения исторических фактов.

Ход урока

На первом занятии учащимся необходимо сообщается цель и значение факультативного курса.

I. Вступительная речь учителя

Учитель знакомит учащихся с понятием цепных дробей, обращаясь к истории развития цепных дробей. Желательно во время занятия использовать презентацию для лучшего усвоения учениками новой информации.

II. Словарик «Математики, которые занимались цепными дробя»

Учитель предлагает учащимся завести словарь, в котором будут записаны имена математиков, которые в то или иное время занимались темой «Цепные дроби». В дальнейшем словарь может пригодиться учащимся при выполнении творческих проектов.

III. Итог. Домашнее задание

Заполнить словарь, дописав года жизни ученых.

Предложить нескольким ученикам сделать презентацию об одном из математиков причастных к цепным дробям.

Занятие 2-3

Тема: Представление рациональных чисел цепными дробями

Цели и задачи:

Образовательные: формировать представления учащихся о цепных дробях.

Развивающие: совершенствовать способность к восприятию нестандартного материала, формировать навыки самостоятельной работы.

Воспитательные: воспитать эмоционально - положительную направленность на практическую деятельность.

Ход урока

I. Вступительное слово учителя

II. План лекции:

III. «Алгоритм Евклида дает возможность найти представление (или разложение) любого рационального числа в виде цепной дроби. Процесс разложения в цепную дробь состоит в последовательном выделении целой части и перевертывании дробной части

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_{n+1}}}}$$

Такое выражение называется правильной (конечной) цепной или правильной непрерывной дробью, при этом предполагается, что q_1 – целое число, а q_2, \dots, q_n – натуральные числа.

Числа q_1, q_2, \dots, q_n называются элементами цепной дроби.

Каждая цепная дробь представляет определенное рациональное число, то есть равна определенному рациональному числу. Но возникает вопрос, не имеются ли различные представления одного и того же рационального числа цепной дробью? Оказывается, что не имеются, если потребовать, чтобы было $q_n > 1$.

Теорема. Существует одна и только одна конечная цепная дробь, равная данному рациональному числу, но при условии, что $q_n > 1$ » [18].

Замечания:

1. В случае разложения правильной положительной дроби первый элемент $q_1 = 0$, например,

$$\frac{77}{187} = 0 + \frac{1}{\frac{187}{77}} = (0,2,2,3).$$

2. При разложении отрицательной дроби (отрицательный знак дроби всегда относится к числителю) первый элемент будет отрицательным, остальные положительными, так как целая часть отрицательной дроби является целым отрицательным числом, а ее дробная часть, как всегда, положительна» [26].

Пример: $-\frac{95}{42} = -3 + \frac{1}{\frac{42}{31}}$, а так как $\frac{42}{31} = (1,2,1,4,2)$, то $-\frac{95}{42} = (-3,1,2,1,4,2)$.

3. Всякое целое число можно рассматривать как непрерывную дробь, состоящую из одного элемента.

Пример: $5 = (5)$; $\frac{1}{m} = (0, m)$.

IV. Практическое задание

Представить в виде цепных дробей

А) $\frac{61}{27}$

Б) $\frac{65}{42}$

В) $\frac{145}{246}$

Г) $\frac{248}{564}$

Д) $-\frac{195}{343}$

V. Домашнее задание

Разложить в цепную дробь

А) $\frac{40}{74}$ Б) $-\frac{187}{41}$

В) $\frac{998}{377}$ Г) $\frac{756}{638}$

Занятие 4-5

Тема: Подходящие дроби

Цели и задачи

Образовательные: формировать представления учащихся о цепных дробях.

Развивающие: развивать способность к восприятию нестандартного материала, формировать навыки самостоятельной работы.

Воспитательные: воспитать эмоционально-положительную направленность на практическую деятельность.

Ход урока

I. Вступительное слово учителя

II. План лекции:

«Задачей разложения обыкновенной дроби в непрерывную дробь противостоит обратная задача – обращения или свертывания цепной дроби (q_1, q_2, \dots, q_n) в простую дробь $\frac{a}{b}$.

При этом основную роль играют дроби вида:

$$\delta_1 = q_1, \delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}, \delta_3 = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}, \dots \text{ или}$$

$$\delta_1 = q_1, \delta_2 = (q_1, q_2), \delta_3 = (q_1, q_2, q_3) \dots,$$

которые называются подходящими дробями данной непрерывной дроби или соответствующего ей числа $\frac{a}{b}$.

Заметим, что $\frac{a}{b} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = \delta_n$. Считается, что подходящая дробь δ_k имеет порядок k » [26].

«Прежде чем приступить к вычислению подходящих дробей заметим, что δ_k переходит в δ_{k+1} , если в первой заменить δ_k выражением $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

Имеем

$$\delta_k = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$\delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_1} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2 \times 1 + 0} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0} = \frac{P_2}{Q_2}$$

$$\delta_3 = \frac{(q_2 + \frac{1}{q_3})P_1 + P_0}{(q_2 + \frac{1}{q_3})Q_1 + Q_0} = \frac{q_3(q_2P_1 + P_0) + P_1}{q_3(q_2Q_1 + Q_0) + Q_1} = \frac{q_3P_2 + P_1}{q_3Q_2 + Q_1} = \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

При этом принимается, что $P_0 = 1, Q_0 = 0, P_1 = q_1, Q_1 = 1, P_2 = q_2P_1 + P_0, Q_2 = q_2Q_1 + Q_0$ и так далее.

Закономерность, которую мы замечаем в построении формулы для δ_2 , сохраняется при переходе к δ_3 и сохранится также при переходе от k к $(k+1)$.

Поэтому, на основании принципа математической индукции, для любого k , где $2 \leq k \leq n$, имеем

$$\delta_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}} \quad (1),$$

причем $P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \quad (2)$

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$$

Далее, говоря о подходящих дробях δ_k (в свернутом виде), мы будем иметь в виду их форму $\frac{P_k}{Q_k}$.

Соотношения (1) являются рекуррентными формулами для вычисления подходящих дробей, а также их числителей и знаменателей. Из формул для числителя и знаменателя сразу видно, что при увеличении k они возрастают» [18]. «Последовательное вычисление числителей P_k и знаменателей Q_k подходящих дробей по формулам (2) и (3) удобно располагать по схеме:

		q_1	q_2	...	q_{k-2}	q_{k-1}	q_k	...	q_n
P_k	$P_0 = 1$	$P_1 = q_1$	P_2	...	P_{k-2}	P_{k-1}	P_k	...	P_n
Q_k	$Q_0 = 0$	$Q_1 = 1$	Q_2	...	Q_{k-2}	Q_{k-1}	Q_k	...	Q_n

Пример: Найти подходящие дроби к цепной дроби (2, 2, 1, 3, 1, 1, 4, 3)

	2	2	1	3	1	1	4	3
P_k	2	5	7	26	33	59	269	866
Q_k	1	2	3	11	14	25	114	367

Подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ ($1 < n < 8$) равны соответственно

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{26}{11}, \frac{33}{14}, \frac{59}{25}, \frac{269}{114}, \frac{866}{367}.$$

Практически нахождение неполных частных и подходящих дробей удобно объединить в одну краткую схему, которую приведем для $\frac{95}{42} = (2,3,1,4,2)$

Свойства подходящих дробей:

1. Теорема: При $k=1,2,\dots,n$ выполняется равенство

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k$$

2. «Теорема: Числитель и знаменатель любой подходящей дроби – взаимно простые числа, то есть всякая k -подходящая дробь несократима.

3. Теорема: При $1 \leq k \leq n$

$$1) \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}} \quad (k \geq 1)$$

$$2) \frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{(-1)^{k-1} q_k}{Q_k Q_{k-2}} \quad (k \geq 2)$$

4. Теорема: Знаменатели подходящих дробей к цепной дроби, начиная с первого, образуют монотонно возрастающую последовательность, то есть

$$1 = Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_n.$$

5. Теорема: Нечетные подходящие дроби образуют возрастающую, а четные подходящие дроби – убывающую последовательность:

$$\frac{P_0}{Q_0} > \frac{P_2}{Q_2} > \dots > \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} > \dots;$$

$$\frac{P_1}{Q_1} < \frac{P_3}{Q_3} < \dots < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \dots.$$

Две подходящие дроби δ_{k-1} и δ_k , у которых номер отличается на единицу, будем называть соседними.

6. Теорема: Из двух соседних подходящих дробей четная дробь всегда больше нечетной.

7. Теорема: Расстояние между двумя соседними подходящими дробями

$$|\delta_k - \delta_{k-1}| = \frac{1}{Q_k Q_{k-1}} [18].$$

III. Проверка домашнего задания

IV. Практическое задание

Задача 1. Найдите подходящие дроби к цепной дроби

а) (2,2,1,3,1,1,4,3),

б) (2,2,2,1,2,2,2,1),

в) (1,4,1,4,1,4)

г) (1,2,1,3,1,2,1)

Задача 2. Разложите простую дробь в цепную дробь и найдите ее подходящие дроби.

А) $\frac{95}{42}$

Б) $\frac{77}{187}$

В) $\frac{220}{187}$

Г) $\frac{-23}{29}$

Д) $\frac{105}{32}$

Домашнее задание:

Найти действительные числа, которые обращаются в данные цепные дроби

1. (1,1,3,1,2,3,1,3,2)

2. (2,2,2,1,1,2,1)

3. (0,1,4,3,2)

4. (2,1,1,6,8)

Занятие 6

Тема: Цепные дроби и программирование

Цели и задачи

Образовательные: формировать представления учащихся о цепных дробях в программировании;

Развивающие: развивать логическое мышление и способности к восприятию нестандартного материала и ориентации в нём.

Воспитательные: прививать интерес к изучаемому предмету.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

II. Вступительное слово учителя

III. План лекции

Процесс вычисления цепных дробей является циклическим и легко поддается программированию.

Рассмотрим программы на языке программирования Pascal для перевода цепной дроби в действительное число и обратно.

Программа вычисления значения цепной дроби

Программа просит пользователя ввести числитель дроби и количество вложений цепной дроби. Преобразовывает ее в число и выдает результат в виде десятичной дроби.

```

Program TO_NUMBER;
var n, k: integer;
    b:real;
begin
write (' введите знаменатель дроби'); read (b);
write (' введите кол-во вложений '); read (n);
for k:=1 to n do b:=1+1/b;
write (' искомое число = ', b);
end.

```

Результаты работы программы

Цепная дробь преобразована в десятичную. Ошибок не наблюдается.

Вывод.

- + Программа работает корректно.
- Результат представлен в виде десятичной дроби. В случае ее бесконечности компьютер округляет результат.

Программа, выполняющая разложение числа в цепную дробь

Программа просит пользователя ввести число в виде десятичной дроби.

Преобразовав его, выдает результат вида [1, 7, 16]

```

Program TO_FRACTION;
var a: array[1..100] of integer;
    k, n: integer;
    x: real;
begin
write (' введите число '); read (x);
k:=1; a[1]:=trunc(x); k:=2;
while frac(x)<>0 do
begin
x:=1/frac(x) ;
a[k]:=trunc(x) ;
k:=k+1;
end;
n:=k;
write (' искомое число x = [');
for k:=1 to n do write (a[k],',');
write (']');
end.

```

Результаты работы программы

1.8 = [1,1,4,0,]

1.6 = [1,1,1,1,1,0,0,]

$$1.65 = [1,1,1,1,5,1,75350303,2,3,1,1,0,0,]$$

7.3 ошибка 101 – выход за пределы размерности массива

$$2.5 = [2,2,0,]$$

$$4.75 = [4,1,3,0,0,]$$

Описание ошибок

В большинстве случаев из-за округления бесконечных периодических десятичных дробей происходит накопление погрешности. При ручном счете эти дроби записываются в виде обыкновенных и ошибки не происходит.

В некоторых случаях зафиксирована некорректная работа функции `trunc()`. Данная функция отсекает дробную часть действительного числа.

В некоторых случаях зафиксирована некорректная работа функции `frac()`. Данная функция вычисляет дробную часть действительного числа. Для целых чисел результат её работы должен быть равен 0, но происходит ошибка.

Принцип цепной дроби созвучен понятию рекурсии в программировании.

Рекурсивным называется способ построения объекта (понятия, системы, описание действия), в котором определение объекта включает аналогичные объекты (понятие, систему, действие) в виде составных частей.

Примеры рекурсии можно встретить в литературе, искусстве, фольклоре.

Обычно, в программировании под рекурсией понимают такую реализацию, в которой подпрограмма использует в своем теле вызов самой себя.

Написанные выше программы использовали циклический алгоритм.

Исправим программу, используя рекурсивный вызов функции `num(a,m)`, которая вычисляет значение одного вложения цепной дроби. Благодаря рекурсивности мы поднимаемся до первого вложения цепной дроби и получаем ответ.

```

Program TO_NUMBER;
var n, k: integer;
    b:real;
function num(a:real; m:integer):real;
    begin
    if m=1 then num:=1+1/a
    else num:=1+1/num(a,m-1);
    end;
begin
write ('введите знаменатель цепной дроби ');
read (b);
write (' введите кол-во вложений цепной дроби ');
read (n);
b:=num(b,n);
write (' искомое число = ', b);
end.

```

- IV. Домашнее задание: нескольким ученикам предложить сделать презентации по темам «Использование цепных дробей в других науках», «Геометрическое изображение цепных дробей».

Занятие 7

Тема: Задача Христиана Гюйгенса

Цели и задачи

Образовательные: формировать представления учащихся о цепных дробях в различных сферах деятельности;

Развивающие: развивать логическое мышление и способности к восприятию нестандартного материала и ориентации в неё.

Воспитательные: прививать интерес к изучаемому предмету.

Ход урока

- I. Вступительное слово учителя
- II. Проверка домашнего задания
- III. Лекция: Задача Гюйгенса.

Рассмотрим задачу, аналогичную той, с которой встретился голландский математик Христиан Гюйгенс (1629-1695) при построении модели солнечной системы с помощью набора зубчатых колес и которая привела его к открытию ряда важных свойств непрерывных дробей» [18].

«Пусть требуется, чтобы отношение угловых скоростей двух зацепляющихся зубчатых колес II и I было равно α .

Так как угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубцов, то отношение чисел зубцов колес I и II должно быть равно α . Если α несократимая дробь $\frac{N}{n}$ с большим числителем и знаменателем, например, $\frac{1261}{881}$, то для точного решения задачи возникает техническая трудность изготовления колес с большим количеством зубцов.

Задачу можно технически упростить при помощи колес с меньшим количеством зубцов. При этом важно, чтобы отношение этих чисел было, по возможности, ближе к заданному отношению. Хорошего удовлетворения поставленных требований можно добиться, если воспользоваться непрерывными дробями.

Пусть, например, поставлено требование заменить N и n меньшими числами N_1 и n_1 так, чтобы $n_1 \leq 100$ и чтобы отношение $\frac{N_1}{n_1}$ было, по возможности, ближе к $\frac{N}{n}$.

Применяя аппарат цепных дробей, можем дать следующее решение этой задачи: разлагаем $\frac{1261}{881}$ в непрерывную дробь и берем ее подходящую дробь с наибольшим знаменателем, не превышающим 100.

$$\text{Получаем, } \frac{1261}{881} = (1, 2, 3, 7, 8, 2)$$

Составляя схему, находим:

	1	2	3	7	8	2
P_k	1	3	10	73	594	1261
Q_k	1	2	7	51	415	881

Поставленному условию удовлетворяет подходящая дробь $\delta = \frac{73}{51}$ [8].

«При этом допущенная погрешность $\left| \frac{N}{n} - \delta_4 \right| = \left| \frac{1261}{881} - \frac{73}{51} \right| < \frac{1}{51 \times 415} < 0,0001$,

то есть весьма незначительна.

Ответ: $\frac{73}{51}$.

Для иррационального α по существу возможно лишь приближенное решение задачи.

Пример 2: Как мы уже определили ранее $\sqrt{11} = (3(3,6))$. Вычислим $\sqrt{11}$ с точностью до 0,001.

Для решения придется найти такую подходящую дробь $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ разложения $\sqrt{11}$, чтобы $Q_k Q_{k+1} > \frac{1}{0,001} = 1000$.

Сделаем это, используя схему:

	3	3	6	3
P_k	3	10	63	199
Q_k	1	3	19	60

Очевидно, нам достаточно взять $\delta_3 = \frac{63}{19}$, так как $19 \times 60 > 1000$. Это значение будет равно $\sqrt{11}$ с точностью до 0,001, причем с недостатком, так как δ_3 – подходящая дробь нечетного порядка. Мы можем представить $\frac{63}{19}$ в виде десятичной дроби, причем имеем право взять 3 знака после запятой, так как $\frac{63}{19}$ является приближенным значением для $\sqrt{11}$ с точностью до 0,001» [18].

«Получаем $\frac{63}{19} \approx 3,316$ (мы округляем по избытку, так как $\frac{63}{19}$ является приближенным значением с недостатком, однако, не можем теперь сказать,

будет ли 3,316 приближенным значением $\sqrt{11}$ с недостатком или избытком)» [18].

«Решенные задачи в более общем виде формулируются следующим образом:

1) Найти рациональное приближение к действительному α со знаменателем $\leq n$ в виде наиболее близкой к α подходящей дроби. Для этого надо взять подходящую дробь для α с наибольшим знаменателем, не превышающим n .

2) Найти рациональное приближение к действительному числу α с возможно меньшим знаменателем так, чтобы погрешность не превосходила ε (то есть с точностью до ε). Для этого, пользуясь аппаратом цепных дробей, находим подходящую дробь $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ с наименьшим знаменателем Q_k так, чтобы $Q_k Q_{k+1} > \frac{1}{\varepsilon}$ [18].

IV. Итог занятия.

V. Домашнее задание: Изготовить карточки с заданиями для одноклассников. (Задание на разложение в цепную дробь)

Занятие 8-9

Тема: Решение диофантовых уравнений

Цели и задачи

Образовательные: формировать навыки решения диофантовых уравнений; формировать представление учащихся о диофантовых уравнениях;

Развивающие: развивать логическое мышление и способности к восприятию нестандартного материала и ориентации в нём.

Воспитательные: прививать интерес к изучаемому предмету.

Ход урока

Проверка домашнего задания

Дети обмениваются карточками, которые изготовили дома и выполняют задания.

Вступительное слово учителя:

К решению диофантовых уравнений был применен новый метод цепных дробей. Впервые использовал его Лангранж, который, однако замечает, что фактически это тот же способ, который был дан Баше де Мезирьяом и другими математиками.

Теорема. Общее решение в целых числах уравнения $ax+by=c$ (*), где a , b , c – целые числа, отличные от нуля и $\text{НОД}(a, b) = 1$, можно представить в виде

$$x = (-1)^n cQ_{n-1} - bt, \quad y = (-1)^{n+1} cP_{n-1} + at,$$

где t – произвольное целое число, а P_{n-1} и Q_{n-1} – числитель и знаменатель предпоследней подходящей дробиразложения числа $\frac{a}{b}$ в цепную дробь

Итак, для решения уравнения $ax + by = c$, где a , b , c – целые коэффициенты, способом «цепной дроби» нужно:

представить дробь в виде конечной цепной дроби $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$;

записать подходящие дроби;

найти решение уравнения по формулам

$$\begin{cases} x = (-1)^n \times c \times Q_{n-1} - bt, \\ y = (-1)^{n+1} \times c \times P_{n-1} + at, t \in \mathbb{Z}. \end{cases} [1]$$

III. Выполнение заданий:

Задача 1. Решить уравнения в целых числах:

a) $142x + 82y = 6$

b) $70x + 33y = 1$

c) $143x + 169y = 5$

d) $35x - 37y = 12$

e) $4x - 14y = 7$

Задача 2. Решить в целых числах уравнения:

- a) $143x+169y=5$;
- b) $2x+5y=7$;
- c) $23x+49y=53$;
- d) $45x-170y=8$.
- e) $407x-816y = 33$

Домашнее задание

- a) $275x+155y=10$
- b) $12x-7y=29$
- c) $1256x+647y=119$
- d) $80x-91y=2$

Занятие 10

Тема: Античные математики

Цели и задачи

Образовательные: сформировать умения по составлению и выполнению проекта.

Развивающие: развивать творческую и мыслительную деятельность учащихся на уроке, развивать внимательность и память.

Воспитательные: воспитывать самостоятельность, прививать интерес учащихся к предмету посредством решения задач нестандартного вида.

Ход урока

Занятие ориентировано на самостоятельную работу учащихся с литературой, электронными энциклопедиями и ресурсами сети Интернет для создания проекта.

На данном занятии учитель выступает в роли консультанта.

Домашнее задание

Подготовить творческие проекты к итоговому занятию

Занятие 11

Тема: Итоговое занятие

Цели и задачи

Образовательные: Определить уровень знаний, обобщить знания учащихся.

Развивающие: Развивать логическое мышление и речь учащихся, умение оценивать свои знания.

Воспитательные: воспитывать уверенность в себе, воспитывать потребность к самоконтролю.

Ход урока

I. Организационное начало урока

II. Творческие проекты учащихся по темам проектов

Дети выступают со своими творческими проектами как индивидуальными, так и групповыми.

Организация и проведение аттестации обучающихся

Для оценки динамики усвоения учащимися теоретического материала и для мотивации к регулярным занятиям, психологически большую роль играет факт предоставления ученику информации об уровне его знаний и умений, а значит, и об ожидающей итоговой оценке. Помимо этого, для учителя знание о владении его учениками теорией и способностями ее применить на практике, поможет внести необходимые коррективы в процесс обучения (возможно, изменить темп или стиль, в котором проводятся занятия, повторить ранее изученный материал).

Так же надо помнить о проблеме накопления оценок для итоговой аттестации. Итоговая аттестация необходима для того, чтобы оценить успехи обучающихся в освоении выбранного ими курса.

В силу того, что материал, составляющий данный курс, состоит из более сложных задач и объемности всего курса, выполнение самостоятельных работ заняло бы значительную часть времени от занятия. Выполнение письменной работы может потребовать очень много усилий от ученика, так же может заставить его испытать очередной стресс.

Именно по этой причине вместо самостоятельных работ ученикам предлагается написать реферат с последующим выступлением с сообщением на занятиях. Написание реферата возможно, как самостоятельно каждым учеником, так и в малых группах. Для учеников, которые не успели или по какой-то причине не смогли взять себе тему для реферата, предлагается выполнение индивидуального домашнего задания на оценку. Шкала оценок может быть традиционной («неудовлетворительно» – 2, «удовлетворительно» – 3, «хорошо» – 4, «отлично» – 5).

Одной из форм для самостоятельной работы может являться подготовка краткого доклада как дополнение к лекционной части занятия.

Для завершения курса может быть выбрана итоговая контрольная работа. Для отчета по итогам проведения курса такая работа имеет смысл. Но для проверки усвоения материала обучающимися пользы мало, в силу усложненного содержания курса.

Возможные критерии оценок

Критерии по выставлению оценок могут быть следующими.

Оценка «отлично» (5) – учащийся блестяще освоил теоретический материал курса, получил навыки в его применении при решении конкретных математических задач, имеющих прикладной характер; в процессе написания и защиты реферата, выполнения стендовых докладов, работы над индивидуальными домашними заданиями ученик продемонстрировал умение работать с литературными источниками; он отличался активным участием в диспутах и обсуждениях проблем, поставленных и решаемых в данном курсе; кроме того, ученик отличился творческим подходом и большой заинтересованностью как при освоении курса в целом, так и при выполнении порученных ему учителем заданий. Он научился работать в малых группах, находить и использовать информацию в рекомендованных бумажных и электронных изданиях, очевиден и несомненен его интеллектуальный рост и рост его общих умений.

Оценка «хорошо» (4) – учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартным заданием; ученик справился с написанием реферата, но проявил чисто компилятивные способности, выполнил (но без проявления явных творческих способностей) домашние задания; можно сказать, что оценка «хорошо» — это оценка за усердие и прилежание, которые привели к определенным положительным результатам, свидетельствующим и об интеллектуальном росте, и о возрастании общих умений слушателя курса.

Оценка «удовлетворительно» (3) – учащийся освоил наиболее простые идеи и методы курса, что позволило ему достаточно успешно выполнить такие задания, как написание реферата (пусть при этом проявились его чисто компилятивные способности), в итоговой контрольной самого простого состава задач ученик справился с 4-5 задачами.

Оценка «неудовлетворительно» (2) – ученик не проявил ни прилежания, ни заинтересованности в освоении курса (скорее всего, выбор им этого элективного курса оказался ошибкой), он халатно отнесся к написанию реферата и выполнению индивидуальных домашних заданий; дискуссии были для ученика неинтересны, и он уклонялся от участия в них, в итоговой контрольной работе самого простого состава задач он справился всего с 1-2 задачами.

Ожидаемые результаты

В результате изучения программы разработанного факультативного курса обучающиеся должны:

правильно использовать новые термины, которые связаны с основными понятиями в математике;

понимать основные свойства цепных дробей;

обладать способностью решать задачи различными методами;

самостоятельно работать со справочной литературой;

уметь находить и анализировать необходимую информацию;

иметь навык публичного выступления и ответов на вопросы.

Список рекомендуемой обучающимся литературы

1. Арнольд В. И. Цепные дроби. -М.:МЦНМО, 2000.
2. Бескин Н. М. Цепные дроби// -Квант, 1970
3. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский. – 2-е изд., испр. и доп. – Мн.: Высшая школа, 1979. – 291с.
4. Виноградов И. М. Основы теории чисел: учеб. пособие для студентов заочников физ. – мат. фак. пед. ин – тов / И. М. Виноградов. – М.: Наука. 1972. – 180с
5. Куликов Л. Я., А.И. Москаленко, А.А. Фомин. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М, «Просвещение».
6. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е., Алгебра и теория чисел. М, «Просвещение», 170с
7. Михелович Ш. Х. Теория чисел: кн. для учащихся / Ш. Х. Михелович. – М.: Высшая школа, 1967. – 335с.
8. Журнал «Квант». *Бескин Н.* Цепные дроби (№1, 1970)
9. Журнал «Квант». *Бескин Н.* Бесконечные цепные дроби (№8, 1970)
- 10.Журнал «Квант». *Бескин Н. Нестеренко Ю., Никишин Е.* Очерк о цепных дробях (№5,6, 1983)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная дипломная работа показывает значение цепных дробей в математике. Их можно с успехом применять в решении неопределенных уравнений вида $ax+by=c$. Основная трудность при решении таких уравнений состоит в том, чтобы найти какое-нибудь его частное решение. Так вот, при помощи цепных дробей можно обозначить алгоритм для поиска такого частного решения.

Цепные дроби можно использовать и в решениях более сложных неопределенных уравнений, например, для уравнения Пелля:

$$x^2 - ay^2 = 1 \quad (a \in \mathbb{N}).$$

Бесконечные цепные дроби могут быть применены для решения алгебраических и трансцендентных уравнений, для быстрого вычисления значений отдельных функций.

В настоящее время цепные дроби все большее применение обретают в вычислительной технике, так как позволяют создавать эффективные алгоритмы для решения ряда задач на ЭВМ.

Переходя непосредственно к анализу практической части выпускной квалификационной работы, можно отметить, что эта часть разделена на два параграфа: разработку комплекса методов работы с обучающимися на уроках и на непосредственно разработку самого факультативного курса.

В рамках первого параграфа сформирован и аргументирован комплекс образовательных технологий и методических приемов, которые является эффективным инструментарием для обучения. К ним относятся:

- Метод проектов;
- Информационно-коммуникационные технологии;
- Технология развития критического мышления с полным описанием этапов и используемых приемов;

Каждая из указанных технологий и приемов направлены на эффективное обучение теоретическим и практическим аспектам преподаваемого материала в рамках элективного курса.

Следующий параграф посвящен разработке самого факультативного курса.

Содержание факультативного курса ориентировано на обучающихся 8-9 классов, имеющих интерес и предрасположенность к изучению математики. Курс направлен на изучение более широкого круга задач, более сложных относительно базового курса.

Программа разработанного факультативного курса состоит из четырех основных элементов:

- Пояснительная записка;
- Основное содержание курса;
- Ожидаемые от обучения результаты;
- Список литературы, рекомендуемой обучающимся.

Также была разработана итоговая аттестация обучающихся в рамках этого элективного курса и критерии итоговой оценки знаний.

Подводя общий итог, можно отметить, что поставленные перед началом работы задачи были успешно решены.

Посредством решения данных задач, поставленная перед исследованием цель была успешно достигнута, а именно была изучена теоретическая база по проектированию факультативных курсов и был разработан факультативный курс.

Материалы данной выпускной квалификационной работы могут быть использованы как учителями математики для доработки, внедрения собственных идей, реализации в практики школ, так и студентами-практикантами для подготовки к проведению занятий не только в рамках базового курса математики, но и подготовки к проведению факультативных курсов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для студентов заочников II курса физ.- мат. фак. пед. ин – тов / Н. А. Казачек, Г. Н. Перлатов, Н. Я. Виленкин, А. И. Бородин; под. ред. Н. Я. Виленкина. - 2 - е изд. - М.: Просвещение, 1984. - 192с.
2. Александров В. А., Горшенин С. М. Задачник – практикум по теории чисел: для студентов заочников физ. – мат. фак. пед. ин – тов / В. А. Александров, С. М. Горшенин. – М.: Просвещение, 1972. – 80с.
3. Афанасьева Т. П., Ерошин В. И. Модели организации профильного обучения на основе индивидуальных учебных планов: Сборник научно-методических материалов. / Т.П. Афанасьева, В.И. Ерошин. – М.: ЗАО Академ Пресс, 2005
4. Берштейн А. Педагогика на кончиках пальцев. Введение в специальность. / А. Берштейн. – М.: Образовательные проекты, 2012. – 544 с.
5. Варпаховский Ф. Л., Гальперин Г. А., Гисин В. Б. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для студентов I – IV курсов заочного отделения физ. – мат. фак. педвузов / Ф. Л. Варпаховский, Г. А. Гальперин, В. Б, Гисин. – М.: Альфа, 1994. – 223с
6. Виноградов И. М. Основы теории чисел: учеб. пособие для студентов заочников физ. – мат. фак. пед. ин – тов / И. М. Виноградов. – М.: Наука. 1972. – 180с.
7. Газизов Т.Т. Модель внедрения элементов робототехники в образовательный процесс школы / Т.Т. Газизов, О.С. Нетесова, А.Н. Стась// Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2013. – С.180-184.

8. Деза Е.И., Л.В. Котова. Сборник задач по теории чисел. 112 задач с подробными решениями. Учебное пособие. – М.: Либроком, 2014. – 224 с.
9. Загашев И.О. Учим детей критически мыслить. / И.О. Загашев, С.И. Заир-Бек, И.В. Муштавинская. – СПб: Альянс «Дельта», 2003.
10. Завало М. М., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра и теория чисел / М. М. Завало, В. Н. Костарчук, Б. И. Хацет. – Ч. 2. – Киев: Вища школа. Головное издательство, 1980. – 408с.
11. Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел: кн. для студентов пед. ин – та / Г. А. Кудреватов. – М.: Просвещение, 1970. – 128с
12. Кузнецов Д.Ю., Трошина Т.Л. Использование темы «Цепные дроби» на уроках математики / Д.Ю. Кузнецов, Т.Л. Трошина // Ярославский педагогический вестник. 1998. № 3(15). – с. 91 – 95.
13. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для пед. ин – тов / Л. Я. Куликов. - М.: Высш. Школа, 1979. – 559с.
14. Лопушанская Н.Д. Использование «задачного» подхода в условиях адаптивной системы обучения программированию [Электронный ресурс] / Н.Д. Лопушанская // Фестиваль педагогических идей «открытый урок». – Режим доступа: <http://festival.1september.ru/articles/524846/>
15. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Оганесян В.А., Колягин Ю.М. и др. - М.: Просвещение, 1980.
16. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Блох А.А. и др., составители Черкасов Р. С., Столяр А. А. - М.: Просвещение, 1985.
17. Монахов В.М. Проблема дальнейшего развития факультативных занятий по математике // Математика в школе, 1981, № 6.

18. Михелович Ш. Х. Теория чисел: кн. для учащихся / Ш. Х. Михелович. – М.: Высшая школа, 1967. – 335с.
19. Митенев, Ю. А. Применение информационно-коммуникационных технологий в процессе обучения математике / Ю. А. Митенев // Труды VII Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль, изд-во ЯГПУ, 2009. – С. 290.
20. Нестеренко Ю. В. Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю. В. Нестеренко. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 272 с.
21. Пахомова Н.Ю. Метод учебного проекта в образовательном учреждении. Пособие для учителей и студентов педагогических вузов. / Н.Ю. Пахомова. – М.: АРКТИ, 2013. – 112 с.
22. Петрусевич А.А. Практика современного образования: учеб. пособие для студентов педагогических учебных заведений / А. А. Петрусевич, В.В. Лоренц, – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2012. – 300 с.
23. Профильное обучение в современной российской школе. Сборник научных статей. – М.: РУДН, 2015. – 176 с.
24. Рональд Де Гроот. Дифференциация в образовании / Рональд Де Гроот. – Директор школы, 1994. №5 – с. 12-18.
25. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – СПб: Издательство «Лань», 2008.