



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

Кафедра механики и математического моделирования

Рогожин Глеб Евгеньевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВОЙ СЛОИСТОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ
ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

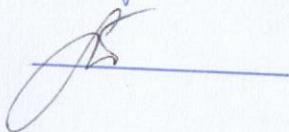
по направлению подготовки 15.04.03 Прикладная механика,
магистерская программа «Математическое и компьютерное моделирование
механических систем и процессов»

Владивосток
2018

Сведений, содержащих

гос. тайну, нет

Эксперт

 А.А. Бочарова

Автор работы  _____

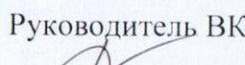
(подпись)

« 05 » июля 2018 г.

Консультант(ы)*

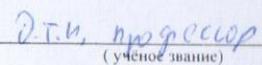
_____ (подпись) _____ (И.О. Фамилия)

« _____ » _____ 2018 г.

Руководитель ВКР  _____
(должность, ученое звание)

_____ (подпись) _____ А.А. Бочарова (И.О. Фамилия)

« 14 » июля 2018 г.

Назначен рецензент  _____
(ученое звание)

Друзо Иван Борисович (Фамилия Имя Отчество)

Защищена в ГЭК с оценкой Отлично

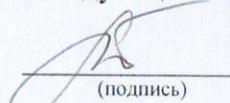
Секретарь ГЭК

 А.А. Ратников
(подпись)

« 05 » июля 2018 г.

«Допустить к защите»

Заведующий кафедрой, доцент

 А.А. Бочарова
(подпись)

« 14 » июля 2018 г.

УТВЕРЖДАЮ
Директор Инженерной школы

 / И. Беккер А.Т. /
Подпись Ф.И.О.

« 18 » июля 2018 г.

В материалах данной выпускной квалификационной работы не содержатся сведения, составляющие государственную тайну, и сведения, подлежащие экспортному контролю.

Уполномоченный по экспортному контролю

_____ / _____ / « _____ » _____ 201 г.
Подпись

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Теория устойчивости	6
1.1 Обзор литературы	6
1.2 Общая теория оболочек	6
1.3 Внутренняя энергия межатомных связей.....	11
1.4 Безмоментная теория.....	12
1.5 Пределы применимости	14
Глава 2 Решение уравнений устойчивости цилиндрической оболочки	18
2.1 Классическое решение.....	18
2.2 Оценка устойчивости цилиндрической оболочки	22
2.3 Вывод уравнений прикладной теории устойчивости цилиндрической ..	36
слоистой оболочки	36
2.4 Оценка устойчивости с помощью ANSYS	46
Заключение	49
Список литературы	50
Приложение 1. Вывод формулы критической нагрузки для цилиндрической оболочки	51
Приложение 2. Вывод формулы критической нагрузки для слоистой цилиндрической оболочки	60

Введение

Одной из развивающихся отраслей является исследование океанских глубин, что требует развития подводного судостроения. Разработка корпусов, отвечающих требованиям прочности и устойчивости, играет большую роль.

В условиях эксплуатации подводных аппаратов, к материалу для изготовления корпусов выдвигают особые требования. Минимальная масса обеспечивается качеством материала: малой плотностью, большой удельной прочностью и жесткостью, представляющими соответственно отношение предела текучести и модуля упругости к плотности материала. Эти свойства имеются у высокопрочных материалов, но для них характерна повышенная чувствительность к циклическим нагрузкам, нагреву, также они подвержены коррозионному растрескиванию под нагрузкой. В технологическом отношении материал должен быть пластичным и поддаваться штамповке, ковке, гибки, свариваться и склеиваться без потери прочности и нарушения геометрии.

При изготовлении корпусов подводных аппаратов используют различные материалы: сталь, алюминиевые и титановые сплавы, стекло, пластмассы и композиты на основе стекла.

Одним из наиболее новых и совершенных материалов является стеклометаллокомпозит. Существуют способы изготовления цилиндрической оболочки подводного аппарата, включающий формирование цилиндрической оболочки из стеклянного заполнителя, облицованного металлическим покрытием в виде внешнего, внутреннего и торцевых облицовок.

Стеклометаллокомпозиту цилиндрической оболочки присущи высокие прочностные и ударопрочные показатели, существенное значение имеют также полная изоляция стеклозаполнителя от воздействия внешней среды и его равномерно плотное формирование. Одной из главных задач является сохранение устойчивости исходной формы равновесия.

За последнее время исследовано множество причин, приводящих к потере устойчивости. Из-за отсутствия надежной теории устойчивости

оболочек при проектировании оболочечных конструкций до сих пор приходится пользоваться результатами экспериментальных исследований. Но в настоящее время, когда создаются новые высокопрочные материалы, потребность в теории устойчивости оболочек приобретает первостепенное значение.

Классическая теория устойчивости оболочек существенно отличается от экспериментальных исследований устойчивости реальных оболочек. Причина кроется в том, что в основу теории устойчивости оболочек положена механика сплошных сред, а реальные тела состоят из атомных частиц. Перед потерей устойчивости оболочек нарушается взаимодействие между атомными частицами, которое не учитывается механикой сплошных сред.

В процессе потери устойчивости оболочек происходит высвобождение внутренней энергии межатомных связей, удерживающих упругие деформации растяжения и сдвига, которые накапливаются при сжатии и кручении оболочки вследствие эффекта Пуассона и взаимного влияния линейных и угловых деформаций друг на друга. Высвобождаемая внутренняя энергия межатомных связей преобразуется в потенциальную энергию упругих деформаций растяжения и сдвига, приобретённых оболочкой вследствие эффекта Пуассона и взаимного влияния линейных и угловых деформаций друг на друга. Учет этой энергии приводит теорию устойчивости оболочек в полное соответствие с результатами экспериментальных исследований реальных оболочек.

Глава 1. Теория устойчивости

1.1 Обзор литературы

При написании данной работы были использованы научная и учебно-методическая литература, статьи в периодическом изданиях Российской Федерации.

Основным источником, раскрывающим теоретическую основу, послужила работа [10]. В работе рассмотрены виды потери устойчивости, предложена новая уточненная прикладная теория, позволяющая получить более точные результаты. Для понятия закономерностей деформации оболочек в процессе потери ими устойчивого положения равновесия были использованы труды Пикуля В.В.[11].

Международный опыт отражен в работе[5].

Отечественный опыт в расчетах показан в работах В.В. Пикуля, Диомидова М.Н., Дмитриева А.Н. Также [12]. И также было взято из Российского Морского Регистра «Правила классификации и постройки обитаемых подводных аппаратов, судовых обитаемых водолазных комплексов и пассажирских подводных аппаратов». По механике была рассмотрена работа [3].

Для решения проблем с устойчивостью и прочностью также была взята работа [2].

1.2 Общая теория оболочек

Потерять устойчивость и разрушиться оболочка может вследствие искривления поверхности и путем продольного изгибания. Первый случай наблюдается у коротких оболочек и оболочек средней длины. Путем

продольного изгиба теряют устойчивость длинные оболочки. В теории устойчивости оболочек рассматривается первый случай.

Уравнения теории оболочек учитывают деформации поперечного сдвига, которые вводятся в теорию с помощью гипотез Кирхгофа – Тимошенко. При устранении деформаций поперечного сдвига общие уравнения теории оболочек сводятся к уравнениям классической теории оболочек, которая строится на базе гипотез Кирхгофа – Лява. Гипотезы Кирхгофа – Лява позволяют получить наиболее простую расчетную модель материала оболочки, которая сводит трехмерные уравнения механики деформируемого твердого тела к самым простым двумерным уравнениям механики оболочек. Двухмерная теория слоистых оболочек построена с помощью метода физической дискретизации трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела.

Влияние деформирования на изменение температурного поля оболочки весьма незначительно, а его пренебрежение вносит существенные упрощения при решении задач термоупругости. Этот прием позволяет разделить общее решение на два самостоятельных решения. Сначала решается задача по определению температурного поля оболочки, а затем при найденном температурном поле определяется напряженно-деформированное состояние оболочки, учитывающее изменение температуры в процессе её деформирования.

При определении коэффициентов в уравнениях состояния тонкой оболочки допускается пренебрежение величинами z/R_α по сравнению с единицей.

Применение гипотез Кирхгофа – Тимошенко вносит изменения в уравнения классической теории оболочек и приводит теорию оболочек в полное соответствие с естественными краевыми условиями [10].

Геометрически нелинейные уравнения тонких оболочек, учитывающие деформации поперечного сдвига и температуру, имеют следующий вид:

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{21}) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{22} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{21}) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{R_1} (\mathcal{G}_1 N_{11} + \mathcal{G}_2 N_{12}) = -q_1 - P_1 - \frac{1}{R_1} (m_1 + m_{1F}); \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{22}) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{11} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{R_2} (\mathcal{G}_2 N_{22} + \mathcal{G}_1 N_{21}) = -q_2 - P_2 - \frac{1}{R_2} (m_2 + m_{2F}); \\
& \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{21}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} \right] \right\} + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [A_2 (\mathcal{G}_1 N_{11} + \mathcal{G}_2 N_{12})] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [A_1 (\mathcal{G}_2 N_{22} + \mathcal{G}_1 N_{21})] \right\} = q_3 + P_3 + \\
& + \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [A_2 (m_1 + m_{1F})] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [A_1 (m_2 + m_{2F})] \right\}; \\
& \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{21}) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] - Q_1 = -m_1 - m_{1F};
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} \right] - Q_2 = -m_2 - m_{2F}, \quad (1.1)$$

- уравнения геометрии:

-- уравнения относительных перемещений оболочки

$$u_1 = u_{10} + z\psi_1, \quad (1,2); \quad u_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1.2)$$

-- уравнения углов поворота радиальных элементов оболочки

$$\psi_1 = \mathcal{G}_1 + \frac{1}{A_1} \gamma_1; \quad \psi_2 = \mathcal{G}_2 + \frac{1}{A_2} \gamma_2, \quad (1.3)$$

-- уравнения углов поворота срединной поверхности:

$$\mathcal{G}_1 = \frac{u_{10}}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}; \quad \mathcal{G}_2 = \frac{u_{20}}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \quad (1.4)$$

-- уравнения деформации срединной поверхности:

$$\varepsilon_{11}^o = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \mathcal{G}_1^2; \quad \varepsilon_{22}^o = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \mathcal{G}_2^2; \quad \varepsilon_{12}^o = \omega_1 + \frac{1}{2} \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2; \quad \varepsilon_{21}^o = \omega_2 + \frac{1}{2} \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{10}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{20} + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{10} + \frac{w}{R_2}; \quad \omega = \omega_1 + \omega_2;$$

$$\omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_{20}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_{10}; \quad \omega_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_{20}, \quad (1.5)$$

-- уравнения изменения кривизны и кручения срединной поверхности:

$$\chi_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_{10}}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{u_{20}}{R_2} \right);$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{u_{20}}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_{10}}{R_1} \right);$$

$$\tau = -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) +$$

$$+ \frac{I}{R_1} \left(\frac{\partial u_{10}}{A_2 \partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{A_1 A_2 \partial \alpha_2} u_{10} \right) + \frac{I}{R_2} \left(\frac{\partial u_{20}}{A_1 \partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{A_1 A_2 \partial \alpha_1} u_{20} \right), \quad (1.6)$$

– уравнения изгиба и кручения оболочки:

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \chi_1 + \frac{I}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\gamma_1}{A_1} \right) + \frac{I}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\gamma_2}{A_2}; \\ \chi_{22} &= \chi_2 + \frac{I}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\gamma_2}{A_2} \right) + \frac{I}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\gamma_1}{A_1}; \\ 2\chi &= 2\tau + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\gamma_2}{A_2^2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\gamma_1}{A_1^2} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

- уравнения состояния:

- изотропные оболочки

$$\begin{aligned} N_{11} &= B_{11} [(\varepsilon_1 + 0,5\vartheta_1^2) + \nu(\varepsilon_2 + 0,5\vartheta_2^2)] + K_{11} (\chi_{11} + \nu \chi_{22}) - N_{11}^T; \\ N_{22} &= B_{22} [(\varepsilon_2 + 0,5\vartheta_2^2) + \nu(\varepsilon_1 + 0,5\vartheta_1^2)] + K_{22} (\chi_{22} + \nu \chi_{11}) - N_{22}^T; \\ N_{12} &= N_{21} = B_{12} (\omega + \vartheta_1 \vartheta_2) + 2K_{12} \chi; \\ M_{11} &= D_{11} (\chi_{11} + \nu \chi_{22}) + K_{11} [(\varepsilon_1 + 0,5\vartheta_1^2) + \nu(\varepsilon_2 + 0,5\vartheta_2^2)] - M_{11}^T; \\ M_{22} &= D_{22} (\chi_{22} + \nu \chi_{11}) + K_{22} [(\varepsilon_2 + 0,5\vartheta_2^2) + \nu(\varepsilon_1 + 0,5\vartheta_1^2)] - M_{22}^T; \\ M_{12} &= M_{21} = 2D_{12} \chi + K_{12} (\omega + \vartheta_1 \vartheta_2); \\ Q_1 &= B_{13} \frac{\gamma_1}{A_1}; \quad Q_2 = B_{23} \frac{\gamma_2}{A_2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В уравнения теории оболочек вместо напряжений вводятся внутренние силы и моменты, которые выражаются через напряжения.

Краевые условия, определяющие из всего многообразия решений дифференциальных уравнений теории оболочек решение конкретной задачи, находятся из условий взаимодействия оболочки с окружающей средой.

Для обеспечения равновесия оболочки с окружающей средой, при использовании гипотез Кирхгофа-Тимошенко, в каждой точке срединной поверхности должно быть задано пять краевых условий.

1.3 Внутренняя энергия межатомных связей

При потере устойчивости оболочек происходит высвобождение внутренней энергии межатомных связей, которую оболочка накопила вследствие эффекта Пуассона и взаимного влияния угловых и линейных деформаций при воздействии на неё внешних сил и тепла. Внутренняя энергия оболочки в целом U состоит из потенциальной энергии U_n , приобретенной оболочкой вследствие силового внешнего воздействия, и тепловой энергии U_T , накопленной оболочкой при нагреве.

Внутренняя энергия определяет работу по преодолению сопротивления внутренних сил, совершаемую при деформации оболочечного тела в результате воздействия внешних сил и тепла. При динамическом высвобождении внутренней энергии появляется кинетическая энергия, которая является мерой механического движения оболочки и измеряется величиной работы, которую может совершить оболочка при торможении ее движения до полной остановки.

Внутренняя энергия оболочки численно равна работе внутренних сил:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad (i, j=1,2,3), \quad (1.9)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций оболочки; dV – элементарный объем оболочки,

$$dV = A_1 A_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Внутреннюю энергию можно выразить через внутренние силы:

$$U = \frac{1}{2} \int_{A_\alpha} \left[N_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^o + M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + Q_\alpha \frac{\gamma_\alpha}{A_\eta} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (\alpha, \beta = 1,2; \eta = \alpha), \quad (1.10)$$

где A_0 – площадь срединной поверхности оболочки; ε_{ij}^o – деформации срединной поверхности (1.5); χ_{ij} – параметры изгиба и кручения оболочки (1.7); γ_α – деформации поперечного сдвига.

Кинетическая энергия в нелинейной теории оболочек выражается следующей формулой:

$$K = \frac{\rho h}{2} \int_{A_0} \left[\varepsilon_{10}^2 + \varepsilon_{20}^2 + \varepsilon^2 + \frac{h^2}{12} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.11)$$

Погрешность определения внутренней и кинетической энергии в нелинейной теории оболочек формулами (1.10) и (1.11) находится в пределах точности гипотез Кирхгофа–Тимошенко.

1.4 Безмоментная теория

При определенных условия закрепления оболочка способна воспринимать плавно изменяющуюся нагрузку и не очень резкое изменение температуры без изгиба срединной поверхности. В этом случае ее внутренние усилия сводятся к тангенциальным силам, линии, действия которых совпадают с касательными к координатным линиям срединной поверхности оболочки. Изгибающие и крутящие моменты становятся пренебрежимо малы, либо полностью исчезают. Напряжения почти равномерно распределяются по толщине оболочки. Обеспечивается наиболее равномерная загрузка материала и самое эффективное использование оболочечных конструкций. Решение уравнений безмоментной теории намного проще решения уравнений общей теории оболочек. Часто решения, полученные на основе безмоментной теории оболочек, оказываются близкими к точным решениям.

Во многих случаях решения уравнений безмоментной теории удастся включить в состав приближенного решения общих уравнений, расчленив

последние на уравнения безмоментного напряженного состояния и краевой эффект [10].

Оболочка находится в условиях безмоментного напряженного состояния в случае, когда все ее изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы, деформации поперечного сдвига и углы поворота радиальных элементов и элементов срединной поверхности равны нулю [10]:

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{22} = M_{12} = M_{21} = Q_1 = Q_2 = 0, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = \psi_1 = \psi_2 = \chi_1 = \chi_2 = \tau = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

При соблюдении равенств (1.11) из нелинейных уравнений статики исчезают нелинейные слагаемые, и нелинейные уравнения механики оболочек приводятся к линейным безмоментным уравнениям, которые ничем не отличаются от безмоментных уравнений, получаемых из линейных уравнений механики оболочек. В результате находится полная система уравнений безмоментной теории оболочек:

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{12}) + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{22} \right] &= -q_1 - P_1; \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{22}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{11} \right] &= -q_2 - P_2; \\ \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} &= q_3 + P_3, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где поверхностные q_i и объемные P_i силы определяются формулами:

$$\begin{aligned} q_i &= \left(1 + \frac{h}{2R_1} \right) \left(1 + \frac{h}{2R_2} \right) q_{3i}^+ + \left(1 - \frac{h}{2R_1} \right) \left(1 - \frac{h}{2R_2} \right) q_{3i}^-; \\ P_i &= \int_h \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) F_i dz; \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.5 Пределы применимости

Уравнения безмоментной теории оболочек имеют общий четвёртый порядок по координатам срединной поверхности: уравнения равновесия – второй и уравнения геометрии – второй. При решении уравнений равновесия появляются две произвольные функции интегрирования, а при решении уравнений геометрии – ещё две. Произвольные функции интегрирования находятся из краевых условий, из которых обязательно два должны быть геометрическими. Необходимость обязательного задания двух геометрических краевых условий имеет глубокий физический смысл. Дело в том, что в решение уравнений геометрии наряду с его частным решением входит и решение однородной системы:

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \omega = 0,$$

которое определяет перемещения чистого изгибания оболочки. Если этого не сделать, то оболочка с незакреплёнными краями будет вести себя как подвижный механизм.

Внутренние силы в безмоментной теории оболочек определяются из уравнений равновесия (1.12) вне зависимости от уравнений неразрывности деформаций срединной поверхности. Поэтому последние оказываются в большей или меньшей мере нарушенными. Наибольшие нарушения имеют место в районах быстрого изменения (тем более скачка) геометрических параметров оболочки и нагрузки, поэтому одним из условий применимости безмоментной теории является плавность этих величин.

Расчетная практика и теоретический анализ показали, что значительные изгибающие моменты появляются в районах изменения знака гауссовой кривизны срединной поверхности оболочки. Примером такой оболочки может служить тор. На очень пологих участках оболочки (близких к пластине) радиальная нагрузка вызывает появление больших изгибающих моментов.

При использовании теории безмоментных оболочек особо следует выделять края, совпадающие с асимптотическими линиями срединной поверхности,

вдоль которых нормальная кривизна поверхности $1/R$ равна нулю. Примером асимптотической линии может служить образующая на цилиндрической поверхности.

Для того чтобы избежать чистого изгиба оболочки в районе асимптотического края, его подкрепляют бортовыми элементами (балками, шпангоутами и т.п.), подбирая их размеры так, чтобы появилась возможность удовлетворения краевым условиям безмоментной задачи.

Критерии безмоментности напряженного состояния оболочки могут быть сформулированы в виде пяти основных условий [7, 10]:

1. Края оболочки должны быть свободны от поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов, а их повороты и радиальные перемещения не должны быть стеснены.
2. Асимптотические края оболочки должны быть подкреплены надлежащими бортовыми подкреплениями, обеспечивающими необходимые по безмоментному решению перемещения и загрузку краёв оболочки.
3. Срединная поверхность, краевой контур и толщина оболочки должны быть плавными функциями. Следует также избегать применения оболочек со срединной поверхностью, меняющей знак гауссовой кривизны, либо содержащей очень пологие (плоские) участки.
4. Поверхностная и краевая нагрузки должны быть плавными функциями.
5. Перемещения чистого изгиба должны быть устранены путем надлежащего закрепления краёв в тангенциальных направлениях.

При безмоментном напряженном состоянии материал оболочки загружается наиболее равномерно по всей её толщине, что позволяет создавать самые легкие оболочечные конструкции, поэтому сформулированные критерии безмоментности можно рассматривать в качестве рекомендаций по созданию эффективных конструктивных решений. Безмоментная работа оболочки является тем идеалом, к которому всегда следует стремиться при создании оболочечных конструкций.

Путём выбора геометрических параметров оболочки и бортовых подкреплений в большинстве случаев удаётся добиться работы основной части оболочки в безмоментном напряженном состоянии, локализовав моментное напряженное состояние в узкой зоне, примыкающей к краю оболочки. Моментное напряженное состояние у края оболочки называют краевым эффектом. Оболочечную конструкцию следует считать удачной, если напряжения краевого эффекта не превосходят безмоментных напряжений.

1.6 Теории устойчивого положения равновесия

Существует несколько теорий для оценки устойчивого положения равновесия, с их помощью упрощается решения уравнений, каждая из них имеет свои особенности.

Уравнения устойчивости пологих оболочек. Под пологими оболочками понимаются оболочки, срединная поверхность которых с достаточной степенью точности может быть наделена евклидовой метрикой. Вследствие этого допущения считаются постоянными коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки (A_1, A_2) и радиусы главной кривизны (R_1, R_2) . Слагаемые, входящие в уравнения изгибания и кручения срединной поверхности оболочки, которые содержат тангенциальные перемещения, в виду их малости принимаются равными нулю.

Уравнения технической теории устойчивости оболочек. Более утонченная теория пологих оболочек. Принимается в безмоментном состоянии изменяемость напряженного состояния оболочки очень слабая: отсутствуют деформации поперечного сдвига, углы поворота срединной поверхности оболочки равны нулю, вследствие чего и изменяемость кривизны и кручения срединной поверхности оболочки (χ_1, χ_2, τ) оказывается равной нулю.

Уравнения устойчивости прикладной теории оболочек. Построим при

следующих, дополнительных к общей теории допущениях:

- в момент потери устойчивости оболочка находится в безмоментном напряженном состоянии;

- все коэффициенты упругости принимаются осредненными по толщине оболочки.

В силу принятых допущений в начальном докритическом состоянии в оболочке существуют только тангенциальные внутренние силы, порождаемые совместным действием на оболочку внешней нагрузки, температуры и сил упругости, через которые высвобождаемая внутренняя энергия совершает работу по деформированию оболочки.

При этом следует принять равным нулю следующие величины:

$$\mathcal{G}_1^0 = \mathcal{G}_2^0 = \gamma_1 = \gamma_2 = M_{11}^0 = M_{12}^0 = M_{21}^0 = M_{22}^0 = Q_1 = Q_2 = 0.$$

Теория устойчивости слоистых оболочек. Использован прежний метод построения с помощью критерия Эйлера. Уравнения каждого k -го слоя слоистой оболочки по форме полностью совпадают с нелинейными уравнениями однородных оболочек. Более того, уравнения устойчивости каждого слоя слоистой оболочки по форме совпадут с уравнениями устойчивости однородных оболочек.

Глава 2 Решение уравнений устойчивости цилиндрической оболочки

2.1 Классическое решение

Исследование вопроса устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки наиболее целесообразно производить энергетическим методом, воспользовавшись для этого принципом возможных перемещений (метод Рита).

Основное уравнение этого метода имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.1)$$

где \mathcal{E} – полная энергия деформированного тела; q_i – некоторые обобщенные перемещения, при соответствующем подборе которых обеспечивается минимум полной энергии.

Полная энергия (суммарная силовая функция) $\mathcal{E} = U - V$ состоит из внешних сил - U и потенциальной энергии внутренних сил упругости – V .

В свою очередь работа внешних сил складывается из работы сил, действующих на поверхности оболочки (они связаны с усилиями T_2) – U_1 и работы сил, действующих по торцам оболочки U_2 , связанной с усилиями T_1 .

Потенциальная энергия внутренних сил упругости складывается из потенциальной энергии изгиба оболочки – V_1 , потенциальной энергии сил деформация срединной поверхности – V_2 , и потенциальной энергии ребер жесткости – V_3 .

Работу и энергию выражают через параметры оболочки, материал оболочки и деформации. Деформации, в свою очередь, выражают через перемещения, которые записывают в обобщенных цилиндрических координатах как функция некоторых обобщенных перемещений A, B, C .

Примем начало координат на одной из концевых переборок, тогда функции, выражающие искомые перемещения оболочки и удовлетворяющие указанным выше условиям, будут иметь в вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sin n\theta \cos \frac{m\pi x}{L} \\ v &= B \cos n\theta \sin \frac{m\pi x}{L} \\ w &= C \sin n\theta \sin \frac{m\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где L – расстояние между переборками; A, B, C - неизвестные постоянные; n – число волн, образующихся при потере устойчивости оболочки, по ее окружности; m – число полуволн, образующихся по длине оболочки.

Используя выражение (2.1) метода Ритца для определения неизвестных переменных A, B, C и предполагая, что шпангоуты работают только на изгиб, те не препятствуют обжатию оболочки, после соответствующих упрощений получим следующее уравнение :

$$T_1 m^2 \alpha_1^2 + T_2 (n^2 - 1) = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{t^2}{12r^2} (m^2 \alpha_1^2 + n^2 - 1)^2 + \frac{(1-\mu^2)m^4 \alpha_1^4}{(m^2 \alpha_1^2 + n^2)^2} + \frac{J(1-\mu^2)}{tlr^2} (n^2 - 1) \right], (2.3)$$

где $\alpha_1 = \frac{\pi r}{L}$; L – расстояние между переборками; l – шпация; J – момент сопряжения поперечного сечения шпангоута с присоединенным пояском; n – число волн потери устойчивости по окружности оболочки; m - число волн потери устойчивости вдоль оболочки.

Полученное уравнение даст возможность определить комбинацию провальных усилий T_1 и усилий в меридиональных сечениях T_2 , которые будут вызывать потерю устойчивости оболочки

При действии всестороннего равномерного наружного давления на круговую цилиндрическую оболочку сжимающие усилия T_1 и T_2 выражаются через величину давления равенствами:

$$T_1 = -0,5pr; \quad T_2 = -pr. \quad (2.4)$$

Заменяя в выражении (2.3) T_1 и T_2 их значениями в формуле (2.4), получили уравнение, дающее возможность определить наименьшую величину давления, при котором цилиндрическая оболочка, подкрепленная ребрами, потеряет устойчивость по первой форме. Давление, вызывающее потерю устойчивости оболочки, будем называть эйлеровой нагрузкой. Его значение

равно

$$P_e = \frac{Et}{r} \frac{1}{(n^2-1)+0,5m^2\alpha_1^2} \left[\frac{t^2}{12(1-\mu^2)r^2} (m^2\alpha_1^2 + n^2 - 1)^2 + \frac{m^4\alpha_1^4}{(m^2\alpha_1^2+n^2)^2} + \frac{J}{tlr^2} (n^2 - 1)^2 \right], \quad (2.5)$$

где J – момент инерции поперечного сечения шпангоута с присоединении пояском; n – число волн потери устойчивости по окружности оболочки; m – полуволн по длине оболочки.

Для определения P_e требуется установление чисел m и n , определяющих количество волн, образующихся при потере устойчивости оболочки по ее длине и окружности и соответствующих минимальному значению эйлерова давления. Обычно при встречающихся на практике соотношениях размеров наименьшее значение P_e получается при $m = 1$ полуволна, при этом выражение (2.5) принимает вид:

$$P_e = \frac{1}{1+\frac{\alpha_1^2}{2(n^2-1)}} \left[\frac{Et^2}{12(1-\mu^2)r^3} \frac{(\alpha_1^2+n^2-1)^2}{n^2-1} + \frac{Et}{r} \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1^2+n^2)(n^2-1)} + \frac{J}{tlr^2} (n^2 - 1)^2 \right]. \quad (2.6)$$

Число волн, образующихся при потере устойчивости по окружности оболочки n , соответствующее минимальному эйлеровому давлению, может быть определено при помощи уравнения

$$\frac{\partial P_e}{\partial n} = 0$$

или методом последовательных приближений.

Принимая во внимание сложность зависимости P_e от n , можно определить число n приближенно, введя следующие упрощения.

Так как обычно для оболочек, представляющих для нас интерес, α_1 имеет величину порядка единицы ($\alpha_1 \leq 1$), а $n > 3$, можно пренебречь величиной α_1^2 по сравнению с n^2 , а также единицей по сравнению n^2 .

При этом знаменатель множителя *перед* квадратной скобкой обратится в единицу и для эйлерова давления будем иметь

$$P_e = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)r^3} n^2 + \frac{Et}{r} \frac{\alpha_1^4}{n^6} + \frac{EJ}{r^3l} n, \quad (2.7)$$

откуда

$$\frac{\partial P_e}{\partial n} = 2Kn - \frac{6M}{n^7} = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{EJ}{r^3 l} + \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)r^3} \\ M &= \frac{Et}{r} \alpha_1^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

В большинстве случаев вторым членом выражения для K можно пренебречь по сравнению с первым.

Из уравнения (2.8) следует:

$$n = \sqrt[8]{\frac{3M}{K}}. \quad (2.10)$$

Определив из выражения (2.10) число волн, образующихся при потере устойчивости оболочки по ее окружности, следует, подставив его в выражение (2.6), найти критическое значение.

Кроме найденного эйлерова давления для первой формы потери устойчивости необходимо определить эйлерово давление для второй формы потери устойчивости, когда шпангоуты сохраняют свою правильную форму, т.е. оболочка теряет устойчивость между шпангоутами.

Уравнение устойчивости оболочки в этом случае может быть получено из общего уравнения устойчивости, полагая, что шпангоуты играют роль концевых жестких стенок, т.е. принимать $L = l$, где l - расстояние между шпангоутами:

$$\alpha_1 = \alpha = \frac{\pi r}{l}.$$

Кроме того, так как оболочка между шпангоутами ничем не подкреплена, т.е. $J = 0$, и для существующих в практике оболочек n достаточно велико ($n > 10$), то можно пренебречь единицей по сравнению с n^2 , после чего при условии $m = 1$, дающем наименьшее значение эйлеровой нагрузки, получим вторую формулу Мизеса:

$$P_e = \frac{Et}{r} \frac{1}{(n^2 + 0,5\alpha_1^2)} \left[\frac{t^2}{12(1+\mu^2)r^2} (\alpha_1^2 + n^2)^2 + \frac{\alpha_1^4}{(\alpha_1^2 + n^2)^2} \right]; \quad (2.11)$$

$$P_e = \frac{Et}{r} \left[\frac{n^2}{12(1 + \mu^2)r^2} \frac{t^2}{r^2} + \frac{\alpha^4}{n^6} \right].$$

Из формулы Мизеса, пренебрегая в ней величиной α^2 по сравнению с n^2 (что не всегда корректно), можно получить формулу Саутвелла, выведенную для случая действия только поперечной нагрузки при $T_1 = 0$.

Вышеприведенные формулы неудобны тем, что число волн потери устойчивости необходимо определять последовательными приближениями.

Рядом авторов (Саутвеллом, Папковичем, Винденбургом) были сделаны обработки уже известных формул таким образом, что в полученные ими зависимости n не входит.

Приведем эти формулы для оболочек из стали, кгс/см²:

$$\text{формула Саутвелла: } P_e = 1,91 \left(\frac{100t}{r} \right)^2 \left(\frac{100tr}{l^2} \right)^{0,58}, \quad (2.12)$$

$$\text{формула Папковича: } P_e = 1,83 \left(\frac{100t}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{100t}{l}, \quad (2.13)$$

формула Винденбурга :

$$P_e = \frac{1,83 \left(\frac{100t}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{100t}{l} \right)}{1 - \frac{0,62\sqrt{rt}}{l}}. \quad (2.14)$$

При третьей форме потери устойчивости происходит симметричная деформация оболочки относительно ее оси, т.е. $n = 0, L = l$.

Тогда из уравнения Мизеса получим:

$$P_e = \frac{Et}{r} \left[\frac{t^2}{12(1 + \mu^2)r^2} \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right] \quad (2.15)$$

Примечание. Размерность P_e определяется размерностью E – модуль уругости.

2.2 Оценка устойчивости цилиндрической оболочки

Просчитаем прикладную теорию для круговой цилиндрической оболочки.

Для этого в общие уравнения устойчивости вводятся поправки:

$$R_1 = \infty, R_2 = R; \quad A_1 = I, A_2 = R; \quad A_1\alpha_1 = x, A_2\alpha_2 = R\varphi = y \quad (\text{Рис. 1})$$

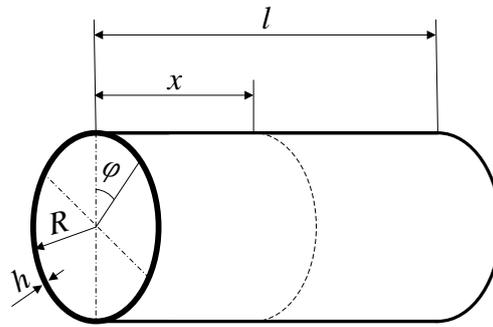


Рис. 1. Круговая цилиндрическая оболочка

При определении уравнений изменения кривизны и кручения срединной поверхности оболочек считается возможным применение следующего приближенного равенства:

$$u_{20,2} \cong -k_2 w. \quad (2.16)$$

Приближенное равенство (2.16) получило широкое распространение в общей теории устойчивости цилиндрических оболочек [1]. Оно находится на основании пренебрежимо малого влияния окружных деформаций на изменения кривизны и кручения срединной поверхности цилиндрических оболочек.

Исходя из поправок уравнения равновесия и геометрические характеристики примут вид:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} = 0; \quad N_{22,2} + N_{12,1} + k_2(M_{22,2} + M_{12,1}) &= k_2(N_{22}^0 \mathcal{G}_2 + N_{12}^0 \mathcal{G}_1); \\ M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - k_2 N_{22} &= (N_{11}^0 \mathcal{G}_1 + N_{12}^0 \mathcal{G}_2)_{,1} + (N_{22}^0 \mathcal{G}_2 + N_{12}^0 \mathcal{G}_1)_{,2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

- - уравнения геометрии срединной поверхности

$$\varepsilon_1 = u_{10,1}; \quad \varepsilon_2 = u_{20,2} + k_2 w; \quad \omega = u_{20,1} + u_{10,2}, \quad (2.18)$$

- - уравнения изгиба и кручения срединной поверхности оболочки

$$\chi_1 = -w_{,11}; \quad \chi_2 = -(w_{,22} + k_2^2 w); \quad \tau = -w_{,12} + k_2 u_{20,1}, \quad (2.19)$$

- - уравнения углов поворота элементов срединной поверхности

$$\mathcal{G}_1 = -w_{,1}; \quad \mathcal{G}_2 = k_2 u_{20} - w_{,2}, \quad (2.20)$$

Уравнения состояния:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega; \\
M_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu \chi_2); \quad M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu \chi_1); \\
M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \tau,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

В уравнениях (2.17) – (2.20) используется индексное обозначение производных, в котором после запятой единицей обозначена производная по координате $x = A_1 \alpha_1$, а двойкой – производная по координате $y = R \varphi$.

Уравнения (2.17) – (2.20) образуют полную систему уравнений статической устойчивости круговой цилиндрической оболочки, которая состоит из 17 уравнений. Из них 11 дифференциальных и 6 алгебраических. Семнадцать уравнений содержат семнадцать неизвестных двумерных функций: 6 внутренних сил и моментов $(N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12})$, 3 компоненты деформаций срединной поверхности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega)$, 3 компоненты перемещений срединной поверхности (u_{10}, u_{20}, w) , 3 параметра изгиба и кручения срединной поверхности (χ_1, χ_2, τ) , 2 угла поворота срединной поверхности $(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Семнадцать уравнений (2.17) – (2.21) можно свести к трем уравнениям, разрешаемым относительно трех перемещений срединной поверхности оболочки. Применительно к изотропной цилиндрической оболочке такие уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
u_{10,11} + \frac{1-\nu}{2} u_{10,22} + \frac{1+\nu}{2} u_{20,12} + \nu k_2 w_{,1} &= 0; \\
u_{20,22} + \frac{1-\nu}{2} u_{20,11} + \frac{1+\nu}{2} u_{10,12} + k_2 w_{,2} - \frac{k_2 h^2}{12} [w_{,222} + w_{,112} - k_2^2 w_{,2} - \\
-(1-\nu) k_2 u_{20,11}] &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} k_2 [N_{22}^0 (w_{,2} - k_2 u_{20}) + N_{12}^0 w_{,1}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + k_2^2 (w_{,22} + \nu w_{,11}) - 2(1-\nu)k_2 u_{20,112} + \frac{12k_2}{h^2} (k_2 w + \nu u_{10,1} + u_{20,2}) = \\ = 12 \frac{1-\nu^2}{E h^3} [N_{11}^0 w_{,11} + N_{12}^0 (2w_{,2} - k_2 u_{20,1}) + N_{22}^0 (w_{,22} - k_2 u_{20,2})], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где ∇^2 - двумерный оператор Лапласа.

Применительно к изотропным оболочкам при умеренном изменении температуры уравнения прикладной теории оболочек являются практически точными. Поэтому прикладная теория устойчивости оболочек может служить в качестве эталона точности для приближенных теорий устойчивости оболочек.

Для решения уравнений воспользуемся методом Бубнова-Галеркина при задании функций перемещений срединной поверхности в виде рядов Фурье в области $s: x \in [0, l]$, $y \in [0, 2\pi R]$ по системе следующих ортогональных функций:

$$\begin{aligned} w = \sum_{m,n} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - n y}{R}; \quad ; \\ u_{10} = \sum_{m,n} u_{1mn} \sin \frac{\lambda x - n y}{R}; \quad u_{20} = - \sum_{m,n} u_{2mn} \sin \frac{\lambda x - n y}{R}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где w_{mn}, \dots, u_{2mn} - постоянные коэффициенты разложения искомым функций в ряды Фурье; l - длина цилиндрической оболочки; m - число полуволн вдоль образующей срединной поверхности оболочки; n - число полных волн по окружности срединной поверхности оболочки; λ - параметр продольного волнообразования цилиндрической оболочки

$$\lambda = \frac{\pi m R}{l}. \quad (2.24)$$

Решение задачи устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки путем разложения функций перемещений срединной поверхности и деформаций поперечного сдвига в ряды по системе ортогональных функций (2.23).

Подстановка после разложений (2.23) в уравнения (2.22) позволяет получить следующую систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) u_{1mn} + \frac{1+\nu}{2} \lambda n u_{2mn} - \nu \lambda w_{mn} = 0; \\
& \frac{1+\nu}{2} \lambda n u_{1mn} + \left[\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{h^2}{12R^2} (1-\nu) \lambda^2 + (1-\nu^2) \frac{N_{22}^0}{Eh} \right] u_{2mn} - \\
& - \left[1 + \frac{h^2}{12R^2} (\lambda^2 + n^2 + 1) - (1-\nu^2) \frac{N_{22}^0}{Eh} \right] n w_{mn} = 0; \\
& \frac{12R^2}{h^2} \nu \lambda u_{1mn} + \left\{ 2(1-\nu) \lambda^2 n + \frac{12R^2}{h^2} \left[1 + (1-\nu^2) \frac{N_{22}^0}{Eh} \right] n \right\} u_{2mn} - \\
& - \left[(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2) + \frac{12R^2}{h^2} + \right. \\
& \left. + 12 \frac{1-\nu^2}{Eh^3} \left(N_{11}^0 \lambda^2 - 2N_{12}^0 \lambda n + N_{22}^0 n^2 \right) R^2 \right] w_{mn} = 0. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Величина $\frac{N_{22}^0}{Eh}$ имеет порядок величины деформации, поэтому по сравнению с единицей ею можно пренебречь без ущерба для точности уравнений устойчивости оболочек, поскольку в основу уравнений устойчивости положены уравнения механики деформируемого твердого тела, в которых произведено устранение величин такого же порядка малости.

Устранив из уравнений (2.25) пренебрежимо малые величины, приведем их к виду:

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) u_{1mn} + \frac{1+\nu}{2} \lambda n u_{2mn} - \nu \lambda w_{mn} = 0; \\
& \frac{1+\nu}{2} \lambda n u_{1mn} + \left(\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 \right) u_{2mn} - n w_{mn} = 0; \\
& \nu \lambda u_{1mn} + \left(\frac{1-\nu}{6} \frac{h^2}{R^2} \lambda^2 + 1 \right) n u_{2mn} - \left\{ \frac{h^2}{12R^2} [(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2)] + \right.
\end{aligned}$$

$$+ I + \frac{1-\nu^2}{Eh} (N_{11}^0 \lambda^2 + N_{22}^0 n^2) \left. \right\} w_{mn} = 0. \quad (2.26)$$

Приравняв определитель системы алгебраических уравнений (2.26) нулю, получим следующую формулу для определения критической нагрузки, действующей на изотропную цилиндрическую оболочку:

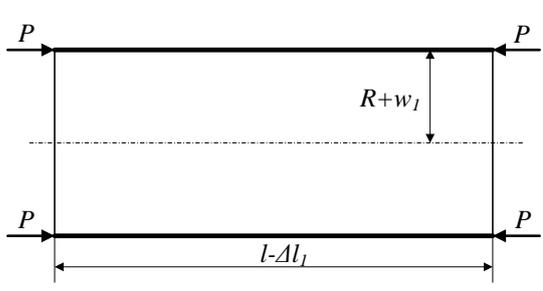
$$(N_{11}^0 \lambda^2 + N_{22}^0 n^2) + \lambda^2 E h \left\{ \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \left[\frac{(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2)}{\lambda^2} + (1-\nu)n^2 \frac{(2+\nu)\lambda^2 + n^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right] \right\} = 0. \quad (2.27)$$

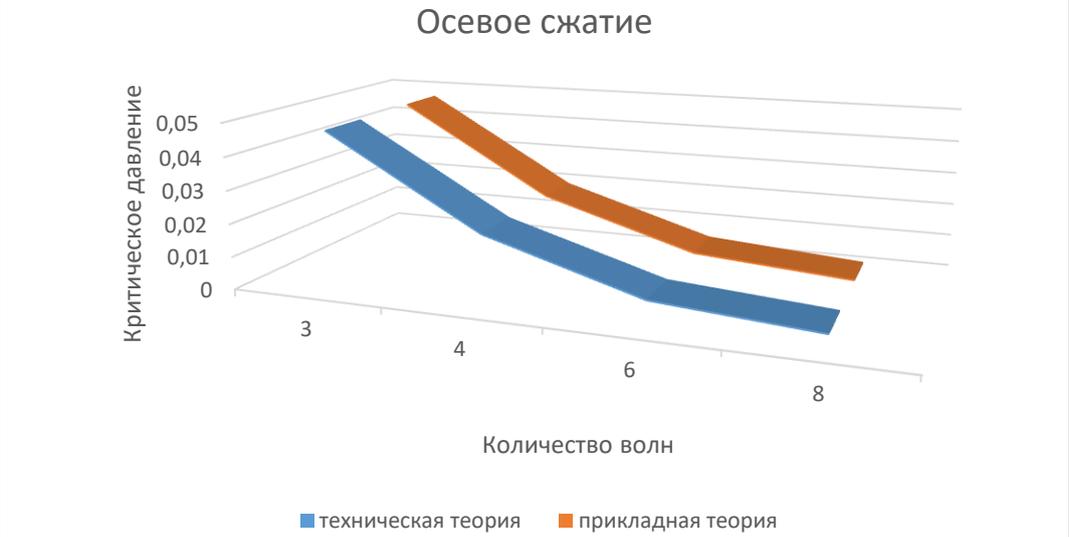
Формула (2.27) определяет критическое воздействие, под которым происходит потеря устойчивости.

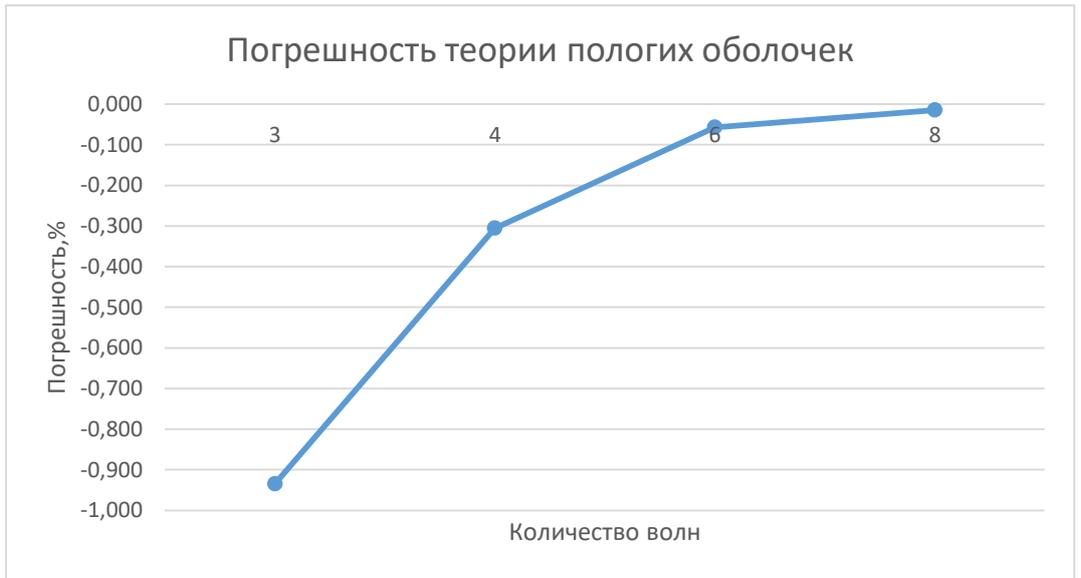
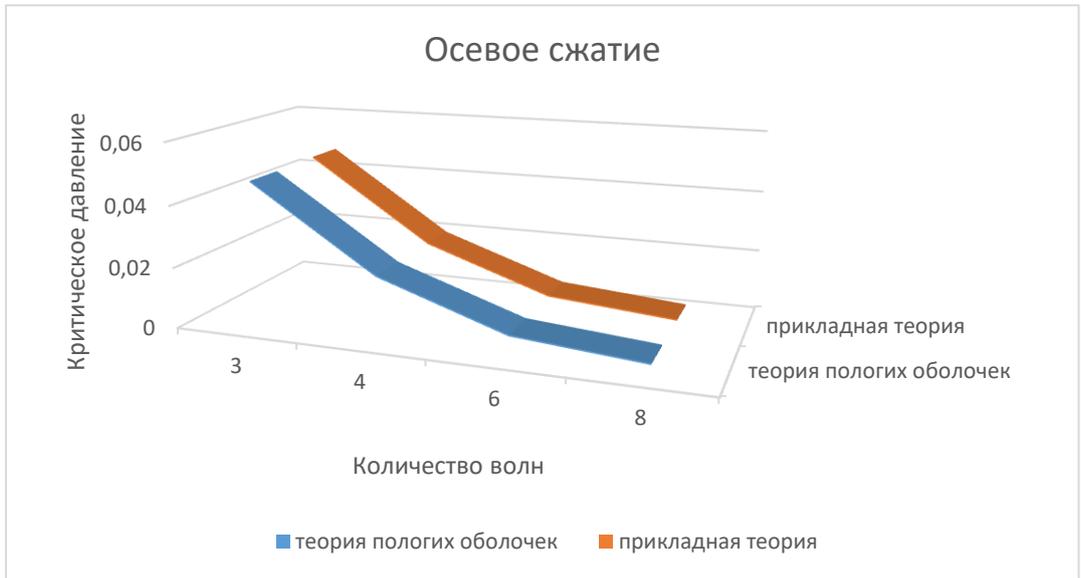
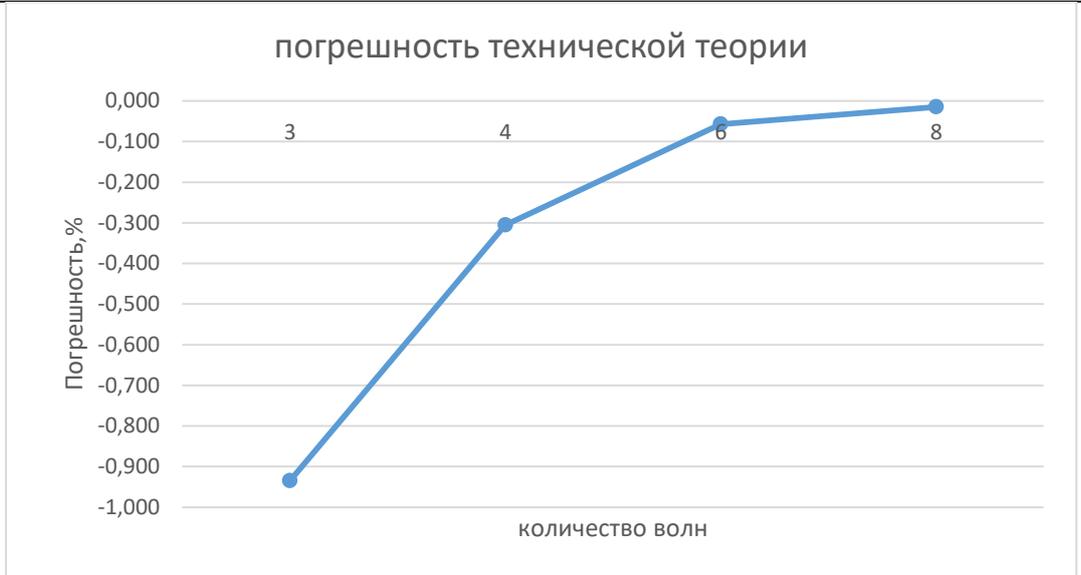
Теория статической устойчивости оболочек определяет эйлерову величину критического состояния оболочки, при котором наряду с исходной формой равновесия появляется бесконечно близкая к ней равновесная форма. Эйлерово критическое давление определяет начало потери устойчивости и обычно совпадает с разрушающим критическим давлением.

Просчитаны 3 случая нагрузки на цилиндрическую оболочку, осевое давление, боковое давление и всестороннее давление.

Таблица 1, применения прикладной теории при осевом давлении на цилиндрическую оболочку

Давление	Осевое 
Условия	$q_i = P_i = 0$
Краевые	$x = 0, l: N_{11}^{(1)} = -ph; N_{12}^{(1)} = 0$

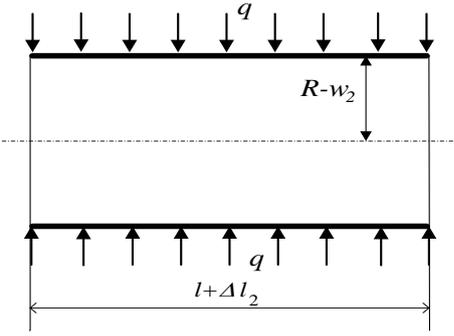
условия																
Критические нагрузки	<p>- техническая теория</p> $p_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\pi^2 E}{\pi^2 + \nu n^2} \left[\frac{\pi^2}{(\pi^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \frac{(\pi^2 + n^2)^2 - (\nu\pi^2 + n^2)}{\pi^2} \right] \right\};$ <p>- теория пологих оболочек</p> $p_k = \min_n \left\{ \frac{\pi^2 E}{\pi^2 + \nu n^2} \left[\frac{\pi^2}{(\pi^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \frac{(\pi^2 + n^2)^2}{\pi^2} \right] \right\};$ <p>- прикладная теория</p> $p_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\pi^2 E}{(\pi^2 + \nu n^2)} \left\{ \frac{\pi^2}{(\pi^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \left[\frac{(\pi^2 + n^2)^2 - (\nu\pi^2 + n^2)}{\pi^2} + (1-\nu)n^2 \frac{(2+\nu)\pi^2 + n^2}{(\pi^2 + n^2)^2} \right] \right\} \right\};$															
Графики	<p style="text-align: center;">Осевое сжатие</p>  <p>Критическое давление</p> <p>Количество волн</p> <p>■ техническая теория ■ прикладная теория</p> <table border="1"> <caption>Приблизительные данные из графика</caption> <thead> <tr> <th>Количество волн</th> <th>Критическое давление (техническая теория)</th> <th>Критическое давление (прикладная теория)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>0,045</td> <td>0,050</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0,025</td> <td>0,040</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>0,015</td> <td>0,025</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>0,010</td> <td>0,015</td> </tr> </tbody> </table>	Количество волн	Критическое давление (техническая теория)	Критическое давление (прикладная теория)	3	0,045	0,050	4	0,025	0,040	6	0,015	0,025	8	0,010	0,015
Количество волн	Критическое давление (техническая теория)	Критическое давление (прикладная теория)														
3	0,045	0,050														
4	0,025	0,040														
6	0,015	0,025														
8	0,010	0,015														



Вывод Результаты сопоставления с практически точной прикладной теорией, представленные на графиках, свидетельствуют о

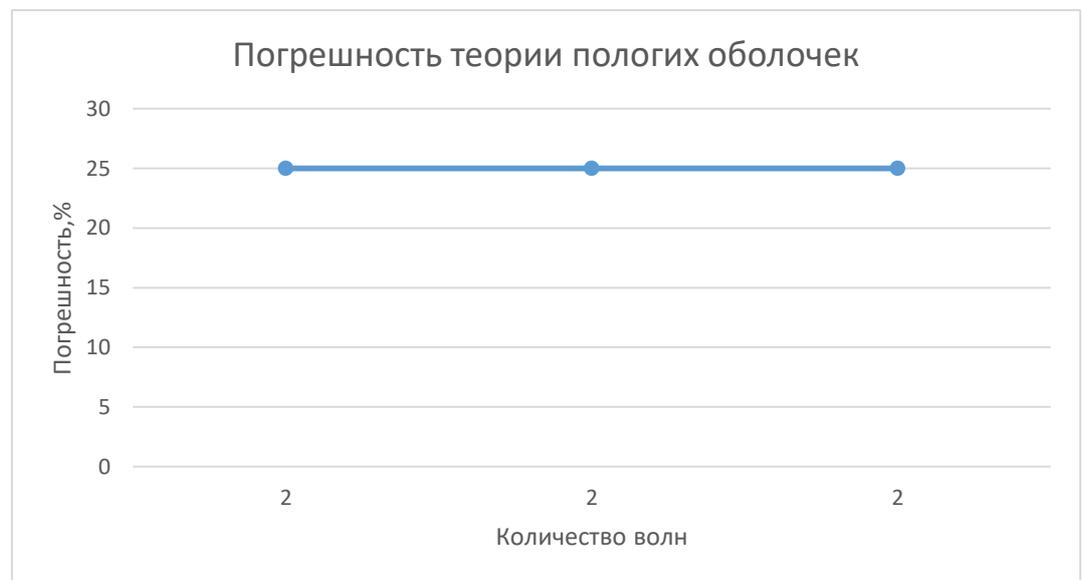
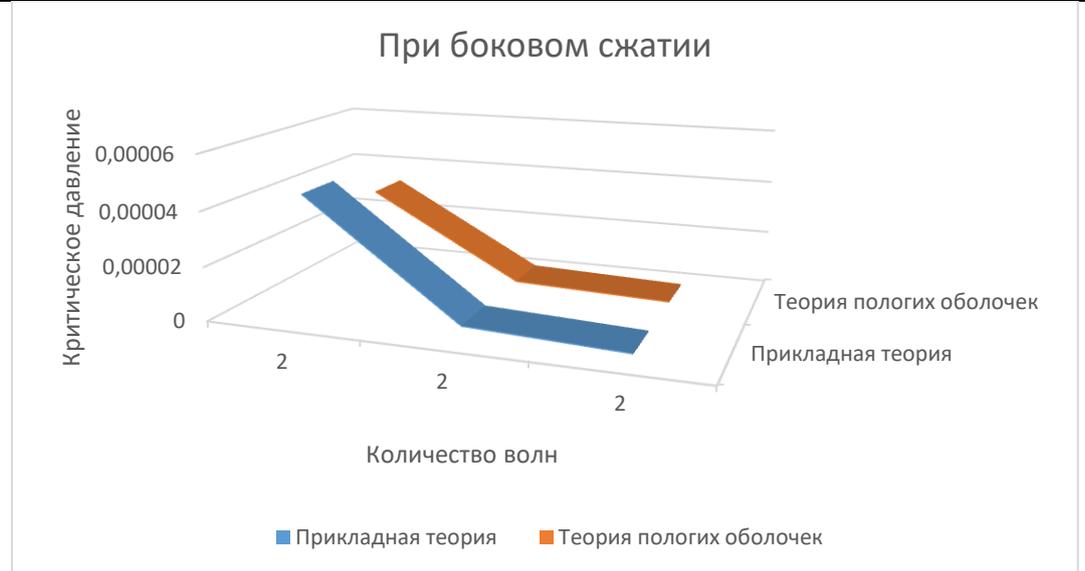
	высокой точности предлагаемой технической теории и теории пологих оболочек при расчетах устойчивости круговой цилиндрической оболочки в случае осевого сжатия
--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

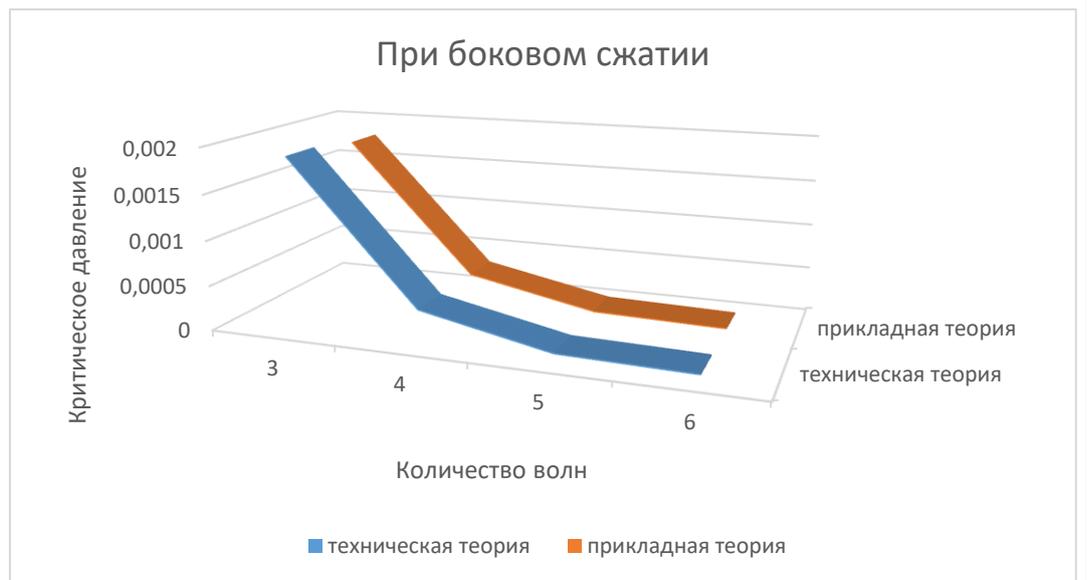
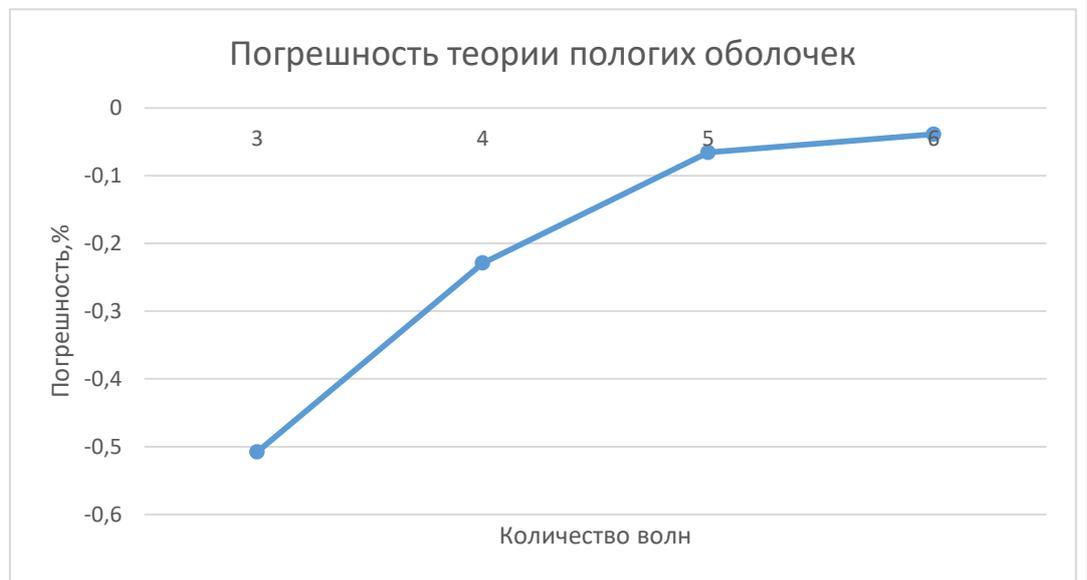
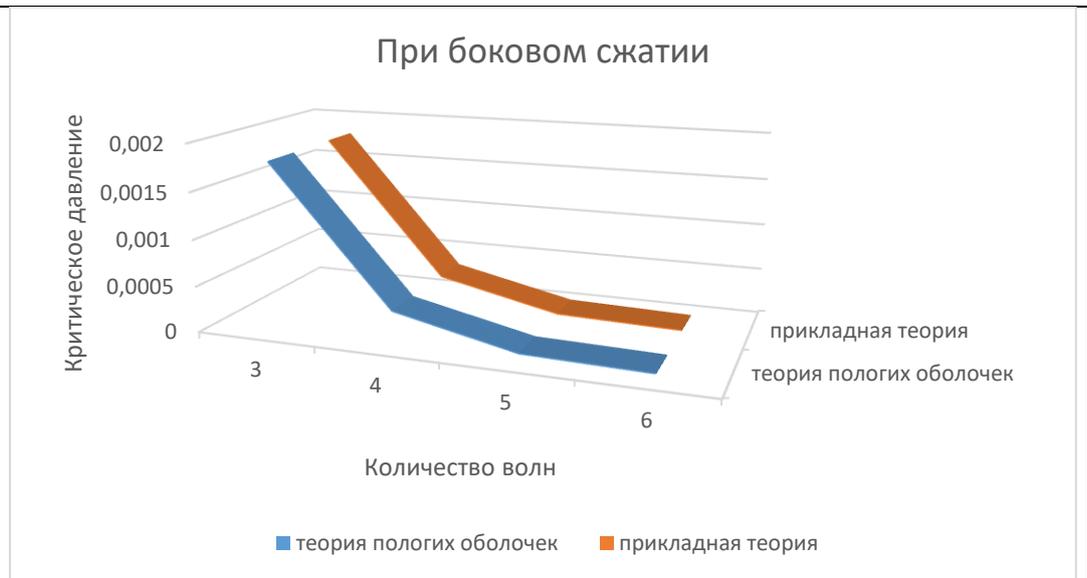
Таблица 2, применения прикладной теории при боковом давлении на цилиндрическую оболочку

Давление	Боковое 
Условия	$q_1 = q_2 = 0 ; \quad P_i = 0 ; \quad q_3 = -q R_{(2)} / R , \quad R_{(2)} = R + h / 2 ,$ $q > 0$
Крепые условия	$x = 0, l : \quad N_{11}^{(I)} = N_{12}^{(I)} = 0$
Критически е нагрузки	- техническая теория $q_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\lambda^2 E h}{(\nu \lambda^2 + n^2) R_{(2)}} \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \frac{(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2)}{\lambda^2} \right] \right\};$ - теория пологих оболочек $q_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\lambda^2 E h}{(\nu \lambda^2 + n^2) R_{(2)}} \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \right] \right\};$ - прикладная теория

$$q_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\lambda^2 E h}{(\nu \lambda^2 + n^2) R_{(2)}} \left\{ \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \left[\frac{(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2)}{\lambda^2} + (1-\nu)n^2 \frac{(2+\nu)\lambda^2 + n^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right] \right\} \right\}$$

Графики





	<p style="text-align: center;">Погрешность технической теории</p> <table border="1"> <caption>Data for the graph: Error percentage vs. Number of waves</caption> <thead> <tr> <th>Количество волн</th> <th>Погрешность, %</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>-4,2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>-3,1</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>-1,8</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>-1,4</td> </tr> </tbody> </table>	Количество волн	Погрешность, %	3	-4,2	4	-3,1	5	-1,8	6	-1,4
Количество волн	Погрешность, %										
3	-4,2										
4	-3,1										
5	-1,8										
6	-1,4										
<p>Вывод</p>	<ul style="list-style-type: none"> - увеличение длины цилиндрической оболочки между закрепленными торцами существенно снижает боковое критическое давление; - боковое критическое давление при увеличении длины оболочки стремиться к предельному значению, равному величине бокового критического давления незакрепленной оболочки (при $l \rightarrow \infty: \lambda \rightarrow 0$); - достаточная точность применения теории пологих оболочек при исследовании устойчивости цилиндрических оболочек достигается при количестве полных волн по окружности срединной поверхности оболочки на много больших единицы, $n \geq 4$; - во всем диапазоне изменения геометрических размеров цилиндрической оболочки можно пользоваться предлагаемой технической теорией устойчивости цилиндрических оболочек. 										

Таблица 3, применения прикладной теории при всестороннем давлении на цилиндрическую оболочку

Давление	Всестороннее
----------	--------------

Условия	$q_3 = -q R_{(2)} / R, \quad R_{(2)} = R + h / 2, \quad q > 0. q_1 = q_2 = 0, \quad P_i = 0$
Краевые условия	$x = 0, l: \quad N_{11}^{(1)} = -p h, \quad p > 0; \quad N_{12}^{(1)} = 0$
Критические нагрузки	<p>- при использовании технической теории оболочек</p> $q_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\lambda^2 E h}{[(\nu + \eta)\lambda^2 + (1 + \nu \eta)n^2] R_{(2)}} \left[\frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1 - \nu^2) R^2} \frac{(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2)}{\lambda^2} \right] \right\};$ <p>- при использовании прикладной теории оболочек</p> $q_k = \min_{m,n} \left\{ \frac{\lambda^2 E h}{[(\nu + \eta)\lambda^2 + (1 + \nu \eta)n^2] R_{(2)}} \left\{ \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{h^2}{12(1 - \nu^2) R^2} \left[\frac{(\lambda^2 + n^2)^2 - (\nu \lambda^2 + n^2)}{\lambda^2} + (1 - \nu)n^2 \frac{(2 + \nu)\lambda^2 + n^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} \right] \right\} \right\}$

Графики	<div data-bbox="379 174 1437 723" style="text-align: center;"> <h3>Всестороннее давление</h3> <p>Критическое давление</p> <p>Количество волн</p> <p>■ техническая теория ■ прикладная теория</p> <table border="1"> <caption>Estimated data for 'Всестороннее давление'</caption> <thead> <tr> <th>Количество волн</th> <th>техническая теория</th> <th>прикладная теория</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>0,0015</td> <td>0,0016</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0,0003</td> <td>0,0006</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>0,0001</td> <td>0,0004</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>0,00005</td> <td>0,0002</td> </tr> </tbody> </table> </div> <div data-bbox="379 745 1437 1317" style="text-align: center;"> <h3>Погрешность технической теории</h3> <p>Погрешность, %</p> <p>Количество волн</p> <table border="1"> <caption>Estimated data for 'Погрешность технической теории'</caption> <thead> <tr> <th>Количество волн</th> <th>Погрешность, %</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>-0,5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-0,25</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>-0,05</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>-0,02</td> </tr> </tbody> </table> </div>	Количество волн	техническая теория	прикладная теория	3	0,0015	0,0016	4	0,0003	0,0006	6	0,0001	0,0004	8	0,00005	0,0002	Количество волн	Погрешность, %	1	-0,5	2	-0,25	3	-0,05	4	-0,02
Количество волн	техническая теория	прикладная теория																								
3	0,0015	0,0016																								
4	0,0003	0,0006																								
6	0,0001	0,0004																								
8	0,00005	0,0002																								
Количество волн	Погрешность, %																									
1	-0,5																									
2	-0,25																									
3	-0,05																									
4	-0,02																									
Вывод	<p>критическое давление при всестороннем равномерном давлении не на много отличается от критического давления при одном лишь боковом давлении: у тонкостенных оболочек, $h/R < 1/20$, не превышает 30 %, у оболочек средней толщины, $h/R = 1/10$, достигает 41 %.</p>																									

При всестороннем давлении критическая нагрузка прикладной теории равна 0,001220Мпа, при технической теории оболочек 0,001208Мпа, при теории пологих получаются погрешности. Для сравнения просчитаем устойчивость с помощью программы ANSYS, и сравним полученные результаты, для выявления более точной теории.

2.3 Вывод уравнений прикладной теории устойчивости цилиндрической слоистой оболочки

Все уравнения устойчивости круговой слоистой цилиндрической оболочки получим из уравнений устойчивости круговой цилиндрической оболочки, переписав их для k – слоя:

$$R_{1(k)} = \infty, R_{2(k)} = R_k; \quad A_{1(k)} = 1, A_{2(k)} = R_k; \quad A_{1(k)}\alpha_{1(k)} = x, A_{2(k)}\alpha_{2(k)} = R_k \varphi = y$$

Ограничимся замкнутой круговой цилиндрической оболочкой средней длины, изготовленной из однородного материала с постоянными упругими свойствами, которые зависят от температуры. Вследствие краевого эффекта будем пренебрегать реальными условиями закрепления торцевых поверхностей оболочки. Докритическое состояние оболочки будем считать безмоментным.

Где $k = 1, 2$ номер слоя

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} R_k N_{11}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} N_{21}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} N_{12}^k - \frac{\partial}{\partial x_k} R_k N_{22}^k + \frac{1}{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{11}^k + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{21}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{12}^k - \frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{22}^k \right] \right\} - \frac{1}{\infty} \left(N_{22}^{0(k)} \vartheta_{1k} + N_{12}^{0(k)} \vartheta_{2k} \right) = 0 \\ & \frac{1}{R_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} R_k N_{12}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} N_{22}^k + \frac{\partial}{\partial x_k} R_k N_{21}^k - \frac{\partial}{\partial R_k y_k} N_{11}^k + \frac{1}{R_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{12}^k + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{22}^k + \frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{21}^k - \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{11}^k \right] \right\} - \frac{1}{R_k} \left(N_{22}^{0(k)} \vartheta_{2k} + N_{21}^{0(k)} \vartheta_{1k} \right) = 0 \\ & \frac{1}{R_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{11}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{21}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{12}^k - \frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{22}^k \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial R_k y_k} \frac{1}{R_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{12}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{22}^k + \frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{21}^k - \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{11}^k \right] \right\} - \frac{N_{11}^k}{\infty} - \frac{N_{22}^k}{R_k} - \\ & \frac{1}{R_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[R_k \left(N_{11}^{0(k)} \vartheta_{1k} + N_{12}^{0(k)} \vartheta_{2k} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} \left[\left(N_{22}^{0(k)} \vartheta_{1k} + N_{12}^{0(k)} \vartheta_{2k} \right) \right] \right\} = 0 \\ & \frac{1}{R_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{11}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{21}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{12}^k - \frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{22}^k \right] - Q_1^k = 0; \\ & \frac{1}{R_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{12}^k + \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{22}^k + \frac{\partial}{\partial x_k} R_k M_{21}^k - \frac{\partial}{\partial R_k y_k} M_{11}^k \right] - Q_2^k = 0; \end{aligned} \quad (2.29)$$

В результате получили 5 уравнений равновесия

$$N_{11,1}^k + N_{12,2}^k = 0;$$

$$N_{22,2}^k + N_{12,1}^k + k_{2k}(M_{22,2}^k + M_{12,1}^k) = k_{2k}(N_{22}^{0(k)}\vartheta_{2k} + N_{12}^{0(k)}\vartheta_{1k});$$

$$M_{11,11}^k + 2M_{12,12}^k + M_{22,22}^k - k_{2k}N_{22}^k = (N_{11}^{0(k)}\vartheta_{2k} + N_{12}^{0(k)}\vartheta_{2k})_{,1} +$$

$$(N_{22}^{0(k)}\vartheta_{2k} + N_{12}^{0(k)}\vartheta_{1k})_{,2};$$

$$M_{11,1}^k + M_{12,2}^k = Q_1^k;$$

$$M_{22,2}^k + M_{12,1}^k = Q_2^k; \quad (2.29')$$

Уравнения геометрии срединной поверхности:

$$\varepsilon_1^k = \frac{\partial u_{10}^k}{\partial x_k} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial}{\partial R_k y_k} u_{20}^k;$$

$$\varepsilon_2^k = \frac{1}{R_k} \frac{\partial u_{20}^k}{\partial R_k y_k} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} u_{10}^k + \frac{w_k}{R_k};$$

$$\omega_{1k} = \frac{\partial u_{20}^k}{\partial x_k} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial}{\partial R_k y_k} u_{10}^k;$$

$$\omega_{2k} = \frac{1}{R_k} \frac{\partial u_{10}^k}{\partial R_k y_k} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} u_{20}^k;$$

$$\omega_k = \omega_{1k} + \omega_{2k}$$

$$\varepsilon_1^k = u_{10,1}^k; \quad \varepsilon_2^k = u_{20,2}^k + k_{2k}w_k; \quad \omega_k = u_{20,1}^k + u_{10,2}^k; \quad (2.30)$$

Уравнения изгиба и кручения слоя:

$$\chi_{11}^k = \frac{\partial \psi_{1k}}{\partial x_k} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial}{\partial R_k y_k} \psi_{2k};$$

$$\chi_{22}^k = \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi_{2k}}{\partial R_k y_k} + \frac{1}{R_k} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \psi_{1k};$$

$$\chi_{12}^k = \frac{\partial \psi_{2k}}{\partial x_k} - \frac{1}{R_k} \frac{\partial}{\partial R_k y_k} \psi_{1k};$$

$$\chi_{21}^k = \frac{1}{R_k} \frac{\partial \psi_{1k}}{\partial R_k y_k} - \frac{1}{R_k} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \psi_{2k};$$

$$2\chi^k = \chi_{12}^k + \chi_{21}^k;$$

$$\chi_{11}^k = \psi_{1k,1}; \quad \chi_{22}^k = \psi_{2k,2}; \quad \chi_{12}^k = \psi_{2k,1}; \quad \chi_{21}^k = \psi_{1k,2}; \quad 2\chi^k =$$

$$\psi_{2k,1} + \psi_{1k,2}; \quad (2.31)$$

Уравнения углов поворота радиальных элементов слоя:

$$\psi_{1k} = \vartheta_{1k} + \gamma_1^k; \quad \psi_{2k} = \vartheta_{2k} + \frac{1}{R_k} \gamma_2^k; \quad (2.32)$$

Уравнения поперечных нормалей k слоя:

$$\begin{aligned} \vartheta_{1k} &= \frac{\partial w_k}{\partial x_k}; \quad \vartheta_{2k} = \frac{u_{20}^k}{R_k} - \frac{\partial w_k}{\partial R_k y_k}; \\ \vartheta_{1k} &= w_{k,1}; \quad \vartheta_{2k} = \frac{u_{20}^k}{R_k} - w_{k,2}; \end{aligned} \quad (2.33)$$

Условия сопряжения слоев слоистой оболочки:

$$\begin{aligned} u_{10}^k + \frac{h_k}{2} \psi_{1k} &= u_{10}^{k+1} + \frac{h_{k+1}}{2} \psi_{1(k+1)}; \\ u_{20}^k + \frac{h_k}{2} \psi_{2k} &= u_{20}^{k+1} + \frac{h_{k+1}}{2} \psi_{2(k+1)}; \\ w_k + \Delta w_k^+ &= w_{k+1} + \Delta w_{k+1}^- \end{aligned} \quad (2.34)$$

Уравнения состояния k -го слоя:

– из изотропного материала:

$$\begin{aligned} N_{11}^k &= \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} (\varepsilon_1^k + \nu_k \varepsilon_2^k); \\ N_{22}^k &= \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} (\varepsilon_2^k + \nu_k \varepsilon_1^k); \\ N_{12}^k &= N_{21}^k = \frac{E_k h_k}{2(1 + \nu_k)} \omega_k; \\ M_{11}^k &= \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} (\chi_{11}^k + \nu_k \chi_{22}^k); \\ M_{22}^k &= \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)} (\chi_{22}^k + \nu_k \chi_{11}^k); \\ M_{12}^k &= M_{21}^k = \frac{E_k h_k^3}{12(1 + \nu_k)} \chi^k; \\ Q_1^k &= \frac{E_k h_k}{2(1 + \nu_k)} \gamma_1^k; \\ Q_2^k &= \frac{E_k h_k}{2(1 + \nu_k)} \frac{\gamma_2^k}{R_k}; \end{aligned} \quad (2.35)$$

Уравнения (2.29)–(2.35) составляют полную систему двумерных уравнений статической устойчивости слоистых оболочек, которая состоит из

$40n-3$ уравнений. Из них $19n$ уравнений являются дифференциальными: $16n$ уравнений первого порядка и $3n$ уравнений второго порядка. Остальные уравнения, в состав которых входят условия сопряжения слоев, представляют собой алгебраические уравнения. Полная система двумерных уравнений содержит $40n-3$ неизвестные двумерные функции: $10n$ внутренних сил и моментов $(N_{11}^{(k)}, N_{22}^{(k)}, N_{12}^{(k)}, N_{21}^{(k)}, Q_1^{(k)}, Q_2^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{22}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{21}^{(k)})$, $5n$ параметров деформаций срединных поверхностей отдельных слоев $(\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \omega_{1k}, \omega_{2k}, \omega_k)$, $3n$ параметров изгиба и кручения слоев $(\chi_{11}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)}, \chi^{(k)})$, $2n$ углов поворота радиальных элементов отдельных слоев (ψ_{1k}, ψ_{2k}) , $2n$ углов поворота поперечных нормалей отдельных слоев $(\vartheta_{1k}, \vartheta_{2k})$, $3n$ компоненты перемещений срединных поверхностей всех n слоев $(u_{10}^{(k)}, u_{20}^{(k)}, w_k)$, $3n$ компоненты перемещений всех n слоев $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)})$, $2n$ осредненных величин деформаций поперечного сдвига $(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)})$ Семнадцать уравнений можно свести к трем уравнениям, разрешаемым относительно трех перемещений срединной поверхности оболочки. Применительно к изотропной цилиндрической оболочке такие уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
& u_{10,11}^k + v_k k_{2k} w_{k,1} + \frac{(1+v_k)}{2} u_{20,12}^k + \frac{(1-v_k)}{2} u_{10,22}^k = 0 \\
& u_{20,22}^k + k_{2k,2} w_{k,2} + \frac{(1-v_k)}{2} u_{20,11}^k + \frac{(1+v_k)}{2} u_{10,12}^k + \frac{k_{2k} h_k^2}{12} \left(\frac{u_{20,22}^k}{R_{k,22}} - \right. \\
& w_{k,222} + \frac{1}{R_{k,22}} \gamma_{2,22}^k + v_{k,2} w_{k,122} + \gamma_{1,21}^k + \frac{u_{20,21}^k}{R_{k,21}} - w_{k,211} + \frac{1}{R_{k,21}} \gamma_{2,21}^k + \\
& \left. w_{k,121} + \gamma_{1,12}^k \right) = k_{2k} \frac{E_k h_k}{1-v_k^2} \left(N_{22}^{0(k)} \left(\frac{u_{20}^k}{R_k} - w_k \right) + N_{12}^{0(k)} w_k \right) \\
& w_{k,1111} + \gamma_{1,111}^k + \frac{u_{20,211}^k}{R_{k,211}} - v_{k,11} w_{k,2211} + \frac{1}{R_{k,211}} \gamma_{2,211}^k + 2 \left(\frac{u_{20,112}^k}{R_{k,112}} - \right. \\
& \left. w_{k,2112} + \frac{1}{R_{k,112}} \gamma_{2,112}^k + w_{k,1212} + \gamma_{1,212}^k \right) + \frac{u_{20,222}^k}{R_{k,222}} - w_{k,2222} + \\
& \frac{1}{R_{k,222}} \gamma_{2,222}^k + v_{k,22} w_{k,1122} + v_{k,22} \gamma_{1,122}^k - \frac{k_{2k} h_k^2}{12} \left(u_{20,2}^k + k_{2k} w_k + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_k u_{10,1}^k &= \frac{E_k h_k^3}{12(1+\nu_k)} \left[\left(N_{11}^{0(k)} w_k + N_{12}^{0(k)} \frac{u_{20}^k}{R_k} - w_k \right)_{,1} + \left(N_{22}^{0(k)} \frac{u_{20}^k}{R_k} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. N_{22}^{0(k)} w_k + N_{12}^{0(k)} w_k \right)_{,2} \right] \\
&\quad \frac{h_k^2 (1+\nu_k)}{1-\nu_k^2} \left(v_{k,11} w_{k,11} + \gamma_{1,11}^k + \frac{u_{20,21}^k}{R_{k,21}} - w_{k,21} + \frac{1}{R_{k,21}} \gamma_{2,21}^k \right) + \\
&\quad h_k^2 \left(\frac{u_{20,12}^k}{R_{k,12}} - w_{k,12} + \frac{1}{R_{k,12}} \gamma_{2,12}^k + w_{k,22} + \gamma_{1,22}^k \right) = 6\gamma_1^k; \\
&\quad \frac{h_k^2 (1+\nu_k)}{1-\nu_k^2} \left(\frac{u_{20,22}^k}{R_{k,22}} - w_{k,22} + \frac{1}{R_{k,22}} \gamma_{2,22}^k + v_{k,22} w_{k,12} + \gamma_{1,12}^k \right) + \\
&\quad h_k^2 \left(\frac{u_{20,11}^k}{R_{k,11}} - w_{k,11} + \frac{1}{R_{k,11}} \gamma_{2,11}^k + w_{k,21} + \gamma_{1,21}^k \right) = 6 \frac{\gamma_2^k}{R_k} \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Для решения уравнений устойчивости оболочек предложено большое количество различных методов [6, 8]. Здесь ограничимся методом Бубнова-Галеркина при задании функций перемещений срединной поверхности в виде рядов Фурье в области $s: x \in [0, l], y \in [0, 2\pi R_k]$ по системе следующих ортогональных функций:

$$\begin{aligned}
w_k &= \sum_{m,n} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{10}^k &= \sum_{m,n} u_{1mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20}^k &= - \sum_{m,n} u_{2mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k} \quad (2.37)
\end{aligned}$$

где w_{mn}, \dots, u_{2mn} – постоянные коэффициенты разложения искомых функций в ряды Фурье; l – длина цилиндрической оболочки; m – число полуволн вдоль образующей срединной поверхности оболочки; n – число полных волн по окружности срединной поверхности оболочки; λ – параметр продольного волнообразования цилиндрической оболочки

$$\lambda = \frac{\pi m R_k}{l}$$

Решение задачи устойчивости замкнутой слоистой цилиндрической оболочки путем разложения функций перемещений срединной поверхности и

деформаций поперечного сдвига в ряды по системе ортогональных функций (2.37) производится следующим образом.

Сначала ряды (2.37) подставляются в геометрические уравнения теории оболочек (2.30) – (2.34). Тем самым геометрические уравнения будут представлены в виде разложений по функциям (2.37). Подстановка разложений геометрических уравнений в ряды по системе ортогональных функций (2.37) в уравнения состояния (2.35) позволяет получить соответствующие разложения для искомых внутренних сил и моментов. Разложения искомых внутренних сил и моментов в ряды по системе ортогональных функций (2.37) подставляются в уравнения равновесия (2.29). В общем случае при подстановке разложений (2.37) уравнения (2.29) будут содержать какую-то погрешность (функцию ошибки). Для того, чтобы минимизировать функцию ошибки, необходимо, чтобы она в области $s: x \in [0, l], y \in [0, 2\pi R]$ была ортогональной ко всем функциям разложения (2.37). При разложении уравнений устойчивости в бесконечные ряды по системе ортогональных функций (2.37) функция ошибки обращается в нуль.

Входящие в уравнения (2.36) производные этих функций примут вид:

$$w_{k,1} = - \sum_{m,n} \frac{\lambda}{R_k} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,2} = \sum_{m,n} \frac{n}{R_k} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,11} = - \sum_{m,n} \frac{\lambda^2}{R_k^2} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,12} = \sum_{m,n} \frac{\lambda n}{R_k^2} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,21} = \sum_{m,n} \frac{\lambda n}{R_k^2} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,22} = - \sum_{m,n} \frac{n^2}{R_k^2} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,111} = \sum_{m,n} \frac{\lambda^3}{R_k^3} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,112} = - \sum_{m,n} \frac{\lambda^2 n}{R_k^3} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,122} = \sum_{m,n} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,211} = - \sum_{m,n} \frac{n \lambda^2}{R_k^3} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,212} = \sum_{m,n} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,222} = - \sum_{m,n} \frac{n^3}{R_k^3} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,1111} = \sum_{m,n} \frac{\lambda^4}{R_k^4} w_{mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,1112} = - \sum_{m,n} \frac{\lambda^3 n}{R_k^4} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,1122} = \sum_{m,n} \frac{\lambda^2 n^2}{R_k^4} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,1222} = - \sum_{m,n} \frac{n^3 \lambda}{R_k^4} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$w_{k,2222} = \sum_{m,n} \frac{n^4}{R_k^4} w_{mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,1}^k = \sum_{m,n} \frac{\lambda}{R_k} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,2}^k = \sum_{m,n} \frac{n}{R_k} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,11}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda^2}{R_k^2} u_{1mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,12}^k = \sum_{m,n} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{1mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,21}^k = \sum_{m,n} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{1mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,22}^k = - \sum_{m,n} \frac{n^2}{R_k^2} u_{1mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,111}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda^3}{R_k^3} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,112}^k = \sum_{m,n} \frac{n\lambda^2}{R_k^3} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,122}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,211}^k = \sum_{m,n} \frac{n\lambda^2}{R_k^3} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,212}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{10,222}^k = \sum_{m,n} \frac{n^3}{R_k^3} u_{1mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{20,1}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda}{R_k} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{20,2}^k = - \sum_{m,n} \frac{n}{R_k} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{20,11}^k = \sum_{m,n} \frac{\lambda^2}{R_k^2} u_{2mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{20,12}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{2mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$u_{20,21}^k = - \sum_{m,n} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{2mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k}$$

$$\begin{aligned}
u_{20,22}^k &= \sum_{m,n} \frac{n^2}{R_k^2} u_{2mn} \sin \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20,111}^k &= \sum_{m,n} \frac{\lambda^3}{R_k^3} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20,112}^k &= - \sum_{m,n} \frac{n\lambda^2}{R_k^3} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20,122}^k &= \sum_{m,n} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20,211}^k &= - \sum_{m,n} \frac{n\lambda^2}{R_k^3} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20,212}^k &= \sum_{m,n} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \\
u_{20,222}^k &= - \sum_{m,n} \frac{n^3}{R_k^3} u_{2mn} \cos \frac{\lambda x - ny}{R_k} \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Подстановка разложений (2.38) в уравнения (2.35) позволяет получить следующую систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& - \frac{\lambda^2}{R_k^2} u_{1mn} - v_k k_{2k} \frac{\lambda}{R_k} W_{mn} + \frac{(1+v_k)}{2} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{2mn} + \frac{(1-v_k)}{2} \frac{n^2}{R_k^2} u_{1mn} = 0 \\
& \frac{n^2}{R_k^2} u_{2mn} + k_{2k} \frac{n}{R_k} W_{mn} + \frac{(1-v_k)}{2} \frac{\lambda^2}{R_k^2} u_{2mn} + \frac{(1+v_k)}{2} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{1mn} + \\
& \frac{k_{2k} h_k^2}{12} \left(\frac{1}{R_{k,22}} \frac{n^2}{R_k^2} u_{2mn} + \frac{n^3}{R_k^3} W_{mn} + v_{k,2} \frac{\lambda n^2}{R_k^3} W_{mn} - \frac{1}{R_{k,21}} \frac{\lambda n}{R_k^2} u_{2mn} - \right. \\
& \left. \frac{n\lambda^2}{R_k^3} W_{mn} + \frac{n\lambda^2}{R_k^3} W_{mn} + 2 \frac{n}{R_k} \gamma_{1mn}^k \right) = k_{2k} \frac{E_k h_k}{1-v_k^2} \left(N_{22}^{0(k)} \left(\frac{u_{2mn}}{R_k} - W_{mn} \right) + \right. \\
& \left. N_{12}^{0(k)} W_{mn} \right) \\
& \frac{\lambda^4}{R_k^4} W_{mn} - \frac{1}{R_{k,211}} \frac{n\lambda^2}{R_k^3} u_{2mn} + \frac{n^2 \lambda^2}{R_k^4} W_{mn} v_{k,11} - \frac{\lambda^3}{R_k^3} \gamma_{1mn}^k + \\
& 2 \left(- \frac{1}{R_{k,112}} \frac{n\lambda^2}{R_k^3} u_{2mn} + \frac{n^2 \lambda^2}{R_k^4} W_{mn} + \frac{n^2 \lambda^2}{R_k^4} W_{mn} - \frac{\lambda n^2}{R_k^3} \gamma_{1mn}^k \right) - \\
& \frac{1}{R_{k,222}} \frac{n^3}{R_k^3} u_{2mn} + \frac{n^4}{R_k^4} W_{mn} + v_{k,22} \frac{n^2 \lambda^2}{R_k^4} W_{mn} - \frac{k_{2k} 12}{h_k^2} \left(\frac{n}{R_k} u_{2mn} + \right. \\
& \left. k_{2k} W_{mn} + v_k \frac{\lambda}{R_k} u_{1mn} \right) = \frac{E_k h_k^3}{12(1+v_k)} \left[- \frac{\lambda}{R_k} N_{11}^{0(k)} W_{mn} + N_{12}^{0(k)} \frac{u_{2mn}}{R_k} + \right. \\
& \left. \frac{\lambda}{R_k} W_{mn} + N_{22}^{0(k)} \frac{u_{2mn}}{R_k} + \frac{\lambda}{R_k} N_{22}^{0(k)} W_{mn} + N_{12}^{0(k)} W_{mn} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_k^2(1+v_k)}{1-v_k^2} \left(-v_{k,11} \frac{\lambda^2}{R_k^2} W_{mn} + \frac{\lambda^2}{R_k^2} \gamma_{1mn}^k + \frac{u_{20,21}^k}{R_{k,21}} - W_{k,21} + \frac{1}{R_{k,21}} \gamma_{2,21}^k \right) + \\
& h_k^2 \left(-\frac{\lambda n}{R_k^2} W_{mn} - \frac{n^2}{R_k^2} W_{mn} + \frac{n^2}{R_k^2} \gamma_{1mn}^k \right) = 6\gamma_{1mn}^k; \\
& \frac{h_k^2(1+v_k)}{1-v_k^2} \left(\frac{n^2}{R_k^2} W_{mn} + \frac{\lambda n}{R_k^2} \gamma_{1mn}^k \right) + h_k^2 \left(\frac{\lambda^2}{R_k^2} W_{mn} + \frac{\lambda n}{R_k^2} W_{mn} + \right. \\
& \left. \frac{\lambda n}{R_k^2} \gamma_{1mn}^k \right) = 6 \frac{\gamma_{2mn}^k}{R_k} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Величина $\frac{N_{22}^0}{Eh}$ имеет порядок величины деформации, поэтому по

сравнению с единицей ею можно пренебречь без ущерба для точности уравнений устойчивости оболочек, поскольку в основу уравнений устойчивости положены уравнения механики деформируемого твердого тела, в которых произведено устранение величин такого же порядка малости.

Устранив из уравнений (2.39) пренебрежимо малые величины, приведем их к виду:

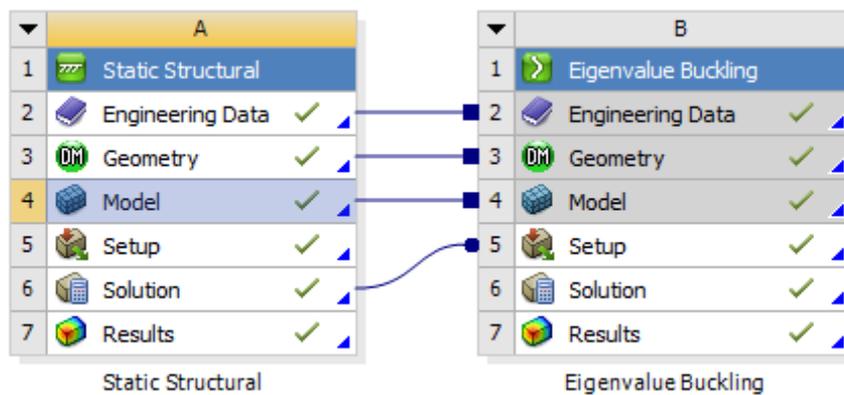
$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(1-v_k)}{2} n^2 - \lambda^2 \right) u_{1mn} + \left(\frac{(1+v_k)}{2} \lambda n \right) u_{2mn} - v_k \lambda w_{mn} = 0 \\
& \left(\frac{(1+v_k)}{2} \lambda n \right) u_{1mn} + \left(n^2 + \frac{(1-v_k)}{2} \lambda^2 \right) u_{2mn} + n w_{mn} + \frac{h_k^2 n}{6} \gamma_{1mn}^k = 0 \\
& - \left(\frac{12}{h_k^2} v_k \lambda \right) u_{1mn} - \left(\frac{12}{h_k^2} n \right) u_{2mn} + \left(\frac{\lambda^4}{R_k^2} + 4 \frac{\lambda^2 n}{R_k} + \frac{n^4}{R_k^2} - \frac{12}{h_k^2} + \right. \\
& \left. \frac{R_k E_k h_k^3}{12(1+v_k)} (N_{11}^{0(k)} \lambda - N_{22}^{0(k)} n) \right) w_{mn} - \left(\frac{\lambda^3}{R_k} + 2 \frac{\lambda n^2}{R_k} \right) \gamma_{1mn}^k = 0 \\
& \left(-\frac{h_k^2(1+v_k)}{1-v_k^2} \lambda n - \lambda n h_k^2 - n^2 h_k^2 \right) w_{mn} + \left(h_k^2 n^2 + \frac{h_k^2(1+v_k)}{1-v_k^2} \lambda^2 - \right. \\
& \left. R_k^2 6 \right) \gamma_{1mn}^k = 0; \\
& \left(\frac{h_k^2(1+v_k)}{1-v_k^2} n^2 + h_k^2 \lambda^2 + h_k^2 \lambda n \right) w_{mn} + \left(h_k^2 \lambda n + \right. \\
& \left. \frac{h_k^2(1+v_k)}{1-v_k^2} \lambda n \right) \gamma_{1mn}^k - R_k 6 \gamma_{2mn}^k = 0 \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Для получения уравнения критического воздействия нужно определитель системы уравнений (2.40) приравнять нулю, при этом определитель получается 5 порядка, и получить конечную формулу достаточно сложно. Но установлено,

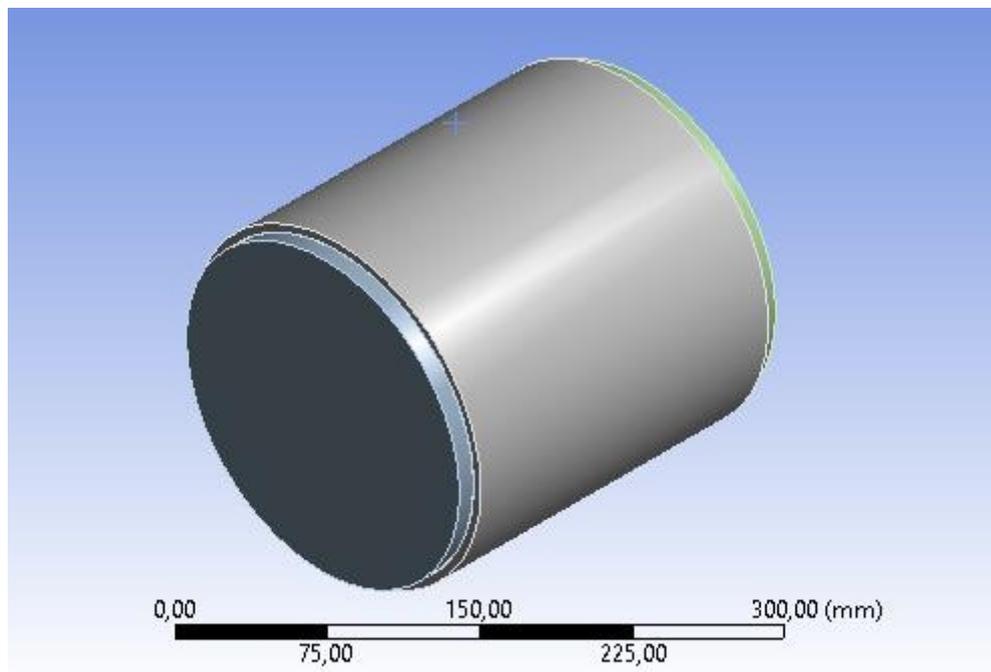
что каждый слой просчитывается согласно однослойной оболочке, и можно просчитать критическую нагрузку, но с более высоким порядком погрешности.

2.4 Оценка устойчивости с помощью ANSYS

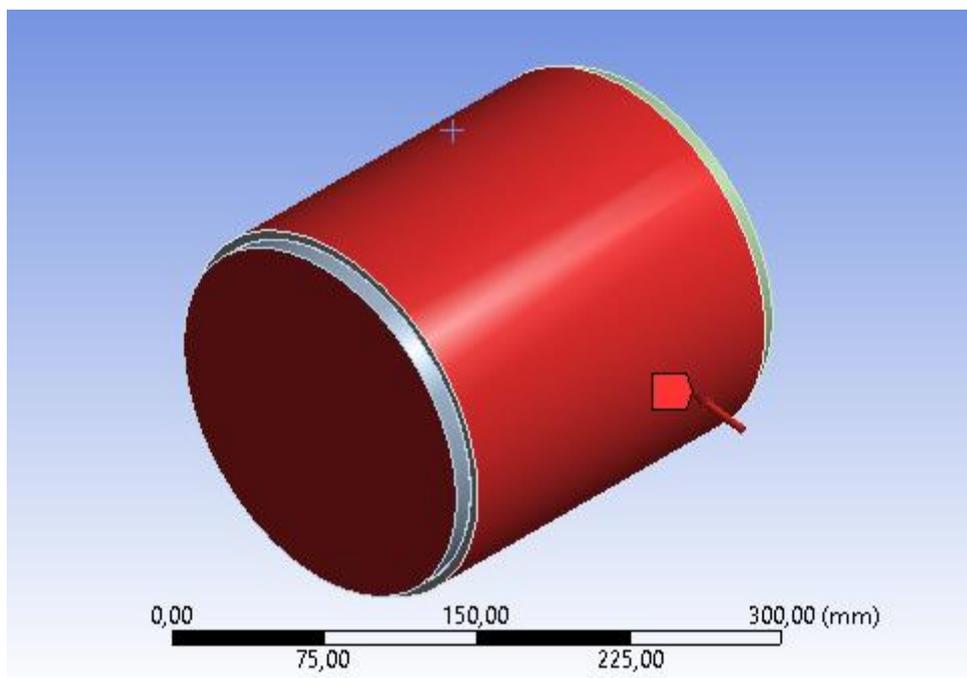
Исследуем устойчивость с помощью конечноэлементного моделирования ANSYS. Оценка устойчивости проводилась на основе модуля StaticStructural, путем добавления к нему модуля Eigenvalue buckling



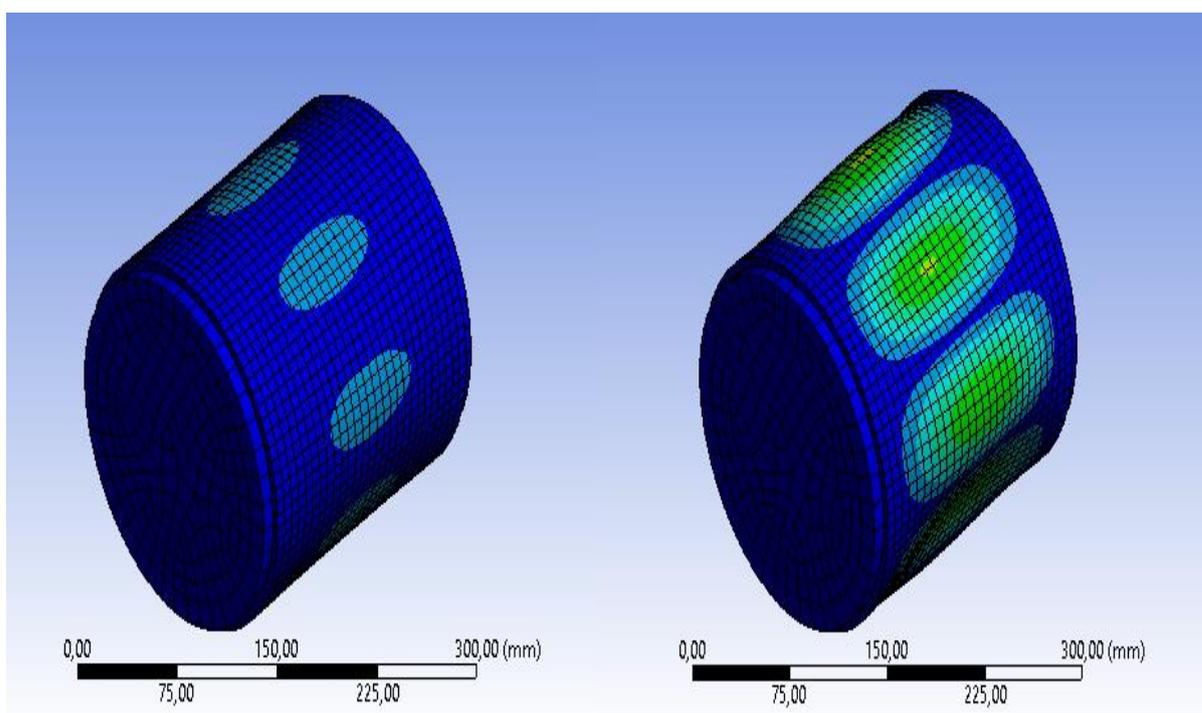
Далее создавалась модель круговой цилиндрической оболочки, с геометрией



Накладывалось всестороннее давление в диапазоне [0.0012,0.0022]

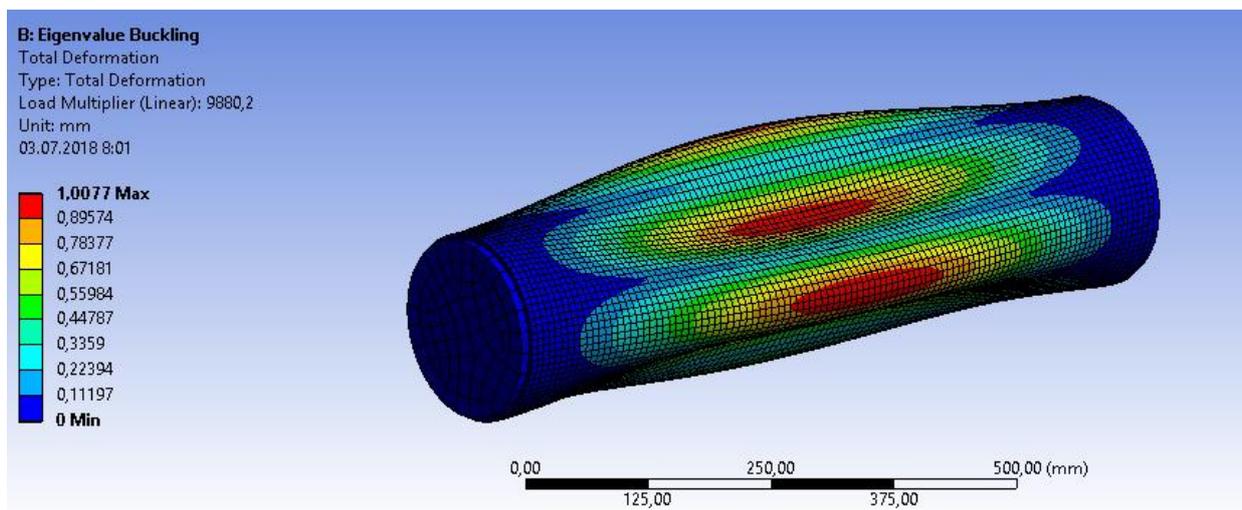


Расчет результатов:



Получены результаты и модель потери устойчивости оболочки, давление при котором происходит потеря устойчивого положения равновесия равна 0.001215МПа. Показано перемещение при $p=0.0012$ МПа и при $p=0.0026$ МПа (0,0.55мм)

Перемещение оболочки средней длины при $p=0.0023$ МПа



Полученные по ANSYS результаты отличаются на 10% от результатам по прикладной теории, моделирование позволяет более точно оценить устойчивость оболочки.

Заключение

Рассмотрены основные допущения и области применимости теории пологих оболочек, технической теории и прикладной теории устойчивости.

Проведено сравнение значений критической нагрузки для цилиндрической оболочки, полученных по результатам различных теорий, оценена погрешность результатов.

На основе допущений прикладной теории построена математическая модель устойчивости слоистой оболочки.

Исследована устойчивость математической модели с помощью конечно – элементного моделирования ANSYS.

Список литературы

1. Алфутов Н.А. “Основы расчета на устойчивость упругих систем.” – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. “Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в трех томах”, 1968.
3. Бойцов Г.И., Палий О.М., Постнов В.А., Чувиковский В.С. “Справочник по строительной механике корабля”, 1982.
4. Букалов В.М., Нарусбаев А.А. “Проектирование атомных подводных лодок (по материалам иностранной печати)”. – Л.: Судостроение, 1968.
5. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. “Расчет пластин”, 1970.
6. Вольмир А.С. “Устойчивость деформируемых систем”. – М.: Наука, 1967.– 984 с.
7. Гольденвейзер А.Л. :Теория тонких упругих оболочек”. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
8. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. “Устойчивость оболочек”. – М.:Наука, 1978. – 360 с.
9. Диомидов М.Н., Дмитриев А.Н. “Подводные аппараты (проектирование и конструкция)”. – Л.: Судостроение, 1966.
10. Пикуль В.В. “Механика оболочек”. – Владивосток: Дальнаука, 2009.–536 с.
11. Пикуль В.В. “Методика проектирования и расчета прочного корпуса подводного аппарата”, 2011.
12. Шиманский Ю.А. “Справочник по строительной механике корабля”, 1960.

**Приложение 1. Вывод формулы критической нагрузки для
цилиндрической оболочки**

$$a := \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot n^2 + j^2;$$

$$a := \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) n^2 + j^2$$

$$b := \frac{(1 + \nu)}{2} \cdot j \cdot n;$$

$$b := \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) j n$$

$$c := -\nu \cdot j;$$

$$c := -\nu j$$

$$q := \frac{(1 + \nu)}{2} \cdot j \cdot n;$$

$$q := \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) j n$$

$$t := \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot j^2 + n^2;$$

$$t := \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) j^2 + n^2$$

$$y := -n;$$

$$y := -n$$

$$i := \nu \cdot j;$$

$$i := \nu j$$

$$o := \left(\frac{(1 - \nu)}{6} \cdot \frac{h^2}{R^2} \cdot j^2 + 1 \right) \cdot n;$$

$$o := \left(\frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{\nu}{6} \right) h^2 j^2}{R^2} + 1 \right) n$$

$$z := - \left(\frac{h^2}{12 \cdot R^2} \cdot \left((j^2 + n^2)^2 - (\nu \cdot j^2 + n^2) \right) + 1 + \frac{(1 - \nu^2)}{E \cdot h} \cdot S \right);$$

$$z := -\frac{h^2 \left((j^2 + n^2)^2 - v j^2 - n^2 \right)}{12 R^2} - 1 - \frac{(-v^2 + 1) S}{E h}$$

$$p := \begin{bmatrix} a & b & c \\ q & t & y \\ i & o & z \end{bmatrix}$$

$$p := \left[\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right) n^2 + j^2, \left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2} \right) j n, -v j \right], \right. \\ \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2} \right) j n, \left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right) j^2 + n^2, -n \right], \\ \left[v j, \left(\frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{v}{6} \right) h^2 j^2}{R^2} + 1 \right) n, \right. \\ \left. \left. -\frac{h^2 \left((j^2 + n^2)^2 - v j^2 - n^2 \right)}{12 R^2} - 1 - \frac{(-v^2 + 1) S}{E h} \right] \right]$$

$$a1 := \left(\frac{(1-v)}{2} \cdot n^2 + j^2 \right) \cdot \left(\frac{(1-v)}{2} \cdot j^2 + n^2 \right) \cdot \left(-\left(\frac{h^2}{12 \cdot R^2} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left((j^2 + n^2)^2 - (v \cdot j^2 + n^2) \right) + 1 \right) \right);$$

$$a1 := -\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right) n^2 + j^2 \right) \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right) j^2 \right. \\ \left. + n^2 \right) \left(\frac{h^2 \left((j^2 + n^2)^2 - v j^2 - n^2 \right)}{12 R^2} + 1 \right)$$

$$a11 := \text{simplify}(a1);$$

$$a11 := \frac{1}{48 R^2} \left((-n^2 v + 2 j^2 + n^2) (v j^2 - j^2 - 2 n^2) (h^2 j^4 \right. \\ \left. + 2 h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 v j^2 - h^2 n^2 + 12 R^2) \right)$$

$$s := \left(\frac{(1-v)}{2} \cdot n^2 + j^2 \right) \cdot \left(\frac{(1-v)}{2} \cdot j^2 + n^2 \right) \cdot \left(-\frac{(1-v^2)}{E \cdot h} \cdot S \right);$$

$$s := -\frac{\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2}\right)n^2 + j^2\right)\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2}\right)j^2 + n^2\right)(-v^2 + 1)S}{Eh}$$

$$s1 := \text{simplify}(s);$$

$$s1 :=$$

$$-\frac{S((v-1)j^2 - 2n^2)\left(j^2 - \frac{n^2(v-1)}{2}\right)(v-1)(1+v)}{2Eh}$$

$$a2 := c \cdot q \cdot o;$$

$$a2 := -vj^2\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2}\right)n^2\left(\frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{v}{6}\right)h^2j^2}{R^2} + 1\right)$$

$$a22 := \text{simplify}(a2);$$

$$a22 := -\frac{n^2j^2\left(-\frac{(v-1)h^2j^2}{6} + R^2\right)(1+v)v}{2R^2}$$

$$a3 := i \cdot b \cdot y;$$

$$a3 := -vj^2\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2}\right)n^2$$

$$a33 := \text{simplify}(a3);$$

$$a33 := -\frac{vj^2(1+v)n^2}{2}$$

$$a4 := -c \cdot t \cdot i;$$

$$a4 := v^2j^2\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2}\right)j^2 + n^2\right)$$

$$a44 := \text{simplify}(a4);$$

$$a44 := -\frac{((v-1)j^2 - 2n^2)j^2v^2}{2}$$

$$a5 := -b \cdot q \cdot \left(-\left(\frac{h^2}{12 \cdot R^2} \cdot ((j^2 + n^2)^2 - (v \cdot j^2 + n^2)) + 1\right)\right);$$

$$s2 := \left(\frac{(1+v)}{2} \cdot j \cdot n\right) \cdot \left(\frac{(1+v)}{2} \cdot j \cdot n\right) \cdot \left(\frac{(-v^2 + 1)S}{Eh}\right);$$

$$a5 := \left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2}\right)^2 j^2 n^2 \left(\frac{h^2((j^2 + n^2)^2 - vj^2 - n^2)}{12R^2} + 1\right)$$

$$s2 := \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{v}{2}\right)^2 j^2 n^2 (-v^2 + 1) S}{E h}$$

$a55 := \text{simplify}(a5);$

$$a55 := \frac{1}{48 R^2} \left((1 + v)^2 j^2 n^2 (h^2 j^4 + 2 h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 v j^2 - h^2 n^2 + 12 R^2) \right)$$

$a6 := -a \cdot y \cdot o;$

$$a6 := \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2} \right) n^2 + j^2 \right) n^2 \left(\frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{v}{6} \right) h^2 j^2}{R^2} + 1 \right)$$

$a66 := \text{simplify}(a6);$

$$a66 := \frac{\left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right) n^2 \left(j^2 - \frac{n^2 (v-1)}{2} \right)}{R^2}$$

$s22 := \text{simplify}(s2);$

$$s22 := -\frac{(1+v)^3 j^2 n^2 (v-1) S}{4 E h}$$

$s3 := s1 + s22;$

$s3 :=$

$$\begin{aligned} & -\frac{S \left((v-1) j^2 - 2 n^2 \right) \left(j^2 - \frac{n^2 (v-1)}{2} \right) (v-1) (1+v)}{2 E h} \\ & -\frac{(1+v)^3 j^2 n^2 (v-1) S}{4 E h} \end{aligned}$$

$ss := \text{simplify}(s3);$

$$ss := -\frac{S (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}{2 E h}$$

$s0 := \frac{ss}{S}; s00 := \text{simplify}(s0);$

$$s0 := -\frac{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}{2 E h}$$

$$s00 := -\frac{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}{2 E h}$$

$$b1 := \frac{a11}{s0};$$

$$b1 := -\left((-n^2 v + 2j^2 + n^2) (vj^2 - j^2 - 2n^2) (h^2 j^4 + 2h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 v j^2 - h^2 n^2 + 12R^2) E h \right) / \left(24R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v) \right)$$

$$b2 := \frac{a22}{s0};$$

$$b2 := \frac{n^2 j^2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right) v E h}{R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2}$$

$$b3 := \frac{a33}{s0};$$

$$b3 := \frac{v j^2 n^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2}$$

$$b4 := \frac{a44}{s0};$$

$$b4 := \frac{\left((v-1) j^2 - 2n^2 \right) j^2 v^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}$$

$$b5 := \frac{a55}{s0};$$

$$b5 := -\frac{1}{24R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} \left((1+v) j^2 n^2 (h^2 j^4 + 2h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 v j^2 - h^2 n^2 + 12R^2) E h \right)$$

$$b6 := \frac{a66}{s0};$$

$$b6 := -\frac{2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right) n^2 \left(j^2 - \frac{n^2 (v-1)}{2} \right) E h}{R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}$$

$$summ := \frac{ss}{s0} + b1 + b2 + b3 + b4 + b5 + b6;$$

$$\begin{aligned}
\text{summ} := & S - \left((-n^2 v + 2j^2 + n^2) (vj^2 - j^2 - 2n^2) (h^2 j^4 \right. \\
& \left. + 2h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 vj^2 - h^2 n^2 + 12R^2) Eh \right) / \\
& \left(24R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v) \right) \\
& + \frac{n^2 j^2 \left(-\frac{(v-1)h^2 j^2}{6} + R^2 \right) v Eh}{R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} \\
& + \frac{vj^2 n^2 Eh}{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} + \frac{((v-1)j^2 - 2n^2)j^2 v^2 Eh}{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)} \\
& - \frac{1}{24R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} \left((1+v)j^2 n^2 (h^2 j^4 + 2h^2 n^2 j^2 \right. \\
& \left. + h^2 n^4 - h^2 vj^2 - h^2 n^2 + 12R^2) Eh \right) \\
& - \frac{2 \left(-\frac{(v-1)h^2 j^2}{6} + R^2 \right) n^2 \left(j^2 - \frac{n^2(v-1)}{2} \right) Eh}{R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}
\end{aligned}$$

$$b11 := b1 + b5;$$

$$\begin{aligned}
b11 := & - \left((-n^2 v + 2j^2 + n^2) (vj^2 - j^2 - 2n^2) (h^2 j^4 + 2h^2 n^2 j^2 \right. \\
& \left. + h^2 n^4 - h^2 vj^2 - h^2 n^2 + 12R^2) Eh \right) / \left(24R^2 (j^2 \right. \\
& \left. + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v) \right) - \frac{1}{24R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} \left((1 \right. \\
& \left. + v)j^2 n^2 (h^2 j^4 + 2h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 vj^2 - h^2 n^2 \right. \\
& \left. + 12R^2) Eh \right)
\end{aligned}$$

$$b111 := \text{simplify}(b11);$$

$$\begin{aligned}
b111 := & \\
& - \frac{(h^2 j^4 + 2h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 vj^2 - h^2 n^2 + 12R^2) Eh}{12R^2 (v^2 - 1)}
\end{aligned}$$

$$b22 := b2 + b6;$$

$$b22 := \frac{n^2 j^2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right) v E h}{R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} - \frac{2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right) n^2 \left(j^2 - \frac{n^2 (v-1)}{2} \right) E h}{R^2 (j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}$$

$b222 := \text{simplify}(b22);$

$$b222 := \frac{((v+2)j^2 + n^2) E h n^2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right)}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)}$$

$b33 := b3 + b4;$

$$b33 := \frac{v j^2 n^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2} + \frac{((v-1)j^2 - 2n^2) j^2 v^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v-1)^2 (1+v)}$$

$b333 := \text{simplify}(b33);$

$$b333 := \frac{(v j^2 - n^2) v j^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$\text{summl} := \frac{ss}{s0} + b111 + b222 + b333;$

$\text{summl} := S$

$$\begin{aligned} & - \frac{(h^2 j^4 + 2 h^2 n^2 j^2 + h^2 n^4 - h^2 v j^2 - h^2 n^2 + 12 R^2) E h}{12 R^2 (v^2 - 1)} \\ & + \frac{((v+2)j^2 + n^2) E h n^2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right)}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)} \\ & + \frac{(v j^2 - n^2) v j^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)} \end{aligned}$$

$\text{vs} := b222 + b333;$

$$\begin{aligned} \text{vs} := & \frac{((v+2)j^2 + n^2) E h n^2 \left(-\frac{(v-1) h^2 j^2}{6} + R^2 \right)}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)} \\ & + \frac{(v j^2 - n^2) v j^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)} \end{aligned}$$

simplify(vs);

$$\frac{1}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)} \left(\left(\left(-\frac{h^2 (v+2) (v-1) n^2}{6} + R^2 v^2 \right) j^4 + 2 n^2 \left(-\frac{h^2 (v-1) n^2}{12} + R^2 \right) j^2 + R^2 n^4 \right) E h \right)$$

$$w1 := -\frac{h^2 \cdot (v+2) \cdot (v-1) \cdot n^2 \cdot \left((j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1) \right)}{6} \cdot E \cdot h$$

$\cdot j^4$;

$$w1 := -\frac{h^3 (v+2) (v-1) n^2 (j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1) E j^4}{6}$$

$$w2 := \frac{R^2 v^2 \cdot E \cdot h \cdot j^4}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)}$$

$$w2 := \frac{v^2 E h j^4}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$$w3 := -2 \frac{h^2 (v-1) n^2}{12} (j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1) \cdot E \cdot h \cdot j^4 \cdot n^2 j^2;$$

$$w3 := -\frac{h^3 (v-1) n^4 (j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1) E j^6}{6}$$

$$w4 := \frac{2 R^2 n^2 j^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)};$$

$$w4 := \frac{2 n^2 j^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$$w5 := \frac{R^2 n^4 E h}{(j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1)};$$

$$w5 := \frac{n^4 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$$w11 := w1 + w3;$$

$$w11 := -\frac{h^3 (v+2) (v-1) n^2 (j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1) E j^4}{6}$$

$$- \frac{h^3 (v-1) n^4 (j^2 + n^2)^2 R^2 (v^2 - 1) E j^6}{6}$$

$$w111 := \text{simplify}(w11);$$

$$w111 :=$$

$$- \frac{h^3 n^2 R^2 E j^4 (1+v) (v-1)^2 (j^2 + n^2)^2 (n^2 j^2 + v + 2)}{6}$$

$$w22 := w2 + w4 + w5;$$

$$w22 := \frac{v^2 E h j^4}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)} + \frac{2 n^2 j^2 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$$+ \frac{n^4 E h}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$$w222 := \text{simplify}(w22)$$

$$w222 := \frac{E h j^4 v^2 + 2 E h j^2 n^2 + E h n^4}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

$$sy := S + b111 + w111 + w222;$$

$$sy := S$$

$$- \frac{(h^2 j^4 + 2 h^2 j^2 n^2 + h^2 n^4 - h^2 j^2 v - h^2 n^2 + 12 R^2) E h}{12 R^2 (v^2 - 1)}$$

$$- \frac{h^3 n^2 R^2 E j^4 (1+v) (v-1)^2 (j^2 + n^2)^2 (n^2 j^2 + v + 2)}{6}$$

$$+ \frac{E h j^4 v^2 + 2 E h j^2 n^2 + E h n^4}{(j^2 + n^2)^2 (v^2 - 1)}$$

Приложение 2. Вывод формулы критической нагрузки для слоистой цилиндрической оболочки

$$a := \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot n^2 - j^2$$

$$a := \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) n^2 - j^2$$

$$b := \frac{(1 + \nu)}{2} \cdot j \cdot n$$

$$b := \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) j n$$

$$c := -\nu \cdot j$$

$$c := -\nu j$$

$$q := \frac{(1 + \nu)}{2} \cdot j \cdot n$$

$$q := \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) j n$$

$$t := \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot j^2 + n^2$$

$$t := \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) j^2 + n^2$$

$$y := n; y1 := \frac{h^2 \cdot 6}{n};$$

$$y := n$$

$$y1 := \frac{6 h^2}{n}$$

$$i := -\frac{(12)}{h^2} \cdot \nu \cdot j$$

$$i := -\frac{12 \nu j}{h^2}$$

$$o := -\frac{(12)}{h^2} \cdot n$$

$$o := -\frac{12 n}{h^2}$$

$$z := \left(\frac{j^4}{R^2} + \frac{4 \cdot j^2 \cdot n}{R} + \frac{n^4}{R^2} - \frac{12}{h^2} + \left(\frac{R \cdot E \cdot h^3}{12(1 + \nu)} (g \cdot j - u \cdot n) \right) \right);$$

$$z1 := -\left(\frac{j^3}{R} + \frac{2 \cdot j^2 \cdot n}{R} \right);$$

$$z := \frac{j^4}{R^2} + \frac{4j^2 n}{R} + \frac{n^4}{R^2} - \frac{12}{h^2} + \frac{REh^3 (gj - un)}{12 + 12v}$$

$$z1 := -\frac{j^3}{R} - \frac{2j^2 n}{R}$$

$$a3 := -\left(\frac{h^2 \cdot (1+v)}{1-v^2} \cdot j \cdot n + j \cdot n \cdot h^2 + n^2 \cdot h^2 \right);$$

$$a3 := -\frac{h^2 (1+v) j n}{-v^2 + 1} - j n h^2 - n^2 h^2$$

$$a4 := h^2 \cdot n^2 + \frac{h^2 \cdot (1+v)}{1-v^2} \cdot j^2 - R^2 \cdot 6;$$

$$a4 := n^2 h^2 + \frac{h^2 (1+v) j^2}{-v^2 + 1} - 6 R^2$$

$$b3 := \frac{h^2 \cdot (1+v)}{1-v^2} \cdot n^2 + h^2 \cdot j^2 + h^2 \cdot j \cdot n;$$

$$b3 := \frac{h^2 (1+v) n^2}{-v^2 + 1} + h^2 j^2 + j n h^2$$

$$b4 := h^2 \cdot j \cdot n + \frac{h^2 \cdot (1+v)}{1-v^2} \cdot j \cdot n;$$

$$b4 := \frac{h^2 (1+v) j n}{-v^2 + 1} + j n h^2$$

$$b5 := -R \cdot 6;$$

$$b5 := -6 R$$

$$p := \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ q & t & y & y1 & 0 \\ i & o & z & z1 & 0 \\ 0 & 0 & a3 & a4 & 0 \\ 0 & 0 & b3 & b4 & b5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p := & \left[\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) n^2 - j^2, \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) j n, -\nu j, 0, 0 \right], \right. \\
& \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) j n, \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \right) j^2 + n^2, n, \frac{6 h^2}{n}, 0 \right], \\
& \left[-\frac{12 \nu j}{h^2}, -\frac{12 n}{h^2}, \frac{j^4}{R^2} + \frac{4 j^2 n}{R} + \frac{n^4}{R^2} - \frac{12}{h^2} + \frac{R E h^3 (g j - u n)}{12 + 12 \nu}, \right. \\
& \left. -\frac{j^3}{R} - \frac{2 j^2 n}{R}, 0 \right], \\
& \left[0, 0, -\frac{h^2 (1 + \nu) j n}{-\nu^2 + 1} - j n h^2 - n^2 h^2, n^2 h^2 + \frac{h^2 (1 + \nu) j^2}{-\nu^2 + 1} - 6 R^2, 0 \right], \\
& \left. \left[0, 0, \frac{h^2 (1 + \nu) n^2}{-\nu^2 + 1} + h^2 j^2 + j n h^2, \frac{h^2 (1 + \nu) j n}{-\nu^2 + 1} + j n h^2, -6 R \right] \right]
\end{aligned}$$

> |p|

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4(v-1)h^2(1+v)R} \left(-ER^3gh^7j^5n^2v^2 + 2ER^3gh^7j^3n^4v^2 \right. \\
& + ER^3gh^7jn^6v^2 + ER^3h^7j^4n^3uv^2 - 2ER^3h^7j^2n^5uv^2 \\
& - ER^3h^7n^7uv^2 + ER^3gh^7j^7v - ER^3gh^7j^3n^4v - 2ER^3gh^7jn^6v \\
& - ER^3h^7j^6nuv + ER^3h^7j^2n^5uv + 2ER^3h^7n^7uv + 6ER^5gh^5j^5v^2 \\
& - 12ER^5gh^5j^3n^2v^2 - 6ER^5gh^5jn^4v^2 - 6ER^5h^5j^4nuv^2 \\
& + 12ER^5h^5j^2n^3uv^2 + 6ER^5h^5n^5uv^2 - ER^3gh^7j^7 - 3ER^3gh^7j^5n^2 \\
& - ER^3gh^7j^3n^4 + ER^3gh^7jn^6 + ER^3h^7j^6nu + 3ER^3h^7j^4n^3u \\
& + ER^3h^7j^2n^5u - ER^3h^7n^7u - 12ER^5gh^5j^5v + 12ER^5gh^5jn^4v \\
& + 12ER^5h^5j^4nuv - 12ER^5h^5n^5uv + 6ER^5gh^5j^5 + 12ER^5gh^5j^3n^2 \\
& - 6ER^5gh^5jn^4 - 6ER^5h^5j^4nu - 12ER^5h^5j^2n^3u + 6ER^5h^5n^5u \\
& + 12Rh^4j^8nv^3 + 36Rh^4j^7n^2v^3 - 48Rh^4j^6n^3v^3 - 72Rh^4j^5n^4v^3 \\
& + 36Rh^4j^4n^5v^3 - 36Rh^4j^3n^6v^3 + 24Rh^4j^2n^7v^3 - 12h^4j^8n^2v^3 \\
& + 24h^4j^6n^4v^3 + 24h^4j^2n^8v^3 + 12h^4n^{10}v^3 + 24Rh^4j^8nv^2 \\
& - 60Rh^4j^7n^2v^2 - 72Rh^4j^6n^3v^2 - 24Rh^4j^5n^4v^2 + 24Rh^4j^4n^5v^2 \\
& + 60Rh^4j^3n^6v^2 - 24Rh^4j^2n^7v^2 + 12h^4j^{10}v^2 - 12h^4j^8n^2v^2 \\
& + 24h^4j^6n^4v^2 - 24h^4j^4n^6v^2 + 12h^4j^2n^8v^2 - 12h^4n^{10}v^2 \\
& + 288R^3h^2j^6nv^3 - 576R^3h^2j^4n^3v^3 - 288R^3h^2j^2n^5v^3 + 72R^2h^2j^8v^3 \\
& - 144R^2h^2j^6n^2v^3 - 144R^2h^2j^4n^2v^5 - 144R^2h^2j^2n^6v^3 \\
& - 72R^2h^2n^8v^3 - 12Rh^4j^8nv - 36Rh^4j^7n^2v - 96Rh^4j^6n^3v \\
& + 168Rh^4j^5n^4v - 36Rh^4j^4n^5v + 36Rh^4j^3n^6v - 24Rh^4j^2n^7v \\
& - 36h^4j^8n^2v - 24h^4j^6n^4v - 48h^4j^4n^6v - 24h^4j^2n^8v - 12h^4n^{10}v \\
& - 288R^3h^2j^6nv^2 - 576R^3h^2j^4n^3v^2 + 288R^3h^2j^2n^5v^2 \\
& + 864R^2h^4j^3nv^4 + 864R^2h^4j^2n^2v^4 - 72R^2h^2j^8v^2 - 144R^2h^2j^6n^2v^2 \\
& + 144R^2h^2j^6v^4 + 144R^2h^2j^4n^2v^4 - 144R^2h^2j^2n^6v^2 \\
& + 288R^2h^2j^2n^4v^4 + 72R^2h^2n^8v^2 - 24Rh^4j^8n + 60Rh^4j^7n^2 \\
& - 72Rh^4j^6n^3 + 120Rh^4j^5n^4 - 24Rh^4j^4n^5 - 60Rh^4j^3n^6 \\
& + 24Rh^4j^2n^7 - 12h^4j^{10} - 36h^4j^8n^2 - 24h^4j^6n^4 - 24h^4j^4n^6 \\
& - 12h^4j^2n^8 + 12h^4n^{10} + 864R^4j^4v^5 - 288R^3h^2j^6nv \\
& + 576R^3h^2j^4n^3v + 288R^3h^2j^2n^5v + 864R^2h^4j^2n^2v^3 \\
& + 864R^2h^4jn^3v^3 + 864R^2h^4n^4v^3 - 72R^2h^2j^8v + 144R^2h^2j^6n^2v \\
& + 144R^2h^2j^2n^6v - 288R^2h^2j^2n^4v^3 + 72R^2h^2n^8v - 864R^4j^4v^4 \\
& - 1728R^4j^2n^2v^4 + 288R^3h^2j^6n + 576R^3h^2j^4n^3 - 288R^3h^2j^2n^5 \\
& - 864R^2h^4j^3nv^2 + 864R^2h^4j^2n^2v^2 - 1728R^2h^4jn^3v^2 \\
& - 864R^2h^4n^4v^2 + 72R^2h^2j^8 + 144R^2h^2j^6n^2 - 288R^2h^2j^6v^2 \\
& - 288R^2h^2j^4n^2v^2 + 144R^2h^2j^2n^6 - 288R^2h^2j^2n^4v^2 - 72R^2h^2n^8 \\
& - 1728R^4j^4v^3 + 1728R^4j^2n^2v^3 - 3456R^2h^4j^3nv - 864R^2h^4j^2n^2v \\
& - 864R^2h^4jn^3v - 864R^2h^4n^4v + 144R^2h^2j^4n^2v + 288R^2h^2j^2n^4v
\end{aligned}$$



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

Инженерная школа

Кафедра механики и математического моделирования

ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ

на выпускную квалификационную работу студента Рогожина Глеба Евгеньевича

направление подготовки 15.04.03 «Прикладная механика» группа М3208

Руководитель ВКР заведующий кафедрой МиММ Бочарова А.А.

На тему Исследование устойчивости круговой слоистой цилиндрической оболочки на основе уточнённой прикладной теории

Дата защиты ВКР «05» июля 2018 г.

Работа посвящена разработке методики расчета устойчивости цилиндрической оболочки, применяемой для изготовления прочного корпуса подводного аппарата из двуслойного композитного материала металл-стекло, на основе прикладной теории устойчивости, разработанной Пикулем В.В.

В работе рассматривается сравнение применяемых теорий пологих оболочек и технической теории устойчивости с прикладной теорией, которая учитывает энергию межатомных связей, выделяющуюся при разрушении материала. Расчёты показывают, что прикладная теория даёт практически точное решение задачи и должна быть принята в качестве результата сравнения.

Получена система уравнения для определения критической нагрузки по результатам прикладной теории для цилиндрической оболочки из стеклометаллокомпозита.

В целом считаю, что студент Рогожин Г.Е. достоин присуждения степени магистра по направлению подготовки «Прикладная механика». Оценка работы «отлично». Заимствование составляет 23 %.

Руководитель ВКР Бочарова А.А.
Уч. степень и звание

И.О. Фамилия
подпись

Бочарова А.А.
И.О. Фамилия

«02» июля 2018 г.



Собственноручная подпись
г.о.р. Бочарова А.А.
удостоверяется
Сидорова И.В.

Мяскина Н.Г.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени адмирала Г.И. Невельского
(МГУ им. адм. Г.И. Невельского)

РЕЦЕНЗИЯ

на выпускную квалификационную работу студента Рогожина Глеба Евгеньевича

направление подготовки 15.04.03 «Прикладная механика» группа М3208

Руководитель ВКР заведующий кафедрой МиММ Бочарова А.А.

На тему Исследование устойчивости круговой слоистой цилиндрической оболочки на основе уточнённой прикладной теории

Дата защиты ВКР «05» июля 2018 г.

1. Актуальность ВКР: В данной работе разработаны основы методики расчёта устойчивости прочного корпуса подводного аппарата из нового конструкционного материала – стеклометаллокомпозита, обладающего повышенной прочностью при относительно малом весе.

2. Достоинства работы: Применение прикладной теории устойчивости, развитой Пикулем В.В., позволяет получить уточненные результаты при расчете и проектировании цилиндрических оболочек. Результаты хорошо согласуются с численным конечно-элементным моделированием.

3. Недостатки и замечания: Теория устойчивости для слоистого материалы достаточна громоздка для рещения и требует дальнейшей доработки с целью оценки влияния слоев.

4. Целесообразность внедрения: Данная методика расчёта устойчивости цилиндрической оболочки может быть использована как в учебном процессе, так и для моделирования реальных условий эксплуатации глубоководных аппаратов, изготавливаемых методом центробежного литья.

5. Общий вывод Автор работы показал знания теории устойчивости оболочек, умения использования современных численных методов и обработки полученных результатов.

Оценка «отлично».

Рецензент: профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, д.т.н.

«03» июля 2018 г.


подпись

И.Б. Друзь

Подпись Друзь И.Б. заверяю
Специалист на персоналу УК Криборучко Ф.В.

