ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ОБЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 01.03.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001309
Жуковой Надежды Сергеевны

Научный руководитель
доцент кафедры общей
математики, кандидат
физ-мат наук
Некрасова И.В.

БЕЛГОРОД 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучается задача об изменении малых возмущений в упругой деформируемой среде, перфорированной системой каналов (пор), которые заполнены несжимаемой жидкостью. Эти среды являются упругими пористыми средами и достаточно хорошим приближением реальных консолидированных грунтов.

Модель представлена уравнениями Стокса для скорости жидкости в порах грунта и уравнениями Ламе для перемещений твердого скелета грунта. На границе «твердый скелет – поровое пространство» выполнены условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений.

Вопросы исследования многомерных сильно неоднородных сред отражены в большом количестве математической литературы. Работы В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник [4], посвящены теории усреднения дифференциальных операторов. Задачи усреднения уравнений теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами были расскрыты в монографиях О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна, А.С. Шамаева [15]. Имеется еще целый ряд работ, рассматривающих данный вопрос, таких авторов, как: В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова [10], А. Бенсусана, Ж.-Л. Лионса, Д. Папаниколау [20], Э. Санчес-Паленсии [18], Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [1], А.Л. Пятницкого, Г.А. Чечкина, А.С. Шамаева [17].

Достаточно хорошо исследованы задачи движения жидкости в ограниченной замкнутой области и задачи о колебании (распространение волн в упругом твердом теле) в работах Ладыженской [7], [8], [9].

Объектом иследования является точная математическая модель упругой пористой среды, представленая линейной системой дифференциальных уравнений.

Актуальность выпукной квалификационной работы обоснована применением этой модели при описании распространения сейсмических и акустических волн, а также фильтрации подземных жидкостей в упругих пористых средах.

Математическая модель, несмотря на её линейность, является сложной, так как основные дифференциальные уравнения имеют под знаком производной недифференцируемые быстро осциллирующие малые и большие коэффициенты (они зависят от малого параметра модели, которые выражают отношение размера пор к размеру рассматриваемой области).

Сформулированная задача имеет отношение к моделированию движения подземных жидкостей, поэтому может вызывать практический интерес в нефтедобывающей промышленности и сейсмологии.

Целью работы является вывод равномерных по параметру модели оценок решения задачи.

Поставленная цель достигается решением следующих **задач**:

- Изучить теоретический материал необходимый для исследования;
- Сформулирвать определение обобщенного решения задачи;
- Получить интегральное тождество;
- Получить априорные оценки решения начально-краевой задачи для неоднородной среды.

Выпускная квалификационная работа изложена на 48 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

Введение содержит общие сведения о работе, актуальность, объект исследования, цель и задачи.

Первая глава содержит предварительные сведения. Вспомогательные теоремы, такие как теорема Ф. Реллиха и некоторые неравенства (неравенство Юнга, Гельдера, Гронуолла, Корна).

Во второй главе рассматривается линейная нестационарная задача движения жидкости в ограниченном пространстве, а также теорема о существовании и единствености ее решения.

В третьей главе представлены основные результаты. Сформулировано определение обобщенного решения задачи. Получено интегральное тождество, на котором основан вывод оценок.

Заключение представляет собой краткий обзор результатов, полученных в процессе исследования, и сделанных на их основе самостоятельных аналитических выводов (общие выводы по работе, достигнутые задачи).

Результат, несомненно, является важным, поскольку на основе априорных оценок возможно получить утверждение о существовании и единственности обобщенного решения задачи.

Глава 1 Предварительные сведения

1.1 Список обозначений

В данной главе мы приведем ряд обозначений, которые используются в выпускной квалификационной работе.

Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ два вектора, то матрица $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ определяется как

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

для произвольного вектора $\boldsymbol{c}$;

Если $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ две матрицы, то $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}$ – это тензор четвертого ранга. А его свертка с произвольной матрицей $\boldsymbol{A}$ дается формулой [14,с.16]

$$(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) : \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} : \boldsymbol{A}).$$

Обозначим через $\mathbb{I}^{ij}$ матрицу, у нее единственный элемент отличный от нуля. Он равен единице и стоит на пересечении i-той строки и -того столбца:

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\right),$$

где (e_1, e_2, e_3) ортонормированный базис.

$\boldsymbol{R}^n$ евклидово пространство размерности n.

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ точка $\boldsymbol{R}^n$.

Ω область из $\boldsymbol{R}^n$. $\partial\Omega = S$ граница области Ω.

n единичный вектор нормали к S, направленной вне Ω.

Пусть $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \boldsymbol{R}^n$. Через $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ обозначим скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}u_i v_i.$$

Если $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\big(u_1(\boldsymbol{x}),\dots,u_n(\boldsymbol{x})\big)$ достаточно гладкая вектор-функция, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R^n}$, то тензор второго ранга $\nabla\boldsymbol{u}$ определяется соотношением [10,с.30]

$$\nabla\boldsymbol{u}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},(i,j=\overline{1,n}).$$

В частности

$$\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$|\nabla\boldsymbol{u}|^2=\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{u}.$$

Для скалярных функций $\boldsymbol{u}(x),\boldsymbol{v}(x)$

$$\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}=\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_j},$$

Рассмотрим основные функциональные пространства, которые используются в данной работе.

$\boldsymbol{L_q}(\Omega)(1\le q\le\infty)$ – это пространство вещественных функций u, определенных в Ω и таких, что $\int_\Omega |u|^q dx<\infty$, если $q<\infty$, и существенно ограниченных по лебеговой мере, если $q=\infty$. Норма в $\boldsymbol{L_q}(\Omega)$ задается равенством [5,с.50]

$$||u||_{q,\Omega}=(\int_\Omega |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}},$$

если $1\le q<\infty$,

$$||u||_{L_\infty(\Omega)} = ess\,\sup_\Omega\ |u(x)|.$$

$\boldsymbol{W}_q^l(\Omega)$ – это банахово пространство, которое состоит из всех элементов входящих в $\boldsymbol{L}_q(\Omega)$. Они имеют обобщенные производные всех видов до порядка l включительно, суммируемых по Ω со степенью q. Норма в $\boldsymbol{W}_q^l(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{q,\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^{l} \langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)},$$

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{q,\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} \left\|D_x^j u\right\|_{q,\Omega}.$$

Символ D_x^j является любой производной $\boldsymbol{u}(x)$ по x порядка j, а $\sum_{(j)}$ – это суммирование по всевозможным производным $\boldsymbol{u}$ порядка j.

$\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_q^l(\Omega)$– подпространство пространства $\boldsymbol{W}_q^l(\Omega)$, плотное множество которого является совокупностью всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций.

Ω_T – это цилиндр $\Omega\times(0,T)$ в пространстве $\boldsymbol{R^{n+1}}$:

$$\Omega_T = \{(x,t) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x \in \Omega, t \in (0,T)\}.$$

Банахово пространство $\boldsymbol{L}_{q,r}(\Omega_T)$, имеющее все измеримые на Ω_T функции с конечной нормой

$$\|u\|_{q,r,\Omega_T} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{r}},$$

причем $q \geq 1$ и $r \geq 1. \boldsymbol{L}_q(\Omega_T) \equiv \boldsymbol{L}_{q,q}(\Omega_T)$, и в частности,

$$\|u\|_{2,\Omega_T} = \left(\int_{\Omega_T} |u|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

– норма u в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\Omega_T)$.

$\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ – гильбертово пространство, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(u,v)_{\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dxdt.$$

$\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^{1,0}(\Omega_T)$– подпространство $\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Оно состоит из элементов, обращающихся в нуль на боковой поверхности цилиндра Ω_T.

$\boldsymbol{W}_2^{1,1}(\Omega_T)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{\boldsymbol{W}_2^{1,1}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla v\right) dxdt.$$

$\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^{1,1}(\Omega_T)$– подпространство $\boldsymbol{W}_2^{1,1}(\Omega_T)$, состоящее из тех его элементов, которые обращаются в нуль на боковой поверхности цилиндра Ω_T. [3,с.48]

Пусть $f(x,t)$ – функция, которая определена в цилиндре Ω_T. Тогда если X – банахово пространство, то обозначим

$$\boldsymbol{L}_p(0,T;X) = \{f | f\text{– измеримое отображение } [0,\mathrm{T}] \to \mathrm{X},$$

$$\left(\int_0^T ||f(t)||_X^p dt\right)^{1/p} < \infty \text{ при } 1 \le p < \infty,$$

$$ess \sup_{t\in(o,T)} ||f(t)||_X < \infty \text{ при } p = \infty\}.$$

В частности,

$$\boldsymbol{L}_2\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega)\big) \equiv \boldsymbol{L}_2(\Omega_T),\ \boldsymbol{L}_\infty\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega)\big) \equiv \boldsymbol{L}_\infty(\Omega_T),$$

$$\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\,)\equiv\boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$$

Аналогично определяются пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$, $\boldsymbol{W}_2^{1,1}(\Omega_T)$ и

$\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^{1,1}(\Omega_T)$ вектор-функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\big(u_1(\boldsymbol{x}),\dots,u_n(\boldsymbol{x})\big)$.

1.2 Некоторые неравенства

1) Неравенство Юнга

$$ab\le\frac{1}{\lambda}\varepsilon^{\lambda}a^{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\varepsilon^{-\lambda'}b^{\lambda'},$$

в котором a,b,ε – произвольные положительные числа, а λ и λ' больше единицы и связаны равенством: $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}=1$.

2) Неравенство Гельдера

$$|\int_{\Omega}\prod_{k=1}^{s}u_k dx|\ \le\prod_{k=1}^{s}(\int_{\Omega}|u_k|^{\lambda_k}dx)^{\frac{1}{\lambda_k}},\lambda_k\ge 1,\sum_{k=1}^{s}\lambda_k{}^{-1}=1,$$

оно справедливо для всех измеримых в Ω функций $u_k(x)$. Неравенством Коши (алгебраическим и интегральным) называется частный случай первого неравенства, где $\lambda=\lambda'=2$, и частный случай второго неравенства, где $s=2$ и $\lambda_1=\lambda_2$. [20,c.60]

3) Неравенство Гронуолла.

Лемма 1.1. Возьмем неотрицательную абсолютно непрерывную функцию $y(t)$, удовлетворяющую для почти всех t из $[0,T]$, неравенству

$$\frac{dy(t)}{dt}\le C_1(t)y(t)+C_2(t),\qquad (1.1)$$

где $C_i(t)$ – суммируемые на $[0,T]$ неотрицательные функции. Тогда

$$y(t) \leq \exp\left\{\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\times[y(0) + \int_0^t C_2(\xi) exp\left(-\int_0^\xi C_1(\tau)\,d\tau\right) d\xi] \leq$$

$$\leq \exp\left\{\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right\}\left[y(0) + \int_0^t C_2(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (1.2)$$

Действительно, если (1.1) записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left[y exp\left(-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right)\right] \leq C_2 \exp\left(-\int_0^t C_1(\tau)\,d\tau\right)$$

и проинтегрировать от 0 до t, то из полученного неравенства очевидным образом следует (1.2).

Доказательство см. Ладыженская, Солонников, Уральцева [9, с.112].

4) Неравенство Корна.

Лемма 1.2. Для всех $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 dx \leq C \int_\Omega \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) : \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) dx,$$

где постоянная C зависит только от геометрии области Ω и не зависит от $\boldsymbol{u}$, в симметричный тензор второго ранга $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ определяется формулой

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^*\right).$$

Доказательство см. Олейник. Иосифьян. Шамаев [15, с.17].

Замечание. Данное неравенство Корна является справедливым и для функций $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, которые равны нулю только на части границы $S_0 \subset S$

положительной меры. Оно также и справедливо для любого подмножества $V \subset \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, равенство $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0$, которое влечет равенство $\boldsymbol{u} = 0$.

5) Неравенство Фридрихса для периодической структуры.

Следующую лемму доказал Л. Тартар. Это доказательство приведено в работе Санчес-Паленси [18, с.440], уточняющее постоянную в неравенстве Фридрихса в случае – периодической геометрической структуры.

Лемма 1.3. Пусть выполнено предположение 1.1 относительно геометрии области Ω_f^ε. Тогда для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_q^l(\Omega_f^\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} |\varphi|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \cdot \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\nabla_x \varphi|^2 dx$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от ε.

Лемма 1.6. (Граничные свойства функций, заданных на периодических множествах)

Пусть

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon \in \boldsymbol{L}_2\big(0, T; \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big),$$

$\boldsymbol{v}^\varepsilon = 0$ на части $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_f^\varepsilon \subset S_f^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega$ границы $S = \partial\Omega$ и последовательность $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ сходится слабо в $\boldsymbol{L}_2\big(0, T; \boldsymbol{W}_2^1(\Omega)\big)$ к функции $\boldsymbol{v}$.

Тогда $\boldsymbol{v} = 0$ на части S_0 границы S. То есть

$$\int_0^T \int_{S_0} |\boldsymbol{v}(x + \delta n, t)| d\sigma dt \to 0 \text{ при } \delta \to 0,$$

где n вектор единичной нормали к границе S в точке x.

Доказательство. Пусть $\varphi^\varepsilon = h(x,t)\varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, где периодическая по переменной y функция $\varphi_0(y)$ является соленоидальной финитной в области $Y_f \subset Y$, а функция $h(x,t)$ сосредоточена в малой окрестности точки $x_0 \in S_0$. Тогда по построению

$$\boldsymbol{\nu}^\varepsilon \varphi^\varepsilon = 0, x \in S_0,$$

поскольку функция φ^ε исчезает на дополнении к σ^ε, а $\boldsymbol{\nu}^\varepsilon$ обращается в ноль на части σ^ε границы S_0.

Поэтому

$$\int_{\Omega_T} (\boldsymbol{\nu}^\varepsilon \nabla \cdot \varphi^\varepsilon + \varphi^\varepsilon \nabla \boldsymbol{\nu}^\varepsilon) dxdt = 0.$$

В силу теоремы Нгуетсенга существует функция $V(x,y,t) \in \boldsymbol{L^2}(\Omega_T \times Y)$ 1-периодичная по y, такая что $\nabla_y V \in \boldsymbol{L^2}(\Omega_T \times Y)$ и последовательности $\{\boldsymbol{\nu}^\varepsilon\}, \{\nabla_x \boldsymbol{\nu}^\varepsilon\}$ с точностью до подпоследовательностей сходятся двухмасштабно к $\boldsymbol{\nu}(x,t)$ и $\nabla_x \boldsymbol{\nu}(x,t) + \nabla_y V(x,y,t)$ соответственно. Расписывая подробнее последнее тождество и переходя к пределу, получим

$$\int_{\Omega_T} (\boldsymbol{\nu}^\varepsilon \nabla h \varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + h\varphi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \boldsymbol{\nu}^\varepsilon) dxdt \to$$

$$\to \int_{\Omega_T} \{\boldsymbol{\nu} \nabla h \langle \varphi_0 \rangle_Y + h \langle \langle \nabla \boldsymbol{\nu} + \nabla_Y V \rangle \varphi_0 \rangle_Y\} dxdt = 0.$$

Выберем $\varphi_0^i(y)$ так, чтобы функция $\varphi_0^{(i)}$ обращалась в ноль вне малого шара $Y_0 \subset Y_f$ и $\langle \varphi_0^{(i)} \rangle_Y = \boldsymbol{e_i}$,

$i = 1,2,3$, где $\boldsymbol{e_i}$ – единичные векторы декартовой системы координат. Доказательство возможности такого построения в идейном плане повторяет похожее утверждение в [7, с.160] но технически более громоздкое.

Полагая

$$\boldsymbol{\nu}_i = \langle(\nabla\boldsymbol{\nu} + \nabla_Y V)\varphi_0^{(i)}\rangle_Y \in \boldsymbol{L}_2(\Omega_T),$$

получим

$$\int_{\Omega_T}(\boldsymbol{\nu}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \boldsymbol{\nu}_i h)dxdt = 0, i = 1,2,3,$$

Для произвольных $h \in \boldsymbol{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$. Последнее тождество означает, что $\boldsymbol{\nu}_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ и $\boldsymbol{\nu}(x,t) = 0$ на S_0.■

6) Для любой функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2 dx \le \frac{1}{\mu_1}\int_\Omega u_x^2 dx. \tag{1.3}$$

Здесь число μ_1 – наименьшее собственное значение оператора – Δ в области Ω при нулевом граничном условии, т.е. наименьшее из чисел, для которых существует отличное от нуля тождественного нуля решение задачи

$$-\Delta\boldsymbol{\nu} = \mu\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}|_S = 0.$$

Нетрудно дать оценку сверху для $\frac{1}{\mu_1}$. Так, например, $\frac{1}{\mu_1} \le d^2$, где d ширина n-мерной полосы, в которую можно заключить область Ω. При расширении области Ω постоянная $\frac{1}{\mu_1}$ может неограниченно увеличиваться, так что для неограниченных областей Ω неравенство (1.3), вообще говоря, не имеет места (для них может оказаться $\mu_1 = 0$). Неравенство (1.3) с постоянной d^2 вместо $\frac{1}{\mu_1}$ легко выводится с помощью неравенства Коши из представления

$$\boldsymbol{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \boldsymbol{u}(a, \dots, x_n) + \int_a^{x_1} u_{x_1} dx_1.$$

Из этого же представления легко выводится неравенство

$$\int_{S_1} |u| ds \leq \sqrt{1 + C_2^2} \int_{\Omega} (\frac{1}{C_1} |u| + |u_x|) dx$$

для области Ω вида $\{x: (x_2, \dots, x_n) \in D, 0 \leq x_1 \leq f(x_2, \dots, x_n)\}$, если функция f, определяющая часть S_1 границы Ω, удовлетворяет условием: $f(x_2, \dots, x_n) \geq C_1 > 0$ и $|f_x| \leq C_2 < \infty$ для $(x_2, \dots, x_n) \in D$. Из него, в частности, следует неравенство

$$\int_{S_1} |u| ds \leq C \int_{\Omega} (|u| + |u_x|) dx \tag{1.4}$$

Для любой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности S_1 конечных размеров, лежащей в Ω, и для кусочно-гладкой границы S_1 ограниченной области Ω. Хорошо известно и то, что функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ из $\boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$ суть непрерывные функции $\boldsymbol{x}$, если размерность пространства $\boldsymbol{x}$ не больше 3. Для них справедливо неравенство

$$\max_{x \in \Omega} |u(x)| \leq C(\Omega) \|u\|_{2,\Omega}^{(2)}. \tag{1.5}$$

Если ограничиться финитными функциями $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$, то неравенство (1.5) нетрудно получить, исходя из представления

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_1} \frac{\Delta u(y)}{|x - y|} dy,$$

известно из теории ньютонова потенциала. Отсюда следует непрерывность $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ во всем пространстве и неравенство

$$|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\Omega}\frac{dy}{|x-y|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\Delta u|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\Omega)\left|\left|u\right|\right|_{2,\Omega}^{(2)},$$

где Ω означает область финитности $\boldsymbol{u}$, а постоянная C, очевидно, зависит от величины области Ω. [19,с.120]

1.3 Вспомогательные предложения

В этом разделе мы рассмотрим понятия функционального анализа и дадим определения некоторых из них.

Область в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ – это открытое множество **Ω** (обычно связное), в которой граница Г локально представима в виде

$$y_n = f^{(k)}(y_1, \dots, y_{n-1}). \tag{1.6}$$

Граница области – это множество $\Gamma = \overline{\Omega}\backslash\Omega$ ($\overline{\Omega}$ есть замыкание множества Ω). Локальность означает, что границу Г можно погрузить в объединение областей Ω_k, $k = 1,2, \dots, m$, так что в каждой из областей Ω_k найдется ортогональная система координат $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$, в которой граница представима в виде (1.6). Если функции $f^{(k)}$ m – раз непрерывно дифференцируемы, то граница Г называется границей класса C^m.

Допустим граница Г области Ω является границей класса C^1. Следовательно в каждой точке границы вектор внешней нормали $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ и для любой непрерывно дифференцируемой в замыкании области Ω функции $u(x)$ справедлива формула *Гаусса – Остроградского*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\Gamma} u\nu_i ds. \tag{1.7}$$

см. Олейник [14, с.14].

Возьмем непрерывную в замыкании области Ω функцию u непрерывно дифференцируемую и зависящую от параметра $\tau: u = u(x,\tau)$. Тогда интеграл определяется формулой

$$I(\tau) = \int\limits_{\Omega} u(x,\tau)dx.$$

Это и есть непрерывно дифференцируемая функция параметра τ

$$\frac{dI}{d\tau} = \int_{\Omega} \frac{du}{d\tau}(x,\tau)dx. \tag{1.8}$$

Справедлива формула дифференцирования по верхнему и нижнему пределу для одной пространственной переменной:

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{a(\tau)}^{b(\tau)} u(x)dx = ub(\tau)\frac{db}{d\tau}(\tau) - u\big(a(\tau)\big)\frac{da}{d\tau}(\tau). \tag{1.9}$$

Линейным *нормированным* пространством называется линейное пространство B, если для каждого элемента $x \in B$ существует неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой элемента x, такое что

$$\begin{aligned} &1)\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,\\ &2)\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall\lambda \in R,\\ &3) \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Последовательность элементов $\{x_m\}$ называется *сходящейся* в B, если в B найдется элемент x такой, где $\|x_m - x\| \to 0$ при $m \longrightarrow \infty$. Обозначим сходимость последовательности элементов $\{x_m\}$ к элементу x символом $x_m \longrightarrow x$ [6, с.78].

А последовательность элементов $\{x_m\}$ называется *фундаментальной* в B, если для любого положительного ε найдется номер N такой, что при $m, n > N$ будет решено неравенство $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Полное (*Банаховое*) нормированное пространство – это любая фундаментальная последовательность, являющаяся сходящейся.

Если для всякого элемента $x \in B$ найдется последовательность элементов $\{y_m\}$ из M, сходящаяся к элементу x, то множество M называется всюду плотным в пространстве B.

Сепарабельное нормированное пространство B – это пространство, в котором существует счетное всюду плотное множество.

Линейное пространство E называется *Евклидовым*, если в нем для каждой пары элементов $x, y \in E$ определено число (x, y), называемое *скалярным произведением*, такое что

$$\begin{aligned} &1)\ (x,x) \geq 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ &2)\ (x,y) = (y,x), \\ &3)\ (\lambda x, y) = \lambda(x,y), \forall \lambda \in R. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Каждое Евклидово пространство будет нормированным, если положить $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$.

Следовательно, полное сепарабельное евклидово пространство называется *Гильбертовым* пространством.

Если $(x, y) = 0,$ то элементы $x, y \in E$ являются *ортогональными*.

Ортонормированным множеством называется ортогональное множество M, в котором все его элементы имеют норму равную единице [6, с.54].

Базисом называется счетное ортонормированное множество $\{e_1, e_2, \dots\}$ в пространстве E, если для всякого элемента $x \in E$ справедлива данная формула

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k \to x \text{ при } m \to \infty,$$

где $c_k = (x, e_k)$.

Теорема 1.7

В Гильбертовом пространстве существует хотя б один базис.

Последовательность элементов $\{x_m\}$ Евклидова пространства E называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in E$, если $(x_m - x, y) \to 0$, $m \to \infty$ для всех $y \in E$.

Множество M Евклидова пространства E называется *слабо компактным*, если любая последовательность элементов этого множества содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 1.8

В Гильбертовом пространстве всякое замкнутое ограниченное множество является слабо компактным.

Совокупность всех измеримых функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $x \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^n$, с конечным интегралом

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.12}$$

для $p \geq 1$ является Банаховым пространством $\boldsymbol{L}_p(\Omega)$, в котором норма определяется равенством (1.12). Доказательство данного факта базируется на *неравенстве Коши*

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.13)$$

для $p = 2$, и его обобщении – неравенстве Гёльдера

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad (1.14)$$

для $p \neq 2$, см. Ладыженская [8, с. 35].

Если Евклидово (нормированное) пространство не полное, то существует полное Евклидово (нормированное) пространство, где это пространство будет всюду плотным. Данная операция называется *замыканием* неполного пространства.

Рассмотрим множество всех непрерывно дифференцируемых функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в области Ω, чтобы дать определение пространства Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, с нормой

$$\|u\|_2^{(1)} = \left(\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.15)$$

Замыкание этого пространства в норме (1.15) называется пространством Соболева $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, см. Ладыженская [7, с. 54].

Функция $\boldsymbol{u}(x)$ из пространства $\boldsymbol{L}_1(\Omega)$ обладает по переменной x_i в области Ω обобщенной производной $v_i \in \boldsymbol{L}_1(\Omega)$, если

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + v_i\varphi\right) dx = 0$$

то для произвольной бесконечно дифференцируемой функции φ, равной нулю на границе области Ω. Обозначим функцию ν_i общепринятым символом частной производной: $\nu_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Допустим, что элементами пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ могут быть все функции $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega)$ имеющие обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in \boldsymbol{L}_2(\Omega) \quad i = 1, \dots, n$

Теорема 1.9

Пространство $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$ *является Гильбертовым пространством.*

Для получения априорных оценок решения задачи нам также необходимы линейные дифференциальные уравнения второго порядка параболического типа.

Линейным параболическим уравнением второго порядка называется дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u + f(x,t), \quad (1.16)$$

где функции $a_{ij}(x,t)$, $a_i(x,t)$, $a(x,t)$, $i,j = 1,2,\dots,n$ и $f(x,t)$ считаются заданными, матрица $\{a_{ij}(x,t)\}$ будет симметричной и строго положительно определена:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2 > 0, \alpha_0 = const, |\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2, \quad (1.17)$$

Условием строгой параболичности называют условие (1.17) для уравнения (1.16), см. Михайлов [5, с. 339].

Частный случай уравнения (1.16) является *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \equiv k\Delta u. \qquad (1.18)$$

Где положительная постоянная k – это *коэффициент температуропроводности*.

Для того чтобы найти решение уравнения (1.16) в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, воспользуемся задачей Коши, когда дополнительно к уравнению (1.16) в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ при $t > 0$ задается начальное условие при $t = 0$:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}). \qquad (1.19)$$

Задача (1.16), (1.19) называется *задачей Коши*.

При решении уравнения (1.16) найдем в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ дополнительные к начальному условию

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad (1.20)$$

краевые условия на границе Γ области Ω. А именно, краевое условие

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x} \in \Gamma, \mathrm{t} > 0. \qquad (1.21)$$

Итак, первым краевым условием, или условием Дирихле, называется условие (1.21). Таким образом, задача (1.16), (1.20), (1.21) называется первой начально-краевой задачей.

Если вместо условия Дирихле (1.21) рассмотреть на границе Γ второе краевое условие или условие Неймана

$$\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\nu(\boldsymbol{x})\equiv\frac{\partial u}{\partial\nu}=\nu^0(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{x}\in\Gamma,t>0, \qquad (1.22)$$

где $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$ - единичный вектор внешней нормали к границе Γ, то тогда задача (1.16), (1.20), (1.22) называется *второй начально-краевой задачей*.

Отсюда следует, что если на границе Γ для определения решения уравнения (1.16) задается третье краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}+b(x,t)u=\nu(x,t),x\in\Gamma,t>0, \qquad (1.23)$$

то задача (1.16), (1.20), (1.23) называется *третьей начально-краевой задачей*.

Разложим векторное пространство $L_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства.

Пусть $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\big(u_1(\boldsymbol{x}),u_2(\boldsymbol{x}),u_3(\boldsymbol{x})\big),\boldsymbol{x}\in\Omega.$$

Обозначим через $\dot{\boldsymbol{J}}(\Omega)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов, а через $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$ его замыкание в норме $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Совокупность элементов $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$, ортогональных $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$, образует подпространство, которое обозначим через $\boldsymbol{G}(\Omega)$ так что

$$\boldsymbol{L}_2(\Omega)=\boldsymbol{G}(\Omega)\oplus\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(\Omega)$$

Теорема 1.1.

$\boldsymbol{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\varphi$, где φ есть однозначная в Ω функция, локально квадратично суммируемая и имеющая первые производные на $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Доказательство см. Ладыженская [7, с.42].

Теорема 1.2. (Ф. Реллих)

Если Ω ограниченная область, то $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ вкладывается в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$ компактно, т.е. множество $\{u_\alpha\}$ элементов $\overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(\Omega)$ с равномерно ограниченными нормами $\|u_\alpha\|_{2,\Omega}^{(1)}$ компактно в $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$. Такое же утверждение справедливо и для пространства $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, если граница Ω не слишком плоха (например, кусочно-гладкая).

Доказательство см. Ладыженская [8, с.64].

Глава 2 Линейная нестационарная задача движения вязкой жидкости

В этой главе мы рассмотрим краевую задачу для нестационарных линеаризованных уравнений Навье – Стокса.

Уравнения Навье – Стокса представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает движение вязкой ньютоновской жидкости. Данные уравнения являются одними из важнейших в гидродинамике. Они также применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

Так называемая «вязкость» жидкости – это её способность оказывать сопротивление, если какую-то её часть попытаться сдвинуть относительно соседнего слоя (например, при гребле). При этом в жидкости происходит внутреннее трение.

Ньютоновская жидкость – это жидкость, для которой скорость её деформации пропорциональна вязкости. Она течет всегда, даже если силы, воздействующие на нее, очень малы – только бы они не были нулевыми. Например, как вода ведет себя в невесомости: это тот случай, когда на жидкость совсем не воздействуют внешние силы, даже сила тяжести.

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v} = -grad\, p + \boldsymbol{f}, \\ div\, \boldsymbol{v} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Краевые условия, ради простоты, берем однородными. Случай неоднородных условий сводится к однородным. Так как область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной, то в последнем случае на поведение $\boldsymbol{v}$ при $|x| \to \infty$ накладываются некоторые ограничения.

Краевую задачу для (2.1), т. е. задачу определения $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{p}$ из системы (2.1) и краевого и начального условий

$$\boldsymbol{v}|_{S_T} = 0, \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{a}(x), S_T = S\times[0,T], \quad (2.2)$$

можно решать разными способами. Можно предположить, что вычисление наиболее эффективно сделать с помощью метода Галёркина или метода сеток.

$$\frac{du}{dt} + A(t)\boldsymbol{u} = f(t), \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad (2.3)$$

в гильбертовом пространстве с неограниченным оператором $A(t)$. [7,с.140]

2.1 Теоремы о существовании и единственности решения задачи

Классическую постановку задачи (2.1), (2.2), заменим более широкой и во многих отношениях более простой. Начнем с обобщенных решений, которые имеют обобщенные производные, входящие в систему. Будем считать Ω ограниченной. Пусть $a(x) \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, а $\boldsymbol{f}(x,t) \in \boldsymbol{L_2}(Q_T)$. Пространство $\boldsymbol{L_2}(Q_T)$ разобьем на два ортогональных подпространства

$$\boldsymbol{L_2}(Q_T) = \boldsymbol{G}(Q_T) \bigoplus \overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T),$$

считая, что элементы $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ для почти всех t принадлежат $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, а элементы $\boldsymbol{G}(Q_T)$ — подпространству $\boldsymbol{G}(\Omega)$. [7,с.144] Будем считать, что $\boldsymbol{f}$ в системе (1) принадлежит $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, либо градиентную часть его можно отнести к — $grad\ p$. Возьмем оператор $\tilde{\Delta}$, соответствующий стационарной задаче и рассмотрим задачу (2.1), (2.2) как задачу на определение вектора $\boldsymbol{v}(x,t)$, который принадлежит для почти всех t к $D(\tilde{\Delta})$ и удовлетворяет равенствам

$$\left.\begin{array}{c} L\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_t - \tilde{\Delta}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{t=0}} = a. \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

Сопоставим задаче (2.4) оператор A, который ставит в соответствие каждой функции $\boldsymbol{u}\,(x,t)$ из некоторого множества $D(A)$ пару функций $L\boldsymbol{u}(x,t)$ и $\boldsymbol{u}(x,0)$:

$$A\boldsymbol{u} = \big(L\boldsymbol{u}; \boldsymbol{u}(x,0)\big)$$

В качестве множества $D(A)$ возьмем совокупность всех векторов $\boldsymbol{u}(x,t)$ вида $\varphi_0(x) + \int_0^t \boldsymbol{\varphi}(x,\tau)d\tau$, для которых $\varphi_0(x) \in D(\Delta), \boldsymbol{\varphi}(x,t)$ принадлежит $D(\tilde{\Delta})$ при почти всех t из $[0,\mathrm{T}]$, и $\Delta\varphi$ есть элемент $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$. Нетрудно заметить, что $D(A)$ плотно в пространстве $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$. Также рассмотрим значения оператора A, как элементы гильбертова пространства $\boldsymbol{W}$ пар функций

$\big(f(x,t); \varphi(x)\big)$ c $\boldsymbol{f} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, $\varphi \in H(\Omega)$ со скалярным произведением

$$\{(f_1;\varphi_1),(f_2,\varphi_2)\} = \int_0^T (f_1,f_2)dt + [\varphi_1,\varphi_2].$$

Скалярное произведение в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, как и в $\boldsymbol{L_2}(Q_T)$, обозначим через

$$(f_1,f_2)_Q = \int_0^T (f_1,f_2)dt.$$

Оператор A действует из пространства $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ в пространство $\boldsymbol{W}$. Дальнейшие рассуждения приводят к доказательству того, что оператор A в результате замыкания расширяется до оператора $\bar{A}$, область значений которого заполнит все пространство $\boldsymbol{W}$. Но это и означает, что задача (2.4) будет иметь решение $\boldsymbol{v}$ при любых f из $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ и $\boldsymbol{a}$ из $\boldsymbol{H}\,(\Omega)$, и это решение $\boldsymbol{v}$ будет принадлежать $D(\bar{A})$. [7,с.150]

Рассмотрим сначала, допускает ли A замыкание $\bar{A}$ и охарактеризуем область определения $D(\bar{A})$. Сама возможность замыкания A есть следствие плотности области определения сопряженного к A оператора. Вместо того чтобы проверять это последнее, докажем непосредственно возможность замыкания A. Пусть последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\,(x,t)\}$ из $D(A)$ такова, что u_n сходятся к u в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, а $A\boldsymbol{u_n}$ сходятся к $(f;\varphi)$ в $\boldsymbol{W}$. Если мы покажем, что из $u\,\equiv\,0$ следует равенство нулю $(f;\varphi)$, то это и означает, что A допускает замыкание и $\bar{A}\boldsymbol{u}=(f;\varphi)$. Итак, пусть $\boldsymbol{u}_n\to 0$ в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, а $A\boldsymbol{u_n}=(f_n;\varphi_n)\to(f;\varphi)$ в $\boldsymbol{W}$. Үмножим $L\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{f_n}$ на произвольный гладкий вектор $\boldsymbol{\Phi}(x,t)$ из $D(A)$, равный нулю при $t\,=\,T$, произведение проинтегрируем по Q_T и перенесем с помощью интегрирования по частям все производные с $\boldsymbol{u}_n$ на $\boldsymbol{\Phi}$. В результате получим

$$\int_{Q_T} f_n\Phi dxdt=\int_{Q_T}(\boldsymbol{u}_{nt}-\tilde{\Delta}\boldsymbol{u}_n)\Phi dxdt\ =$$
$$=\int_{Q_T}\boldsymbol{u}_n(-\Phi_t-\tilde{\Delta}\Phi)dxdt\ -\int_{\Omega}\varphi_n(x)\,\Phi(x,0)dx. \qquad (2.5)$$

Үстремим $n\to\infty$. В силу наших предположений

$$\int_{Q_T} f\Phi dxdt=\ -\int_{\Omega}\varphi\Phi(x,0)dx.$$

Но гладкие $\Phi(x,t)$ из $D(A)$, равные нулю при $t=0$ и при $t=T$, как легко проверить, образуют плотное в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ множество, следовательно, $f(x,t) \equiv 0$. Так как значения $\Phi(x,0)$ образуют плотное в $\boldsymbol{H}(\Omega)$ множество, то и $\varphi \equiv 0$. Итак, возможность замыкания оператора A в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ доказана. [7,с.160]

Охарактеризуем область определения замкнутого оператора $\bar{A}$. Для этого рассмотрим для $\boldsymbol{u} \in D(A)$ выражение $\int_0^t (L\boldsymbol{u}, L\boldsymbol{u})dt$ и преобразуем его с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^t \int_\Omega L\boldsymbol{u} \cdot L\boldsymbol{u} dxdt = \int_{Q_T} [\boldsymbol{u}_t^2 + (\tilde{\Delta}\boldsymbol{u})^2 - 2\boldsymbol{u}_t \tilde{\Delta}\boldsymbol{u}] dxdt =$$

$$= \int_{Q_T} [\boldsymbol{u}_t^2 + (\tilde{\Delta}\boldsymbol{u})^2] dxdt + v \int_\Omega \boldsymbol{u}_x^2(x,t)dx \,|_{t=0}^{t=t}, \qquad (2.6)$$

или, что то же,

$$\int_{Q_T} [\boldsymbol{u}_t^2 + \left(\tilde{\Delta}\boldsymbol{u}\right)^2] dxdt + v \int_\Omega \boldsymbol{u}_x^2(x,t)dx =$$

$$= \int_{Q_T} (L\boldsymbol{u})^2 dxdt + v \int_\Omega \boldsymbol{u}_x^2(x,0)dx. \qquad (2.7)$$

Как мы видим, что если $\boldsymbol{u_n} \in D(A)$ сходятся к $\boldsymbol{u}$ в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, а $A\boldsymbol{u}_n$ сходятся к $A\boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{W}$, то $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ и $\tilde{\Delta}\boldsymbol{u}_n$ сходятся в $\boldsymbol{L_2}(Q_T)$, а - в $\boldsymbol{L_2}(\Omega)$ равномерно по t. Отсюда следует, что элементы $\boldsymbol{u}$ из $D(\bar{A})$ будут иметь производные по t первого порядка и $\tilde{\Delta}\boldsymbol{u}$ из $\boldsymbol{L_2}(Q_T)$, а производные $D_x\boldsymbol{u}$ при всех $t \in [0,\mathrm{T}]$ будут принадлежать $\boldsymbol{L_2}(\Omega)$ и непрерывно зависеть от t в норме $\boldsymbol{L_2}(\Omega)$. Оператор $\bar{A}$ на них вычисляется так же, как и A:

$$\bar{A}\boldsymbol{u} = \left(\boldsymbol{u_t} - \tilde{\Delta}\boldsymbol{u}; \boldsymbol{u}(x,0)\right). \qquad (2.8)$$

Из равенства (2.7) можно сделать вывод, что если $A\boldsymbol{u}_n$ сходятся в $\boldsymbol{W}$, то и сами $\boldsymbol{u}_n$ сходятся в $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ и даже лучше. Это говорит за то, что замыкание A приводит к замыканию области значений $R(A)$ оператора A в $\boldsymbol{W}$, т. е. $R\,(\bar{A}) = \bar{R}(A)$ есть замкнутое подпространство в $\boldsymbol{W}$ и на $R\,(\bar{A})$ определен ограниченный обратный оператор $\bar{A}^{-1}$.

Покажем, наконец, что уравнение

$$\bar{A}\boldsymbol{v} = (f; a)$$

однозначно разрешимо при любом $(f; a) \in \boldsymbol{W}$. Для этого осталось доказать, что $\boldsymbol{R}\,(\bar{A}) = \boldsymbol{W}$ или, что то же, что в $\boldsymbol{W}$ нет элемента, ортогонального $\boldsymbol{R}\,(\bar{A})$ (это утверждение, по существу, есть теорема единственности обобщенного решения из $\boldsymbol{L_2}(Q_T)$). Будем идти от противного, т. е. пусть существует элемент $(f; a)$ из $\boldsymbol{W}$, ортогональный всем элементам из $\boldsymbol{R}\,(\bar{A})$ или, что то же, из $\boldsymbol{R}(A)$:

$$0 = \{(f; a), A\boldsymbol{u}\} = \int_{Q_T} f(\boldsymbol{u}_t + \tilde{\Delta}\boldsymbol{u})dxdt + \int_{\Omega} a_x \boldsymbol{u}_x(x, 0)dx \qquad (2.9)$$

для всех $\boldsymbol{u} \in D(A)$. Построим по $\boldsymbol{f}$ вектор $\boldsymbol{u}(x,t) = \int_0^t \tilde{\Delta}^{-1}\boldsymbol{f}(x,\tau)d\tau$. Легко видеть, что $\boldsymbol{u} \in D(A)$. Подставим его в тождество (2.9):

$$0 = \int_{Q_T} \boldsymbol{f}\left(\tilde{\Delta}^{-1}\boldsymbol{f} - \int_0^t \boldsymbol{f}\,d\tau\right)dxdt.$$

Так как $\left(\tilde{\Delta}^{-1}\right)^{-1}$есть положительно определенный самосопряженный оператор, то последнее равенство может быть преобразовано к виду

$$0 = \int_{Q_T} [(-\tilde{\Delta})^{-1/2}\boldsymbol{f}]^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\int_0^t \boldsymbol{f} d\tau\right)^2 dx,$$

из которого ясно, что $(-\tilde{\Delta})^{-1/2}\boldsymbol{f} \equiv 0$, а потому и $\boldsymbol{f} \equiv 0$. Вернемся к равенству (9). Оно, из предыдущего доказательства, будет иметь вид

$$0 = [a, \boldsymbol{u}(x, 0)]$$

для любого $\boldsymbol{u} \in D(A)$, и так как для таких $\boldsymbol{u}$ функции $\boldsymbol{u}(x, 0)$ плотны в $\boldsymbol{H}(\Omega)$, то $a \equiv 0$. Это доказывает совпадение $\boldsymbol{R}(\bar{A})$ и $\boldsymbol{W}$. [7,с.175]

Теорема 1

Задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима для любого $f \in \boldsymbol{L_2}(Q_T)$ и $a \in \boldsymbol{H}(\Omega)$. Ее решение $\boldsymbol{v}$ имеет $\boldsymbol{v}_t$ и $\tilde{\Delta}\boldsymbol{v}$ из $\boldsymbol{L_2}(Q_T)$, $\boldsymbol{v}_{xx}$ и p_x из $\boldsymbol{L}_2(\Omega'\times [0, T]), \Omega' \subset \Omega$, причем само $\boldsymbol{v}(x, t)$ может быть рассмотрено при любом $t \in [0, T]$ как элемент $\boldsymbol{H}(\Omega)$, непрерывно зависящий от t. Үравнение (2.1) удовлетворяет почти всюду. Если граница S дважды непрерывно дифференцируема, то $\boldsymbol{v}_{xx}$ и p_x принадлежат $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. [7,с.138]

Из этой теоремы требует проверки только утверждение о единственности. Все остальное это следствие только что доказанных положений и свойств оператора $\tilde{\Delta}$. Единственность же решения из $\boldsymbol{D}(\bar{A})$ легко следует из равенства (2.7). Именно, если $f \equiv 0$ и $a \equiv 0$, а $\boldsymbol{v}$ – соответствующее им решение, то для него $\boldsymbol{v}_x(x, t) \equiv 0$, а потому и $\boldsymbol{v} \equiv 0$.

Теорема 1.2 Задача

$$\boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v} + A_k(x, t)\boldsymbol{v}_{x_k} = -grad\, p + f(x, t),$$
$$div\, \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v}|_{S_T} = 0, \boldsymbol{v}|_{t=0} = a(x),$$

имеет единственное решение $\boldsymbol{v},\ p$ с $\boldsymbol{v}_{xx},\ \boldsymbol{v}_t,\ p_x$ из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$, если $f \in \boldsymbol{L}_2(Q_T), a \in \boldsymbol{H}(\Omega), S \in C^2, a\ \boldsymbol{A}_k(x,t)$ – квадратные матрицы, элементы которых $a_k^{lm}(x,t)$ принадлежат $\boldsymbol{L}_{q,r}(Q_T)$ с q и r,удовлетворяющими условиям $\frac{1}{r}+\frac{n}{2q} \le \frac{1}{2}, q \in (n,\infty], r \in [2,\infty)$, или $q > n, r = \infty$, где n = 2, или 3 – размерность пространства x-ов. Вектор $\boldsymbol{v}$ есть элемент $\boldsymbol{H}(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$. Норма $||\boldsymbol{v}||_{2,Q_T}^{(2,1)}$ не превосходит постоянной, определяемой лишь $n, q, r, \boldsymbol{v}, T, \|f\|_{2,Q_T}, \|a_x\|_{2,\Omega}, \left\|a_k^{lm}\right\|_{q,r,Q_T}$ и S. Если к тому же векторы $(a_1^{lm},\dots,a_n^{lm}) \in \boldsymbol{J}(Q_T)$, то для нашей задачи справедлива теорема единственности в классе обобщенных решений из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$.

При доказательстве теоремы 1 мы установили теорему единственности для «обобщенных решений задачи (2.1), (2.2) из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$». Такие решения определяются следующим образом:

Функция $\boldsymbol{v}(x,t)$ из $\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ называется обобщенным решением из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$ задачи (2.1), (2.2) и удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_T} v(\Phi_t + \tilde{\Delta}\Phi)\,dxdt + \int_{\Omega} a\Phi(x,0)dx = -\int_{Q_T} f\Phi dxdt \qquad (2.10)$$

при всех $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ из $\boldsymbol{D}(A)$, равных нулю для $t = T$.

Решение, гарантированное теоремой 1, является обобщенным решением из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. Допустим, задача (2.1), (2.2) имеет два решения из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$, следовательно их разность $\boldsymbol{w}$ будет удовлетворять тождеству

$$\int_{Q_T} \boldsymbol{w}(\Phi_t + \tilde{\Delta}\Phi)\,dxdt = 0.$$

Сделаем в нем замену переменной t на $\tau = T - t$. Это даст тождество

$$\int_{Q_T} \boldsymbol{w}(-\Phi_\tau + \tilde{\Delta}\Phi)\, dxdt = 0,$$

Которое несет в себе ту же информацию, что и тождество (9) с $\boldsymbol{u}(x,0) = 0$. В обоих случаях множества $\{\Phi\}$ и $\{u\}$ и априорные свойства $\boldsymbol{w}$ и f совпадают и потому, в силу доказанного выше, $\boldsymbol{w} = 0$. Тем самым доказана [7,с.169]

Теорема 2.

Задача (2.1), (2.2) может иметь не более одного обобщенного решения из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$.

Такие решения существуют при довольно плохих f и a. Ограничимся следующим предложением о существовании несколько более хороших решений. Сделаем это для задачи (2.1), (2.2) с несколько более общим свободным членом, а именно:

$$\boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{\nu}\Delta\boldsymbol{v} = -grad\, p + f + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f^k}{\partial x_k},$$

$$div\, \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{v}|_{S_T} = 0, \boldsymbol{v}|_{t=0} = a. \qquad (2.11)$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\boldsymbol{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ банахово пространство, которое получилось в результате замыкания множества гладких, равных нулю вблизи S_T, функций по норме

$$\|\boldsymbol{v}\|_{Q_T} = \max_{0\le t\le T} \|\boldsymbol{v}(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\boldsymbol{v}_x\|_{2,Q_T}.$$

Очевидно, оно состоит из всех функций, имеющих конечную норму $\|\cdot\|_{Q_T}$, равных нулю на S_T и непрерывно зависящих от t в норме $\boldsymbol{L}_2(\Omega)$.

Обобщенным решением задачи (2.11) из класса $\overset{\circ}{\boldsymbol{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, называется функция $\boldsymbol{v} \in \overset{\circ}{\boldsymbol{V}}{}_2^{1,0}(Q_T) \cap \overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$, для которой справедливо тождество

$$\int_{Q_T}(-\boldsymbol{\nu}\Phi_t+\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}_x\Phi_x)\,dxdt+\int_\Omega \boldsymbol{\nu}(x,t)\Phi(x,t)dx-\int_\Omega a(x)\Phi(x,0)dx=$$

$$=\int_{Q_T}(f\Phi+f^k\Phi_{x_k})\,dxdt \qquad (2.12)$$

при всех $\boldsymbol{\Phi}\in \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^{1,1}(Q_T)\cap\overset{\circ}{\boldsymbol{J}}(Q_T)$ и равенства.

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\nu}(x,t)\|^2-\frac{1}{2}\|a\|^2+\boldsymbol{\nu}\int_0^t\|\boldsymbol{\nu}_x\|^2\,dt=\int_0^t\left[(f,\boldsymbol{\nu})-\left(f^k,\boldsymbol{\nu}_{x_k}\right)\right]dt. \qquad (2.13)$$

Такие решения составляют класс решений, более узкий, чем класс обобщенных решений из $\boldsymbol{L}_2(Q_T)$. [7,с.180]

Глава 3. Основные результаты

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим в качестве базовой математической модели гидравлического удара на микроскопическом уровне модель, которая описывает кратковременные изотерические процессы в несжимаемой среде [22, с.50]. В ней безразмерный вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ сплошной среды в безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$x' = Lx, t' = \tau t, \boldsymbol{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\boldsymbol{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области Ω при $t > 0$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{3.1}$$

$$\bar{\varrho}\alpha_\tau \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \bar{\varrho}F, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{P} = \bar{\chi}\alpha_\mu \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\right) + (1-\bar{\chi})\alpha_\lambda \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) - p\mathbb{I}, \tag{3.3}$$

где

$$\bar{\varrho} = \bar{\chi}\varrho_f + (1-\bar{\chi})\varrho_{s,}$$

$\bar{\chi}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства, $p(\boldsymbol{x},t)$ – давление, p_f и p_s соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета грунта, отнесенные к средней плотности воды ρ_0. $\mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ – симметрическая часть градиента вектора $\boldsymbol{u}$, $\mathbb{I}$ – единичная матрица.

Безразмерные постоянные α_τ, α_μ и α_λ определяются формулами

$$\alpha_\tau = \frac{L}{\tau^2 g}, \alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \alpha_\lambda = \frac{2\lambda}{L^2\rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ, τ – характерное время физического процесса, L – характерный размер рассматриваемой физической области.

Үчитывая предположение о характере рассматриваемого физического процесса, будем считать $\alpha_\tau = 1$.

Рассмотрим уравнение (3.2), оно понимается в смысле теории распределений и содержит уравнения Стокса в жидкой части, а уравнения Ламэ в твердом скелете и условие непрерывности нормальных напряжений на границе «твердый скелет – поровое пространство».

Данная математическая модель содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L: $\varepsilon = \frac{l}{L}$. Но даже при наличии малого параметра задача остается трудной, поэтому необходимы дополнительные упрощающие допущения. С геометрической точки зрения этим упрощением является предположение о периодичности порового пространства. В частности, рассмотрим следующее

Предположение 2.1.

1) Пусть область Y_s есть «твердая часть» единичного куба $Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, и его «жидкая» часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ есть липшицева поверхность.

2) Область E_f есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, область E_s есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3) Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f, а твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s. Непрерывная по Липшицу граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4) $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$. Поровое пространство Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами.

В этих предположениях

$$\bar{\chi}(x) = \chi^\varepsilon(x) = \chi_0(x)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\chi_0(x)$ есть характеристическая функция области Ω, а

$$\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 0, x \in \Omega_s^\varepsilon \\ 1, x \in \Omega_f^\varepsilon. \end{cases}$$

Допустим безразмерные параметры α_μ и α_λ зависят от малого параметра задачи ε и существуют конечные или бесконечные пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0, \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1, \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2} = \lambda_1.$$

Для простоты изложения, считаем, что область Ω представляет собой единичный куб $(0,1)\times(0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ (рис.1).

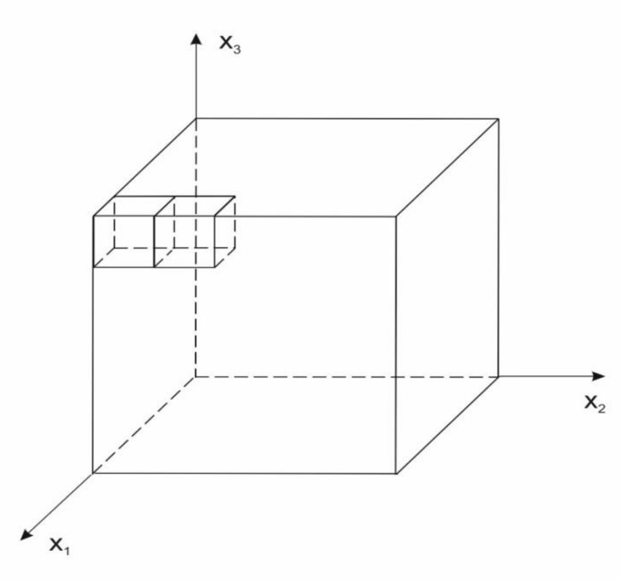

Рис. 1. Ω –область

Часть границы области $\partial\Omega = S$, которая лежит в плоскости $\{x_3 = 1\}$,обозначим через S^1. А остальную $S^2 = S \backslash S^1$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, в области Ω_T описывается системой

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^\varepsilon = 0, \tag{3.8}$$

$$\varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}, \tag{3.9}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + (1 - \chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I}. \tag{3.10}$$

Система Стокса описывает движение жидкости в области Ω_T^0, которая состоит из уравнения неразрывности (3.8) и уравнения баланса импульса

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^0, \tag{3.11}$$

$$\mathbb{P}^0 = \alpha_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) - p^\varepsilon \mathbb{I}. \tag{3.12}$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$, а также на границе Γ^ε «твердый скелет – поровое пространство» выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega^0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t), \tag{3.13}$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega^0}} \mathbb{P}^0(\boldsymbol{x}, t) \cdot n(x^0) = \lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot n(x^0), \tag{3.14}$$

где $n(x^0)$ – вектор нормали к соответствующей границе в точке x^0.

На части S^1 границы S задано нормальное напряжение

$$\left(\varsigma\mathbb{P}^0(x,t)+(1-\varsigma)\mathbb{P}(x,t)\right)\cdot\boldsymbol{e}_3=-p_0(x,t)\boldsymbol{e}_3, \qquad (3.15)$$

где $p_0(x,t)$ – это импульс, определяющий гидравлический удар. Будем считать, что функция $p_0(x,t)$ финитна в области

$$\left\{x\in\mathbb{R}^2\middle|x_1^2+x_2^2<\frac{\delta^2}{2}<1,-\delta<x_3<0\right\}.$$

а в оставшейся части внешней границы S^2 выполняется условие

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},t)=0\ \text{п}ри\ t>0. \qquad (3.16)$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x},0)=0,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=0,t\in Q. \qquad (3.17)$$

Обычным образом определяется понятие обобщенного решения задачи.

Определение 2.1. Пара функций $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon,p^\varepsilon\}$называется обобщенным решением задачи (3.8) – (3.17), при условии

1) $\boldsymbol{w}^\varepsilon\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T),\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\in\boldsymbol{L}_2(Q_T),p^\varepsilon\in\boldsymbol{L}_2(Q_T)$;

2) почти всюду в области Q_T выполнено уравнение неразрывности (3.8) и начальное условие (3.17) для функций $\boldsymbol{w}^\varepsilon$;

3) функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$ и p^ε удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (-\bar{\varrho}^{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varsigma\mathbb{P}^0 + (1-\varsigma)\mathbb{P}) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}))dxdt =$$

$$= -\int_{Q_T} \nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}p_0)dxdt \qquad (3.18)$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{W}_2^{1,0}(Q_T), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in \boldsymbol{L_2}(Q_T)$, таких что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0$ на границе S_T^2 и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in Q$.

Очевидно, что давление p^{ε} определяется точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем эту постоянную условием

$$\int_{\Omega} p^{\varepsilon}\mathrm{dx} = 0. \qquad (3.19)$$

В тождестве (2.18) $\bar{\varrho}^{\varepsilon} = (\varsigma + (1-\varsigma)\chi^{\varepsilon})_{\varrho_f} + (1-\varsigma)(1-\chi^{\varepsilon})_{\varrho_s}$ и $\varsigma = \varsigma(x)$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q.

Интегральное тождество (3.18) содержит уравнение Стокса в области $\Omega_f \cup \Omega^0$ при $t > 0$, уравнения Ламэ в области Ω_s при $t > 0$, условие непрерывности нормальных напряжений на границе S^0 (3.14), а также на общей границе «поровое пространство – твердый скелет», и второе начальное условие в (3.17).

Иногда можно записать тождество (3.18) в дифференциальной форме

$$\bar{\varrho}^{\varepsilon}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2} = \nabla\cdot(\varsigma\mathbb{P}^0 + (1-\varsigma)\mathbb{P}), \qquad (3.20)$$

и говорить, что функции $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\}$ удовлетворяют уравнению (3.20) и граничному условию (3.15) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция p_0 подчинена следующему условию

$$\int_{Q_T}\left(|\nabla p_0(x,t)|^2+\left|\nabla\frac{\partial p_0}{\partial t}(x,t)\right|^2\right)dxdt=\mathfrak{P}^2<\infty,$$

где $\mathfrak{P}$ – константа, зависящая только от областей Q,Ω и Ω_0.

3.2 Доказательство теоремы 1

Вывод усредненных уравнений базируется на следующей теореме.

Теорема 2.1. Пусть функции **F**, $\partial\boldsymbol{F}/\partial t$ ограничены в $\boldsymbol{L}^2(\Omega_T)$:

$$\int_{\Omega_T}\left(|\boldsymbol{F}|^2+\left|\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}\right|^2\right)dxdt\leq F^2.$$

Тогда при всех $\varepsilon>0$ на произвольном интервале времени [0,T] существует единственное обобщенное решение задачи (3.1) – (3.17) и справедливы оценки

$$\sqrt{\alpha_\mu}\left\|\mathcal{X}^\varepsilon\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\Omega}+\sqrt{\alpha_\lambda}\left\|(1-\mathcal{X}^\varepsilon)\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right\|_{2,\Omega}\leq$$
$$\leq C_0F^2,\tag{3.21}$$

$$\sqrt{\alpha_\mu}\left\|\mathcal{X}^\varepsilon\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\right\|_{2,\Omega_T}+\left\|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{2,\Omega}+||p^\varepsilon(t)||_{2,\Omega}\leq$$
$$\leq C_0F^2.\tag{3.22}$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε и $t\in[0,T]$.

Доказательство. Существование обобщенного решения задачи (3.8) – (3.17) при всех $\varepsilon>0$ и оценки (3.21) (3.22) базируется на энергетическом тождестве

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_Q\left(\bar{\varrho}^\varepsilon\left|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right|^2+\alpha_\lambda(1-\varsigma)(1-\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\right)\right|^2\right)dx+$$

$$+\int_Q\alpha_\mu(\varsigma+(1-\varsigma)\chi^\varepsilon)\left|\mathbb{D}\left(x,\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)\right|^2dx=\int_Q\nabla(\frac{\partial p_0}{\partial t})\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}dx,\quad(3.23)$$

которое получится после дифференцирования уравнения (3.20) по времени, умножения на $\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}$ и интегрирования по частям по области Q с привлечением уравнения неразрывности (3.8). Можно заметить, что все слагаемые на границе Γ^ε исчезают, благодаря граничным условиям (3.13) – (3.14).

Воспользуемся неравенством Гельдера и обобщенным неравенством Коши в (3.23), получим требуемые оценки (3.21) (3.22) для перемещений. А именно, имеем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y^2(t)\le\left(\int_Q\left(\nabla\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_Q\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\left(\int_Q\left(\nabla\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot y(t),$$

где

$$y^2(t)=\int_Q\bar{\varrho}^\varepsilon\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right)^2dx\,,$$

или

$$y(t)\cdot y'(t)\le\boldsymbol{F}(t)\cdot y(t),$$

$$y'(t)\le\boldsymbol{F}(t),$$

что влечет ограниченность функции $y(t)$:

$$y(t) \le \int_0^T \boldsymbol{F}(\tau) d\tau.$$

Из последнего неравенства вытекают требуемые оценки (3.21) (3.22) для нормы перемещений.

Также данные оценки гарантируют существование и единственность обобщенного решения задачи (3.8) – (3.17). Для этого воспользуемся методом Галеркина и рассмотрим в качестве базового пространства соленоидальных функций из $\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию (3.16), а в качестве базиса – любой базис, ортонормированный в скалярном произведении пространства $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$.

Можно оценить давление p^ε из интегрального тождества (3.18) как линейный непрерывный функционал над пространством функций из $\boldsymbol{L}_2((0,\mathrm{T});\ \overset{\circ}{\boldsymbol{W}}{}_2^1(Q))$. Запишем его в виде

$$\int_{Q_T} p^\varepsilon \nabla \cdot \psi \, dxdt = \int_{Q_T} p^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \cdot \psi + \mathbb{F} : \mathbb{D}(x, \psi)) dxdt$$

и учитывая, что $\mathbb{F} = \varsigma \mathbb{P}^0 + (1 - \varsigma)\mathbb{P} \in \boldsymbol{L}_2(Q_T)$, получим оценку

$$\left| \iint_{Q_T} p^\varepsilon \nabla \cdot \psi \, dxdt \right| \le C_0 \mathfrak{P} \left(\int_{Q_T} |\nabla \psi|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.24)$$

где C_0 не зависит от малого параметра ε.

Выберем функцию ψ, исходя из условий

$$\nabla \cdot \psi = p^\varepsilon,$$

$$\int_{Q_T} |\nabla \psi|^2 \, dxdt \le C_0 \int_{Q_T} |p^\varepsilon|^2 \, dxdt.$$

Положим

$$\psi = \nabla\varphi + \psi_0,$$

где

$$\Delta\varphi = p^{\varepsilon}, x \in Q, \varphi|_{S_2} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}|_{S_1} = 0, \qquad (3.25)$$

$$\nabla \cdot \psi_0 = 0, x \in Q, \psi_0 = -\nabla\varphi, x \in S. \qquad (3.26)$$

Таким образом, желаемая гладкость решений задач (3.14), (3.26), следует из результатов, которые приведены в работах [7], [8], структуры границы S и условия (3.19).

Продолжая функцию φ из области Q через границу S_1 в некоторую малую полосу и через S_2 как нечетную функцию, а затем из полученной области в $\{x_3 > 0\}$ как функцию, удовлетворяющую уравнению Пуассона, получим $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{L}_2((0, \mathrm{T});\ \boldsymbol{W}_2^2(Q))$,

$$\int_0^T \left(||\boldsymbol{\varphi}||_2^{(2)}(t)\right)^2 dt \le C_0 \int_{Q_T} |p^{\varepsilon}|^2\, dxdt.$$

Ищем решение ψ_0 задачи (2.26) как решение системы Стокса

$$\Delta\psi_0 + \nabla q = 0, \nabla \cdot \psi_0 = 0, x \in Q$$

с неоднородным граничным условием

$$\psi_0 = -\nabla\varphi, x \in S.$$

Данная задача имеет единственное решение $\psi_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1,0}(Q_T)$, такое что

$$\int_0^T \left(\|\psi_0\|_2^{(1)}(t)\right)^2 dt \le C_0 \int_0^T \left(\|\varphi\|_2^{(2)}(t)\right)^2 dt,$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_Q \nabla \cdot (\nabla\varphi) dx \equiv \int_Q \Delta\varphi \mathrm{dx} = \int_Q p^\varepsilon dx = 0.$$

Последнее соотношение обеспечивает желаемые оценки (3.21) (3.22) для давления p^ε. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе проведен подробный анализ теоретического материала, который связан с темой работы, также изучены основные теоретические положения, необходимые при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений.

Были получены интегральное тождество, априорные оценки решения начально-краевой задачи для неоднородной среды и дано определение обобщенного решения задачи.

Целью работы являлся вывод равномерных по параметру модели оценок решения задачи. Такие оценки получить удалось.

Изучение точной математической модели упругой пористой среды, обоснованно применением при описании распространения сейсмических и акустических волн, а также фильтрации подземных жидкостей в упругих пористых средах, поэтому может вызывать практический интерес в нефтедобывающей промышленности и сейсмологии.

Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались и обсуждались в молодежной научно-практической конференции с международным участием "Естественнонаучные, инженерные и экономические исследования в технике, промышленности, медицине и сельском хозяйстве" и были опубликованы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бахвалов Н.С. Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Ворович И.И. О методе Бубнова – Галеркина в нелинейной теории колебания пологих оболочек. – Доклады АН СССР, 1956. – т. 110. – №5. – 723 - 726 с.
3. Галёркин Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. // Вестник инженеров. – 1915. – т.1. – 897 - 908 с.
4. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Наука, 1993. – 464 с.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.– М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
7. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
10. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наукова думка, 1974. – 279 с.

11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

12. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – 2-е изд.– М.-Л. – 1970. – 476 с.

13. Некрасова И.В. Математические модели гидравлического удара в вязкой жидкости // Сибирские электронные математические известия. – 2012. – Т. 9. – 274 - 293 с. – http://semr.math.nsc.ru/v9/p227-246.pdf.

14. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 260 с.

15. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.

16. Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А, Шамаев А.С. Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск: Тамара Рожковская, Белая серия в математике и физике, 2007. – Т.3. – 264 с.

17. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория вибраций. – М.: Мир, 1984. – 471 с.

18. Bensoussan A., Lions J. – L., Papanicolau G. Asymptotic Analisis for Periodic Structure. – Amsterdam: North Holland, 1978. – 700 c.

19. Lions J. – L. Some methods in the Mathematical Analysis of Systems and Theire Control // Beijing, China: Science Press: New York: Cordon and Breach. – 1981.

20. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // Journal of Mathematical Sciences. – 2009.– 111-172 c.