

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
Федеральное государственное автономное  
образования



РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
образовательное учреждение высшего

«Дальневосточный федеральный университет»  
(ДФУ)

---

## ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

**Кафедра механики и математического моделирования**

Тихоненко Антон Александрович

Термоупругопластические напряжения в цилиндрах при обработке деталей  
методом температурной обработки

### **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

по направлению подготовки 15.04.03 Прикладная механика,  
магистерская программа «Математическое и компьютерное моделирование  
механических систем и процессов»

Владивосток

2018



Сведения, содержащих  
гос. тайну, нет

[Подпись] А.А. Бочарова

Автор работы Тихомирко А.А. (подпись)  
« 5 » июля 2018 г.

Консультант(ы)\*  
\_\_\_\_\_  
(подпись) (И.О. Фамилия)  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 г.

Руководитель ВКР профессор, в.ф.-м.н.  
(должность, учёное звание)  
[Подпись] О.И. Модина  
(подпись) (И.О. Фамилия)  
« 19 » июля 2018 г.

Назначен рецензент к.ф.-м.н.  
(учёное звание)  
Дестов Константин Николаевич  
(Фамилия Имя Отчество)

Защищена в ГЭК с оценкой Отлично

Секретарь ГЭК  
[Подпись] А.А. Ратников  
(подпись)

« 05 » июля 2018 г.

«Допустить к защите»  
Заведующий кафедрой, доцент  
[Подпись] А.А. Бочарова  
(подпись)  
« 14 » июля 2018 г.

**УТВЕРЖДАЮ**  
Директор Инженерной школы

[Подпись] / Бенкер А.Т. /  
Подпись Ф.И.О.  
« 18 » июля 2018 г.

**В материалах данной выпускной квалификационной работы не содержатся сведения, составляющие государственную тайну, и сведения, подлежащие экспортному контролю.**

Уполномоченный по экспортному контролю

\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_/« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 201 г.  
Ф.И.О. Подпись

## Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Постановка задачи исследования .....	6
П. 1.1 Обзор методов определения упругопластического деформирования цилиндров под воздействием температур .....	6
Пункт 1.2. Общие уравнения математической модели для термоупругопластического деформирования цилиндра при неравномерном распределении температур .....	13
Глава 2 Определение температурного поля в толстостенных цилиндрах при разных способах температурной обработки.....	27
Пункт 2.1. Распределение температуры в цилиндре при горячей посадке на цилиндрический вал (1 слой-вал). Аналитическое решение и (1 слой-цилиндр). Численное и аналитическое решение. ....	27
Пункт 2.2. Распределение температуры в цилиндре при горячей посадке на цилиндрический вал (2 слоя- вал и цилиндр). Численное решение.....	33
Глава 3. Упругопластическое деформирование цилиндра при неравномерном нагреве с учетом изменяющихся механических свойств материала. ....	41
П. 3.1 Термоупругие напряжения в сплошном двухслойном цилиндре при нестационарном распределении температуры для материалов с разными механическими коэффициентами .....	41
П. 3.2. Термоупругопластическое деформирование цилиндра при отсутствии упрочнения, условии текучести Мизеса и постоянном пределе текучести. ....	55
Пункт 3.3. Термоупругопластическое деформирование цилиндра с условием текучести Мизеса, с учетом зависимости температуры от предела текучести.....	70
Заключение .....	76
Список литературы .....	77
Приложение А .....	79
Приложение Б.....	81
Приложение В.....	83



## **Введение**

Математическое моделирование изменения свойств материалов в процессе тепловой обработки с учетом изменяющихся теплофизических и механических характеристик, остается актуальной задачей моделирования объектов и явлений. Среди многообразных процессов температурной обработки материалов (сварки, штамповки и др.) выделяется метод горячей посадки, с помощью которого фактически получают новые конструкционные слоистые материалы, такие как биметаллы, триметаллы и стекло-металлические трубы.

Ясно, что материалы, из которых методом горячей посадки изготавливаются новые слоистые композиты и детали обладают комплексом новых свойств, которые, в том числе, зависят от характера деформирования, уровня остаточных напряжений и от накопления необратимых деформаций, после температурной обработки. Задачи по определению термоупругопластических напряжений и деформаций в условиях нелинейной зависимости свойств от температуры в слоистых конструкционных материалах практически не имеют аналитических решений, несмотря на постоянный интерес исследователей. Поэтому актуальна разработка качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей для технологий тепловой обработки слоистых конструкционных материалов и сопряженных систем деталей, с учетом возникающих областей пластического деформирования и изменения их границ.

Целью данной работы являлась разработка численно-аналитического метода определения термоупругопластических

напряжений и деформаций в осесимметричном длинном цилиндре при условии неравномерного изменения температуры по радиусу цилиндра. Для достижения цели решались следующие задачи:

- Задача 1. Термоупругопластическое деформирование цилиндра при отсутствии упрочнения, условии текучести Мизеса и постоянном пределе текучести.
- Задача 2. Термоупругопластическое деформирование цилиндра с условием текучести Мизеса, с учетом зависимости температуры предела текучести.
- Задача 3. Термоупругопластическое деформирование цилиндра при неравномерном нагреве с учетом изменяющихся механических свойств материала: Модуль Юнга, коэффициента линейного температурного расширения и предела текучести.

## **Глава 1. Постановка задачи исследования**

### *П. 1.1 Обзор методов определения упругопластического деформирования цилиндров под воздействием температур*

Горячая посадка в инженерную практику была введена выдающимся отечественным ученым и инженером Акселем Вильгельмовичем Гадолиным. Именно двухслойные стволы орудий, таким способом созданные, смогли выдерживать высокое давление пороховых газов. В этом состояло блестящее решение к тому времени совершенно необходимой к разрешению инженерной задачи. С тех пор технологическая операция сборки цилиндрических деталей способом горячей посадки оказывается общепризнанной и снабжается соответствующими методическими указаниями к ее использованию. Расчетная часть данных методик, призванная рекомендовать условия для достижения требуемого натяга в сборке, базируется на теории термоупругости или на теории температурных напряжений в упругих телах. Тем положением, что в процессе посадки невозможно накопление в материале сборки необратимых деформаций, пренебрегают. Объяснение тому находят в невозможности прогнозировать итоговый натяг при условии учета необратимых деформаций из-за непреодолимых расчетных трудностей, при этом возникающих. К настоящему времени обстоятельства существенно изменились. Теперь современная вычислительная техника и современные вычислительные технологии способны предоставить необходимые вычислительные возможности для решения задачи теории температурных напряжений о способе горячей посадки с учетом необратимого деформирования материалов сборки. Иначе, теперь есть возможность

усовершенствовать методики расчетов операции без сомнительных допущений об отсутствии необратимого деформирования. Именно решение данной задачи ставится целью настоящей работы.

Тепловые и деформационные процессы неразделимы. Каким же способом, исходя из классического опыта, следует учесть в математической модели термомеханического процесса, называемого горячей посадкой, возможное необратимое деформирование материалов сборки? Отметим еще раз, что ряд технологических и особенно прочностных расчетов всецело пренебрегает самой возможностью существования необратимых деформаций. Расчеты проводятся в рамках теории термоупругости [1,5,6]. Когда связанностью тепловых и деформационных процессов пренебрегают, то получают теорию температурных напряжений в упругих телах. Именно последняя теория является основной для расчетов процессов сборки горячей посадкой, и именно такие расчеты рекомендуются технологическими и техническими условиями .

Вязкие свойства материалов сборки могут задавать их ползучесть и последующую релаксацию напряжений [12]. Однако эти процессы являются медленными и не смогут оказать существенного влияния на нестационарные процессы деформирования, сопровождающие горячую посадку. В отличие от деформаций ползучести пластические деформации накапливаются быстро со временем, сравнимым со временем протекания процесса теплопроводности в данной технологической операции [12]. Следовательно, наиболее адекватной математической моделью для расчетного прогнозирования процесса, происходящего в условиях сборки



горячей посадкой, является математическая модель упругопластического тела [4,13]. Только на основании данной модели, возможно, будет учтено влияние процесса накопления необратимых деформаций на основные рассчитываемые параметры технологической операции сборки упругопластических деталей способом горячей посадки. При этом следует иметь в виду, что при значительных изменениях температуры упругие постоянные, и, что особенно важно, предел текучести могут изменять свои значения.

Среди моделей упругопластического деформирования материалов различают два варианта, принципиально отличающиеся в подходе к описанию процесса накопления необратимых деформаций. Первый из них обобщенно называют деформационной теорией пластичности, второй-теорией пластического течения. Основоположником и наиболее ярким представителем деформационной теории пластичности является А.А. Ильюшин [4]. Им разработаны фундаментальные основания такой теории, (сформулирован принцип изотропии, принцип запаздывания и др.) установлены конкретные зависимости «напряжения-деформации» для ряда частных случаев (простой деформации, малой кривизны и других теорий). Наибольшее распространение в инженерной практике получил вариант деформационной пластичности, называемый теорией упругопластических процессов. Данный подход, обобщенный на случай термопластичности Ю.Н. Шевченко, широко использовался его учениками и последователями. Обобщения касались не только оснований теории упругопластических процессов (постулата изотропии и других теорий) [14], но и методов решения краевых задач термопластичности в условиях стационарных и

нестационарных термомеханических воздействий. Отдельно следует отметить развитие на такой основе теории тонкостенных конструкций, когда такие элементы конструкции находятся в условиях интенсивного термомеханического нагружения; создание адекватных численных методов расчета. Обобщение этого подхода на случай учета больших деформаций было осуществлено учеными Пермской школы механиков.

Теория пластического течения в расчетах термомеханических процессов использовалась существенно более редко. Связанно это с тем, что такие расчеты требуют более проработанных алгоритмов и соответствующих вычислительных технологий. Поэтому публикации с подобными расчетами, исключая ряд простейших задач, появились только в конце прошлого столетия. В этом случае выделяются области необратимого деформирования (области пластического течения), а вне таких областей материал деформируется обратимо (упруго). Упругопластические границы разделяющие такие области, являются элементами решения краевой задачи. Они продвигаются по материалу, и, следовательно, их положения обязаны определяться в процессе решения задачи, что накладывает дополнительные требования к методам решения. Более того, уже в одной из первых работ, посвященных упругопластическому деформированию толстостенной трубы в условиях нестационарных термомеханических воздействий, Д. Бленд впервые заметил, что при использовании кусочно-линейного условия пластичности максимального касательно напряжения Треска-Сен-Венана область пластического течения может, в свою очередь, разделяться на части, в которых течение происходит по-разному. Связано это с тем, что

системы дифференциальных уравнений, определяющие течения, оказываются разными при соответствии напряженных состояний разным граням или ребрам призмы Треска, форму которой в пространстве главных напряжений принимает поверхность нагружения (условие пластичности). Необходимость отслеживать в процессе решения задачи положений таких граничных поверхностей, так же как и упругопластических границ, приводит к усложнениям в алгоритмах расчетов. Отказ от использования классического пластического потенциала Треска- Сен-Венана заменой его гладкой поверхностью нагружения, например, цилиндром Мизеса, приводит только к усложнению математического аппарата, поскольку только при задании условий пластичности кусочно-линейной зависимостью в целом ряде случаев уравнение равновесия удается проинтегрировать. Из-за этого в абсолютном большинстве работ, посвященных решению краевых задач термопластичности, используется именно кусочно-линейный пластический потенциал Треска- Сен-Венана.

Наибольшую трудность в своем решении имеют краевые задачи термопластичности, в которых распределение температур нестационарно, и, как следствие, температурные напряжения являются неустановившимися. Это характерно для задач, моделирующих процессы сварки, консолидации расплавов, локального отжига и др. Технологическая операция горячей посадки относится именно к таковым.

Снижение прочности материалов в зоне термического влияния шва остается до настоящего времени основной проблемой сварочного производства. Такая задача с определением

остаточных напряжений в зоне термического влияния рассматривалась неоднократно. Если не рассматривать материаловедческие аспекты проблемы, связанные с твердотельными фазовыми превращениями, а интересоваться только уровнем и распределением остаточных напряжений в окрестности сварного шва, то приходим к задаче теории неустановившихся температурных напряжений. К задачам данной теории относятся и задачи, моделирующие процесс закалки материала зоны термического влияния. Несмотря на выверенную экспериментальную проработку, целый ряд таких инженерно-технологических решений, включающих в себя материаловедческие аспекты, с позиций теории температурных напряжений в упругопластических материалах еще требует своего исследования. То же относится и к многочисленным исследованиям процессов консолидации расплавов в металлургии.

Зависимость предела текучести от температуры в таких работах предполагалась линейной. Рассчитывались температурные напряжения в условиях развития областей пластического течения.

Задача расчетного прогнозирования эволюции температурных напряжений в процессах, происходящих в условиях технологической операции сборки способом горячей посадки, в своей постановочной части относится к простейшим задачам теории термопластичности и, в частности, теории температурных напряжений в упругопластических телах. Поэтому такие задачи рассматривались неоднократно. Преимущественно были рассмотрены одномерные задачи в условиях соответствия напряжений плоскому напряженному

состоянию. В качестве условия пластичности принималось условие максимальных касательных напряжений (критерий Треска- Сен-Венана), а зависимость предела текучести от времени полагалась линейной. Наряду с этим в зависимыми линейно от температуры считались также упругие постоянные. Замеченные еще Д. Блендом разделения области пластического течения на части, в которых течение задается разными системами уравнений в зависимости от принадлежности напряженных состояний разным граням и ребрам поверхности нагружения, в этих работах не отражались. В этой связи следует отметить работу, которая не посвящена задаче посадки, а в ней только рассмотрены температурные напряжения в цилиндре конечных размеров, возникающие при его термомеханическом нагружении. Было показано, что напряженное состояние имеет возможность переходить с грани призмы Треска на ребро с возникновением состояния полной пластичности. Появления повторного пластического течения во всех этих работах не наблюдалось.

В настоящее время математическая модель термопластичности и теории температурных напряжений в упругопластических материалах получила различные обобщения. Последние направлены на описание более сложных свойств реальных материалов, включая структурные изменения, учет больших деформаций. Замеченные особенности решений, связанные с использованием кусочно-линейных пластических потенциалов, несомненно проявятся и в усложненных моделях термоупругопластичности наряду с новыми эффектами, вызванными соответствующими усложнениями. Поэтому изучение таких особенностей в рамках классической модели

упругопластичности типа Пранделя-Рейса важно и для теорий, строящихся на основе усложненных моделей.

Получили развитие и методы вычисления температурных напряжений в упругопластических телах. Главным образом такие методы связаны с дискретизацией области деформирования и адаптацией к таким задачам разработанных ранее процедур методов конечных разностей и конечных элементов. Анализ имеющихся подходов позволяет заметить следующее: даже одномерные задачи сборки методом горячей посадки в условиях плоской деформации до настоящего времени своего решения не нашли; упрощения, связанные с использованием кусочно-линейных потенциалов пластического течения (условие Треска- Сен-Венана, условие Ишлинского-Ивлева), в полной мере не использованы; предложенные вычислительные процедуры из-за их громоздкости трудно будет рекомендовать в качестве методики расчетного прогнозирования технологической операции по сборке горячей посадкой. Отмеченное выше позволяет сформулировать цель предпринимаемого исследования и в соответствии с такой целью указать задачи данного исследования.

*Пункт 1.2. Общие уравнения математической модели для термоупругопластического деформирования цилиндра при неравномерном распределении температур*

Будем считать деформации малыми. Симметричный тензор деформаций будет выражаться через перемещения  $u_i$  в прямоугольной ДСК при помощи формул:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.1)$$



Запятая перед индексом  $i$  обозначает частную производную по координате  $x$ . В случае данного приближения не существенно, будут относиться координаты к деформированному или недеформированному состоянию. Тензор скоростей деформаций  $\varepsilon_{ij}$  будет выражаться через скорости  $\dot{u}_{i,j}$  через соотношение:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (1.2)$$

Изменения в геометрии, вызванные деформацией, не учитываются также и при составлении уравнений равновесия. Поэтому безразлично, будет ли симметричный тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  отнесен к деформированному или к недеформированному состоянию. Обозначая массовые силы на единицу объема через  $X_i$ , и удельные поверхностные нагрузки через  $p_i$ , получим уравнения равновесия в объеме тела:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (1.3)$$

и краевые условия на поверхности:

$$\sigma_{ij,j}n_j = p_i \quad (1.4)$$

Единичный вектор внешней нормали к поверхности обозначен как  $n_j$ . Принято условие суммирования по повторяющимся индексам.

Если массовые силы в учет не берутся, и отсутствуют внешние нагрузки, уравнение равновесия запишется в виде:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.5)$$

Условия равновесия можно объединить в одном уравнении виртуальных работ:

$$\int \sigma_{ij} \dot{e}_{ij} dv = \int X_i u_i dv + \int p_i u_i dS \quad (1.6)$$

справедливым для любого распределения напряжений  $\sigma_{ij}$ , уравновешенного внешними нагрузками  $X_i$ ,  $p_i$  и для любого перемещения  $u_i$  с соответствующим ему распределением деформаций  $e_{ij}$  (1.1). Объемный интеграл распространен по всему объему тела, поверхностный – по всей его поверхности. Если внешние нагрузки зависят от времени, но скорости изменения этих нагрузок  $\dot{X}_i$ ,  $\dot{p}_i$  достаточно малы, то задачу можно считать квазистатической. В этом случае уравнения равновесия для скоростей изменения напряжений формально идентичны уравнениям (1.3) и (1.4), а уравнение виртуальных работ справедливо для любого распределения скоростей изменения напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$ , уравновешенного скоростями изменения внешних нагрузок  $\dot{X}_i$ ,  $\dot{p}_i$ .

Для всех соотношений предполагаем, что напряжения, скорости изменения напряжений, перемещения и скорости имеют непрерывные первые производные по координатам.

Предполагается, что действительные деформации  $e_{ij}$  элемента тела можно представить в виде суммы упругих деформаций  $e_{ij}^e$  и пластических деформаций  $e_{ij}^p$ :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad (1.7)$$

Упругие деформации определяются законом Гука:

$$e_{ij}^e = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1.8)$$

где тензор упругих коэффициентов обладает свойствами симметрии:

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij} \quad (1.9)$$

Для исследования деформаций изотропных материалов закон Гука записывается через коэффициенты Ламе:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (1.10)$$

$\lambda, \mu$  – параметры Ламе, зависящие от материала и постоянные при любых изменениях механических характеристик материала.

При температурном влиянии используется обобщение закона Гука, отражающее зависимость температурных напряжений от поля температур: соотношение Дюамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e \delta_{ij} - m\Theta) + 2\mu e_{ij}^e \quad (1.11)$$

$$m = 3\alpha k(T_{max} - T_0) \quad (1.12)$$

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{max} - T_0} \quad (1.13)$$

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (1.14)$$

где  $\Theta$  – безразмерное поле температур,  $T$  – температурное поле,  $T_0$  – комнатная температура,  $T_{max}$  – максимальная температура,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения материала.

Соотношения между напряжениями и пластическими деформациями выводились различными способами, причем всегда использовались некоторые более или менее приемлемые предположения. Наиболее удовлетворительный подход основан на фундаментальном квазитермодинамическом постулате Друккера. Применительно к элементу тела этот постулат можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим элемент, находящийся в некотором исходном напряженном состоянии; пусть внешним воздействием  $A$  (отличным от воздействия, порождающего исходные напряжения) медленно прикладываются и снимаются дополнительные напряжения. В процессе приложения дополнительных напряжений внешнее воздействие  $A$  совершает неотрицательную работу; работа, совершенная внешним воздействием за полный цикл приложения и снятия дополнительных напряжений, также неотрицательная. Другими словами, полезная энергия не может быть выделена из элемента и из системы исходных напряжений. В приложениях фундаментального постулата удобно пользоваться геометрическими образами. Напряженное состояние элемента тела может быть представлено точкой в прямоугольных координатах  $\sigma_{ij}$  девятимерного пространства напряжений. Предполагается, что пластические деформации не изменяются, если точка напряжений лежит в некоторой области, которую будем называть упругой областью;

соответствующее напряженное состояние  $\sigma_{ij}^s$  будем называть безопасным. Приращения пластической деформации могут возникнуть лишь в том случае, если точка напряжений попадет на границу упругой области. Эту границу будем называть пределом текучести или поверхностью текучести. Напряженное состояние  $\sigma_{ij}^a$ , соответствующее точке в упругой области или на поверхности текучести, будем называть допустимым. Таким образом, фундаментальный постулат приводит к следующим заключениям:

- 1) Если  $\sigma_{ij}$  – напряженное состояние на поверхности текучести, которому соответствуют скорости пластической деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ , то для всех безопасных и допустимых напряженных состояний имеют место соотношения:

$$[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s] \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad (1.15)$$

$$[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a] \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (1.16)$$

- 2) Если  $\dot{\sigma}_{ij}$  – скорости изменения напряжений, которым соответствуют скорости пластической деформации  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ , то:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (1.17)$$

- 3) Вследствие (1.16) поверхность текучести выпуклая. Необходимо также отметить, что следствия из фундаментального постулата Друккера имеют место только для скоростей пластической деформации. Никаких заключений относительно полных

пластических деформаций сделать нельзя, если неизвестна вся «история» элемента.

Идеально пластический материал характеризуется тем, что он не может воспринимать напряжения, превосходящие определенный фиксированный предел текучести. Таким образом, поверхность текучести и упругая область не зависят от «истории» нагружения элемента. Кроме того, упругая область должна теперь содержать ненапряженное состояние ( $\sigma_{ij} = 0$ ).

Скорость диссипации энергии в единице объема:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = F(\dot{\epsilon}_{ij}^p) > 0 \quad (1.18)$$

будет однозначной функцией скоростей пластической деформации. В (1.17)  $\sigma_{ij}$  – напряженное состояние на поверхности текучести, соответствующее отличным от нуля скоростям пластической деформации. Пропорциональному возрастанию скоростей пластической деформации отвечает пропорциональное возрастание скорости диссипации энергии.

Для идеально пластического материала вместо неравенства (1.17) имеем:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (1.19)$$

для всех соответственных скоростей изменения напряжения и скоростей пластической деформации. Действительно, если напряженное состояние лежит в упругой области, то (1.19) выполняется, так как скорости пластической деформации равны нулю. Если же напряженное состояние находится на пределе текучести, то  $\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} dt$  должно быть допустимым напряженным состоянием. Следовательно, на основании (1.16):



$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{e}_{ij}^p \leq 0 \quad (1.20)$$

Комбинируя (1.17) и (1.20), получаем (1.19). С другой стороны, если  $\dot{\sigma}_{ij(1)}, \dot{e}_{ij(1)}^p$  и  $\dot{\sigma}_{ij(2)}, \dot{e}_{ij(2)}^p$  – две различные пары соответственных скоростей изменения напряжения и скоростей пластических деформаций, отвечающих одному и тому же напряженному состоянию на пределе текучести, то условие (1.17) приводит к неравенствам:

$$\dot{\sigma}_{ij(1)} \dot{e}_{ij(2)}^p \leq 0, \dot{\sigma}_{ij(2)} \dot{e}_{ij(1)}^p \leq 0 \quad (1.21)$$

Если поверхность текучести регулярная в окрестности точки на этой поверхности, т.е. она имеет непрерывно изменяющуюся касательную гиперплоскость, то эта поверхность может быть описана уравнением:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.22)$$

где знак функции текучести  $f$  (симметричной относительно  $\sigma_{ij}$  и  $\sigma_{ji}$ ) выбран так, что в упругой области  $f < 0$ . Теперь скорости пластической деформации определяются соотношением, называемым ассоциированным законом пластического течения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.23)$$

$$\lambda \begin{cases} = 0, \text{ если } f \leq 0, \dot{f} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \\ \geq 0, \text{ если } f = 0, \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Как следует из формы этих соотношений, функция текучести играет роль потенциала для скоростей пластической деформации и поэтому часто называется пластическим потенциалом. Геометрически это означает, что если представить скорости пластической деформации в девятимерном пространстве напряжений, то тензор скоростей пластической деформации (вектор в девятимерном пространстве) имеет направление внешней нормали к поверхности текучести.

Следствием (1.23) является условие сохранения объема при пластическом деформировании:

$$e_{11}^p + e_{22}^p + e_{33}^p = 0 \quad (1.25)$$

Т.е. материал считается пластически несжимаемым.

В простейшем случае в качестве поверхности нагружения можно принять условие пластичности максимального касательного напряжения (условие Треска):

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2K \quad (1.26)$$

Температурные напряжения возникают вследствие неравномерного нагрева тела. В областях с различной температурой происходит различное температурное расширение материала – температурные деформации. Вследствие неравномерного распределения этих деформаций и возникают напряжения, которые препятствуют этому процессу. Каждый материал обладает своим пределом текучести, который имеет ярко выраженную зависимость от температуры. Считается, что существует функция максимального

касательного напряжения (1.26), которую можно сравнить с пределом текучести  $K$ . Если за все время нагрева она не достигает нулевого значения, то можно говорить о термоупругом нагреве тела, т.е. возникающие при этом деформации и напряжения проявляют упругие свойства, и при возвращении материала в первоначальное состояние (охлаждение до начальной температуры распределения), принимают свои начальные значения. Если на тело не действуют никакие внешние силы, то деформации и напряжения при начальной температуре принято считать нулевыми. Если же условие пластичности при нагреве выполняется, напряжения при нагреве достигают определенного значения, и появляется зона пластического деформирования: область, в которой напряжения достигли предела текучести. Часть деформаций, появившихся при этом процессе, сохраняется при последующем остывании тела (остаточные деформации), вследствие чего сохраняются и напряжения, связанные с этими деформациями. Обычно процесс накопления необратимых деформаций и напряжений можно наблюдать в случае возникновения больших значений градиентов температур, а следовательно и больших температурных напряжений, способных вызвать процесс пластического течения.

При нагревании тела энергия источника распределяется на внутреннюю энергию (появление температуры) и механическую энергию напряжений. В общем случае при построении поля напряжений учитывается связь между распределением энергии: внутренняя энергия переходит в энергию деформирования материала, кроме того, при резких перепадах температур присутствует влияние инерции. Для

построения модели температурных деформаций и напряжений воспользуемся частным случаем линейной квазистатической несвязной теории, в котором расчет механических характеристик происходит независимо от температурного состояния материала и не учитывается превращение энергии, причем процесс нагревания в большинстве случаев считают медленным, чтобы избежать появления инерционных членов. Такая модель во многом ряде задач довольно точно описывает температурные деформации и напряжения.

### *Постановка задачи данного исследования*

- Математическая постановка задачи заключается в определении функций: распределения температуры в соединении  $T$  и компонент тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\sigma_{ij}$  и  $\epsilon_{ij}$ . Тепловой поток в процессе нагрева и выдержки намного превосходит тепловую энергию деформирования поэтому, используется несвязная задача теплопереноса и деформирования, т.е. задачи решаются последовательно, а именно на каждом временном слое последовательно решаются две задачи.
- Определяется распределение температуры в цилиндре и вале.
- Решается краевая задача определения напряженно-деформированного состояния для отдельно цилиндра или сопряженная для вала и цилиндра.

Неравномерное тепловое расширение в общем случае не может происходить свободно в сплошной среде: оно вызывает тепловые (термические, температурные) напряжения. Знание величины и характера действия температурных напряжений

необходимо для всестороннего анализа прочности конструкции.

Температурные напряжения сами по себе и в сочетании с механическими напряжениями от внешних сил могут вызвать появление трещин и разрушение конструкции из материала с повышенной хрупкостью. Некоторые материалы при быстром возникновении напряжений, обусловленном действием резко нестационарного температурного поля, становятся хрупкими и не выдерживают теплового удара. Повторное действие температурных напряжений приводит к термоусталостному разрушению элементов конструкции. Тепловые напряжения могут вызвать значительную пластическую деформацию, ведущую к полному или прогрессирующему разрушению конструкции, термовыпучивание и т. п.

Исследования по термоупругости сначала стимулировались задачами о термоупругих напряжениях в элементах конструкций. Они проводились на основе теории, разработанной Дюамелем (1838) и Нейманом (1841), которые исходили из следующего предположения: полная деформация является суммой упругой деформации, связанной с напряжениями обычными соотношениями, и чисто теплового расширения, соответствующего известному из классической теории теплопроводности температурному полю.

С принципиальной точки зрения теория Дюамеля-Неймана для нестационарных тепловых и механических воздействий оказалась ограниченной: она не позволяет строго описать движение упругого тела, связанное с его тепловым состоянием. При определенных условиях нестационарный нагрев сопровождается динамическими эффектами в конструкции.

В общем случае изменение температуры тела происходит не только вследствие подвода тепла от внешних источников, но и в результате самого процесса деформирования. При деформировании тела от механических или тепловых воздействий, протекающих с большой скоростью, возникает так называемый эффект связанности, обусловленный взаимодействием полей деформации и температуры. Он проявляется в образовании и движении тепловых потоков внутри тела, возникновении связанных упругих и тепловых волн, термоупругом рассеянии энергии и т. п.

Последовательное рассмотрение процессов упругого деформирования и теплопроводности в их взаимосвязи возможно только на основе термодинамических соображений. Томсон (1855) впервые применил основные законы термодинамики для изучения свойств упругого тела. Ряд исследователей: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц (1953) и др., - с помощью методов классической термодинамики получили связанные уравнения термоупругости. Однако в рамках классической термодинамики строгий анализ справедлив лишь для изотермического и адиабатического обратимых процессов деформирования. Реальный процесс деформирования, неразрывно связанный с необратимым процессом теплопроводности, является в общем случае также необратимым. Термодинамика необратимых процессов, разработанная в последние годы, позволила более строго поставить задачу о необратимом процессе деформирования и дать единую трактовку механических и тепловых процессов, нашедшую отражение в работах Био (1956), Чедвика (1960), Боли и Уэйнера (1960) и др. В связи с этим более четко определилась теория термоупругости, обобщающая



классическую теорию упругости и теорию теплопроводности. Она охватывает следующие явления: перенос тепла теплопроводностью в теле при стационарном и нестационарном теплообмене между ним и внешней средой, термоупругие напряжения, вызванные градиентами температуры, динамические эффекты при резко нестационарных процессах нагрева и, в частности, термоупругие колебания тонкостенных конструкций при тепловом ударе, термомеханические эффекты, обусловленные взаимодействием полей деформации и температуры.

## Глава 2 Определение температурного поля в толстостенных цилиндрах при разных способах температурной обработки

*Пункт 2.1. Распределение температуры в цилиндре при горячей посадке на цилиндрический вал (1 слой-вал). Аналитическое решение и (1 слой-цилиндр). Численное и аналитическое решение.*

Постановка аналитической задачи теплопроводности для цилиндра (вала) с граничными условиями третьего рода:

$$\frac{\partial \tilde{T}(\tilde{r}, F_0)}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \tilde{T}(\tilde{r}, F_0)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{r}, F_0)}{\partial \tilde{r}} \quad (2.1)$$

$$(F_0 > 0, 0 < \tilde{r} < \tilde{r}_1), \tilde{T}(\tilde{r}, 0) = 1 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} + Bi \cdot \tilde{T}(1, F_0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} + Bi \cdot \tilde{T}(1, F_0) = 0 \quad (2.4)$$

Где  $\tilde{T} = (T - T_{cp}) / (T_0 - T_{cp})$  – относительная избыточная температура,  $T_{cp}$  – температура окружающей среды,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, а  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$  – число Био. Используя метод разделения переменных, решение задачи можно представить в виде:

$$\tilde{T}(\tilde{r}, F_0) = \sum_{i=1}^m A_i X_i(\lambda_i, \tilde{r}) e^{(-\lambda_i \tilde{r})} \quad (2.5)$$

Где  $X_i(\lambda_i, \tilde{r})$  – функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя вида:

$$\frac{d^2 X(\lambda, \tilde{r})}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{dX(\lambda, \tilde{r})}{d\tilde{r}} + \lambda X(\lambda, \tilde{r}) = 0 \quad (2.6)$$

Основные граничные условия для этого уравнения будут:

$$X'(1) + BiX(1) = 0 \quad (2.7)$$

$$X'(0) = 0 \quad (2.8)$$

Решение задачи отыскивается в виде следующего ряда:

$$X(\lambda, \tilde{r}) = \sum_{i=0}^n C_i N_i(\tilde{r}) \quad (2.9)$$

Где  $C_i$ - неизвестные коэффициенты,  $N_i(\tilde{r}) = \tilde{r}^i$ - координатные функции.

Ограничиваясь шестью членами ряда, получим шесть неизвестных коэффициентов, при этом граничных условий, необходимых для их определения, имеем всего два. Для нахождения неизвестных коэффициентов еще три граничных условия будут иметь вид:

$$X(0) = 1 \quad (2.10)$$

$$X''(0) = -\frac{\lambda}{2} \quad (2.11)$$

$$X'''(0) = 0 \quad (2.12)$$

Еще одно граничное условие получается в точке  $\tilde{r} = 1$ . Для этого продифференцируем уравнение (2.1) по  $F_0$ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial F_0 \partial \tilde{r}} + Bi \frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial F_0} = 0 \quad (2.13)$$

После этого продифференцируем получившееся уравнение по  $\tilde{r}$  и запишем его значение в  $\tilde{r} = 1$ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r} \partial F_0} = \frac{\partial^3 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} \quad (2.14)$$

Перепишем соотношение (2.6) с учетом уравнения теплопроводности (2.3):

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r} \partial F_0} = -Bi \left[ \frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} \right] = 0 \quad (2.15)$$

Сравним соотношения (2.15) и (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^3} + \frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} \\ + Bi \left[ \frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из этого выражения получим дополнительное граничное условие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^3} + (Bi + 1) \frac{\partial^2 \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}^2} + (Bi - 1) \frac{\partial \tilde{T}(1, F_0)}{\partial \tilde{r}} \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Итого, все граничные условия имеют вид:

$$X'(1) + BiX(1) = 0 \quad (2.18)$$

$$X'(0) = 0 \quad (2.19)$$

$$X(0) = 1 \quad (2.20)$$

$$X''(0) = -\frac{\lambda}{2} \quad (2.21)$$

$$X'''(0) = 0 \quad (2.22)$$

$$X'''(1) + (Bi + 1)X''(1) + (Bi - 1)X'(1) = 0 \quad (2.23)$$

Подставляя (2.9) в полученные выше граничные условия, получим шесть уравнений, из которых можно определить неизвестные коэффициенты  $C_i$ .

Ниже приведены графики численного решения задачи о распределении температур в вале при различных коэффициентах теплоотдачи:

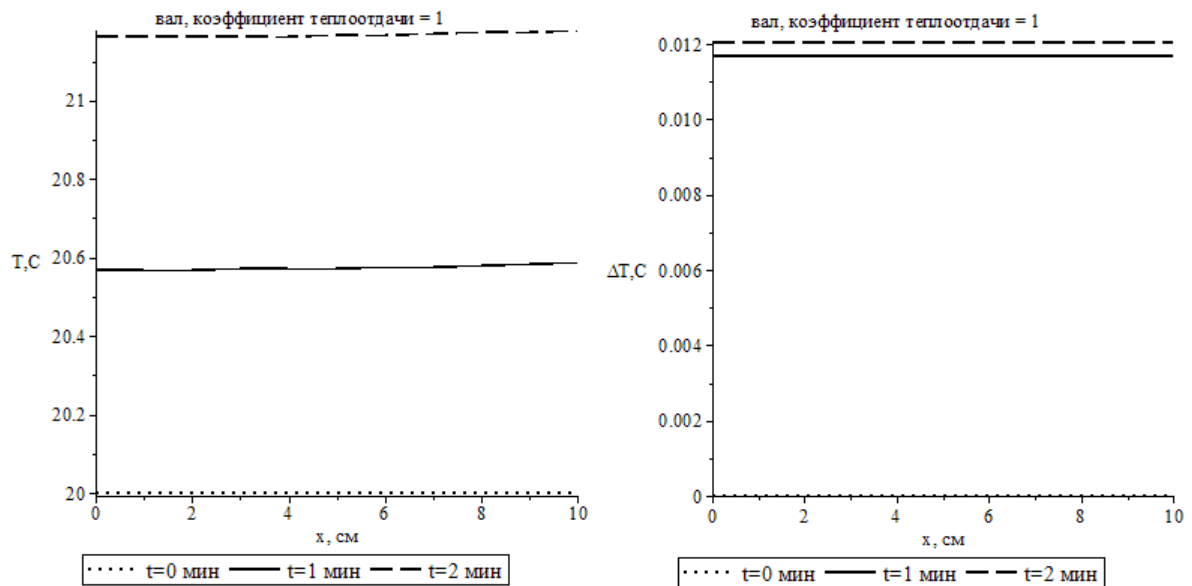


Рис. 1. Распределение температуры в вале, коэффициент теплоотдачи 1, радиус 10 см.

На рис.1. - .4. изображены графики, отображающие распределение температур при нагреве в вале различными радиусами и с различными значениями коэффициента теплоотдачи. При малых радиусах вала график распределения температур показан практически линейным с небольшим возрастанием. С повышением коэффициента теплоотдачи и радиуса распределение температур меняется на более динамичные:

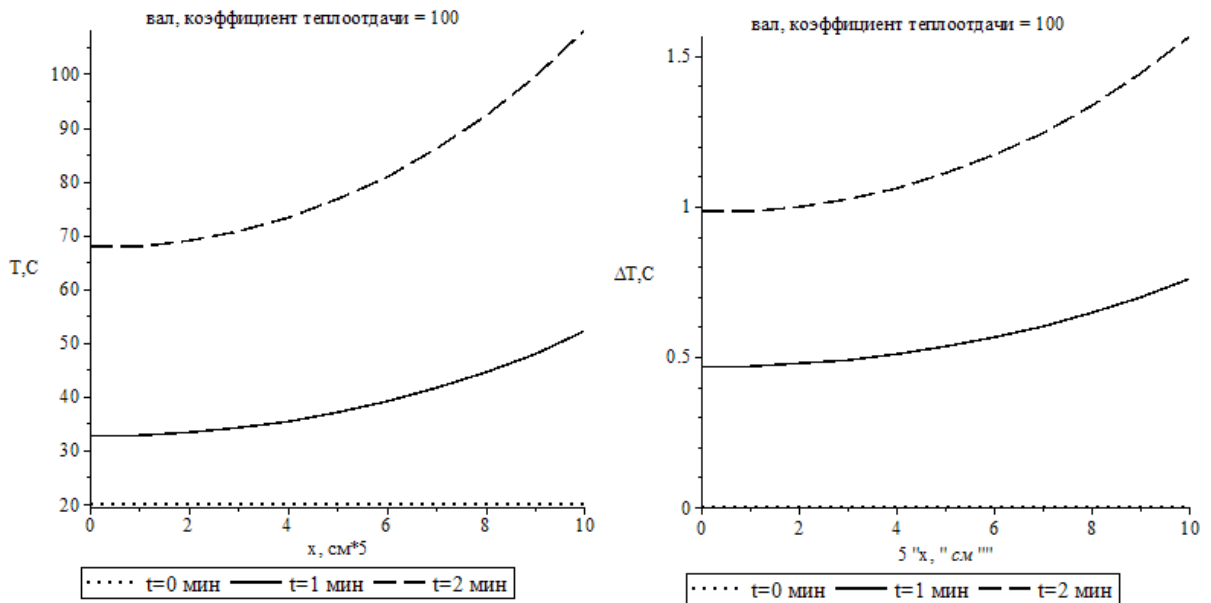


Рис. 2. Распределение температуры в вале, коэффициент теплоотдачи 100, радиус  $r = 0.05$  м.

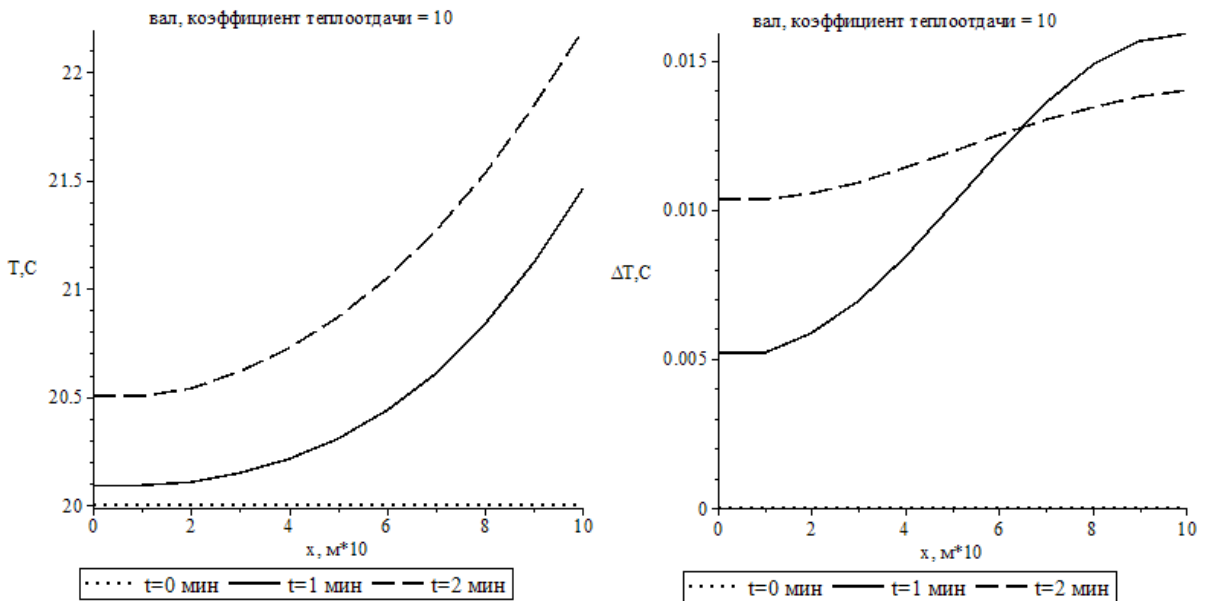


Рис. 3. Распределение температуры в вале, коэффициент теплоотдачи 10, радиус  $r = 1$  м.

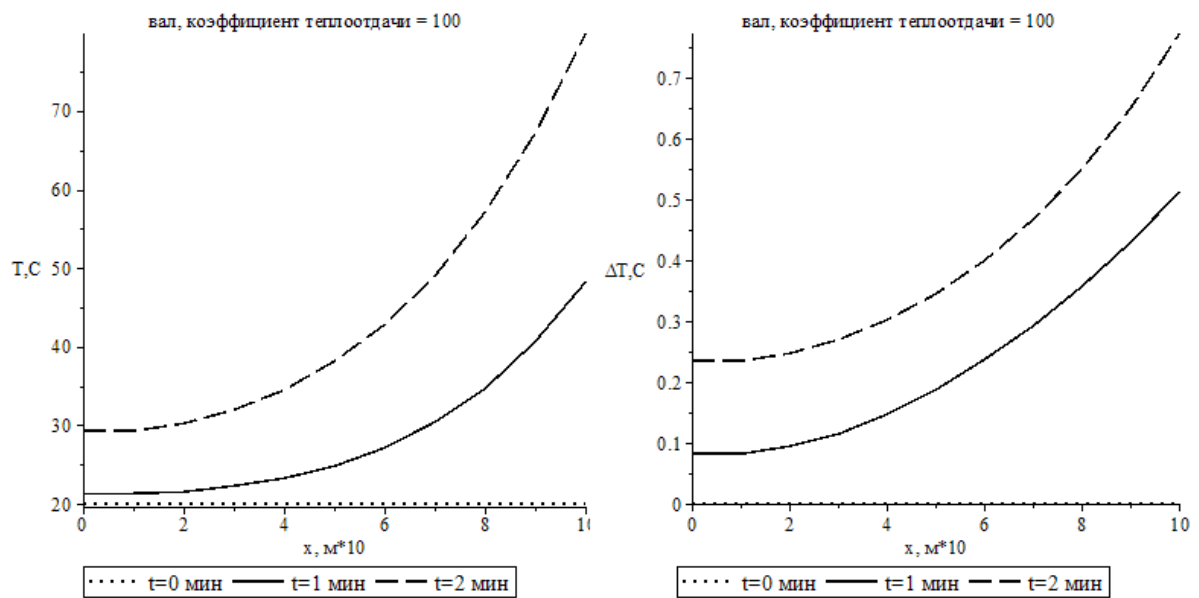
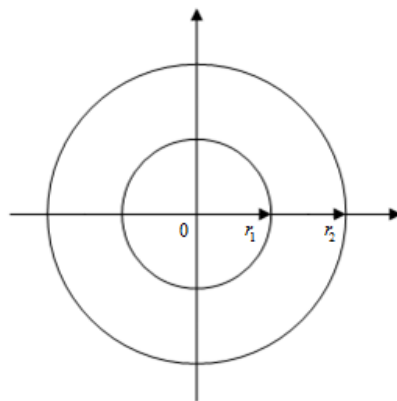


Рис. 4. Распределение температуры в вале, коэффициент теплоотдачи 100, радиус  $r = 1$  м.



Пункт 2.2. Распределение температуры в цилиндре при горячей посадке на цилиндрический вал (2 слоя- вал и цилиндр). Численное решение.



Рис. 5. Геометрия задачи.

В данном пункте мы рассматриваем температурную задачу для бесконечного двухслойного цилиндра, состоящего из разных материалов,  $r = r_1$  – граница сопряжения материалов (Рис.5). Уравнение теплопроводности для материалов с переменными теплофизическими коэффициентами в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T)r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \quad (2.24)$$

где  $\rho(T)$  – плотность материала,  $c(T)$  – удельная теплоемкость,  $\lambda(T)$  – коэффициент теплопроводности, которые, учитывая использование разных материалов, могут быть записаны как:

$$c(T) = \begin{cases} c_{sh}(T), & r \in [0, r_0), \\ c_{cl}(T), & r \in (r_0, r_1], \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_{sh}(T), & r \in [0, r_0), \\ \lambda_{cl}(T), & r \in (r_0, r_1], \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\rho(T) = \begin{cases} \rho_{sh}(T), & r \in [0, r_0), \\ \rho_{cl}(T), & r \in (r_0, r_1], \end{cases} \quad (2.27)$$

Начальное и граничное условия при  $r = 0$ :

$$T|_{r=0} = T_0 = const; \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \quad (2.28)$$

На границе сопряжения слоев должно быть выполнено условие равенства тепловых потоков:

$$\left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1-0} = - \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1+0}. \quad (2.29)$$

На внешней границе цилиндра теплообмен с окружающей средой происходит по 3-му закону Ньютона:

$$\left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_2} = -\mathcal{G} \left( T|_{r=r_2} - T_e(t) \right), \quad (2.30)$$

здесь  $\mathcal{G}$  – коэффициент теплоотдачи,  $T_e(t)$  – температурный режим, который задается на внешней границе цилиндра, исходя из физической постановки конкретной задачи.

$T_w$  – температура на границе,  $T_{rel}$  – температура внешней среды (или вала),  $T_0$  – начальная температура.

Приведем переменные к безразмерному виду:

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_w}, \tilde{T}_0 = \frac{T_0}{T_w}, \tilde{r} = \frac{r}{r_1}$$

$$Fo = \frac{\lambda(T)t}{c(T)\rho(t)r_1^2} \quad (2.31)$$

$$Bi = \frac{\vartheta r_1}{\lambda(T)}$$

где  $\tilde{T}$  – относительная температура,  $\tilde{T}_{cp}$  – относительная температура среды,  $\tilde{T}_0$  – относительная начальная температура,  $\tilde{r}$  – безразмерная координата,  $Fo$  – число Фурье,  $Bi$  – число Био.

Перепишем все уравнения через безразмерные параметры:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial F_0} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \lambda \tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \quad (2.32)$$

$$\tilde{T}|_{F_0=0} = \tilde{T}_0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=0} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\frac{r_2}{r_1}} = -Bi \left( \tilde{T} \Big|_{\tilde{r}=\frac{r_2}{r_1}} - \tilde{T}_{cp} \right) \quad (2.35)$$

Построим пространственно-временную сетку  $\omega = \omega_r \times \omega_t$ .

Для этого построим сетки по координате  $r$  и по времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \omega_r = (\tilde{r}_i = \tilde{r}_{i-1} + \Delta_k, \tilde{r}_0 = 0, i = \overline{1, n_1}, k = 1; i \\ = \overline{n_1 + 1, n_2}, k = 2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $\Delta_1 = \frac{1}{n_1}$ ,  $\Delta_2 = \frac{\frac{r_2}{r_1} - 1}{n_2}$ .

$$\omega_t = (Fo_j = Fo_{j-1} + \Delta_{Fo}, Fo_0 = 0, j = \overline{1, m}), \text{ где } \Delta_{Fo} = \frac{\lambda_{0,j-1}}{c_{0,j-1} \rho_{0,j-1} r_1^2} \Delta_t$$

Введем дополнительный коэффициент:

$$K_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j-1} c_{0,j-1} \rho_{0,j-1}}{\lambda_{0,j-1} c_{i,j-1} \rho_{i,j-1}}, K_{0,j} = 1 \quad (2.37)$$

Система решается с помощью метода прогонки. Рассмотрим аппроксимацию уравнения (2.32) линейной неявной схемой:

$$K_{i,j} \frac{\tilde{T}_{i,j} - \tilde{T}_{i,j-1}}{\Delta_{F_0}} \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{\lambda_{i,j-1}(\Delta_k)^2 \tilde{r}_i} \left( \xi_{i+\frac{1}{2},j} (\tilde{T}_{i+1,j} - \tilde{T}_{i,j}) - \xi_{i-\frac{1}{2},j} (\tilde{T}_{i,j} - \tilde{T}_{i-1,j}) \right)$$

$$\xi_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (\lambda_{i,j-1} \tilde{r}_i + \lambda_{i+1,j-1} \tilde{r}_{i+1}) \quad (2.39)$$

$$\xi_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (\lambda_{i,j-1} \tilde{r}_i + \lambda_{i-1,j-1} \tilde{r}_{i-1}) \quad (2.40)$$

для  $i = 1, \dots, n_1 - 1, n_1 + 1, \dots, n_2 - 1$ .

Перепишем начальное и граничные условия, а также условие сопряжения слоев через аппроксимированные уравнения:

$$\tilde{T}_{i,0} = \tilde{T}_0, i = \overline{0, n_2} \quad (2.41)$$

$$\tilde{T}_{1,j} = \tilde{T}_{0,j} \quad (2.42)$$

$$K_{i,j} \frac{\tilde{T}_{n_1,j} - \tilde{T}_{n_1-1,j}}{\Delta_1} = - \frac{\tilde{T}_{n_1+1,j} - \tilde{T}_{n_1,j}}{\Delta_2} \quad (2.43)$$

$$\frac{\tilde{T}_{n_2,j} - \tilde{T}_{n_2-1,j}}{\Delta_2} = -Bi (\tilde{T}_{n_2,j} - \tilde{T}_{n_2-1,j}) \quad (2.44)$$

Система уравнений (2.41)-(2.44) относительно  $\tilde{T}_{i,j}$  примет вид:

$$A_{i,j} \tilde{T}_{i-1,j} - C_{i,j} \tilde{T}_{i,j} + B_{i,j} \tilde{T}_{i+1,j} = F_{i,j}, i \in \overline{0, n_2} \quad (2.45)$$

При условии (2.41) коэффициенты системы (2.45) будут следующие:

$$A_{0,j} = 1, B_{0,j} = 0, C_{0,j} = 1, F_{0,j} = 0 \quad (2.46)$$

$$A_{i,j} = \frac{\xi_{i-\frac{1}{2},j}}{\lambda_{i,j-1}(\Delta_k)^2 \tilde{r}_i}, B_{i,j} = \frac{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}{\lambda_{i,j-1}(\Delta_k)^2 \tilde{r}_i} \quad (2.47)$$

$$C_{i,j} = \frac{\xi_{i+\frac{1}{2},j} + \xi_{i-\frac{1}{2},j}}{\lambda_{i,j-1}(\Delta_k)^2 \tilde{r}_i} + \frac{K_{i,j}}{\Delta_{F_0}}, F_{i,j} = -\frac{K_{i,j}}{\Delta_{F_0}} \tilde{T}_{i,j-1} \quad (2.48)$$

для  $i=1, \dots, n_1-1, n_1+1, \dots, n_2-1$ .

При условии (2.43) для  $i=n_1$  имеем:

$$A_{n_1,j} = -\frac{K_{1,j}}{\Delta_1}, B_{n_1,j} = \frac{1}{\Delta_2}, C_{n_1,j} = -\left(\frac{K_{1,j}}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}\right), F_{n_1,j} = 0 \quad (2.49)$$

При условии (2.44) для  $i=n_2$  имеем:

$$A_{n_2,j} = \frac{1}{\Delta_2}, B_{n_2,j} = 0, C_{n_2,j} = \frac{1}{\Delta_2} + B_{i,j}, F_{n_2,j} = -B_{i,j} \tilde{T}_{cp}^j \quad (2.50)$$

При решении задачи по методу прогонки при прямом ходе сначала вычисляются прогоночные коэффициенты:

$$k_{0,j} = 1, v_{0,j} = 0 \quad (2.51)$$

$$k_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{C_{i,j} - A_{i,j} k_{i-1,j}}, v_{i,j} = \frac{A_{i,j} v_{i-1,j} - F_{i,j}}{C_{i,j} - A_{i,j} k_{i-1,j}}, \quad \text{для } i = \quad (2.52)$$

$1..n_2-1$

$$k_{n_2,j} = \frac{1}{1 + B_{i,j} \Delta_2}, v_{n_2,j} = B_{i,j} T_{cp}^j \frac{\Delta_2}{1 + B_{i,j} \Delta_2} \quad (2.53)$$

Затем при обратном ходе вычисляются значения  $T_{i,j}$ :

$$T_{n_2,j} = \frac{v_{n_2,j} + k_{n_2,j}v_{n_2-1,j}}{1 - k_{n_2,j}k_{n_2-1,j}}, T_{i,j} = k_{i,j}T_{i+1,j} + v_{i,j}, i = n_2 - 1..0 \quad (2.54)$$

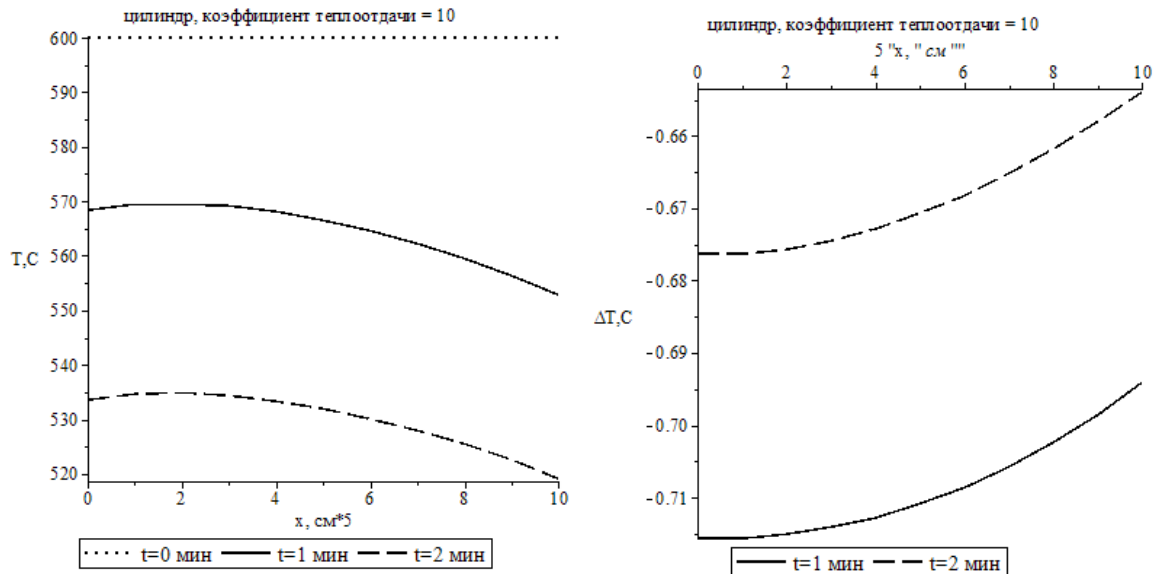


Рис. 6. Распределение температур в цилиндре при нагреве, коэффициент теплоотдачи 10, толщина цилиндра 0.5м.

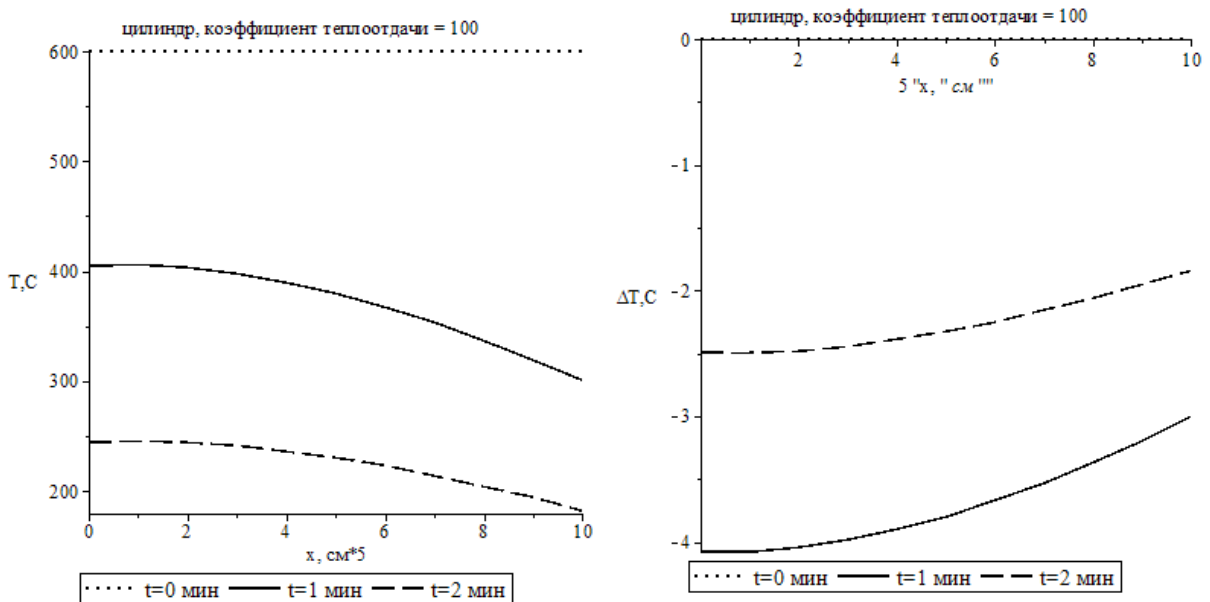


Рис. 7. Распределение температур в цилиндре при остывании, коэффициент теплоотдачи 100, толщина цилиндра 0.5м.

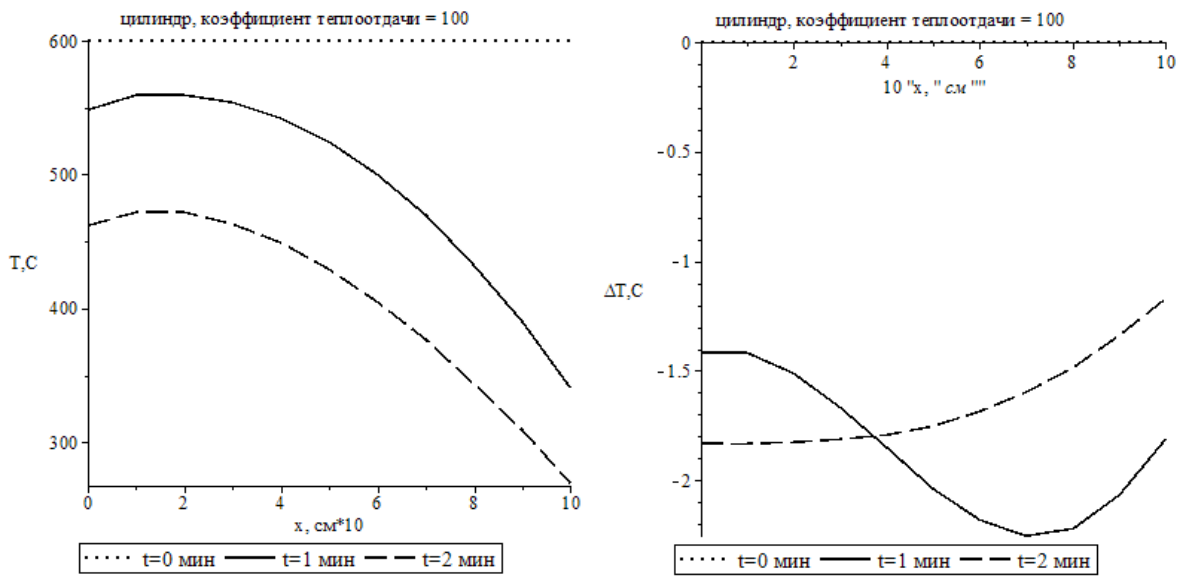


Рис. 8. Распределение температур в цилиндре при остывании, коэффициент теплоотдачи 100, толщина цилиндра 0.5м.

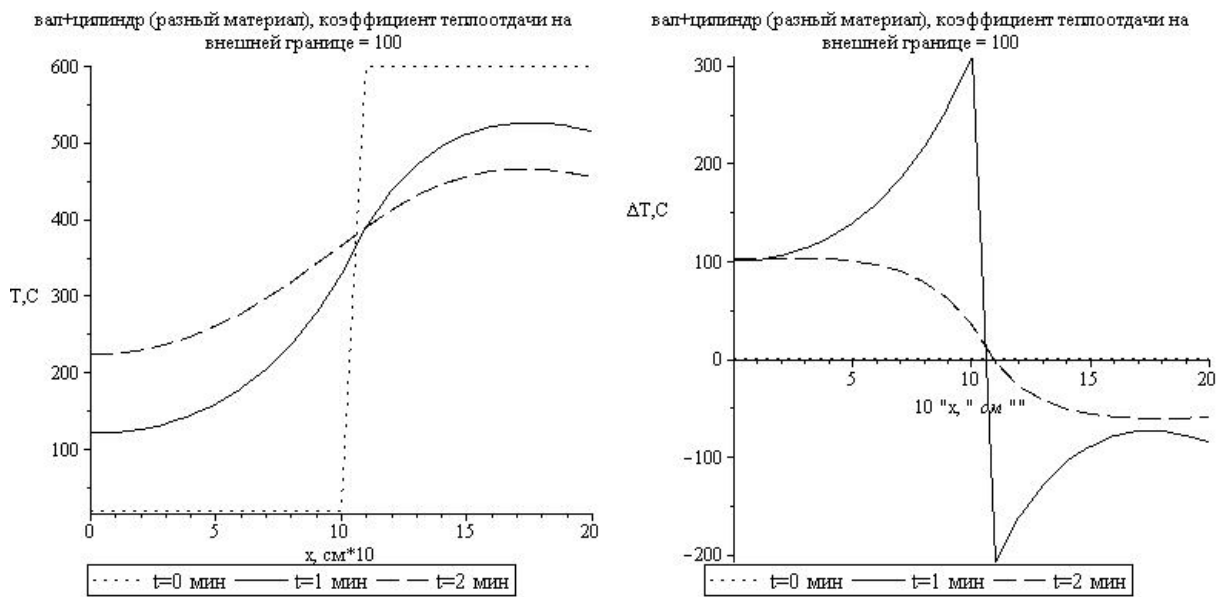


Рис. 9. Распределение температур в сопряженной задаче, коэффициент теплоотдачи 100, общий радиус 20 см.

### **Глава 3. Упругопластическое деформирование цилиндра при неравномерном нагреве с учетом изменяющихся механических свойств материала.**

*П. 3.1 Термоупругие напряжения в сплошном двухслойном цилиндре при нестационарном распределении температуры для материалов с разными механическими коэффициентами*

Дифференциальное уравнение равновесия при использовании гипотезы о плоской деформации в случае осевой симметрии имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (3.1)$$

В случае термоупругого равновесия в областях, где отсутствуют необратимые деформации, компоненты термоупругой деформации записываются с помощью соотношений Коши в цилиндрической системе координат:



$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} \quad (3.2)$$

Уравнение Дюамеля-Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr} - \beta T \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} - \beta T \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta - \beta T \end{aligned} \quad (3.3)$$

здесь  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r}$ ,  $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ ,  $\alpha$  – температурное расширение,  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент расширения.

На границах материалов выполняется условие:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r_1 - 0, \tau) = \sigma_{rr}(r_1 + 0, \tau), \\ u_r(r_1 - 0, \tau) = u_r(r_1 + 0, \tau), \\ \sigma_{rr}(r_2, \tau) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Поскольку в нашей задаче рассматривается двухслойный цилиндр, выполненный из различных материалов, перемещения, деформации и напряжения имеют вид:

$$u, \sigma, \varepsilon = \begin{cases} u^g, \sigma^g, \varepsilon^g, & 0 \leq r \leq r_1, \\ u^m, \sigma^m, \varepsilon^m, & r_1 \leq r \leq r_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Тогда уравнение Дюамеля-Неймана через перемещения примет вид:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r - \beta T(r) \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} - \beta T(r) \quad (3.7)$$

Перепишем уравнение равновесия через перемещения, так как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} u_r \right) - \beta \frac{\partial T}{\partial r} \text{ и} \\ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= \frac{(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r - \beta T(r) - \left( (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} - \beta T(r) \right)}{r} = \\ &= \frac{\lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} u_r - \beta T(r) - \lambda \frac{u_r}{r} - 2\mu \frac{u_r}{r} - \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \beta T(r)}{r} = \\ &= 2\mu \frac{\partial u_r}{r \partial r} - 2\mu \frac{u_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тогда, подставляя найденное в дифференциальное уравнения равновесия, получим:

$$(3.9)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + 2\mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\lambda}{r} u_r - \beta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2\mu u_r}{r^2} = 0$$

Группируем это выражение и делим на  $(\lambda + 2\mu)$ :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.10)$$

Поскольку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d(ru)}{dr} \right) = -\frac{1}{r^2} (u + ru') + \\ &+ \frac{1}{r} (ru'' + u' + u') = -u'' + \frac{1}{r} u' - \frac{1}{r^2} u, \end{aligned} \quad (3.11)$$

тогда уравнение Ламе в цилиндрической системе координат примет вид:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right] = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{dT}{dr} \quad (3.12)$$

следовательно, при плоском напряженном состоянии уравнение Ламе примет вид:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right] = \alpha_1 (1 + \nu_1) \frac{dT}{dr} \quad (3.13)$$

Возьмем от каждого выражения интеграл:

$$\int_{r_1}^r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right] dr = \int_{r_1}^r \alpha_1 (1 + \nu_1) \frac{dT}{dr} dr \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} = \alpha_1 (1 + \nu_1) T + A^* \quad (3.15)$$

$$\text{Где } A = -\frac{1}{r_1} \frac{d(ru)}{dr} \Big|_{r_1} + \alpha_1 (1 + \nu_1) T \Big|_{r_1}, \quad A = 2A^*.$$

Умножаем на  $r$  и интегрируем еще раз, получим:

$$\int_{r_1}^r \frac{d(ru_r)}{dr} dr = \int_{r_1}^r \alpha_1 (1 + \nu_1) T r dr + \int_{r_1}^r A^* r dr \quad (3.16)$$

$$ru_r = (1 + \nu_1) \int_{r_1}^r \alpha_1 T r dr + Ar^2 + B \quad (3.17)$$

Общее решение этого уравнения будет:

$$u_r = \frac{1 + \nu_1}{r} \int_{r_1}^r \alpha_1 T r dr + Ar + \frac{B}{r} \quad (3.18)$$

$$A, B = \begin{cases} A^s, B^s, & 0 \leq r \leq r_1, \\ A^m, B^m, & r_1 \leq r \leq r_2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Поскольку перемещения должны быть ограничены при  $r \rightarrow 0$ ,

пусть  $B = 0$ .

После подстановки значений  $u_r$ , получим  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$ :

(3.20)

$$\sigma_{rr} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha T \quad (3.21)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{E}{1 + \nu} \frac{u}{r} - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha T \quad (3.22)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha T$$

Так как  $\frac{du}{dr} = -\frac{(1 + \nu_1)}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha_1 T r dr + \alpha_1 (1 + \nu_1) T + A - \frac{B}{r^2}$ ,

$$a \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = (1 + \nu_1) \alpha_1 T + 2A:$$

Имея значения в приложении (3.1), подставим в выражения:

$$\sigma_{rr} = \left( \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (1 + \nu_1) \alpha_1 + \frac{E}{1 + \nu} (1 + \nu_1) \alpha_1 - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \right) T - \frac{1}{1 + \nu} \frac{(1 + \nu_1)}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha_1 E T r dr + \left( \frac{2\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E}{1 + \nu} \right) A + \frac{E}{1 + \nu} \left( -\frac{B}{r^2} \right), \quad (3.23)$$

$$\sigma_{rr} = \left( \frac{\nu E \alpha}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{E \alpha}{1 - \nu} - \frac{E \alpha}{1 - 2\nu} \right) T - \frac{1}{(1 - \nu) r^2} \int_{r_1}^r \alpha E T r dr + \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} A - \frac{E}{1 + \nu} \frac{B}{r^2} = -\frac{1}{(1 - \nu) r^2} \int_{r_1}^r \alpha E T r dr + \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} A - \frac{E}{1 + \nu} \frac{B}{r^2}. \quad (3.24)$$

Учитывая приложения (3.1), получим:

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha_1 E_1 T r dr + \frac{A E_1}{1 - \nu_1} - \frac{E_1}{1 + \nu_1} \frac{B}{r^2} \quad (3.25)$$

Теперь найдем  $\sigma_{\varphi\varphi}$ :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left( (1 + \nu_1) \alpha_1 T + 2A \right) + \quad (3.26)$$

$$+ \frac{1}{1 + \nu} \left( \frac{(1 + \nu_1)}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha_1 E T r dr + A + \frac{B}{r^2} \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha T, \quad (3.27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha_1 E_1 T r dr - E_1 \alpha_1 T + \frac{E_1 A}{1 - \nu_1} + \frac{E_1 B}{(1 + \nu_1) r^2}$$

Из соотношения (3.22) имеем:

(3.28)

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1+\nu_1)\alpha_1 T + 2A \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T$$

$$\sigma_{zz} = -E_1 \alpha_1 T + \frac{2\nu_1 E_1 A}{(1-2\nu_1^2)} \quad (3.29)$$

При отсутствии закрепления с торцевых поверхностей цилиндра и вала принято использовать гипотезу о плоском деформированном состоянии использовать в обобщенном виде

$$\varepsilon_z^{cl} = C_3^{cl}(t), \quad \varepsilon_z^{sh} = C_3^{sh}(t). \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^{sh,cl} &= (\lambda_{sh,cl} + 2\mu_{sh,cl}) \varepsilon_r^{sh,cl} + \lambda_{sh,cl} (\varepsilon_\phi^{sh,cl} + \varepsilon_z^{sh,cl}) - 3K_{sh,cl} \alpha_{sh,cl}, \\ \sigma_\phi^{sh,cl} &= (\lambda_{sh,cl} + 2\mu_{sh,cl}) \varepsilon_\phi^{sh,cl} + \lambda_{sh,cl} (\varepsilon_r^{sh,cl} + \varepsilon_z^{sh,cl}) - 3K_{sh,cl} \alpha_{sh,cl}, \\ \sigma_z^{sh,cl} &= \lambda_{sh,cl} (\varepsilon_r^{sh,cl} + \varepsilon_\phi^{sh,cl}) + (\lambda_{sh,cl} + 2\mu_{sh,cl}) \varepsilon_z^{sh,cl} - 3K_{sh,cl} \alpha_{sh,cl}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

Перемещения  $u_r$  в каждом слое определяются соотношениями (3.18- 3.19), а уравнения (3.6-3.7), связывающие напряжения с деформациями, дополнятся слагаемыми, содержащими  $C_3^{cl}(t)$  и  $C_3^{sh}(t)$  соответственно. Для определения постоянных интегрирования условия (3.4) дополняются условием отсутствия нагрузки на торцах:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_z^g r dr = - \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z^m r dr, \quad (3.32)$$

Ниже приводятся результаты решения предложенной задачи, с учетом обобщенного плоского деформированного состояния, для вала при его неравномерном нагреве, для

цилиндра при его неравномерном охлаждении и для сопряженной системы вал-цилиндр при распределениях температуры приведенных на графиках Главы 2.

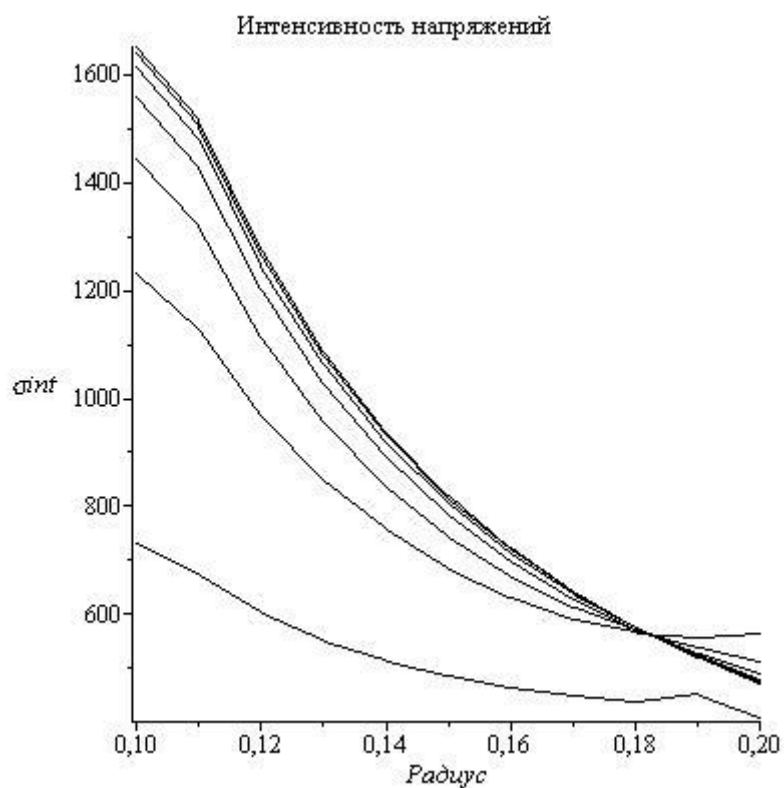


Рис. 10. Интенсивность напряжений для цилиндра радиусом 20 см при упругих деформациях.

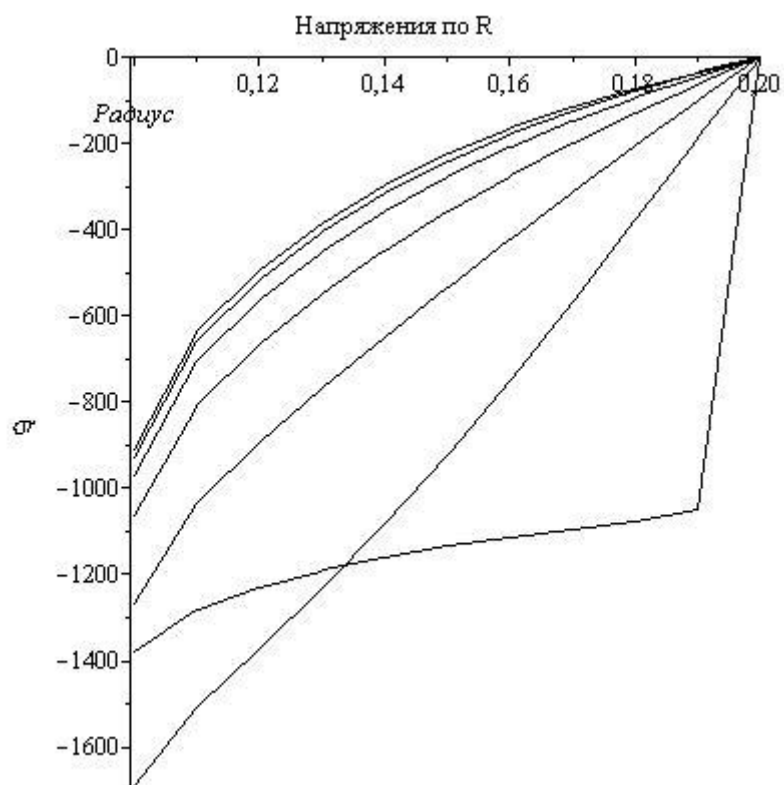


Рис. 11. Напряжения по R для цилиндра радиусом 20 см при упругих деформациях.

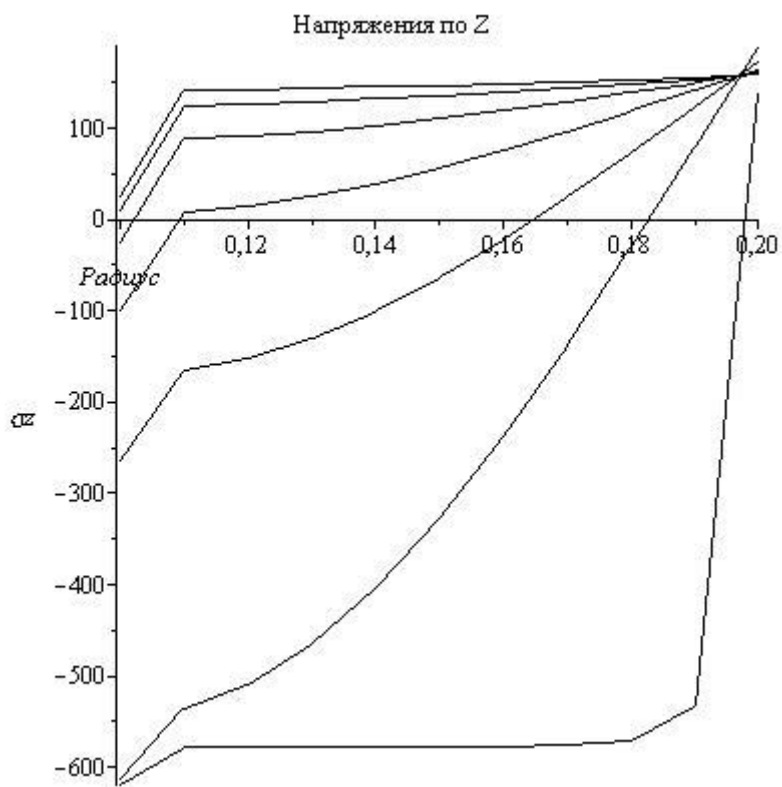


Рис. 12. напряжения по Z для цилиндра радиусом 20 см при упругих деформациях.

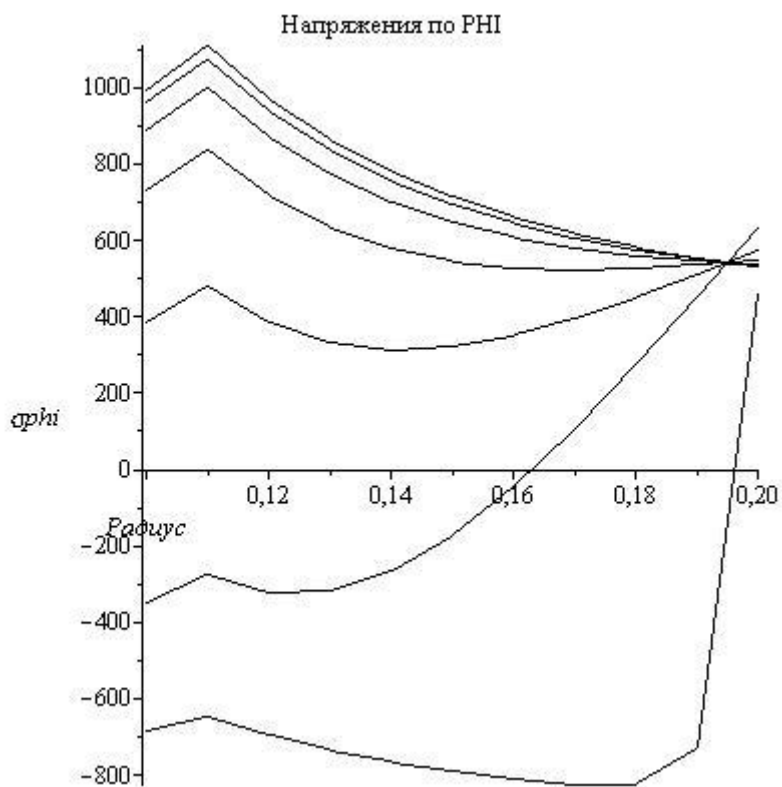




Рис. 13. Напряжения по  $\varphi$  для цилиндра радиусом 20 см при упругих деформациях.

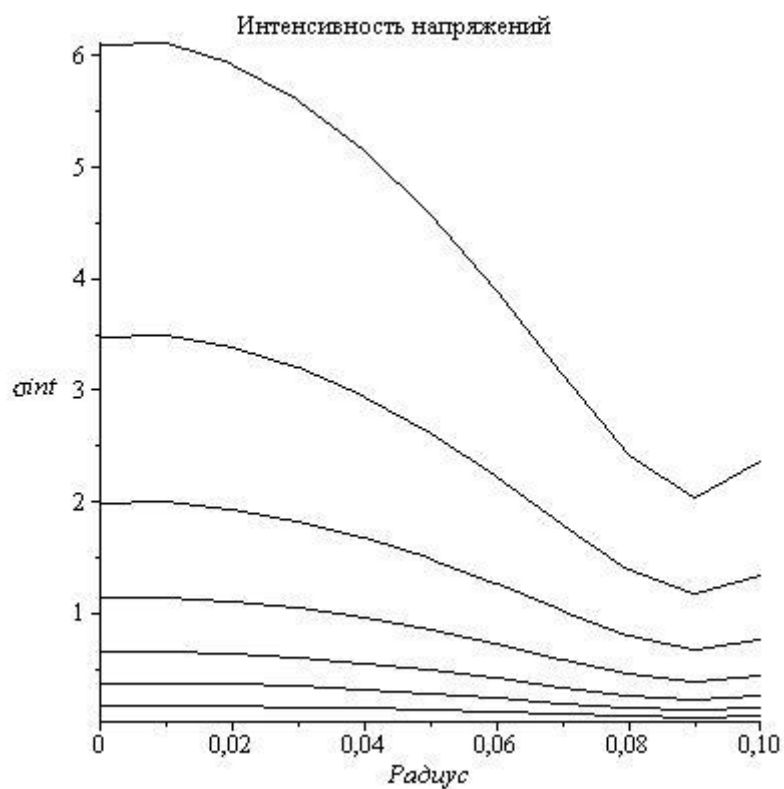


Рис. 14. Интенсивность упругих напряжений в вале радиусом 10см.

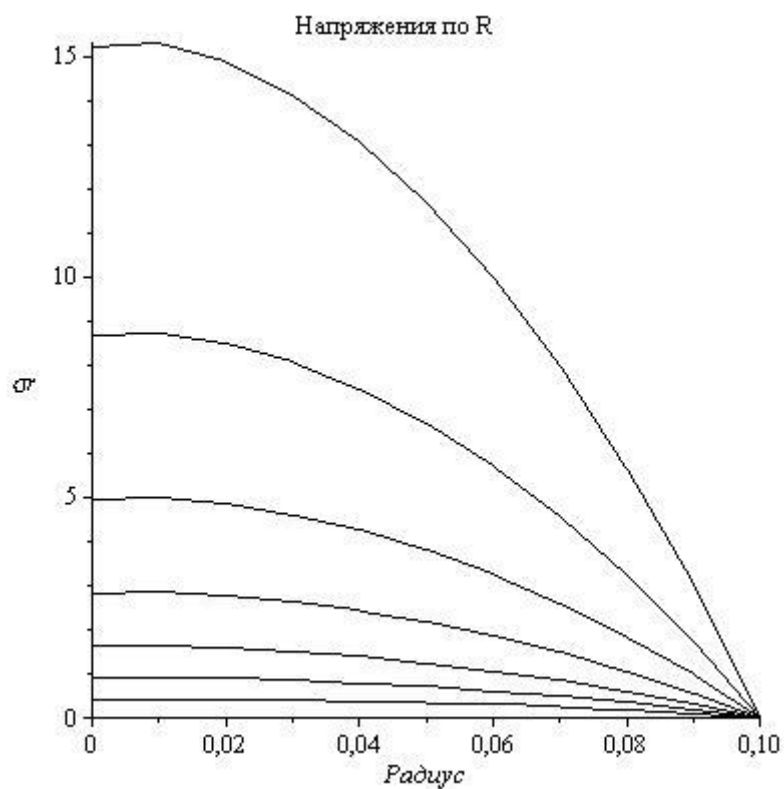


Рис. 15. Напряжения по R для вала радиусом 10 см при упругих деформациях.

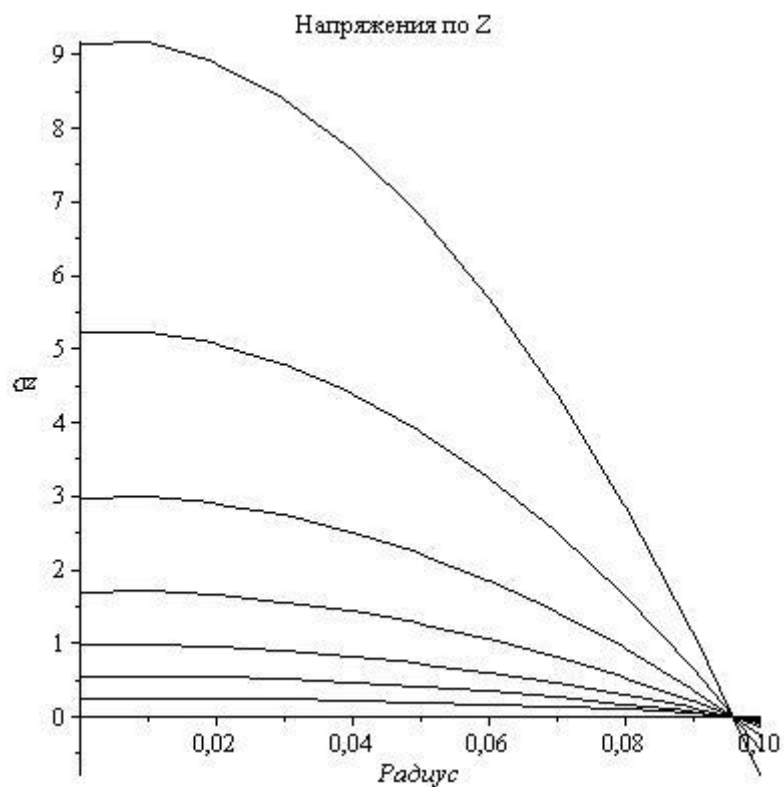


Рис. 16. Напряжения по Z для вала радиусом 10 см при упругих деформациях.

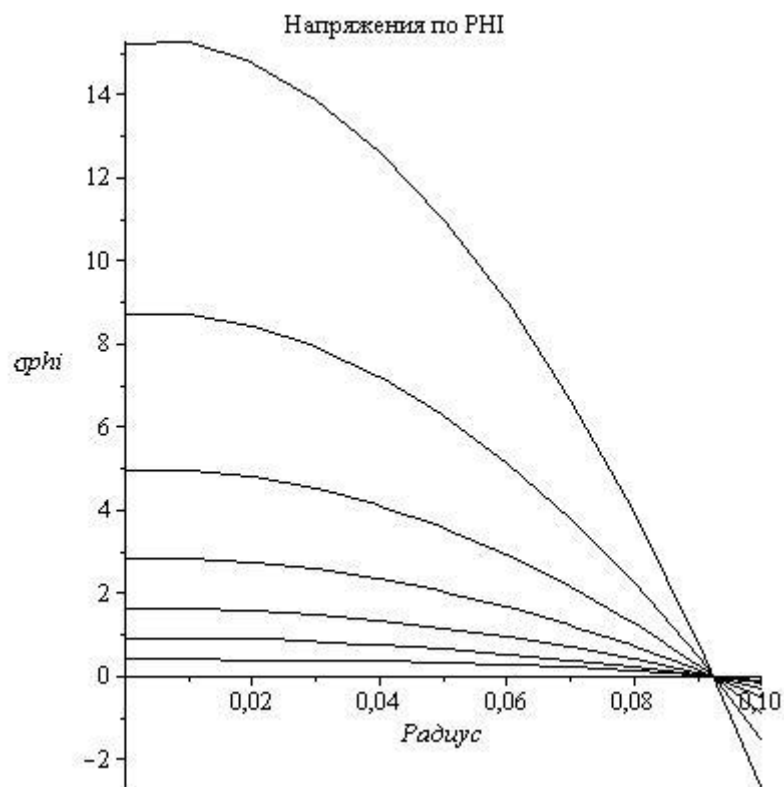


Рис. 17. Напряжения по  $\varphi$  для вала радиусом 10 см при упругих деформациях.

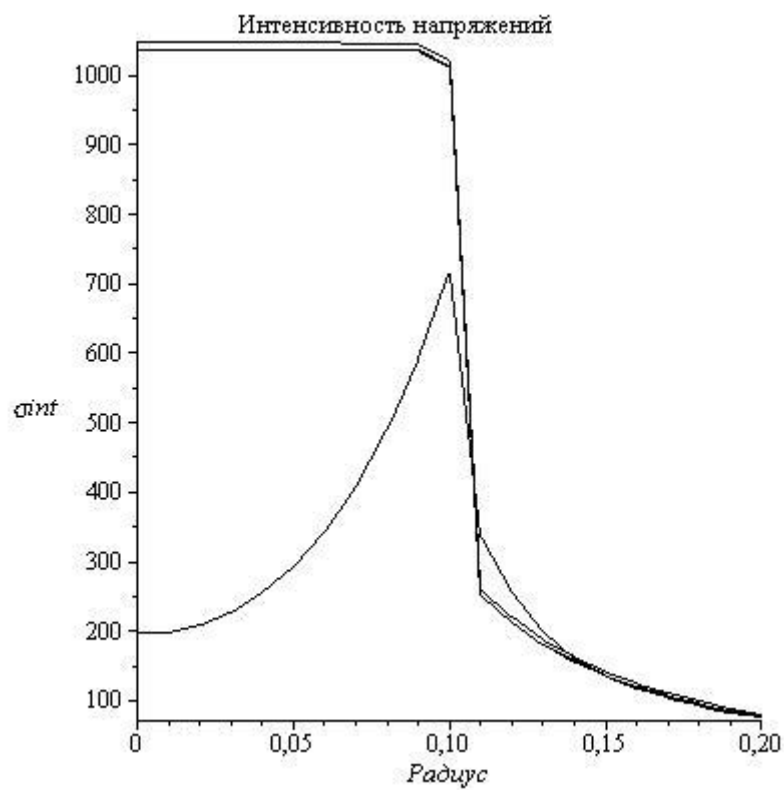


Рис. 18. Интенсивность упругих напряжений для вала и цилиндра радиусами по 10 см.

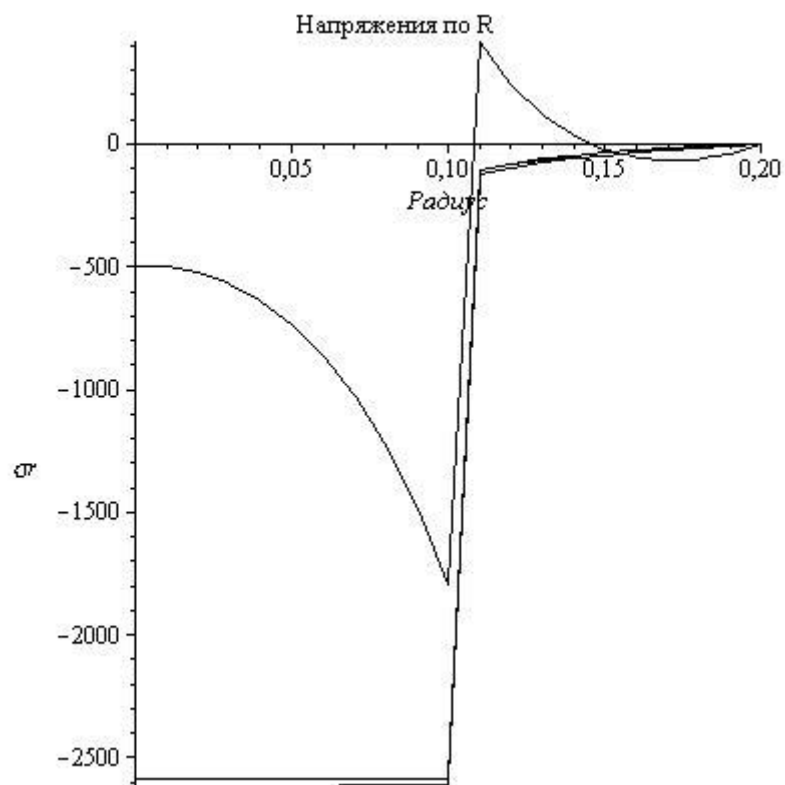


Рис. 19. Напряжения по R для вала и цилиндра радиусами по 10 см при упругих деформациях.

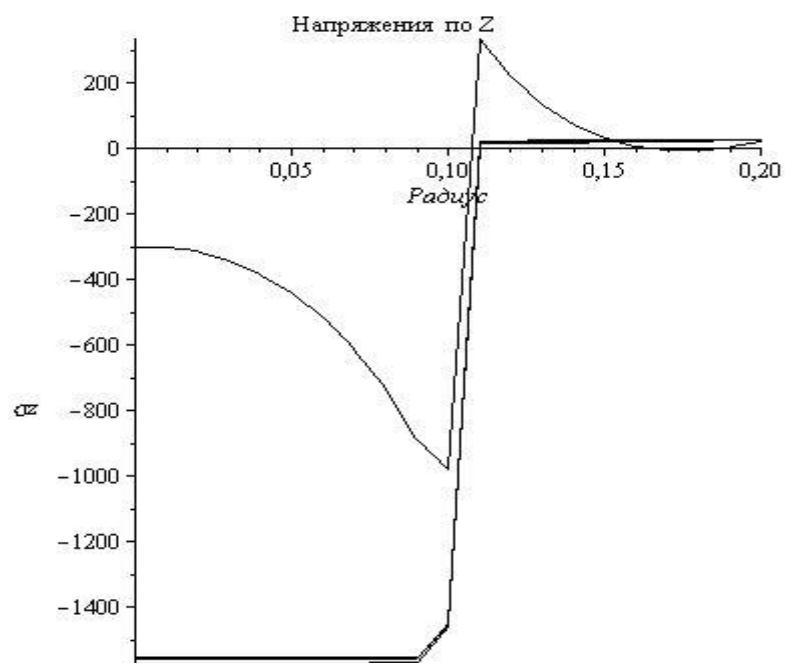


Рис. 20. Напряжения по Z для вала и цилиндра радиусами по 10 см при упругих деформациях.

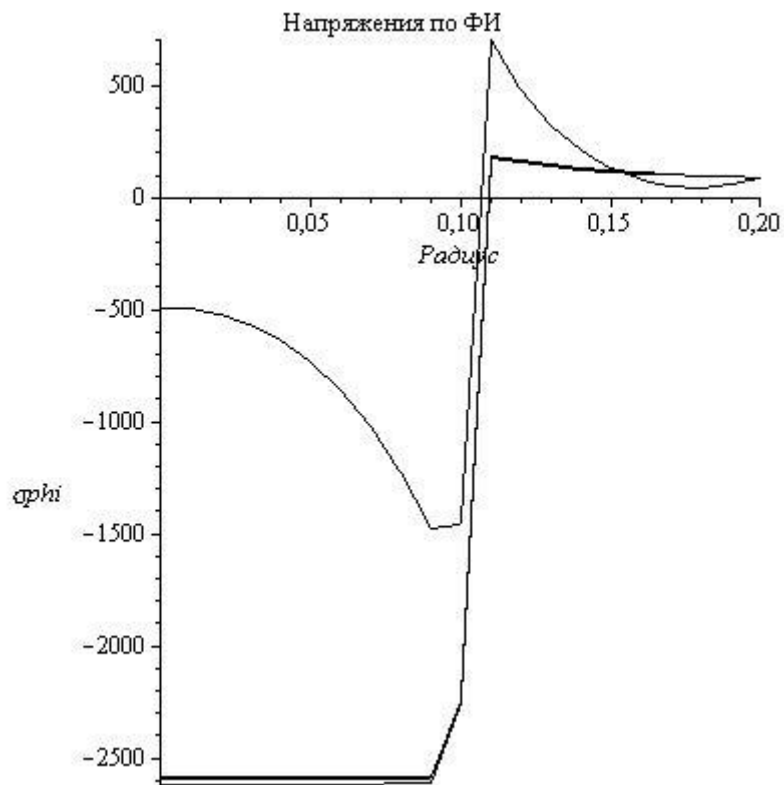


Рис. 21. Напряжения по  $\varphi$  для вала и цилиндра радиусами по 10 см при упругих деформациях.

*П. 3.2. Термоупругопластическое деформирование цилиндра при отсутствии упрочнения, условия текучести Мизеса и постоянном пределе текучести.*

Задача об определении пластических деформаций при условии текучести Мизеса.

Рассматривается пластическая деформация цилиндра (сплошного, несжимаемого, предел текучести которого не зависит от температуры)

С учетом осевой симметрии и обобщенного плоского деформируемого состояния:

$$\varepsilon_z = const., U_\varphi = 0., U_r(r) \quad (3.33)$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{U}{r}, \varepsilon_z \quad (3.34)$$

В упругой области закон Гука:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} + \left( \frac{2\mu}{3k} - 1 \right) \sigma \delta_{ij} \right) \quad (3.35)$$

Где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (3.36)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \nu = 0,5, \quad \frac{1}{K} = 0 \quad (3.37)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \alpha T \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \alpha T \delta_{ij} \quad (3.38)$$

$$\frac{\varepsilon_{RR}}{3} = \frac{(1-2\nu)}{3E} \sigma_{RR} + \alpha T \quad (3.39)$$

Где  $\alpha$ - коэффициент линейного температурного расширения.

Если  $\nu = 0.5$ , то  $\dot{\varepsilon}_{RR} = 3\alpha\dot{T} \Rightarrow 3\alpha T$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{U}{r}, \quad \varepsilon_z = \text{const}(t) \quad (3.40)$$

$$\text{т. к. } \varepsilon_{RR} = 3\alpha T$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{U}{r} + \varepsilon_z = 3\alpha T \quad (3.41)$$

$$U' + \frac{U}{r} = 3\alpha T - \varepsilon_z \quad (3.42)$$

$$U = a \cdot b \quad (3.43)$$

$$a'b + b'a + \frac{ab}{r} = 3\alpha T - \varepsilon_z \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b' + \frac{b}{r} = 0 \Rightarrow \frac{db}{dr} = -\frac{b}{r} \Rightarrow \int \frac{db}{b} = -\int \frac{dr}{r}, \quad b = \frac{1}{r} \\ a'b = 3\alpha T - \varepsilon_z, \quad a' \cdot \frac{1}{r} = 3\alpha T - \varepsilon_z \end{array} \right. \quad (3.45) \quad \begin{array}{l} \overline{(3.} \\ 45 \\ ) \end{array}$$

$$\frac{da}{dr} = \left( \frac{3\alpha T r}{r_1} - \varepsilon_z r \right) \quad (3.46) \quad \begin{array}{l} \overline{(3.} \\ 46 \\ ) \end{array}$$

$$a = \int \left( \frac{3\alpha Tr}{r_1} - \varepsilon_z r \right) dr = -\frac{\varepsilon_r r^2}{2} + 3 \int_{r_0}^r \alpha T r dr + C_0 \quad (3.47) \quad \left( \begin{array}{l} 3. \\ 47 \\ ) \end{array} \right)$$

$$u = a \cdot b \quad (3.48)$$

$$u = \frac{1}{r} \left( -\frac{\varepsilon_z r^2}{2} + 3 \int_{r_0}^r \alpha T r dr + C_0 \right) \quad (3.49)$$

$$u = -\frac{\varepsilon_z}{2} r + \frac{3\alpha}{r} \int_{r_0}^r T r dr + \frac{C_0}{r} \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -\frac{\dot{\varepsilon}_r}{2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_{r_0}^r \dot{T} r dr + 3\alpha \dot{T} - \frac{C_0}{r^2} \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = -\frac{\dot{\varepsilon}_z}{2} + \frac{3\alpha}{r^2} \int_{r_0}^r \dot{T} r dr + \frac{C_0}{r^2} \end{cases} \quad (3.51)$$

В случае, если цилиндр сплошной ( $r_0 = 0$ ), то  $C_0 = 0$ .

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = -\frac{\dot{\varepsilon}_r}{2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr + 3\alpha \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_\varphi = -\frac{\dot{\varepsilon}_z}{2} + \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr \end{cases} \quad (3.52)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (3.53)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} e_r = \varepsilon_r - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z}{3} = \frac{2}{3} \varepsilon_z - \frac{1}{3} (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) \\ e_\varphi = \frac{2}{3} \varepsilon_\varphi - \frac{1}{3} (\varepsilon_r + \varepsilon_z) \\ e_z = \frac{2}{3} \varepsilon_z - \frac{1}{3} (\varepsilon_z + \varepsilon_\varphi) \end{cases} \quad (3.55)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (3.56)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \quad (3.57)$$



$$\begin{cases} \dot{e}_z = \dot{\varepsilon}_z - \alpha \dot{T} \\ \dot{e}_r = -\frac{\dot{\varepsilon}_z}{2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_{r_1}^r \dot{T} r dr + \alpha \dot{T} - \frac{C_0}{r^2} \\ \dot{e}_\varphi = -\frac{\dot{\varepsilon}_z}{2} + \frac{3\alpha}{r^2} \int_{r_1}^r \dot{T} r dr - \alpha \dot{T} + \frac{C_0}{r^2} \end{cases} \quad (3.58)$$

Для сплошного цилиндра:

$$\begin{cases} \dot{e}_r = -\frac{\dot{\varepsilon}_z}{2} - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr + 2\alpha \dot{T} \\ \dot{e}_\varphi = -\frac{\dot{\varepsilon}_z}{2} + \frac{3\alpha}{r^2} \int_{r_1}^r \dot{T} r dr - \alpha \dot{T} \\ \dot{e}_z = \dot{\varepsilon}_z - \alpha \dot{T} \end{cases} \quad (3.59)$$

За искомые переменные примем:

$$\begin{aligned} S_z, S &= \sigma_r - \sigma_\varphi = S_r - S_\varphi \\ \varepsilon_z, \varepsilon &= \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi \end{aligned} \quad (3.60)$$

Определим  $\dot{\varepsilon}$ :

$$\dot{\varepsilon} = -2 \cdot \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr + 3\alpha \dot{T} \cdot r^2 = \frac{3\alpha}{r^2} \left( \int_0^r r^2 \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} dr \right) \quad (3.61)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{3\alpha}{r^2} \left( \int_0^r r^2 \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} dr \right) \quad (3.62)$$

Определим  $\dot{S}_{ij}$ :

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{S}_{ij}}{2\mu} + \lambda S_{ij} \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} \dot{S}_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij} - \lambda S_{ij} \\ \dot{S}_{ij} = 2\mu \left( \dot{e}_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu} S_{ij} \right) \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\begin{cases} \dot{S}_r = 2\mu(\dot{\epsilon}_r - \frac{\lambda}{2\mu}S_r) \\ \dot{S}_\varphi = 2\mu(\dot{\epsilon}_\varphi - \frac{\lambda}{2\mu}S_\varphi) \\ \dot{S}_z = 2\mu(\dot{\epsilon}_z - \frac{\lambda}{2\mu}S_z) \end{cases} \quad (3.65)$$

Зная значения  $\dot{S}$ , получим:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_r - \dot{\sigma} = 2\mu(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_0 - \frac{\lambda}{2\mu}(\sigma_r - \sigma)) \\ \dot{\sigma}_\varphi - \dot{\sigma} = 2\mu(\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_0 - \frac{\lambda}{2\mu}(\sigma_\varphi - \sigma)) \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\dot{S} = 2\mu(\dot{\epsilon} - (1 - g)\lambda S) \quad (3.67)$$

$$\dot{S}_z = 2\mu(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_0 - \frac{\lambda}{2\mu}S_z) \quad (3.68)$$

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{\dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi}{3} \quad (3.69)$$

$$\dot{S}_z = 2\mu(\dot{\epsilon}_z - \alpha\dot{T} - (1 - g)\lambda S_z) \quad (3.70)$$

Если исходить из условия текучести Мизеса, то результаты в явном виде не получаются, но зато удастся вывести более простые выражения для зависимостей скоростей напряжений от  $\dot{T}$ ,  $\dot{\epsilon}_z$  и от самих напряжений, которыми весьма удобно пользоваться при расчетах в числовой форме.

За исключением различия в условиях текучести, общая задача остается такой же. В частности, по-прежнему считаем, что коэффициент Пуассона  $\nu = 1/2$  и все механические свойства, включая условие текучести, не зависят от температуры. Ограничимся случаем сплошного цилиндра, для чего в выражениях положим  $a = 0, C_0 = 0$ , так, что:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_z - \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr + 3\alpha\dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_\theta &= -\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_z + \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr\end{aligned}\quad (3.71)$$

В качестве искоемых переменных удобно принять компоненту дивергента осевого напряжения  $s_z$  и разность напряжений:

$$s = \sigma_r - \sigma_\theta = s_r - s_\theta \quad (3.72)$$

И соответствующие деформации  $\varepsilon_z$  и

$$\varepsilon = \varepsilon_l - \varepsilon_\theta \quad (3.73)$$

Из предыдущих формул следует, что:

$$\dot{\varepsilon} = 3 \left[ \alpha\dot{T} - \frac{2\alpha}{r^2} \int_0^r \dot{T} r dr \right] = \frac{3\alpha}{r^2} \int_0^r r^2 \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} dr \quad (3.74)$$

Так что  $\dot{\varepsilon}$  определяется исключительно температурным полем. Воспользовавшись зависимостями между напряжениями и деформациями, приведенными ранее, получим следующие два уравнения для скоростей напряжения:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= 2\mu[\dot{\varepsilon} - (1 - g)\lambda s] \\ \dot{s}_z &= 2\mu[\dot{\varepsilon}_z - \alpha\dot{T} - (1 - g)\lambda s_z]\end{aligned}\quad (3.75)$$

Где функция  $g(r, t)$  определяется совершенно так же, как  $g(x, t)$ . Принимая во внимание, что  $s_r + s_\theta + s_z = 0$ , непосредственно находим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} &= \frac{1}{4} (s^2 + 3s_z^2), \\
s_{ij} \dot{s}_{ij} &= \frac{1}{2} (s\dot{s} + 3s_z \dot{s}_z), \\
s_{ij} \dot{s}_{ij}^E &= \mu [s\dot{\epsilon} + 3s_z (\dot{\epsilon}_z - \alpha \dot{T})]
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Причем последнее соотношение получено непосредственно из предыдущего путем замены  $\dot{s}$  и  $\dot{s}_z$  их выражениями при  $\lambda = 0$ .

При известных  $s$  и  $s_z$  компоненты напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  можно вычислить следующим образом. Из уравнения равновесия и условия, что цилиндрическая поверхность  $r=b$  свободна от нагрузок, получаем:

$$\sigma_r = \int_{r_0}^b \frac{s}{r} dr \tag{3.77}$$

Тогда

$$\sigma_0 = \sigma_r - s \tag{3.78}$$

И

$$\sigma_z = s_z + \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \tag{3.79}$$

Или

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (2\sigma_r - s + 3s_z) \tag{3.80}$$

Чтобы удовлетворить условию, согласно которому равнодействующая сил в любом поперечном сечении цилиндра должна быть нулем, используем выражения:

$$\int_0^b r \sigma_z dr = \frac{1}{2} \int_0^b [2 \int_r^b \frac{sd\varrho}{\varrho} - s + 3s_z] r dr \quad (3.81)$$

И так как

$$\int_0^b [\int_\varrho^b \frac{sd\varrho}{\varrho}] r dr = \frac{1}{2} \int_0^b s r dr, \quad (3.82)$$

То условие может быть записано в виде:

$$\int_0^b r s_z dr = 0 \quad (3.83)$$

Или

$$\int_0^b r \dot{s}_z dr = 0 \quad (3.84)$$

Подставляя в (3.84) значение (3.75) для  $\varepsilon_z$  и выражая  $\lambda$  по формуле, относящейся к случаю, когда условие текучести не зависит от температуры, что дает:

$$\lambda = \frac{s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P}{2k^2} = \frac{1}{4\mu k^2} s_{ij} \dot{s}_{ij}^E = \frac{1}{4k^2} [s \dot{\varepsilon} + 3s_z (\dot{\varepsilon}_z - \alpha \dot{T})] \quad (3.85)$$

Получаем в результате следующее выражение для  $\dot{\varepsilon}_z$ :

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\int_0^b (2\alpha \dot{T} + (1-g) \frac{s_z}{2k^2} [s \dot{\varepsilon} - 3\alpha s_z \dot{T}]) r dr}{b^2 - \frac{3}{2k^2} \int_0^b (1-g) s_z^2 r dr} \quad (3.86)$$

Таким образом, получены все уравнения, необходимые для определения скоростей напряжений  $\dot{s}$  и  $\dot{s}_z$  в любой момент

времени в зависимости от значений  $s, s_z$  и  $\dot{T}$  в этот же момент. Скорости  $\dot{s}$  и  $\dot{s}_z$  можно найти по формулам (3.75), определяя  $\dot{\epsilon}$ , согласно (3.74), а  $\dot{\epsilon}_z$ -(3.86). Величина  $\lambda$  находится из выражения (3.85), а условия для определения  $g(r, t)$  можно выразить через рассматриваемые функции в следующем виде:

$$g(r, t) = 1, \quad \text{если } \frac{1}{4}(s^2 + 3s_z^2) < k^2 \text{ или если } \frac{1}{4}(s^2 + 3s_z^2) = k^2 \quad (3.87)$$

$$\text{и } s\dot{\epsilon} + 3s_z(\dot{\epsilon}_z - \alpha\dot{T}) \leq 0;$$

$$g(r, t) = 0, \quad \text{если } \frac{1}{4}(s^2 + 3s_z^2) = k^2 \text{ и } s\dot{\epsilon} + 3s_z(\dot{\epsilon}_z - \alpha\dot{T}) \geq 0$$

Значения  $s$  и  $s_z$  находятся путем интегрирования функций  $\dot{s}$  и  $\dot{s}_z$  по времени, что легко может быть выполнено с помощью цифровой вычислительной машины.

Аппроксимация уравнений:

$$\int_0^r r^2 \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} dr = \left[ \begin{array}{l} \int_0^r U dv = UV|_0^r - \int_0^r V du \\ U = r^2 \Rightarrow du = 2r dr \\ dv = \frac{\partial \dot{T}}{\partial r} \Rightarrow dv = d\dot{T} \Rightarrow V = \dot{T} \end{array} \right] =$$

$$= r^2 * \dot{T}|_0^r - 2 \int_0^r r \dot{T} dr = r^2 \dot{T}(r) - 2 \int_0^r r \dot{T} dr \approx$$

$$r_i^2 \cdot \frac{\Delta T[i, n]}{\Delta t} - \sum_{k=0}^i \Delta r \left( k \Delta r \cdot \frac{\Delta T[k, n]}{\Delta t} + (k+1) \Delta r \cdot \frac{\Delta T[k+1, n]}{\Delta t} \right)$$

Уравнение 2.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon[i, n+1] - \varepsilon[i, n]}{\Delta t} = \dot{\varepsilon}[i, n] \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon[i, n] &= \frac{3\alpha}{i \Delta r} [(r \Delta r)^2 \cdot \Delta T[i, n] \\ &\quad - \sum_{k=0}^i (\Delta r)^2 (k \Delta T[k, n] \\ &\quad + (k+1) \Delta T[k+1, n]) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Если  $\Delta r$ - постоянный шаг, то

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon[i, n] &= 3\alpha \Delta T[i, n] \\ &\quad - \frac{1}{i^2} \sum_{k=0}^i (k \Delta T[k, n] + (k+1) \Delta T[k+1, n]) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Уравнение 3.

$$\dot{S} = 2\mu(\dot{\varepsilon} - (1-g)\lambda S), \quad S = \int_0^t \dot{S} dt \quad (3.92)$$

$$\dot{S}[i, n] = \frac{S[i, n+1] - S[i, n]}{\Delta t} \quad (3.93)$$

$$S[i, n] = \sum_{l=0}^n \frac{S[i, l+1] - S[i, l]}{\Delta t} \cdot \Delta t \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \Delta S[i, n] &= 2\mu(\Delta \varepsilon[i, n] - (1-g[i, n]) \cdot \\ &\quad \lambda[i, n] \cdot \sum_{l=0}^n \Delta S[i, l] \Delta t \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\dot{S}_z = 2\mu[\dot{\varepsilon}_z - \alpha\dot{T} - (1 - g)\lambda S_z]$$

Числитель уравнения 4.

Проведем необходимые вычисления:

$$\int_0^{r_1} (2\alpha\dot{T} + (1 - g)\frac{S_z}{2R^2}[S\dot{\varepsilon} - 3\alpha S_z \cdot \dot{T}]rdr)$$

$$\alpha\dot{T} = \alpha\dot{T}[i, n] = \alpha \frac{T[i, n + 1] - T[i, n]}{\Delta t} \sim \frac{\alpha\Delta T[i, n]}{\Delta t}$$

$$S_z = \sum_{l=0}^n \frac{\Delta S_z[i, l]}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

В таком случае, числитель имеет вид:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{Y_r} [(2\alpha\Delta T[k, n] + (1 - g[k, n])) \cdot \frac{\sum_{l=0}^n \Delta S_z[k, l]}{2\sigma_t^2} \cdot$$

$$\cdot [\sum_{l=0}^n S[k, l] \cdot \Delta\varepsilon[k, n] - 3\alpha(\sum_{l=0}^n \Delta S_z[k, l]) \cdot \Delta T[k, n]]) \cdot$$

$$\cdot r_k + (2\alpha\Delta T[k + 1, n] + (1 - g[k + 1, n]) \frac{\sum_{l=0}^n \Delta S_z[k + 1, l]}{2\sigma_T^2} \cdot$$

$$\cdot [\sum_{l=0}^n S[k + 1, l] \cdot \Delta\varepsilon[k + 1, n] - 3\alpha(\sum_{l=0}^n \Delta S_z[k + 1, l]) \cdot \Delta T[k + 1, n]] \cdot$$

$$\cdot r_{k+1}] = (*) \quad (3.96)$$

Знаменатель уравнения 4.



$$\begin{aligned}
& r_1^2 - \frac{3}{2\sigma_T^2} \int_0^{r_1} (1-g)S_r^2 r dr \\
& = (Y\Delta r)^2 \\
& - \frac{3}{2\sigma_T^2} \sum_{k=0}^Y ((1-g[k, n] \\
& \quad \cdot \Delta t (\sum_{l=0}^n \Delta S_r[i, l])^2 \cdot k \cdot \Delta r + \\
& + (1-g)[k+1, n]) \\
& \quad \cdot \Delta t (\sum_{k=0}^n \Delta S_r[k+1, n])^2 (k+1)\Delta r) \frac{1}{2} \cdot \Delta r
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Итак, знаменатель будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
& (Y_r^2 - \frac{3}{4\sigma_T^2} \sum_{k=0}^Y [(1 \\
& - g[k, n] (\sum_{l=0}^n \Delta S_z[k, l])^2 \cdot k + (k+1)(1 \\
& - g[k+1, n])) (\sum_{l=0}^n \Delta S_r[k+1, n])^2) = (**)
\end{aligned} \tag{3.98}$$

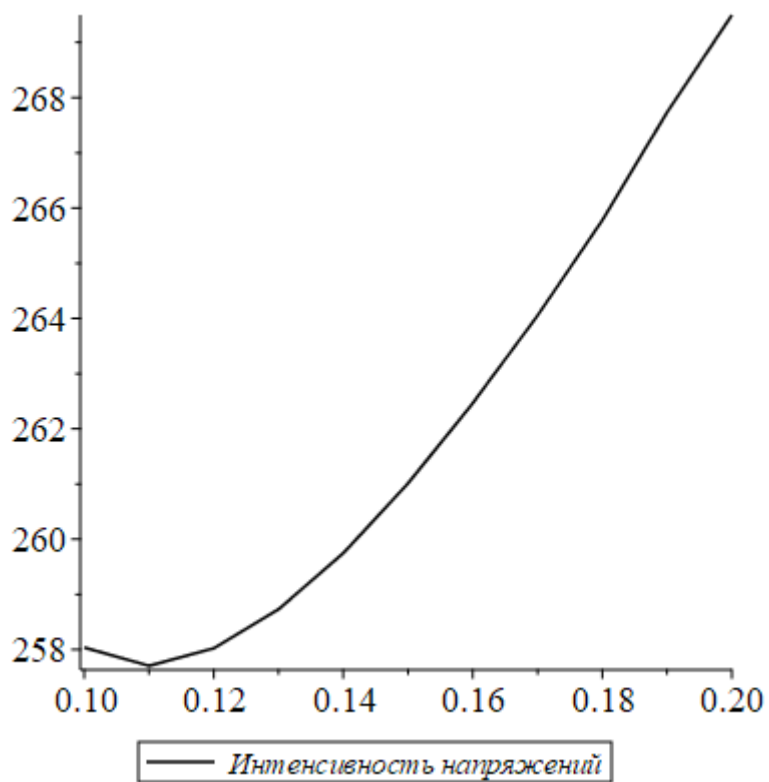


Рис. 22. Интенсивность напряжений для вала при пластических деформациях.

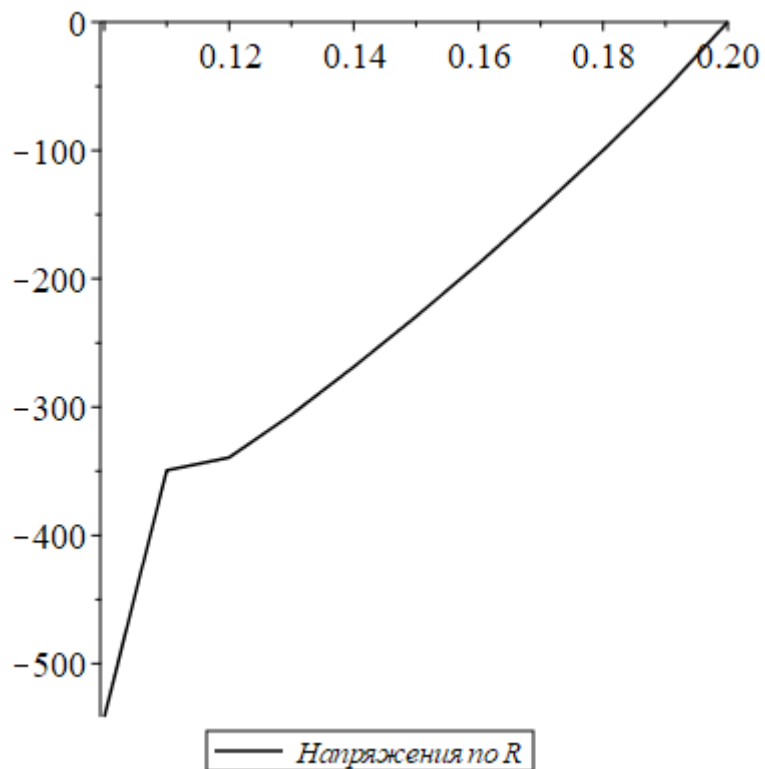


Рис. 23. Напряжения по R для вала при пластических деформациях.

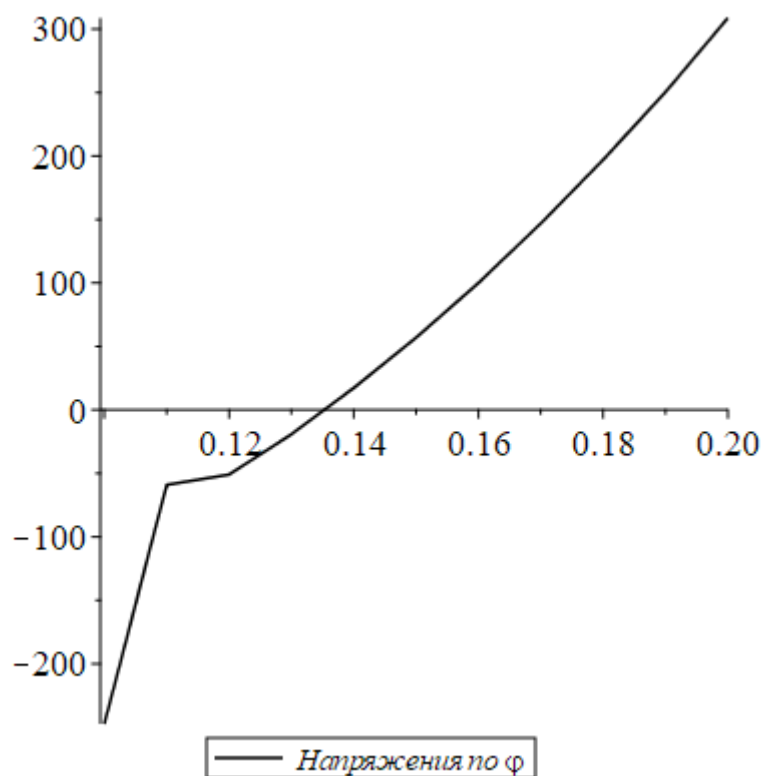


Рис. 24. Напряжения по  $\varphi$  для вала при пластических деформациях.

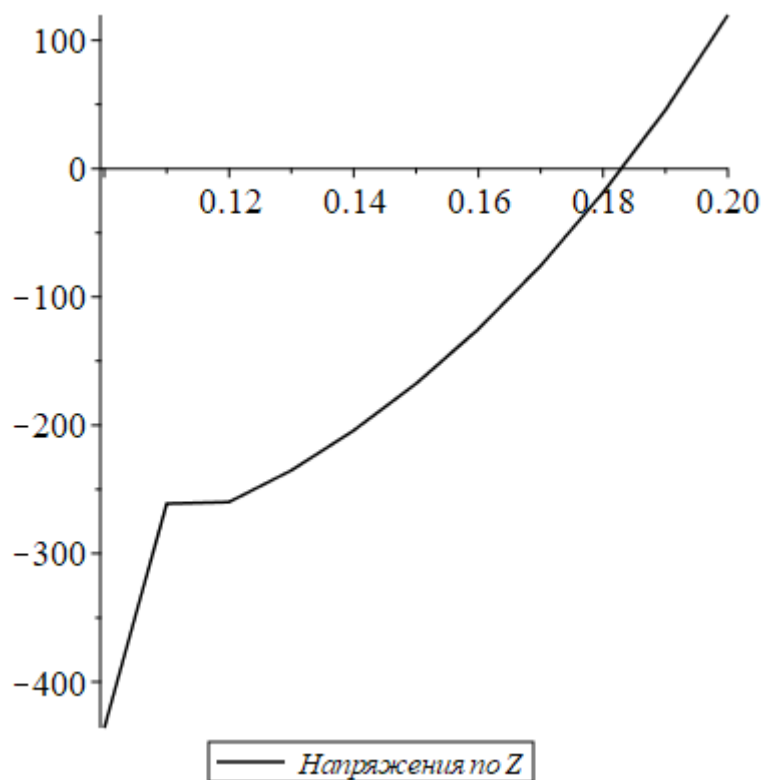


Рис. 25. Напряжения по Z для вала при пластических деформациях.

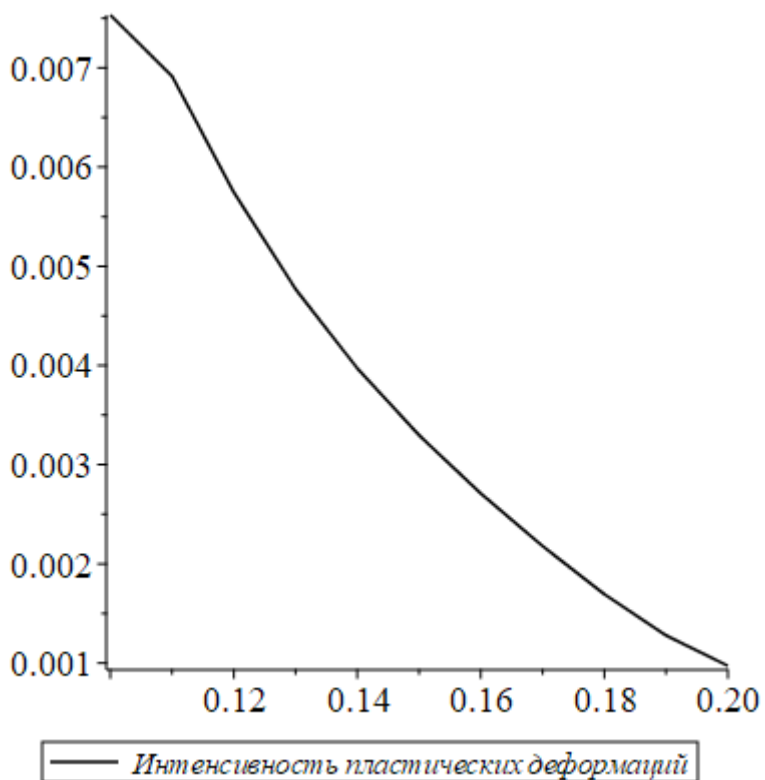


Рис. 26. Интенсивность пластических деформаций для вала радиусом 20 см.

*Пункт 3.3. Термоупругопластическое деформирование цилиндра с условием текучести Мизеса, с учетом зависимости температуры от предела текучести.*

Рассмотрим цилиндр, состоящий из двух слоев, первый слой из упругого, а второй из упруго-пластичного материала. Перемещения и деформации, возникающие в цилиндре, малы. Температура в теле распределяется равномерно.

Решение данной задачи производится в цилиндрической системе координат.

Уравнение равновесия принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0; \quad (3.99)$$

Зависимость между деформациями и напряжениями задается обобщенным законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \sum C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (3.100)$$

где  $C_{ijkl}$  – тензор коэффициентов упругости.

Деформация может быть представлена в виде суммы упругой и пластической частей и температурного расширения:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^T; k, l = r, \varphi, z; \quad (3.101)$$

Температурная деформация подчиняется закону теплового расширения:

$$\varepsilon_{kl}^T = \alpha \Delta T;$$

Из уравнений (3.100) и (3.101) получаем:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{zz} - 2\mu\varepsilon_{rr}^P - 3K\alpha\Delta T;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{zz} - 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}^P \\ &- 3K\alpha\Delta T; \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} - 2\mu\varepsilon_{zz}^P - 3K\alpha\Delta T.$$

где,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  и  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – упругие постоянные

Ламе,  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  – модуль всестороннего сжатия и  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения.

Выражая в этих формулах деформации через перемещения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} \text{ и } \varepsilon_{zz} = 0,$$

и затем подставляя полученные значения для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  в уравнение равновесия (3.101) получим следующее дифференциальное уравнение для перемещений  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (3.103)$$

Будим считать, что в начальный момент времени напряжения и перемещения равны нулю:

$$u(r, 0) = 0; \sigma_{ij}(r, 0) = 0; i, j = r, \varphi, z.$$

Так же примем, что напряжения по  $r$  на внешней границе отсутствуют, а в центральной точке цилиндра перемещения равны 0:

$$\sigma_r(R, t) = 0;$$

$$u(0, t) = 0. \quad (3.104)$$

На границе двух слоев, напряжения по  $r$  первого слоя, равны напряжениям второго слоя:

$$\sigma_r^I = \sigma_r^{II}; \quad (3.105)$$

где  $\sigma_r^I$  – напряжения по  $r$  первого слоя,  $\sigma_r^{II}$  – напряжения по  $r$  второго слоя.

Пластические деформации вычисляются:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^P &= \frac{S_{rr}}{2 \cdot \mu} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^P &= \frac{S_{\varphi\varphi}}{2 \cdot \mu} \\ \varepsilon_{zz}^P &= \frac{S_{zz}}{2 \cdot \mu} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Девяторы напряжений равны:

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \frac{2}{3} \cdot \sigma_{rr} - \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) \\ S_{\varphi\varphi} &= \frac{2}{3} \cdot \sigma_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \\ S_{zz} &= \frac{2}{3} \cdot \sigma_{zz} - \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Интенсивность напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^P &= \sqrt{2 \cdot \frac{(\varepsilon_{rr}^P - \varepsilon_{\varphi\varphi}^P)^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^P - \varepsilon_{zz}^P)^2 + (\varepsilon_{rr}^P - \varepsilon_{zz}^P)^2}{9}} \\ \varepsilon_{rr}^P &= \frac{3 \cdot \varepsilon_i^P}{2 \cdot \sigma^T} \cdot S_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^P &= \frac{3 \cdot \varepsilon_i^P}{2 \cdot \sigma^T} \cdot S_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\varepsilon_{zz}^P = \frac{3 \cdot \varepsilon_i^P}{2 \cdot \sigma^T} \cdot S_{zz}$$

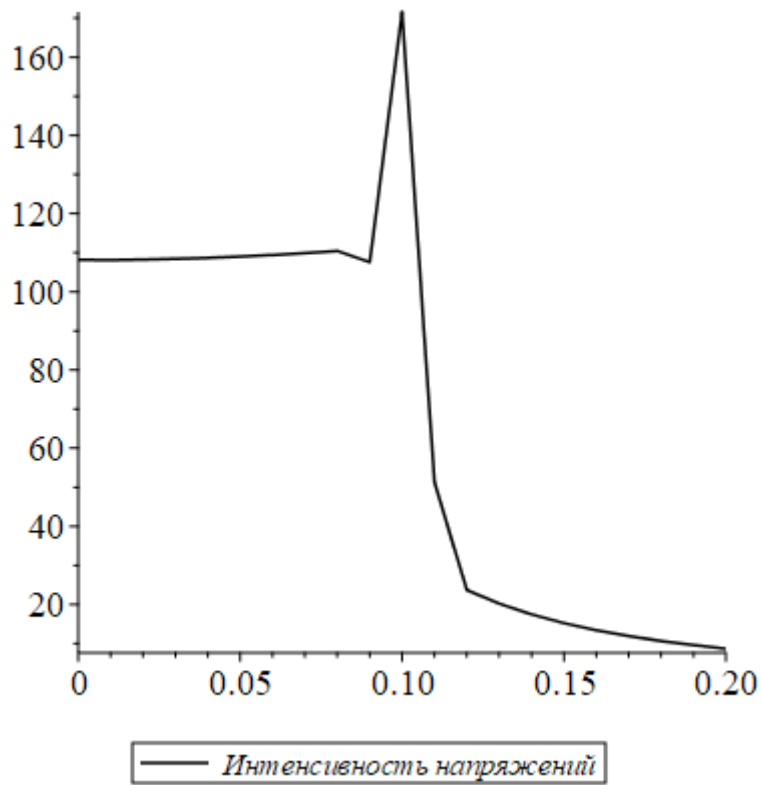


Рис. 27. Интенсивность напряжений для сопряженной задачи при пластических деформациях.

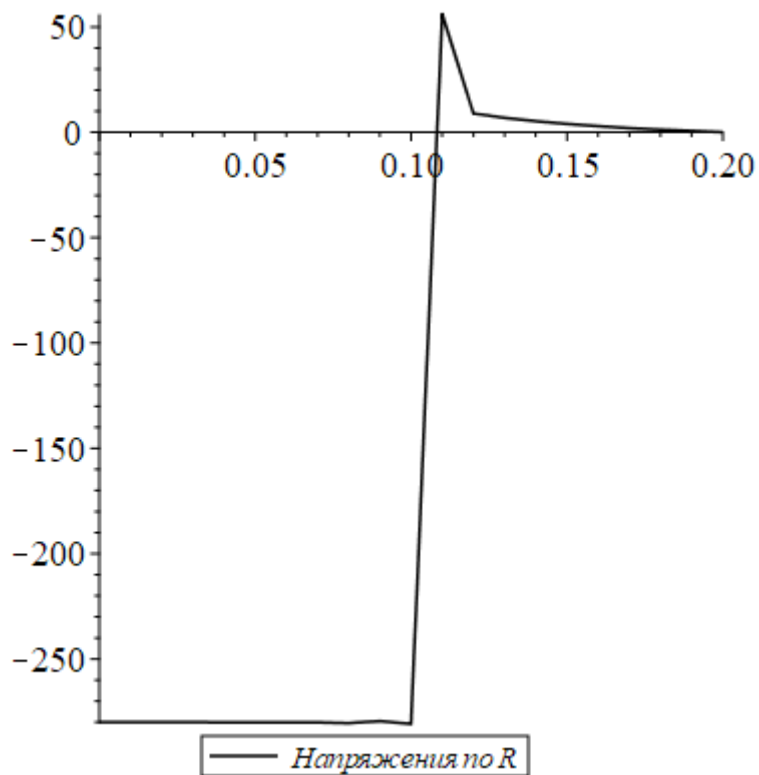




Рис. 28. Напряжения по R для сопряженной задачи при пластических деформациях.

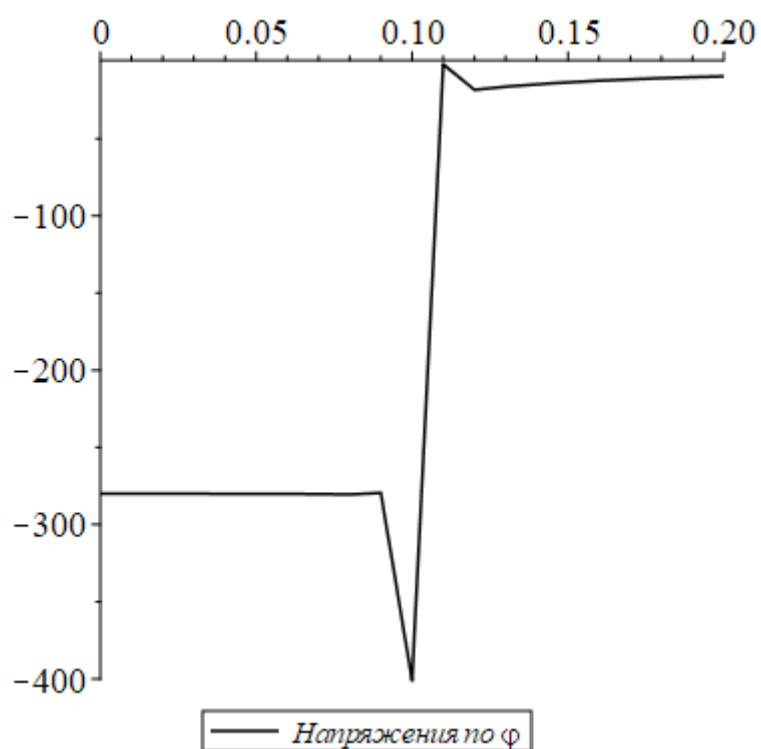


Рис. 29. Напряжения по  $\varphi$  для сопряженной задачи при пластических деформациях.

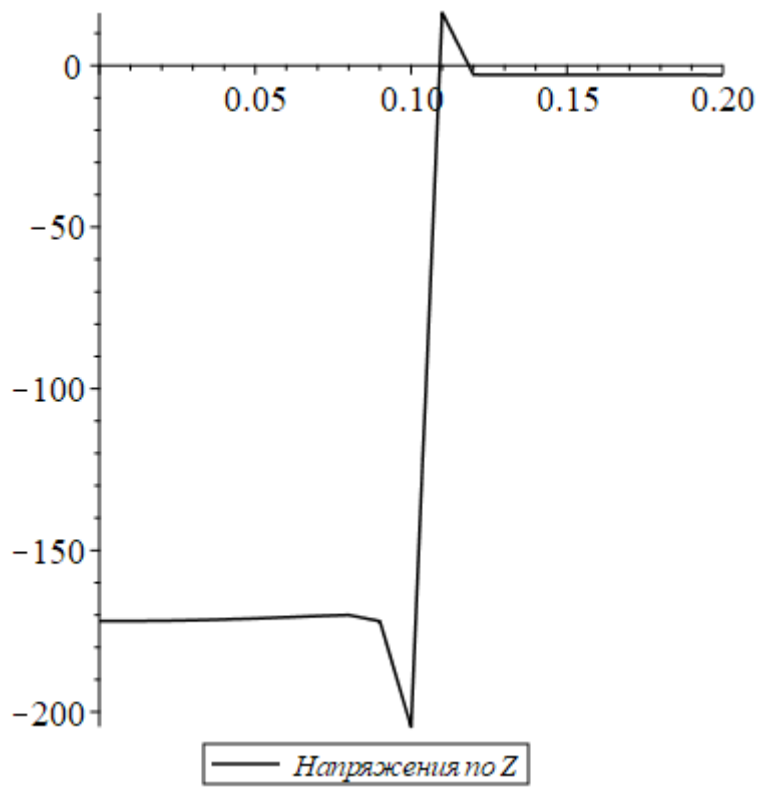


Рис. 30. Напряжения по  $Z$  для сопряженной задачи при пластических деформациях.

## **Заключение**

Разработан численно-аналитический метод расчета технологических напряжений в сопряженной системе цилиндров – вала и муфты для технологии горячей посадки. Дискретизация по временной шкале позволяет на каждом временном шаге определять возможность появления области пластического деформирования, ее границы и рассчитать напряженно-деформируемое состояние во всей сборке. Невозможность получения аналитического решения обусловлена выбором поверхности нагружения в виде условия пластического течения Мизеса. Возможность пластического течения рассматривается не только в материале, из которого изготовлен внешний цилиндр (муфта), но и в вале.

Приведены результаты тестовых расчетов технологических напряжений при посадке муфты на вал из разных по свойствам металлов.

Решение данной задачи позволяет предположить, что предлагаемый в работе алгоритм можно развить для определения эволюции термических напряжений в многослойных трубах. При продолжении исследования по данной теме в выбранном направлении актуальна разработка метода расчета технологических напряжений в сопряженной системе полых цилиндров для технологии горячей посадки.

## Список литературы

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.  
// Изд. «МИР» 1964., Москва
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 168с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 232с.
4. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 272с.
5. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термоупругости. – К.: Наука, думка, 1982. – 260с.
6. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Изд-во АН УССР, 1975. – 216с.
7. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинах. – Донецк: Виша шк., 1983. – 160с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599с.
9. Седов Л.И. Механика сплошных сред. – В 2 т. М.: Наука, 1973. – 536с. Т.1.
10. Ткачева, А.В. Температурные напряжения в толстостенной трубе / А.В. Ткачева // Фундаментальная механика в качестве основы совершенствования промышленных технологий, технических устройств и конструкций. -2015.
11. Ткачева, А.В. Численное исследование температурных напряжений, вызванных процессом горячей посадки

- цилиндрических деталей/ А.В. Ткачева, Е.П. Дац // Сборник докладов международной конференции «Успехи механики сплошных сред», приуроченной к 75-летию академика В.А. Левина, Иркутск. -2014. –С.481.
12. Ткачева, А.В. Эволюция температурных напряжений в условиях сборки упругопластических деталей способом горячей посадки. – Комсомольск-на-Амуре, 2016.
13. Локошенко. А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов / А.М.Локошенко. – М.: Физматлит, 2015.
14. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001.
15. Шевченко, Ю.Н. Физические уравнения термовязкопластичности / Ю.Н. Шевченко, Н.Н. Терехов. – Киев: Нукова думка, 1982.

## Приложение А

### Температурная задача для цилиндра в ПМП MAPLE:

```
> restart; with(plots); printlevel := 0;
    [animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords,
      complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d,
      contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
      display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot,
      gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive,
      interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d,
      listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot,
      multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d,
      polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported,
      polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
      setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot,
      textplot3d, tubeplot]
```

```
printlevel := 0
```

```
>
t_kon := 60·20;
c := 477; rho := 7800; lambda := 63; Rl := 1; kll := -1;
Ir := 10;

$$\Delta r := \frac{(Rl - r[0])}{Ir}; \Delta t := 10^2; r[0] := 10^{-2};$$

Tsr := 0; theta := -10;
alpha := 156·10-7;
N := 5;
σT := 280;

```

```
t_kon := 1200
```

```
c := 477
```

```
ρ := 7800
```

```
λ := 63
```

```
Rl := 1
```

```
kll := -1
```

```
Ir := 10
```

```

$$\Delta r := \frac{1}{10} - \frac{1}{10} r_0$$

```

```
Δt := 100
```

```

$$r_0 := \frac{1}{100}$$

```

```
Tsr := 0
```

```
θ := -10
```

```

$$\alpha := \frac{39}{2500000}$$

```

```
N := 5
```

```
σT := 280
```

$\mu := 100000$

>

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $Ir$  **do**

$T[i, 0] := 600;$   
 $S[i, 0] := 0;$   
 $Sz[i, 0] := 0;$   
 $\epsilon z[i, 0] := 0;$   
 $\epsilon[i, 0] := 0;$   
 $\Delta T[i, 0] := 0;$   
 $SI[i, 0] := 0;$   
 $SzI[i, 0] := 0;$   
 $\epsilon zI[i, 0] := 0;$   
 $\epsilon I[i, 0] := 0;$   
 $\Delta TI[i, 0] := 0;$   
**end do**;

>

**for**  $j$  **from** 1 **to** 100 **do**

$\kappa[0, j] := 1;$   
 $Nu[0, j] := kll ;$

**for**  $i$  **from** 1 **to**  $Ir - 1$  **do**

$$B[i, j] := \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(r[0] + i \cdot (\Delta r)) \cdot 2 \cdot \Delta r};$$

$$A[i, j] := \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{(r[0] + i \cdot (\Delta r)) \cdot 2 \cdot \Delta r};$$

$$C[i, j] := \frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{c \cdot \text{rho}}{\text{lambda} \cdot \Delta t};$$

$$F[i, j] := \left( -\frac{c \cdot \text{rho} \cdot T[i, j-1]}{\text{lambda} \cdot \Delta t} \right);$$

$$\kappa[i, j] := (C[i, j] - A[i, j] \cdot \kappa[i-1, j])^{-1} \cdot B[i, j];$$

$$Nu[i, j] := (C[i, j] - A[i, j] \cdot \kappa[i-1, j])^{-1} \cdot (A[i, j] \cdot Nu[i-1, j] - F[i, j]);$$

$\#print(A[i, j], B[i, j], C[i, j], F[i, j]);$

**od**;

$\kappa[0, j] := 1;$

$$\kappa[Ir, j] := 1 / (1 - \text{theta} \cdot \Delta r);$$

$$Nu[Ir, j] := -\text{theta} \cdot \Delta r \cdot Tsr / (1 - \text{theta} \cdot \Delta r);$$

$$T[Ir, j] := \text{evalf} \left( \frac{(Nu[Ir, j] + \kappa[Ir, j] \cdot Nu[Ir-1, j])}{1 - \kappa[Ir, j] \cdot \kappa[Ir-1, j]} \right);$$

**for**  $i$  **from**  $Ir - 1$  **to** 0 **by** -1 **do**

$T[i, j] := \kappa[i, j] \cdot T[i+1, j] + Nu[i, j];$

**od**;

**od**;

>  $display(plot([seq([ii, T[ii, 100]], ii = 0 .. Ir)]));$

## Приложение Б

### Температурная задача для вала в ПМП MAPLE:

```
> restart; with(plots); printlevel := 0;
    [animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords,
      complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d,
      contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
      display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot,
      gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive,
      interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d,
      listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot,
      multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d,
      polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported,
      polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
      setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot,
      surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot ]
```

```
printlevel := 0
```

```
>
t_kon := 60·20;
c := 477; rho := 7800; lambda := 63; RI := 1; kII := 0.10;
Ir := 10;
 $\Delta r := \frac{(R1 - r[0])}{Ir}$ ;  $\Delta t := 10^2$ ; r[0] := 0;
Tsr := 0; theta := -10;
alpha :=  $10^{-7}$ ;
N := 5;
 $\sigma T := 280$ ;
mu :=  $10^5$ ;
```

```
t_kon := 1200
c := 477
rho := 7800
lambda := 63
RI := 1
kII := 0.10
Ir := 10
 $\Delta r := \frac{1}{10} - \frac{1}{10} r_0$ 
 $\Delta t := 100$ 
r_0 := 0
Tsr := 0
theta := -10
 $\alpha := \frac{1}{10000000}$ 
N := 5
 $\sigma T := 280$ 
```



$\mu := 100000$

>

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $Ir$  **do**

$T[i, 0] := 20;$

$S[i, 0] := 0;$

$Sz[i, 0] := 0;$

$\epsilon z[i, 0] := 0;$

$\epsilon[i, 0] := 0;$

$\Delta T[i, 0] := 0;$

$SI[i, 0] := 0;$

$SzI[i, 0] := 0;$

$\epsilon zI[i, 0] := 0;$

$\epsilon I[i, 0] := 0;$

$\Delta TI[i, 0] := 0;$

**end do**:

>

**for**  $j$  **from** 1 **to** 100 **do**

$\kappa[0, j] := 0;$

$Nu[0, j] := 0;$

**for**  $i$  **from** 1 **to**  $Ir - 1$  **do**

$$B[i, j] := \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(r[0] + i \cdot (\Delta r)) \cdot 2 \cdot \Delta r};$$

$$A[i, j] := \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{(r[0] + i \cdot (\Delta r)) \cdot 2 \cdot \Delta r};$$

$$C[i, j] := \frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{c \cdot \text{rho}}{\text{lambda} \cdot \Delta t};$$

$$F[i, j] := \left( -\frac{c \cdot \text{rho} \cdot T[i, j-1]}{\text{lambda} \cdot \Delta t} \right);$$

$$\kappa[i, j] := (C[i, j] - A[i, j] \cdot \kappa[i-1, j])^{-1} \cdot B[i, j];$$

$$Nu[i, j] := (C[i, j] - A[i, j] \cdot \kappa[i-1, j])^{-1} \cdot (A[i, j] \cdot Nu[i-1, j] - F[i, j]);$$

$\#print(A[i, j], B[i, j], C[i, j], F[i, j]);$

**od**;

$\kappa[Ir, j] := 0;$

$Nu[Ir, j] := 600;$

$$T[Ir, j] := \text{evalf} \left( \frac{(Nu[Ir, j] + \kappa[Ir, j] \cdot Nu[Ir-1, j])}{1 - \kappa[Ir, j] \cdot \kappa[Ir-1, j]} \right);$$

**for**  $i$  **from**  $Ir - 1$  **to** 0 **by** -1 **do**

$T[i, j] := \kappa[i, j] \cdot T[i+1, j] + Nu[i, j];$

**od**;

**od**;

>  $display(plot([seq([ii, T[ii, 10]], ii = 0..Ir)]));$

## Приложение В

### Термоупругопластическая задача в ПМП MAPLE:

```
> restart; with(plots); printlevel := 0;
```

```
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords,
  complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d,
  contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot,
  display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot,
  gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive,
  interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d,
  listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot,
  multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d,
  polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported,
  polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,
  setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot,
  textplot3d, tubeplot ]
```

```
printlevel := 0
```

```
t_kon := 60·20;
c := 477; rho := 7800; lambda := 63; R1 := 1; k11 := -1;
Ir := 10;

$$\Delta r := \frac{(R1 - r[0])}{Ir}; \Delta t := 10^2; r[0] := 10^{-2};$$

Tsr := 0; theta := -0.1;
alpha := 156·10-7;
N := 5;
σT := 280;
> mu := 105;
```

```
t_kon := 1200
```

```
c := 477
```

```
ρ := 7800
```

```
λ := 63
```

```
R1 := 1
```

```
k11 := -1
```

```
Ir := 10
```

```

$$\Delta r := \frac{1}{10} - \frac{1}{10} r_0$$

```

```
Δt := 100
```

```

$$r_0 := \frac{1}{100}$$

```

```
Tsr := 0
```

$\theta := -0.1$

$\alpha := \frac{39}{2500000}$

$N := 5$

$\sigma T := 280$

$\mu := 10000$

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $I_r$  **do**

$T[i, 0] := 600;$

$S[i, 0] := 0;$

$Sz[i, 0] := 0;$

$\epsilon z[i, 0] := 0;$

$\epsilon[i, 0] := 0;$

$\Delta T[i, 0] := 0;$

$SI[i, 0] := 0;$

$SzI[i, 0] := 0;$

$\epsilon zI[i, 0] := 0;$

$\epsilon I[i, 0] := 0;$

$\Delta TI[i, 0] := 0;$

**end do:**

>

**for j from 1 to 100 do**

kappa[0,j] := 1;

Nu[0,j] := kll ;

**for i from 1 to Ir - 1 do**

$$B[i,j] := \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(r[0] + i \cdot (\Delta r)) \cdot 2 \cdot \Delta r};$$

$$A[i,j] := \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{(r[0] + i \cdot (\Delta r)) \cdot 2 \cdot \Delta r};$$

$$C[i,j] := \frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{c \cdot \text{rho}}{\text{lambda} \cdot \Delta t};$$

$$F[i,j] := \left( -\frac{c \cdot \text{rho} \cdot T[i,j-1]}{\text{lambda} \cdot \Delta t} \right);$$

$$\text{kappa}[i,j] := (C[i,j] - A[i,j] \cdot \text{kappa}[i-1,j])^{-1} \cdot B[i,j];$$

$$\text{Nu}[i,j] := (C[i,j] - A[i,j] \cdot \text{kappa}[i-1,j])^{-1} \cdot (A[i,j] \cdot \text{Nu}[i-1,j] - F[i,j]);$$

#print(A[i,j], B[i,j], C[i,j], F[i,j]);

**od;**

kappa[0,j] := 1;

$$\text{kappa}[Ir,j] := 1/(1 - \text{theta} \cdot \Delta r);$$

$$\text{Nu}[Ir,j] := -\text{theta} \cdot \Delta r \cdot \text{Tsr}/(1 - \text{theta} \cdot \Delta r);$$

$$T[Ir,j] := \text{evalf} \left( \frac{(\text{Nu}[Ir,j] + \text{kappa}[Ir,j] \cdot \text{Nu}[Ir-1,j])}{1 - \text{kappa}[Ir,j] \cdot \text{kappa}[Ir-1,j]} \right);$$

**for i from Ir - 1 to 0 by -1 do**

$$T[i,j] := \text{kappa}[i,j] \cdot T[i+1,j] + \text{Nu}[i,j];$$

**od;**

**od;**

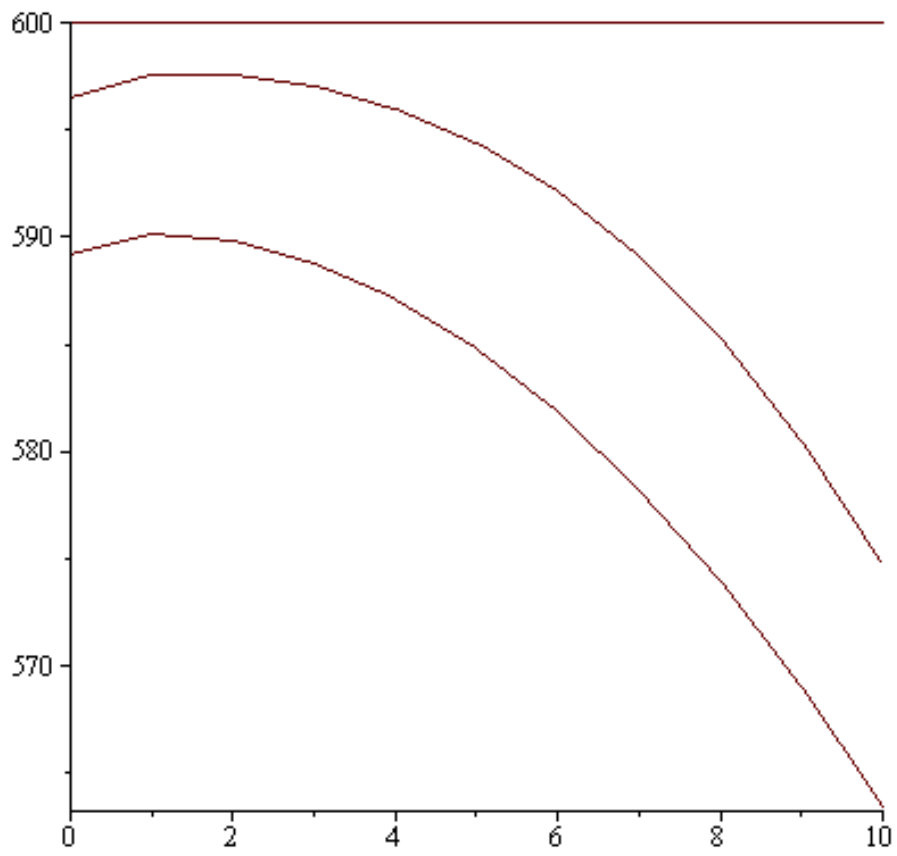
>

>

>

display(plot([seq([ii, T[ii, 0]], ii = 0 .. Ir)], plot([seq([ii, T[ii, 50]], ii = 0 .. Ir)], plot([seq([ii, T[ii, 100]], ii = 0 .. Ir)]));

>



```
for j from 1 to 100 do
  for i from 0 to Ir do
     $\Delta T[i,j] := T[i,j] - T[i,j - 1]$ ;
    #print(j,  $\Delta T[i,j]$ );
  od
od
>
```

```

for  $j$  from 1 to 100 do
   $kk := 1; g := 1;$ 
  while  $kk \leq 1$  or  $g = 0$  do
    for  $i$  from 1 to  $Ir$  do
       $gee[i,j] := \frac{3 \cdot \text{alpha}}{i^2} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} (k \cdot \Delta T[k,j] + ((k+1) \cdot \Delta T[k+1,j]));$ 

       $\Delta\epsilon[i,j] := 3 \cdot \text{alpha} \cdot \Delta T[i,j] - gee[i,j];$ 
       $\Delta S[i,j] := 2 \cdot \text{mu} \cdot (\Delta\epsilon[i,j] - (1-g) \cdot \Lambda I[i,j] \cdot S[i,j-1]);$ 
       $\Delta\epsilon z[i,j] := \text{alpha} \cdot \Delta T[i,j];$ 
       $\Delta Sz[i,j] := 2 \cdot \text{mu} \cdot (\Delta\epsilon z[i,j] - \text{alpha} \cdot \Delta T[i,j] - (1-g) \cdot \Lambda I[i,j] \cdot Sz[i,j-1]);$ 
       $S[i,j] := S[i,j-1] + \Delta S[i,j];$ 
       $Sz[i,j] := Sz[i,j-1] + \Delta Sz[i,j];$ 
       $\epsilon z := S[i,j-1] + \Delta\epsilon z[i,j];$ 

       $\sigma r[i,j] := \sum_{k=i}^{Ir} \frac{S[k,j] \cdot \Delta r}{r[0] + k \cdot \Delta r};$ 
       $\sigma fi[i,j] := \sigma r[i,j] - S[i,j];$ 
       $\sigma z[i,j] := \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \sigma r[i,j] - S[i,j] + 3 \cdot Sz[i,j]);$ 

       $\sigma int[i,j] := \frac{1}{\sqrt{2}}$ 
         $\cdot ((\sigma r[i,j] - \sigma fi[i,j])^2 + (\sigma r[i,j] - \sigma z[i,j])^2 + (\sigma fi[i,j] - j)^2)^{1/2};$ 
       $\Lambda I[i,j] := \frac{1}{4 \cdot \sigma T^2} \cdot (S[i,j] \cdot \Delta\epsilon[i,j] + 3 \cdot Sz[i,j] \cdot (\Delta\epsilon z[i,j] - \text{alpha} \cdot \Delta T[i,j]));$ 
       $\sigma int I[i,j] := \text{evalf}(\sigma int[i,j]);$ 
       $kee[i,j] := \frac{1}{4} \cdot (S[i,j])^2 + 3 \cdot (Sz[i,j])^2;$ 
       $lee[i,j] := S[i,j] \cdot \Delta\epsilon[i,j] + 3 \cdot Sz[i,j] \cdot (\Delta\epsilon z[i,j] - \text{alpha} \cdot \Delta T[i,j]);$ 

      if  $kee[i,j] < \sigma T^2$  and  $lee[i,j] \leq 0$  then
         $g := 1;$ 
      else
         $g := 0;$ 
      end if;

      if  $kk = 2$  then
         $g := 0$ 
      else
         $g := 1;$ 
      end if;

    od;
     $kk := kk + 1$ 
  end do;
od;

```

>



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
 Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
 «Дальневосточный федеральный университет»

**Инженерная школа**

Кафедра механики и математического моделирования

**ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ НА ВКР**

на выпускную квалификационную работу студента  
 Тихоненко Антона Александровича  
 направление подготовки 15.04.03 «Прикладная механика» группа М3208  
 Руководитель ВКР Любимова О.Н.  
 На тему «Термоупругопластические напряжения в цилиндрах при обработке  
 деталей методом температурной обработки»  
 Дата защиты ВКР «5» июля 2018 г.

Актуальна разработка качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей для технологий тепловой обработки слоистых конструкционных материалов и сопряженных систем деталей, с учетом возникающих областей пластического деформирования и изменения их границ.

В своей магистерской диссертации Тихоненко Антон Александрович, решил численно ряд краевых задач теории несвязанной термоупругопластичности для цилиндрических тел, с учетом осевой симметрии и обобщенного плоского деформированного состояния.

При выполнении данной работы Тихоненко А.А. проявил себя как квалифицированный и ответственный исследователь. В процессе написания магистерской диссертации Антон продемонстрировал знания, по курсам «Численные методы механики», «Теория теплопроводности твердых тел», «Теория пластичности» и «Теория упругости» и умение самостоятельной работы при проведении аналитических исследований и обработке полученных данных.

Считаю, что поставленные в магистерской диссертации задачи выполнены, работа заслуживает оценки «отлично», а ее автор присвоения степени магистранта по специальности 15.04.03 «Прикладная механика».

Руководитель ВКР к.ф.-м.н., доцент

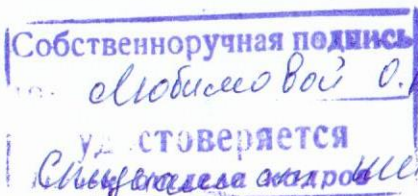
Уч. степень и звание

2018 г.

Любимова О.Н

И.О. Фамилия

« 02 » июля



Маслен Мясина Н.Г.



## РЕЦЕНЗИЯ

на выпускную квалификационную работу студента

Тихоненко Антона Александровича

направление подготовки 15.04.03 «Прикладная механика» группа МЗ208

Руководитель ВКР Любимова О.Н.

На тему

«Термоупругопластические напряжения в цилиндрах при обработке деталей методом температурной обработки»

Дата защиты ВКР «5» июля 2018 г.

### 1. Актуальность ВКР

Математическое моделирование изменения свойств материалов в процессе тепловой обработки с учетом изменяющегося характера деформирования, с учетом теплофизических и механических характеристик, остается актуальной задачей моделирования объектов и явлений в механике твердого тела.

### 2. Достоинства работы

Магистром численно решена задача о термоупругопластическом деформировании при неравномерном температурном нагреве или охлаждении в вале, цилиндре и сопряженной системе вал-цилиндр. Разработаны программы в пакете «Maple» позволяющие произвести все необходимые численные расчеты.

### 3. Недостатки и замечания

Можно было бы провести сравнение полученных результатов с аналогичными полученными в САЕ «ANSYS».

### 4. Целесообразность внедрения

После патентного исследования на уникальность разработанного комплекса программ можно запатентовать алгоритмы, полученные при выполнении работы.

### 4. Общий вывод

Считаю, что работа выполнена на хорошем квалификационном уровне и может быть оценена на «отлично», а Тихоненко А.А. заслуживает присуждения степени магистра по направлению «Прикладная механика».

Оценка **«отлично»**

Рецензент Пестов К.Н., директор ООО «Инфолайт», к.ф.-м.н.

(должность по основному месту работы, учёная степень и звание)

« 02 »  июля  2018 г.

ПТ   
подпись

Пестов К.Н.   
И.О. Фамилия