



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

Кафедра механики и математического моделирования

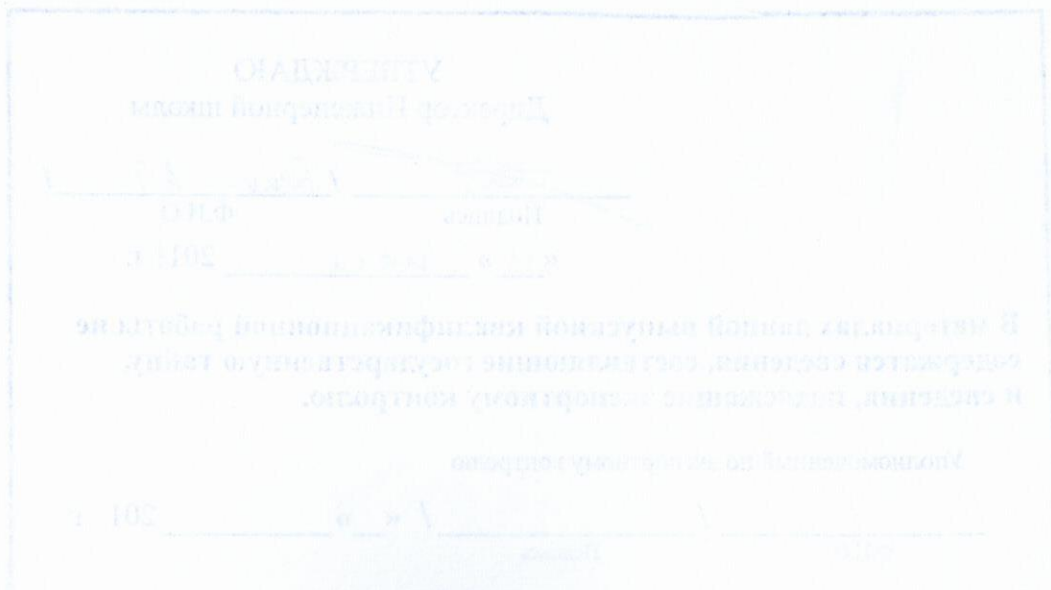
Гнатюк Максим Викторович

ТЕМА РАБОТЫ

Численное моделирование нестационарных течений газа через пористые теплоаккумулирующие элементы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

по направлению подготовки 15.04.03 Прикладная механика,
магистерская программа «Математическое и компьютерное моделирование механических систем и процессов»

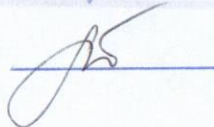


Владивосток
2018

Сведения, содержащие

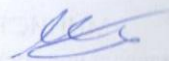
гос. тайну, нет

Эксперт



А.А. Бочарова

Автор работы



(подпись)

« 05 » июля

2018 г.

Консультант(ы)*

(подпись)

(И.О. Фамилия)

« _____ » _____ 2018 г.

Руководитель ВКР

доцент К.Ф.-М.Н.
(должность, учёное звание)


(подпись)

Н.А. Луценко
(И.О. Фамилия)

« 03 » июля

2018 г.

Назначен рецензент

К.Ф.-М.Н.
(учёное звание)

Бризицкий Роман Викторович

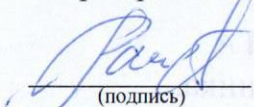
(Фамилия Имя Отчество)

Защищена в ГЭК с оценкой отлично

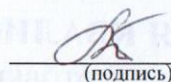
«Допустить к защите»

Секретарь ГЭК

Заведующий кафедрой, доцент



А.А. Ратников


(подпись)


А.А. Бочарова

« 05 » июля 2018 г.

« 14 » июля 2018 г.

УТВЕРЖДАЮ

Директор Инженерной школы

 / Беккер А.Т. /
Подпись Ф.И.О.

« 18 » июля 2018 г.

В материалах данной выпускной квалификационной работы не содержатся сведения, составляющие государственную тайну, и сведения, подлежащие экспортному контролю.

Уполномоченный по экспортному контролю

_____/_____/ « _____ » _____ 2018 г.
Ф.И.О. Подпись

Оглавление

Введение.....	2
Глава 1. Основные уравнения математической модели.....	7
1.1. Постановка задачи	7
1.2 Математическая модель	8
1.3. Начальные условия.....	11
1.4. Обезразмеривание уравнений	13
1.5. Численный метод	18
Глава 2. Результаты решения.....	28
2.1. Тестовая задача	28
2.2. Результаты вычислительных экспериментов о нестационарном режиме нагревания пористого элемента	33
2.3. Результаты вычислительных экспериментов о нестационарном режиме охлаждения пористого элемента.....	41
Заключение	51
Литература	52

Введение

Сегодня быстрое развитие возобновляемых источников энергии (особенно солнечной и ветровой энергии) может эффективно смягчить серьезный энергетический кризис во всем мире. Однако из-за прерывистости и неравномерности производства возобновляемой энергии она не может полностью заменить традиционную тепловую энергию. Накопитель энергии сжатого воздуха (Воздушно-аккумулирующая газотурбинная электростанция, ВАГТЭ, Compressed Air Energy Storage, CAES) является одной из многообещающих систем хранения энергии, позволяющий максимально эффективно использовать энергетический потенциал электростанций, и может принести многочисленные выгоды для работы энергосистем, что в свою очередь, является хорошим дополнением к решению этой проблемы [13, 20].

Накопитель сжатого воздуха аккумулирует энергию в виде сжатого воздуха под высоким давлением в периоды низкой потребности электроэнергии, а затем высвобождает его, пропуская через турбину для выработки электроэнергии, чтобы удовлетворить высокий спрос в течение пикового периода времени. Это позволяет снизить стоимость электроэнергии за счет увеличения КПД, а также обеспечить её бесперебойную подачу потребителю.

Первые из CAES были построены и введены в эксплуатацию в Германии ("Huntorf", сдана в эксплуатацию в 1978 г.) и в США (McIntosh, Алабама, 1991 г.). Обе установки в качестве хранилища используют подземные пещеры, полученные после растворения каменной соли через буровую скважину. Однако такие станции теряют большую часть потенциальной энергии в виде тепла, вырабатываемого на этапе заряда от сжатия воздуха. Затем на этапе разряда расширяющийся газ подогревают энергией от сжигания природного газа. Перспективным развитием в этой области, которое значительно уменьшает потери тепла, является добавление в систему теплообменника, аккумулирующего тепло

от сжатия, а затем использующего его при расширении воздуха [21], такое CAES называется адиабатическим (A-CAES). А за счет повторного использования накопленной тепловой энергии в A-CAES исключается загрязнение атмосферы от горения углеводородов.

Рабочий процесс установки по хранению сжатого воздуха с добавлением теплообменника описывается следующим образом (рис. 1). Во время режима сжатия избыточное электричество, выработанное на электростанции, используется для управления цепью компрессоров. Воздух, проходя через них в процессе сжатия, выделяет тепловую энергию, после чего, проходя через теплообменник, отдает излишки тепловой энергии окружающей среде (стенкам пористой среды). После этого воздух попадает в хранилище сжатого воздуха, в качестве которого может быть подземная пещера или баллоны. Сжатый воздух хранится при высоком давлении и при температуре окружающего пласта. В режиме расширения сжатый воздух, сохраненный под высоким давлением, выпускается и нагревается при прохождении теплообменника (от тепла, накопленного при сжатии), и затем расширяется при прохождении группы турбин. Таким образом, энергия, хранящаяся в сжатом воздухе, преобразуется в электрическую без участия процессов горения. Теоретически общая эффективность адиабатического хранилища энергии сжатого воздуха выше, чем у традиционной технологии хранения сжатого воздуха, поскольку усовершенствованные системы хранения с адиабатическим сжатым воздухом повторно используют тепло, генерируемое в процессе сжатия [18,21].

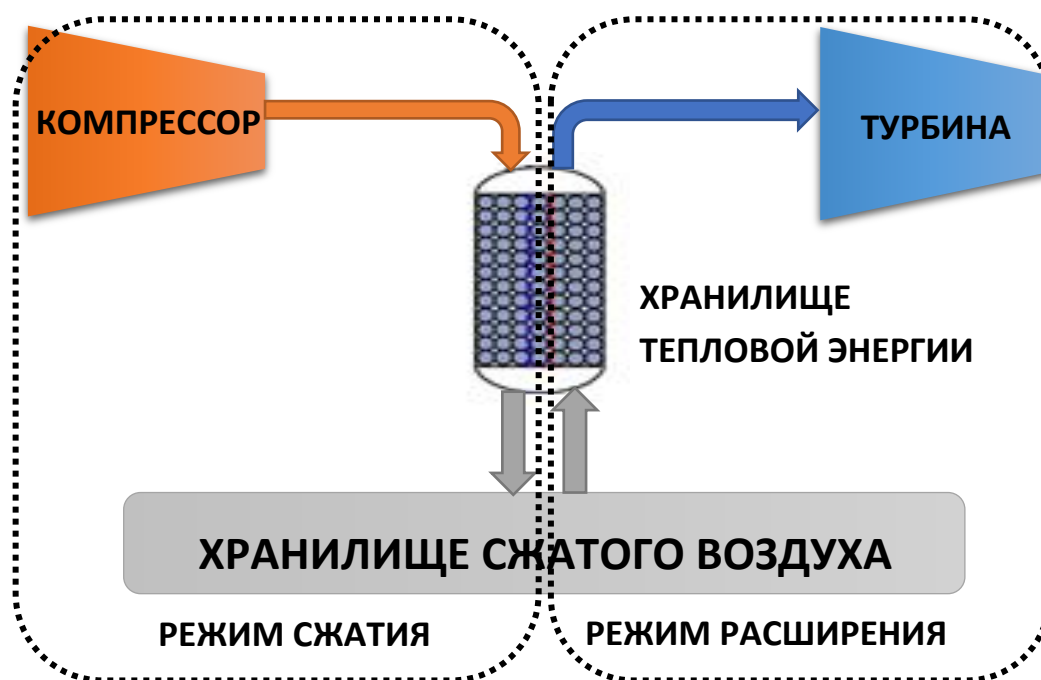


Рис. 1 Схема накопителя энергии сжатого воздуха

В связи с этим пристальный интерес вызывает анализ внутренних задач конвекции в теплообменнике, для выявления наиболее эффективного решения при его проектировании.

Поскольку наполнитель теплообменника в CAES является пористой средой, то движение газа через него можно рассматривать как движение двухкомпонентной гетерогенной среды и описывать методами механики сплошных гетерогенных сред, тогда математическую модель процесса можно построить в рамках модели взаимодействующих континуумов [11,12].

Основы для исследования движения жидкостей через пористые среды, то есть тела, пронизанные системой сообщающихся между собой пустот, были заложены французским инженером Анри Дарси. Он в 1856 г. на основе опытов по фильтрации жидкости через цилиндр, заполненный песком, экспериментально установил, что скорость фильтрации жидкости при движении через пористую среду пропорциональна проницаемости среды и градиенту давления и обратно пропорционально вязкости жидкости. При этом скорость фильтрации направлена в сторону убывания

давления [2,9,19]. Согласно механике сплошных сред [16,17] между жидкостью и газом мало различий и одни и те же законы фильтрации справедливы для обоих состояний.

Большое влияние в развитие теории фильтрации оказали работы Н.Е. Жуковского [3], Н.Н. Павловского [14]. Значительное влияние оказали работы П.Я. Полубариновой-Кочиной [15], чьи исследования в двух сборниках использовались для решения задач гидроэнергетики, нефте- и газодобычи.

В работах [6,7], посвященных исследованию нестационарных процессов охлаждения газом пористых тепловыделяющих объектов, были предложены математическая модель и численный метод, основанный на комбинации явных и неявных конечно-разностных схем. Дальнейшие исследования получили развитие в направлении моделирования движения газа через слой теплоаккумулирующего материала с фазовым переходом, где используется ранее описанный метод с адаптацией к новой модели, а полученные численные расчеты при сравнении с экспериментальными данными демонстрируют хорошее совпадение [4].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить и проанализировать решение задачи о нестационарном охлаждении и нагреве газа пористым объектом.

Для достижения цели поставлены и решены следующие задачи:

- 1) Изучение литературы, связанной с темой работы.
- 2) Выбор математической модели для исследования нестационарного течения газа через пористые среды в вертикальном цилиндре.
- 3) Выбор или разработка численного метода для решения уравнений модели.
- 4) Разработка программного средства, реализующего предложенный численный метод, и его тестирование.
- 5) Получение численного решения поставленной задачи и проведение анализа полученных результатов.

Методы исследования

Математическая модель базируется на классических подходах механики сплошных многокомпонентных сред основанных на идее взаимодействующих континуумов. Численный метод основан на методе конечных разностей с комбинацией явных и неявных конечно-разностных схем, с применением демпфирующих членов для уменьшения дисперсионной ошибки. Для реализации численного метода были написаны алгоритмы на языке C++ в программном продукте Microsoft Visual Studio и MatLab.

Глава 1. Основные уравнения математической модели

1.1. Постановка задачи

Объектом исследования является неподвижный, однородный, пористый объект высотой H , который имеет боковые непроницаемые стенки и пористые элемент, сквозь который может проходить газ. Вертикальные и ровные боковые стенки закрывают пористый материал от окружающей среды и исключают теплопроводность в пристеночных областях. Снизу и сверху объект открыт и в его нижнюю часть с заданным давлением и температурой подается горячий газ (или холодный), который в процессе движения через пористую среду нагревает (или охлаждает) её в результате теплообмена и выходит охлажденным (или нагретым) в открытое пространство (рис. 1.1.1).

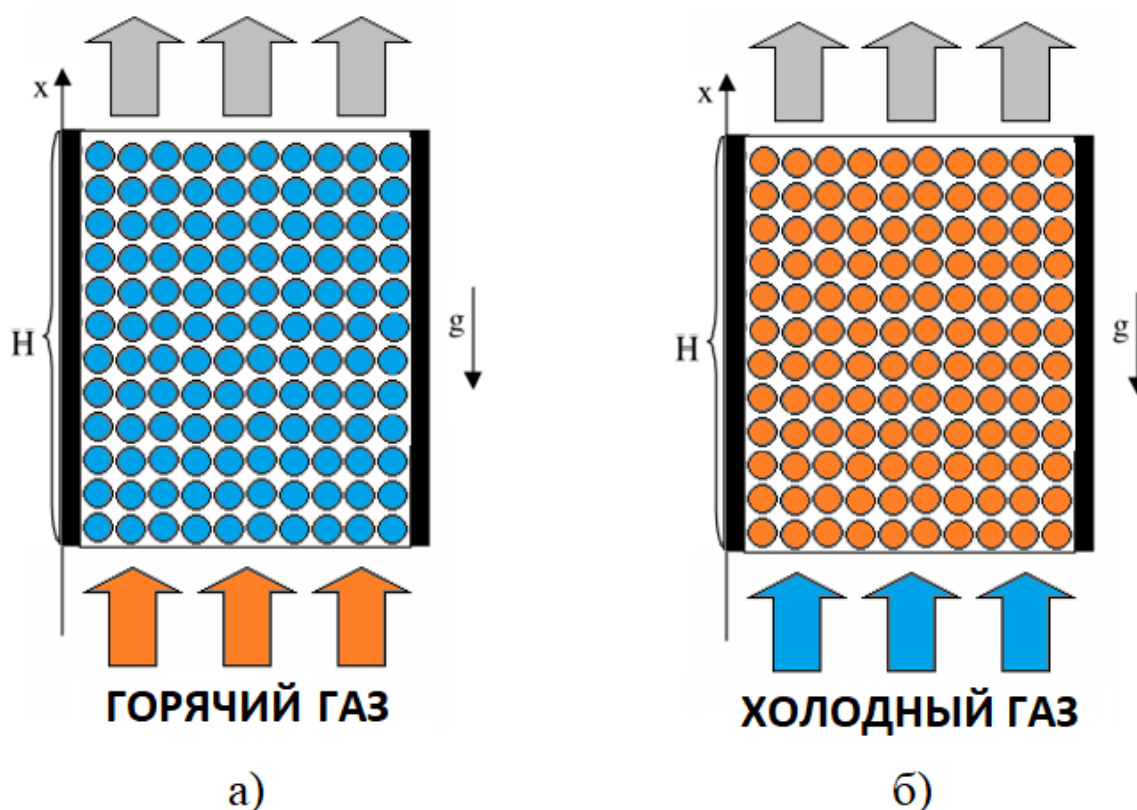


Рис. 1.1.1 Пористый теплоаккумулирующий объект: а) процесс аккумуляции тепла, б) процесс разряда теплоаккумулятора

Пологая, что по горизонтальной переменной отсутствуют изменения параметров и пренебрегая эффектами в пристеночных областях, можно рассматривать задачу относительно одной пространственной переменной изменяющейся по вертикале.

1.2 Математическая модель

Математическую модель описанного процесса будем рассматривать в качестве движения двухкомпонентной сплошной среды, состоящей из твердой и газовой фазы, в рамках модели взаимопроникающего движения двух взаимодействующих континуумов, которые представляют каждую из фаз. Это означает, что при рассмотрении некоторого объема пористой среды, который содержит в себе частицы твердой среды и газа, мы мысленно “размазываем” эти две среды по всему рассматриваемому объёму и полагаем, что в каждой точке этого объема содержится как твердая фаза, так и газовая. Данный подход излагается в работах Р.И. Нигматулина [11-12] и используется в механике сплошных гетерогенных сред, а классическим примером служит теория фильтрации.

Так как фазовые переходы отсутствуют, то масса каждой из фаз сохраняется, и закон сохранения массы для газа можно записать в следующем виде:

$$a \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial a \rho_g v_g}{\partial x} = 0 \quad (1.2.1)$$

где

t – время, с;

x - пространственная переменная, м;

ρ_g – истинная плотность газовой фазы, кг/м³;

v_g - скорость движения газовой фазы, м/с;

a - пористость (относительный объём газовой фазы в двухфазной смеси).

Относительный объём, занятый твердой фазой, будет равен $(1 - a)$. С учетом течения газ в поле силы тяжести уравнение движения принимает следующий вид:

$$\rho_g(1 + \chi(1 - a)) \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_g g - a \frac{\mu}{k_1} v_g \quad (1.2.2)$$

где

p – давление газа, Па;

μ – коэффициент динамической вязкости газа, Па · с;

g – ускорение силы тяжести, м²/2;

k_1 – коэффициент проницаемости твердой фазы, м²;

χ – коэффициент присоединенной массы, учитывающий инерционное взаимодействие фаз при их ускоренном относительном движении.

Уравнение энергии твердой фазы с учётом того, что она неподвижна, а конвективный теплообмен между фазами пропорционален разности температур, имеет следующий вид:

$$(1 - a)\rho_c C_c \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\alpha(T_c - T_g) + (1 - a)\lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \quad (1.2.3)$$

где

T_g – температура газа, К;

T_c – температура твердой фазы, К;

C_c – теплоёмкость твердой фазы, Дж/(кг · К);

λ_c – коэффициент теплопроводности твердой фазы, Вт/(м · К);

ρ_c – плотность конденсированной фазы, кг/м³;

α – константа, определяющая интенсивность межфазового теплообмена, Вт/(м³ · К).

Уравнение энергии газа:

$$a\rho_g C_{gp} \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) = \alpha(T_c - T_g) + a \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_g \frac{\partial p}{\partial x} \right) + a^2 \frac{\mu}{k_1} v_g^2 \quad (1.2.4)$$

где

C_{gp} – теплоёмкость газа, Дж/(кг · К).

Для замыкания системы уравнений, описывающих движение газа в пористой среде, добавим уравнение состояния совершенного газа:

$$p = \rho_g R T_g \quad (1.2.5)$$

где

R – газовая постоянная, Дж/(кг · К).

Для твердой фазы уравнения движения и сохранения массы вырождаются, поскольку она неподвижна и имеет постоянную плотность. Таким образом, конечная система уравнений состоит из пяти уравнений (1.2.1 – 1.2.5) с пятью неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - a)\rho_c C_c \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\alpha(T_c - T_g) + (1 - a)\lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \\ a\rho_g C_{gp} \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) = \alpha(T_c - T_g) + a \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_g \frac{\partial p}{\partial x} \right) + a^2 \frac{\mu}{k_1} v_g^2 \\ \rho_g (1 + \chi(1 - a)) \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_g g - a \frac{\mu}{k_1} v_g \\ a \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial a \rho_g v_g}{\partial x} = 0 \\ p = \rho_g \frac{R}{M} T_g \end{array} \right. \quad (1.2.6)$$

При исследовании неизотермической фильтрации жидкости динамическая вязкость, как правило, полагается зависящей от температуры, однако при моделировании неизотермической фильтрации газа вязкость часто принимается постоянной. Далее будем считать, что динамическая вязкость газа зависит от температуры по формуле Сазерленда [5]:

$$\mu = c_{s1} \frac{T_g^{1.5}}{c_{s2} + T_g} \quad (1.2.7)$$

На открытых границах (входе и выходе) пористого объекта известны условия теплообмена и значение давления. Также на входе известна температура поступающего газа. Таким образом, краевые условия для системы уравнений (2.1.6) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p(x)|_{x=0} &= p_0, \\
 p(x)|_{x=H} &= p_H, \\
 T_g(x)|_{x=0} &= T_{g0}, \\
 \left. \frac{dT_c(x)}{dx} \right|_{x=0} &= \frac{\alpha_*}{\lambda_c} (T_{c0} - T_{g0}), \\
 \left. \frac{dT_c(x)}{dx} \right|_{x=H} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

где

p_0, p_H – известные величины давления на границах пористого элемента;

T_{g0} – температура газа поступающего в нижнюю границу пористого элемента;

α_* - коэффициент теплоотдачи, Дж/(м² · К · с).

1.3. Начальные условия

Для получения расчетных данных для начального момента времени, рассмотрим стационарную задачу с условиями, что в начальный момент никаких процессов не происходит, давление на входе в объект и на выходе из него соответствует атмосферному давлению на заданных высотах, следовательно, движение воздуха в объекте отсутствует, поэтому скорость газа, а следовательно и скорость фильтрации газа $v_g = 0$. Температура газа и теплообменника равна температуре окружающей среды. Тогда система (1.2.6) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 0 = -\alpha(T_c - T_g) \\ u = 0 \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_g g \\ p = \rho_g R T_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_g g \\ \rho_g = \frac{Mp}{RT_g} \end{cases}$$

Подставляем формулу для плотности в дифференциальное уравнение для $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{Mpg}{RT_g}.$$

В результате мы получаем дифференциальное уравнение, описывающее давление газа p как функцию переменной x .

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{Mg}{RT_g} dx.$$

Интегрирование приводит к следующему уравнению:

$$\ln |p| = -\frac{Mg}{RT_g} x + \ln C.$$

Избавляясь от логарифмов, получаем уравнение, из которого следует, что в начальный момент во всей системе давление распределено согласно барометрической формуле.

$$p = Ce^{-\frac{Mgx}{RT_g}}.$$

Константа C определяется из начального условия $p(x)|_{x=0} = p_0$, где p_0 – это среднее атмосферное давление над уровнем моря. Таким образом, зависимость атмосферного давления газа от высоты выражается формулой:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgx}{RT_g}},$$

а система уравнений, описывающая состояние в начальный момент, принимает вид:

$$\begin{cases} T_c = T_g \\ u = 0 \\ p = p_0 e^{-\frac{Mgx}{RT_g}} \\ \rho_g = \frac{p}{RT_g} \end{cases} \quad (1.3.1)$$

1.4. Обезразмеривание уравнений

Рассмотрим нестационарное одномерное движение газа. Будем решать систему (1.2.7) с граничными условиями (1.2.8). Введём понятие скорости фильтрации газа $u = av_g$, которое в дальнейшем будем использовать вместо скорости газа, и перепишем систему уравнений движения газа через пористую среду с её учетом:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-a)\rho_c C_c \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\alpha(T_c - T_g) + (1-a)\lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \\ \rho_g C_{gp} \left(a \frac{\partial T_g}{\partial t} + u \frac{\partial T_g}{\partial x} \right) = \alpha(T_c - T_g) + a \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{k_1} u^2 \\ \frac{\rho_g (1 + \chi(1-a))}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_g g - \frac{\mu}{k_1} u \\ a \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g u}{\partial x} = 0 \\ p = \rho_g \frac{R}{M} T_g \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

Прежде чем перейти к созданию алгоритма для решения уравнений математической модели (1.3.1), необходимо привести эти уравнения к безразмерному виду, т.е. провести операцию обезразмеривания переменных, в результате которой все переменные математической модели будут иметь одинаковый порядок. Для этого введем безразмерные переменные через соотношения:

$$\begin{aligned} t &= t_* \tilde{t}, \\ x &= H \tilde{x}, \\ u &= u_* \tilde{u}, \\ p &= p_* \tilde{p}, \\ \rho_g &= \rho_* \tilde{\rho}_g, \\ T_c &= T_* \tilde{T}_c, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$T_g = T_* \tilde{T}_g,$$

где

t_*, u_* – характерные значения времени и скорости фильтрации газа;

p_*, ρ_*, T_* – давление, плотность, температура газа при «нормальных» условиях, а знак тильда означает безразмерную величину.

Подставим (1.4.2) в исходную систему уравнений (1.4.1) и условия (1.2.8) и получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-a)\rho_c C_c \frac{\partial T_* \tilde{T}_c}{\partial t_* \tilde{t}} = -\alpha(T_* \tilde{T}_c - T_* \tilde{T}_g) + (1-a)\lambda_c \frac{\partial^2 T_* \tilde{T}_c}{\partial (H\tilde{x})^2} \\ \rho_* \tilde{\rho}_g C_{gp} \left(a \frac{\partial T_* \tilde{T}_g}{\partial t_* \tilde{t}} + u_* \tilde{u} \frac{\partial T_* \tilde{T}_g}{\partial H\tilde{x}} \right) = \alpha(T_* \tilde{T}_c - T_* \tilde{T}_g) + \frac{u_*^2 c_{s1} \sqrt{T_*}}{k_1} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \tilde{u}^2 \\ \frac{\rho_* \tilde{\rho}_g (1 + \chi(1-a))}{a} \left(\frac{\partial u_* \tilde{u}}{\partial t_* \tilde{t}} + \frac{u_* \tilde{u}}{a} \frac{\partial u_* \tilde{u}}{\partial H\tilde{x}} \right) = -\frac{\partial p_* \tilde{p}}{\partial H\tilde{x}} - \rho_* \tilde{\rho}_g g - \frac{\mu}{k_1} u_* \tilde{u} \\ a \frac{\partial \rho_* \tilde{\rho}_g}{\partial t_* \tilde{t}} + \frac{\partial \rho_* \tilde{\rho}_g u_* \tilde{u}}{\partial H\tilde{x}} = 0 \\ p_* \tilde{p} = \rho_* \tilde{\rho}_g R T_* \tilde{T}_g \end{array} \right. \quad (1.4.3)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x)|_{x=0} &= \tilde{p}_0, \\ \tilde{p}(x)|_{x=H} &= \tilde{p}_H, \\ \tilde{T}_g(x)|_{x=0} &= \tilde{T}_{g0}, \\ \frac{d\tilde{T}_c(x)}{d\tilde{x}} \Big|_{x=0} &= \frac{\alpha_* H}{\lambda_c} (\tilde{T}_c|_{x=0} - \tilde{T}_{g0}), \\ \frac{d\tilde{T}_c(x)}{d\tilde{x}}(x) \Big|_{x=H} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

После несложных преобразований приведем (1.4.3) к виду:

$$(1-a)\rho_c C_c \frac{T_*}{t_*} \frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial \tilde{t}} = -\alpha T_* (\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + (1-a)\lambda_c \frac{T_*}{H^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}_c}{\partial \tilde{x}^2}$$

$$\begin{aligned} \rho_* \tilde{\rho}_g C_{gp} \left(a \frac{T_*}{t_*} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} + u_* \tilde{u} \frac{T_*}{H} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} \right) &= \alpha T_* (\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \frac{a}{p_* t_*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \\ &+ \frac{u_* p_*}{H} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_*^2 c_{s1} \sqrt{T_*}}{k_1} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \tilde{u}^2 \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

$$\frac{\rho_* \tilde{\rho}_g (1 + \chi(1 - a))}{a} \left(\frac{u_*}{t_*} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_* \tilde{u}}{a} \frac{1}{H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) = - \frac{\partial p_* \tilde{p}}{\partial H \tilde{x}} - \rho_* \tilde{\rho}_g g - \frac{\mu}{k_1} u_* \tilde{u}$$

$$a \frac{\rho_*}{t_*} \frac{\partial \tilde{\rho}_g}{\partial \tilde{t}} + \frac{\rho_* u_*}{H} \frac{\partial \tilde{\rho}_g \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

$$\tilde{p} = \tilde{\rho}_g \tilde{T}_g$$

Рассмотрим первое уравнение (1.4.5) и поделим его на $(1 - a)\rho_c C_c$:

$$\frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial \tilde{t}} = - \frac{\alpha t_*}{(1 - a)\rho_c C_c} (\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \frac{\lambda_c t_*}{\rho_c C_c H^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}_c}{\partial \tilde{x}^2}. \quad (1.4.6)$$

Запишем произведения констант в качестве параметров подобия:

$$\pi_1 = \frac{\alpha t_*}{(1 - a)\rho_c C_c}, \quad (1.4.7)$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_c t_*}{\rho_c C_c H^2}. \quad (1.4.8)$$

Рассмотрим второе уравнение (1.4.5) и раскроем скобки в левой части:

$$\begin{aligned} &\rho_* \tilde{\rho}_g C_{gp} a \frac{T_*}{t_*} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} + \rho_* \tilde{\rho}_g C_{gp} u_* \tilde{u} \frac{T_*}{H} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} \\ &= \alpha T_* (\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \frac{a}{p_* t_*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_* p_*}{H} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_*^2 c_{s1} \sqrt{T_*}}{k_1} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} u^2. \end{aligned}$$

Перенесем $\rho_* \tilde{\rho}_g C_{gp} u_* \tilde{u} \frac{T_*}{H} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}}$ в правую часть и поделим всё уравнение

на $\rho_* \tilde{\rho}_g C_{gp} a$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} = & -\frac{u_* t_*}{aH} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} + \frac{\alpha t_*}{\rho_* C_{gp} a} \frac{(\tilde{T}_c - \tilde{T}_g)}{\tilde{\rho}_g} \frac{p_*}{\rho_* C_{gp} T_*} \frac{\partial \tilde{p}}{\tilde{\rho}_g \partial \tilde{t}} + \\ & + \frac{t_* u_* p_*}{\rho_* C_{gp} a T_* H} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \frac{\tilde{u}}{\tilde{\rho}_g} + \frac{c_{s1} u_*^2 t_*}{k_1 a \rho_* C_{gp} \sqrt{T_*}} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \frac{u^2}{\tilde{\rho}_g} \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Запишем произведения констант в качестве параметров подобия:

$$\frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} = -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} + \pi_4 \frac{(\tilde{T}_c - \tilde{T}_g)}{\tilde{\rho}_g} + \pi_5 \frac{\partial \tilde{p}}{\tilde{\rho}_g \partial \tilde{t}} + \pi_3 \pi_5 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \frac{\tilde{u}}{\tilde{\rho}_g} + \pi_6 \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \frac{u^2}{\tilde{\rho}_g}$$

$$\pi_3 = \frac{u_* t_*}{aH}, \quad (1.4.10)$$

$$\pi_4 = \frac{\alpha t_*}{a \rho_* C_{gp}}, \quad (1.4.11)$$

$$\pi_5 = \frac{p_*}{\rho_* C_{gp} T_*}, \quad (1.4.12)$$

$$\pi_6 = \frac{c_{s1} u_*^2 t_*}{k_1 a \rho_* C_{gp} \sqrt{T_*}}. \quad (1.4.13)$$

Рассмотрим третье уравнение (1.4.5) и раскроем скобки в левой части:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_* \tilde{\rho}_g (1 + \chi(1 - a)) u_*}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{t_* \partial \tilde{t}} + \frac{\rho_* \tilde{\rho}_g (1 + \chi(1 - a)) u_* \tilde{u} u_*}{a H} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \\ & = -\frac{\partial p_* \tilde{p}}{\partial H \tilde{x}} - \rho_* \tilde{\rho}_g g - \frac{c_{s1} u_* \sqrt{T_*}}{k_1} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \tilde{u} \end{aligned}$$

Перенесем $\frac{\rho_* \tilde{\rho}_g (1 + \chi(1 - a)) u_* \tilde{u} u_*}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{a H \partial \tilde{x}}$ в правую часть и поделим всё

уравнение на $\frac{\rho_* \tilde{\rho}_g (1 + \chi(1 - a)) u_*}{a} \frac{u_*}{t_*}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = & -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{at_* p_*}{\rho_* u_* H (1 + \chi(1 - a)) \tilde{\rho}_g} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \frac{at_* g}{u_* (1 + \chi(1 - a))} \\ & - \frac{at_* c_{s1} \sqrt{T_*}}{k_1 \rho_* (1 + \chi(1 - a)) \tilde{\rho}_g} \frac{\tilde{u}}{c_{s2} + \tilde{T}_g} \tilde{T}_g^{1.5}. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Запишем произведения констант в качестве параметров подобия:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\pi_7}{\tilde{\rho}_g} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \pi_8 - \pi_9 \frac{\tilde{u}}{\tilde{\rho}_g} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{c_{s2} + \tilde{T}_g}$$

$$\pi_7 = \frac{p_* at_*}{H \rho_* u_* (1 + \chi(1 - a))}, \quad (1.4.15)$$

$$\pi_8 = \frac{gat_*}{u_* (1 + \chi(1 - a))}, \quad (1.4.16)$$

$$\pi_9 = \frac{at_* c_{s1} \sqrt{T_*}}{k_1 \rho_* (1 + \chi(1 - a))}. \quad (1.4.17)$$

Рассмотрим третье уравнение системы (1.4.5) и переведем плотность газа согласно уравнению Клапейрона-Менделеева:

$$\frac{ap_*}{RT_* t_*} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{T}_g} \right) + \frac{p_* u_*}{RT_* H} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\tilde{T}_g} \right) = 0.$$

Перенесем $\frac{p_* u_*}{RT_* H} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\tilde{T}_g} \right)$ в правую часть и поделим всё уравнение на

$$\frac{ap_*}{RT_* t_*}.$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{T}_g} \right) = - \frac{u_* t_*}{aH} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\tilde{T}_g} \right). \quad (1.4.18)$$

Таким образом, систему уравнений (1.4.5) с учетом преобразований (1.4.6 – 1.4.18) можно переписать в безразмерных переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial \tilde{t}} = -\pi_1(\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \pi_2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_c}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} = -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} + \frac{\pi_4}{\tilde{\rho}_g} (\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \pi_5 \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\tilde{\rho}_g \partial \tilde{t}} + \pi_3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \frac{\tilde{u}}{\tilde{\rho}_g} \right) + \pi_5 \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \frac{u^2}{\tilde{\rho}_g} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\pi_7}{\tilde{\rho}_g} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \pi_8 - \pi_9 \frac{\tilde{u}}{\tilde{\rho}_g} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\rho}_g = -\pi_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{\rho}_g \tilde{u} \\ \tilde{p} = \tilde{\rho}_g \tilde{T}_g \end{array} \right. \quad (1.4.19)$$

1.5. Численный метод

Система уравнений (1.4.19) с краевыми условиями (1.4.4), моделирующая нестационарные одномерные течения газа через пористый объект, является гиперболически-параболической системой уравнений и в общем случае не может быть решена аналитически, поэтому решение получим методом конечных разностей на равномерной сетке с шагом по пространству h и шагом по времени τ , равным rh^2 , где $r = const$. Нижний индекс при искомым сеточных функциях будет обозначать продвижение по пространству, верхний индекс – продвижение по времени. Тогда можно записать систему конечноразностных уравнений, аппроксимирующую исходную систему (1.4.19) со вторым порядком точности по h и первым порядком по τ , и устойчивую при некотором ограничении на r .

Уравнение энергии для твердой фазы в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial \tilde{t}} = -\pi_1(\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \pi_2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_c}{\partial \tilde{x}^2};$$

Преобразуем уравнение энергии твердой фазы в явное конечно-разностное уравнение, из которого определим температуру твердой среды. Заменяем первую производную по времени и вторую производную по пространству конечными разностями:

$$\frac{\partial \tilde{T}_c}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{T}_{cm}^{n+1} - \tilde{T}_{cm}^n}{\tau};$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_c}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\tilde{T}_{cm+1}^n - 2\tilde{T}_{cm}^n + \tilde{T}_{cm-1}^n}{h^2};$$

при этом получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\tilde{T}_{cm}^{n+1} - \tilde{T}_{cm}^n}{\tau} = -\pi_1(\tilde{T}_{cm}^n - \tilde{T}_{gm}^n) + \pi_2 \frac{\tilde{T}_{cm+1}^n - 2\tilde{T}_{cm}^n + \tilde{T}_{cm-1}^n}{h^2}.$$

Выведем \tilde{T}_{cm}^{n+1} и для избавления от знаменателя записи распишем τ как rh^2 :

$$\tilde{T}_{cm}^{n+1} = \tilde{T}_{cm}^n(1 - \pi_1\tau) + \pi_1\tau\tilde{T}_{gm}^n + \pi_2r(\tilde{T}_{cm+1}^n - 2\tilde{T}_{cm}^n + \tilde{T}_{cm-1}^n). \quad (1.5.1)$$

Уравнение энергии для газа в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} = -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} + \frac{\pi_4}{\tilde{\rho}_g} (\tilde{T}_c - \tilde{T}_g) + \pi_6 \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g} \frac{u^2}{\tilde{\rho}_g}$$

Преобразуем уравнение энергии газовой фазы в явное конечно-разностное уравнение, из которого определим температуру газа. Заменяем первую производную по времени конечными разностями, для температуры газа будем использовать трехточечную конечно-разностную аппроксимацию первой производной:

$$\frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{T}_{gm}^{n+1} - \tilde{T}_{gm}^n}{\tau};$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{p}_m^n - \tilde{p}_m^{n-1}}{\tau};$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n}{2h};$$

$$\frac{\partial \tilde{T}_g}{\partial \tilde{x}} = \frac{\pm 3\tilde{T}_{gm}^n \mp 4\tilde{T}_{gm\mp 1}^n \pm \tilde{T}_{gm\mp 2}^n}{2h};$$

при этом получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{T}_{gm}^{n+1} - \tilde{T}_{gm}^n}{\tau} = & -\pi_3 \tilde{u} \frac{\pm 3T_{gm}^n \mp 4T_{gm\mp 1}^n \pm T_{gm\mp 2}^n}{2h} + \frac{\pi_4}{\tilde{\rho}_{gm}^n} (\tilde{T}_{cm}^n - \tilde{T}_{gm}^n) \\ & + \pi_5 \left(\frac{\tilde{p}_m^n - \tilde{p}_m^{n-1}}{\tilde{\rho}_{gm}^n \tau} + \pi_3 \frac{\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n}{2h} \frac{\tilde{u}_m^n}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \right) + \pi_5 \frac{(\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \frac{(\tilde{u}_m^n)^2}{\tilde{\rho}_{gm}^n}. \end{aligned}$$

Оставим слева \tilde{T}_{gm}^{n+1} , а всё остальное перенесем вправо:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{gm}^{n+1} = & \tilde{T}_{gm}^n - \tau \pi_3 \tilde{u}_m^n \frac{\pm 3T_{gm}^n \mp 4T_{gm\mp 1}^n \pm T_{gm\mp 2}^n}{2h} + \frac{\tau \pi_4}{\tilde{\rho}_{gm}^n} (\tilde{T}_{cm}^n - \tilde{T}_{gm}^n) + \\ & + \pi_5 \frac{\tilde{p}_m^n - \tilde{p}_m^{n-1}}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + \frac{\pi_5 \pi_3 \tau}{2h} (\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n) \frac{\tilde{u}_m^n}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + \tau \pi_6 \frac{(\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \frac{(\tilde{u}_m^n)^2}{\tilde{\rho}_{gm}^n}; \\ \tilde{T}_{gm}^{n+1} = & \tilde{T}_{gm}^n \left(1 - \frac{\pi_4 \tau}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \right) - \frac{\pi_3 r h}{2} \tilde{u}_m^n (\pm 3T_{gm}^n \mp 4T_{gm\mp 1}^n \pm T_{gm\mp 2}^n) + \frac{\pi_4 \tau}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \tilde{T}_{cm}^n + \\ & + \pi_5 \frac{\tilde{p}_m^n - \tilde{p}_m^{n-1}}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + \frac{\pi_5 \pi_3 r h}{2} (\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n) \frac{\tilde{u}_m^n}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + \pi_6 \tau \frac{(\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \frac{(\tilde{u}_m^n)^2}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \quad (1.5.2) \end{aligned}$$

В уравнении (1.5.2) знак « \pm » обусловлен возможным изменением направления движения газа: в каждой скобке «+» выбирается при положительной компоненте скорости фильтрации газа, умножаемой на данную скобку, а «-» — при отрицательной компоненте [7, 8].

Уравнение импульса в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = -\pi_3 \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\pi_7}{\tilde{\rho}_g} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - \pi_8 - \pi_9 \frac{\tilde{u}}{\tilde{\rho}_g} \frac{\tilde{T}_g^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_g};$$

Преобразуем уравнение сохранения импульса в явное конечно-разностное уравнение, из которого определим скорость фильтрации газа. Заменяем первые производные по времени и пространству конечными разностями:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tilde{u}_m^{n+1} - \tilde{u}_m^n}{\tau};$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\tilde{u}_{m+1}^n - \tilde{u}_{m-1}^n}{2h};$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n}{2h};$$

при этом получим алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_m^{n+1} - \tilde{u}_m^n}{\tau} = & -\pi_3 \tilde{u}_m^n \frac{\tilde{u}_{m+1}^n - \tilde{u}_{m-1}^n}{2h} - \frac{\pi_7}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \frac{\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n}{2h} - \pi_8 \\ & - \pi_9 \frac{\tilde{u}_m^n (\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{\rho}_{gm}^n \tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \end{aligned}$$

Выведем \tilde{u}_m^{n+1} :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m^{n+1} = & \tilde{u}_m^n \left(1 - \pi_3 \tau \frac{\tilde{u}_{m+1}^n - \tilde{u}_{m-1}^n}{2h} - \frac{\pi_9 \tau (\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{\rho}_{gm}^n \tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \right) - \frac{\pi_7 \tau}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \frac{\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n}{2h} \\ & - \pi_8 \tau; \\ \tilde{u}_m^{n+1} = & \tilde{u}_m^n \left(1 - \frac{\pi_3 r h}{2} (\tilde{u}_{m+1}^n - \tilde{u}_{m-1}^n) - \frac{\pi_9 \tau (\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{\rho}_{gm}^n \tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \right) - \pi_8 \tau \\ & - \frac{\pi_7 r h}{2 \tilde{\rho}_{gm}^n} (\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n). \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Уравнение неразрывности в безразмерных переменных

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{T}_g} \right) = -\pi_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\tilde{T}_g} \right);$$

Преобразуем уравнение неразрывности в неявное конечно-разностное уравнение, из которого, с учетом уравнения состояния совершенного газа, методом прогонки находится давление газа. Заменяем первые производные по времени и пространству конечными разностями:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{T}_g} \right) = \frac{\frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} - \frac{\tilde{p}_m^n}{\tilde{T}_{gm}^n}}{\tau};$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{p}\tilde{u}}{\tilde{T}_g} \right) = \frac{\frac{\tilde{p}_{m+1}^{n+1}\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} - \frac{\tilde{p}_{m-1}^{n+1}\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}}}{2h};$$

при этом получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{\frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} - \frac{\tilde{p}_m^n}{\tilde{T}_{gm}^n}}{\tau} = -\pi_3 \frac{\frac{\tilde{p}_{m+1}^{n+1}\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} - \frac{\tilde{p}_{m-1}^{n+1}\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}}}{2h};$$

Умножим уравнение на $\tau = rh^2$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} &= \frac{\tilde{p}_m^n}{\tilde{T}_{gm}^n} - \frac{\pi_3 rh}{2} \left(\frac{\tilde{p}_{m+1}^{n+1}\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} - \frac{\tilde{p}_{m-1}^{n+1}\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}} \right) \\ \tilde{p}_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{\pi_3 rh}{2} \frac{\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}} \right) &+ \frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} + \tilde{p}_{m+1}^{n+1} \left(\frac{\pi_3 rh}{2} \frac{\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} \right) = \frac{\tilde{p}_m^n}{\tilde{T}_{gm}^n} \\ \tilde{p}_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{\pi_3 rh}{2} \frac{\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}} \right) &+ \frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} + \tilde{p}_{m+1}^{n+1} \left(\frac{\pi_3 rh}{2} \frac{\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_{gm}^n, \quad (1.5.4) \end{aligned}$$

Каждое разностное уравнение для нахождения давления, содержит на каждом слое три неизвестных значения $\tilde{p}_{m-1}^{n+1}, \tilde{p}_m^{n+1}, \tilde{p}_{m+1}^{n+1}$, для нахождения которых необходимо решать трёхдиагональную матрицу. Для этого будем использовать метод прогонки. Заменим $const4 = \frac{\pi_3 rh}{2}$.

$$\tilde{p}_{m-1}^{n+1} \left(-const4 \frac{\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} + \tilde{p}_{m+1}^{n+1} \left(const4 \frac{\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_{gm}^n$$

При $m=2$;

$$\tilde{p}_1^{n+1} \left(-const4 \frac{\tilde{u}_1^{n+1}}{\tilde{T}_{g1}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{p}_2^{n+1}}{\tilde{T}_{g2}^{n+1}} + \tilde{p}_3^{n+1} \left(const4 \frac{\tilde{u}_3^{n+1}}{\tilde{T}_{g3}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_2^n$$

Перенесем неизвестные влево, известные вправо

$$\frac{\tilde{p}_2^{n+1}}{\tilde{T}_{g2}^{n+1}} + \tilde{p}_3^{n+1} \left(const4 \frac{\tilde{u}_3^{n+1}}{\tilde{T}_{g3}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_2^n - \tilde{p}_1^{n+1} \left(-const4 \frac{\tilde{u}_1^{n+1}}{\tilde{T}_{g1}^{n+1}} \right)$$

$$b_2 \tilde{p}_2^{n+1} + c_2 \tilde{p}_3^{n+1} = d_2$$

$$b_2 = \frac{1}{\tilde{T}_{g2}^{n+1}},$$

$$c_2 = \left(const4 \frac{\tilde{u}_3^{n+1}}{\tilde{T}_{g3}^{n+1}} \right),$$

$$d_2 = \tilde{\rho}_2^n - \tilde{p}_1^{n+1} \left(-const4 \frac{\tilde{u}_1^{n+1}}{\tilde{T}_{g1}^{n+1}} \right)$$

Из (3) выразим \tilde{p}_2^{n+1} :

$$\tilde{p}_2^{n+1} = \frac{d_2}{b_2} - \frac{c_2}{b_2} \tilde{p}_3^{n+1} = \alpha_2 \tilde{p}_3^{n+1} + \beta_2, \quad (1.5.5)$$

где $\alpha_2 = -\frac{c_2}{b_2}$, $\beta_2 = \frac{d_2}{b_2}$.

При m=3:

$$\tilde{p}_2^{n+1} \left(-const4 \frac{\tilde{u}_2^{n+1}}{\tilde{T}_{g2}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{p}_3^{n+1}}{\tilde{T}_{g3}^{n+1}} + \tilde{p}_4^{n+1} \left(const4 \frac{\tilde{u}_4^{n+1}}{\tilde{T}_{g4}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_3^n$$

$$a_3 \tilde{p}_2^{n+1} + b_3 \tilde{p}_3^{n+1} + c_3 \tilde{p}_4^{n+1} = d_3, \quad (1.5.6)$$

где

$$a_3 = -const4 \frac{\tilde{u}_2^{n+1}}{\tilde{T}_{g2}^{n+1}},$$

$$b_3 = \frac{1}{\tilde{T}_{g3}^{n+1}},$$

$$c_3 = \text{const}4 \frac{\tilde{u}_4^{n+1}}{\tilde{T}_{g4}^{n+1}},$$

$$d_3 = \tilde{\rho}_3^n.$$

Подставляем выражение (1.5.5) в (1.5.6):

$$a_3(\alpha_2 \tilde{p}_3^{n+1} + \beta_2) + b_3 \tilde{p}_3^{n+1} + c_3 \tilde{p}_4^{n+1} = d_3$$

Теперь оно содержит две неизвестных, выразим \tilde{p}_3^{n+1} :

$$\tilde{p}_3^{n+1} = -\frac{c_3}{b_3 + a_3 \alpha_2} \tilde{p}_4^{n+1} + \frac{d_3 - a_3 \beta_2}{b_3 + a_3 \alpha_2} = \alpha_3 \tilde{p}_4^{n+1} + \beta_3,$$

где

$$\alpha_3 = -\frac{c_3}{b_3 + a_3 \alpha_2},$$

$$\beta_3 = \frac{d_3 - a_3 \beta_2}{b_3 + a_3 \alpha_2}.$$

Продолжим вычислять значения α_m , β_m пока не дойдем до последнего уравнения.

При $m=x-3$:

$$\tilde{p}_{x-4}^{n+1} \left(-\text{const}4 \frac{\tilde{u}_{x-4}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-4}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{p}_{x-3}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-3}^{n+1}} + \tilde{p}_{x-2}^{n+1} \left(\text{const}4 \frac{\tilde{u}_{x-2}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-2}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_{x-3}^n$$

Перенесем неизвестные влево, известные вправо

$$\tilde{p}_{x-4}^{n+1} \left(-\text{const}4 \frac{\tilde{u}_{x-4}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-4}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{p}_{x-3}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-3}^{n+1}} = \tilde{\rho}_{x-3}^n - \tilde{p}_{x-2}^{n+1} \left(\text{const}4 \frac{\tilde{u}_{x-2}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-2}^{n+1}} \right)$$

$$a_{x-3} \tilde{p}_{x-4}^{n+1} + b_{x-3} \tilde{p}_{x-3}^{n+1} = d_{x-3}$$

где

$$a_{x-3} = -\text{const}4 \frac{\tilde{u}_{x-4}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-4}^{n+1}},$$

$$b_{x-3} = \frac{1}{\tilde{T}_{gx-3}^{n+1}},$$

$$d_{x-3} = \tilde{\rho}_{x-3}^n - \tilde{\rho}_{x-2}^{n+1} \left(\text{const4} \frac{\tilde{u}_{x-2}^{n+1}}{\tilde{T}_{gx-2}^{n+1}} \right)$$

$$a_{x-3}(\alpha_{x-4}\tilde{\rho}_{x-3}^{n+1} + \beta_{x-4}) + b_{x-3}\tilde{\rho}_{x-3}^{n+1} = d_{x-3}$$

$$\tilde{\rho}_{x-3}^{n+1} = \beta_{x-3} = \frac{d_{x-3} - a_{x-3}\beta_{x-4}}{b_{x-3} + a_{x-3}\alpha_{x-4}}$$

Зная $\tilde{\rho}_{x-3}^{n+1}$, можно найти $\tilde{\rho}_{x-4}^{n+1} = \alpha_{x-4}\tilde{\rho}_{x-3}^n + \beta_{x-4}$. Зная $\tilde{\rho}_{x-4}^{n+1}$, можно найти $\tilde{\rho}_{x-5}^{n+1} = \alpha_{x-5}\tilde{\rho}_{x-4}^n + \beta_{x-5}$. С каждым шагом узнаем значение новой переменной, номер которой на 1 меньше предыдущей. Так добираемся до $m = 2$. Все переменные найдены, задача решена.

Плотность газа рассчитывается из уравнения состояния совершенного газа.

Таким образом, система уравнений (1.4.19) преобразуется:

$$\begin{aligned} T_m^{n+1} &= T_m^n(1 - \pi_1\tau) + \pi_1\tau T_{gm}^n + \pi_2r(T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n); \\ \tilde{T}_{gm}^{n+1} &= \tilde{T}_{gm}^n \left(1 - \frac{\pi_4\tau}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \right) - \frac{\pi_3rh}{2} \tilde{u}_m^n (\pm 3T_{gm}^n \mp 4T_{gm\mp 1}^n \pm T_{gm\mp 2}^n) + \frac{\pi_4\tau}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \tilde{T}_{cm}^n + \\ &+ \pi_5 \frac{\tilde{\rho}_m^n - \tilde{\rho}_m^{n-1}}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + \frac{\pi_5\pi_3rh}{2} (\tilde{\rho}_{m+1}^n - \tilde{\rho}_{m-1}^n) \frac{\tilde{u}_m^n}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + \pi_6\tau \frac{(\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \frac{(\tilde{u}_m^n)^2}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \\ \tilde{u}_m^{n+1} &= \tilde{u}_m^n \left(1 - \frac{\pi_3rh}{2} (\tilde{u}_{m+1}^n - \tilde{u}_{m-1}^n) - \frac{\pi_9\tau}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \frac{(\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \right) - \pi_8\tau \\ &- \frac{\pi_7rh}{2\tilde{\rho}_{gm}^n} (\tilde{\rho}_{m+1}^n - \tilde{\rho}_{m-1}^n); \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

$$\tilde{\rho}_{m-1}^{n+1} \left(-\frac{\pi_3rh}{2} \frac{\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{\rho}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} + \tilde{\rho}_{m+1}^{n+1} \left(\frac{\pi_3rh}{2} \frac{\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_{gm}^n;$$

$$\rho_m^{n+1} = \frac{p_m^{n+1}}{T_{gm}^{n+1}};$$

Для удобства описания алгоритмов произведения констант запишем в новые постоянные величины:

$$const1 = -\pi_1 \tau,$$

$$const1_1 = 1 + const1,$$

$$const2 = \pi_2 r,$$

$$const3 = \pi_4 \tau,$$

$$const4 = \frac{\pi_3 r h}{2},$$

$$const5 = \pi_6 \tau,$$

$$const6 = \pi_9 \tau,$$

$$const7 = \pi_8 \tau,$$

$$const8 = \frac{\pi_7 r h}{2},$$

$$const9 = \pi_5 const4,$$

Тогда система уравнений (1.5.5) примет вид:

$$T_m^{n+1} = T_m^n const1_1 - const1 T_{gm}^n + const2 (T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n);$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{gm}^{n+1} = & \tilde{T}_{gm}^n \left(1 - \frac{const3}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \right) - const4 \tilde{u}_m^n (\pm 3T_{gm}^n \mp 4T_{gm\mp 1}^n \pm T_{gm\mp 2}^n) \\ & + \frac{const3}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \tilde{T}_{cm}^n + \pi_5 \frac{\tilde{p}_m^n - \tilde{p}_m^{n-1}}{\tilde{\rho}_{gm}^n} + const9 (\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n) \frac{\tilde{u}_m^n}{\tilde{\rho}_{gm}^n} \\ & + const5 \frac{(\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5} (\tilde{u}_m^n)^2}{\tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n \tilde{\rho}_{gm}^n}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m^{n+1} = \tilde{u}_m^n & \left(1 - \text{const4}(\tilde{u}_{m+1}^n - \tilde{u}_{m-1}^n) - \frac{\text{const6} (\tilde{T}_{gm}^n)^{1.5}}{\tilde{\rho}_{gm}^n \tilde{c}_{s2} + \tilde{T}_{gm}^n} \right) - \text{const7} \\ & - \frac{\text{const8}}{\tilde{\rho}_{gm}^n} (\tilde{p}_{m+1}^n - \tilde{p}_{m-1}^n) - \omega_1; \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

$$\tilde{p}_{m-1}^{n+1} \left(-\text{const4} \frac{\tilde{u}_{m-1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm-1}^{n+1}} \right) + \frac{\tilde{p}_m^{n+1}}{\tilde{T}_{gm}^{n+1}} + \tilde{p}_{m+1}^{n+1} \left(\text{const4} \frac{\tilde{u}_{m+1}^{n+1}}{\tilde{T}_{gm+1}^{n+1}} \right) = \tilde{\rho}_{gm}^n - \omega_2;$$

$$\rho_m^{n+1} = \frac{p_m^{n+1}}{T_{gm}^{n+1}};$$

где

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega_1^*} (\tilde{u}_{m+2}^n - 4\tilde{u}_{m+1}^n + 6\tilde{u}_m^n - 4\tilde{u}_{m-1}^n + \tilde{u}_{m-2}^n).$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\omega_2^*} (\tilde{p}_{m+2}^n - 4\tilde{p}_{m+1}^n + 6\tilde{p}_m^n - 4\tilde{p}_{m-1}^n + \tilde{p}_{m-2}^n).$$

Здесь ω_1, ω_2 – демпфирующие члены, необходимые для уменьшения дисперсионной ошибки. Такая ошибка может возникать из-за нелинейности системы уравнений, которая в данном случае может приводить к колебаниям получаемого решения, при этом сами демпфирующие члены не изменяют формальную точность решения [7,8].

Алгоритм решения системы уравнений. Конечными-разностями решаем первое – третье уравнения системы (1.5.6), далее методом прогонки решаем четвертое уравнение и затем тривиально решаем пятое. Также необходимо задать значения давления и температуры газа в фиктивных точках, расположенных за пределами пористого элемента.

Глава 2. Результаты решения

2.1. Тестовая задача

Протестируем правильность работы алгоритмов, решив одномерную задачу о нестационарном режиме охлаждения газом, протекающим через твёрдую пористую неподвижную среду, в которой происходит процесс саморазогрева пористого элемента. Подобное решение задачи было предложено для описания процесса охлаждения аварийного реактора на четвертом энергоблоке ЧАЭС [6-8,10].

Дополним уравнение энергии твердой фазы слагаемым, отвечающим за тепловыделение в твердой фазе $Q_0(1-a)C$:

$$(1-a)\rho_c C_c \frac{\partial T_c}{\partial t} = -\alpha(T_c - T_g) + Q_0(1-a)C + (1-a)\lambda_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}, \quad (2.1.1)$$

где

Q_0 – константа, определяющая интенсивность тепловыделения, $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$;

C – относительная концентрация реагирующего вещества;

Скорость убывания концентрации реагирующего вещества прямо пропорциональна самой концентрации:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k_2 C, \quad (2.1.2)$$

где

k_2 – коэффициент, определяющий уменьшение тепловыделения, с^{-1} ;

Расписав в полную производную (2.1.2) и решив при условии, что в начальный момент времени $C|_{t=0} = 1$, получим выражение для концентрации реагирующего вещества:

$$C = \exp(-k_2 t). \quad (2.1.3)$$

Подставив (2.1.2) в (2.1.1) и обезразмерив полученное уравнение выведем уравнение притока тепла в безразмерных переменных:

$$T_m^{n+1} = T_m^n(1 - \pi_1\tau) + \pi_1\tau T_{gm}^n + Q \exp(-\varepsilon\tau) + \pi_2r(T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n), \quad (2.1.4)$$

с параметрами подобия:

$$Q = \frac{Q_0 t_*}{\rho_c C_c T_*},$$

$$\varepsilon = k_2 t_*$$

Решения системы (1.4.6) с учетом преобразований (2.1.1-2.1.4) и крайевыми условиями получены из (1.3.5) при следующих значениях:

$$p_0 = 1.5; T_{g0} = 1; p_h = 1; \quad (2.1.5)$$

Для рассматриваемого решения системы безразмерные параметры примут значения:

$$\pi_1 = 7.06 \cdot 10^{-4}; \pi_2 = 5.93 \cdot 10^{-9}; \pi_3 = 0.333;$$

$$\pi_4 = 2.778; \pi_5 = 2.34 \cdot 10^{-2}; \pi_6 = 1.85 \cdot 10^3;$$

$$\pi_7 = 2.179; \pi_8 = 4.68 \cdot 10^2, Q = 1.65 \cdot 10^{-4}; \varepsilon = 10^{-7};$$

Они соответствуют следующим размерным величинам:

$$H = 10 \text{ м}; t_* = 1 \text{ с}; u_* = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}; T_* = 300 \text{ К};$$

$$p_* = 10^5 \text{ Па}; \rho_* = 1.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \rho_c = 2.2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; C_c = 9.2 \cdot 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\alpha = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; C_{gp} = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; k_1 = 10^{-8} \text{ м}^2;$$

$$a_* = 10 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; c_{s1} = 1.458 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2; c_{s2} = 110.4 \text{ К}; \quad (2.1.3)$$

$$R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}; \lambda = 1.2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; a = 0.3; k_2 = 10^{-7} \text{с}^{-1};$$

$$Q_0 = 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}};$$

На рис 2.1.1-2.1.5 представлено решение системы уравнений (2.1.1) с краевыми условиями (2.1.2) и с набором значений размерных величин (2.1.3). Более подробно о решении и результатах, представленных на графиках, описано в статье [7].

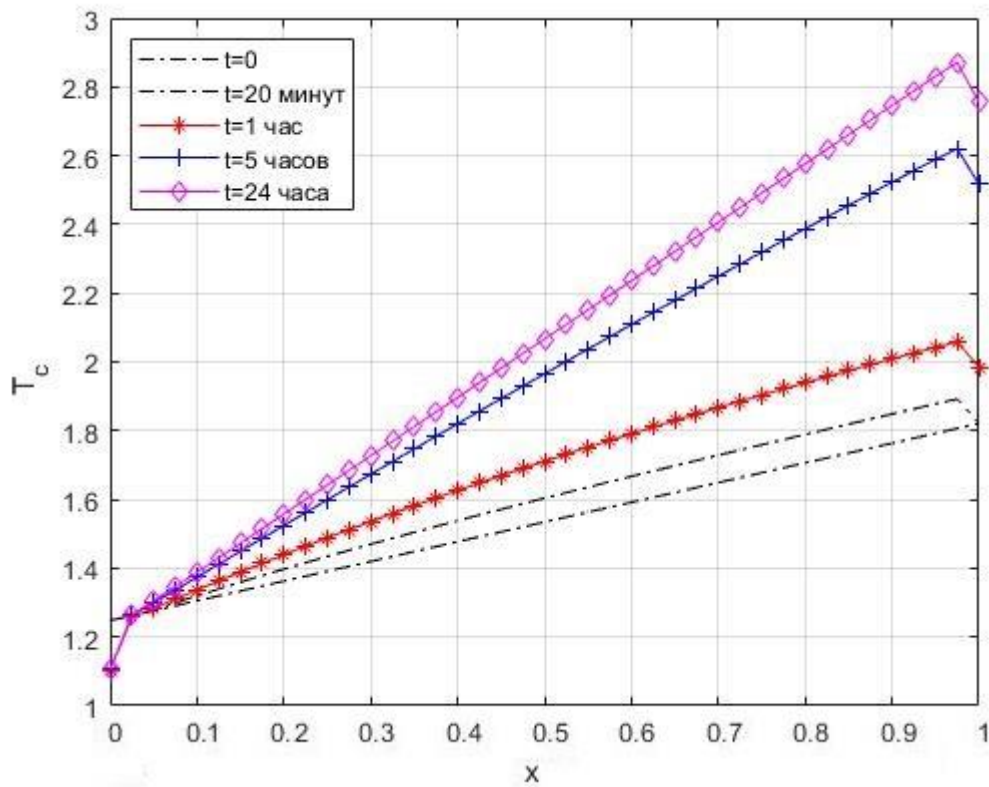


Рис. 2.1.1 Температура твердой фазы

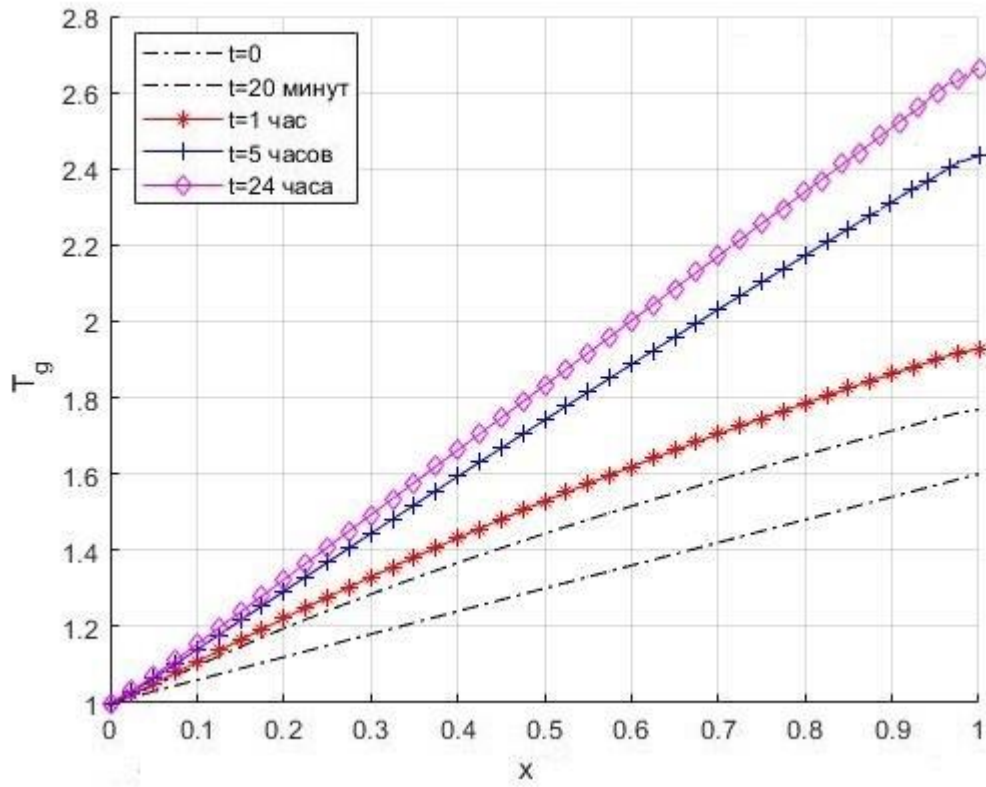


Рис. 2.1.2 Температура газа

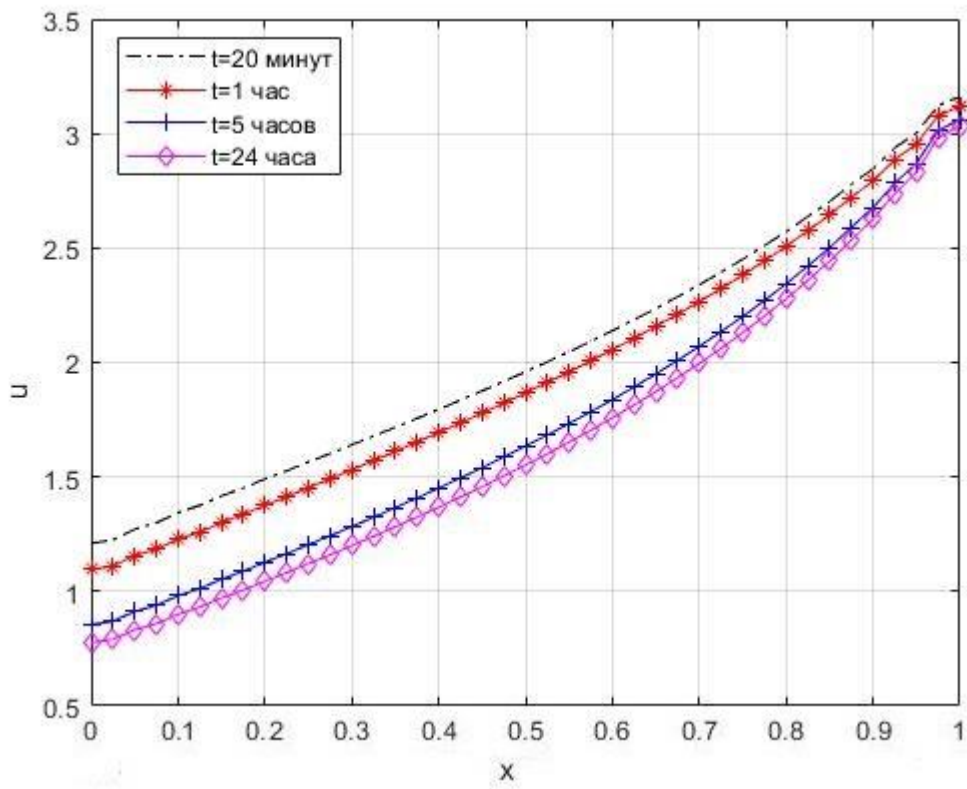


Рис. 2.1.3 Скорость фильтрации газа

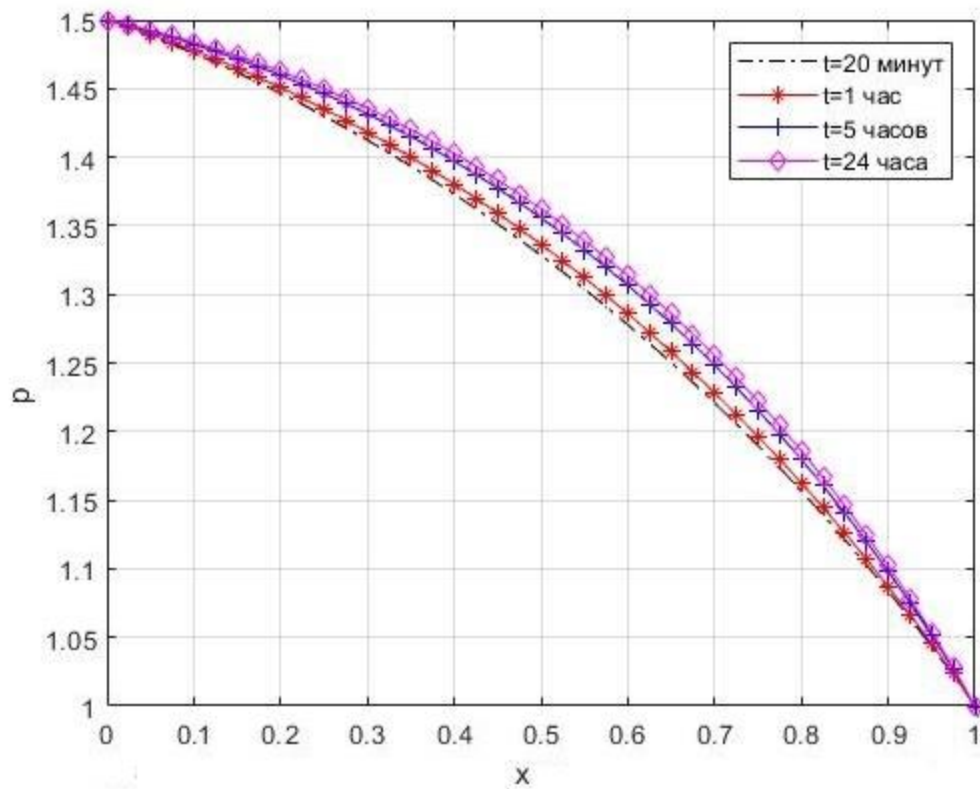


Рис. 2.1.4 Давление

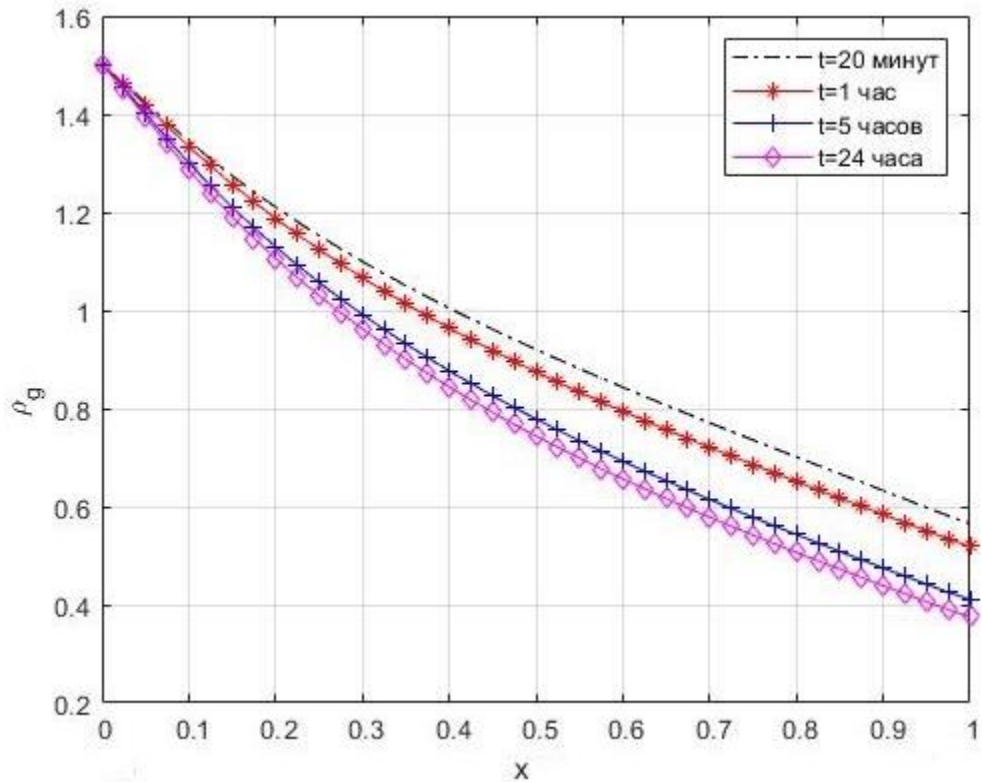


Рис. 2.1.5 Плотность газа

Сравнение полученных результатов тестовой задачи с результатами, полученными в [7], показывает, что реализованный алгоритм для решения математической модели, представленной в виде системы уравнений (1.5.6) с краевыми условиями (1.4.4), работает корректно.

2.2. Результаты вычислительных экспериментов о нестационарном режиме нагрева пористого элемента

Для определения основных закономерностей течения горячего газа через пористый объект анализируем решение системы (1.4.6) с краевыми условиями (1.4.4). В качестве начальных условий выбиралось стационарное решение из (1.3.1). Пусть давление на входе в пористый объект резко достигает 1.5 атм и после этого остается постоянным. На выходе из пористого элемента газ попадает в свободное пространство с постоянным давлением 1 атм. Температура газа на входе составляет 400 К и не меняется.

$$p_0 = 1.5 \text{ атм}; T_{g0} = 400 \text{ К}; p_h = 1 \text{ атм}; \quad (2.2.1)$$

Пусть свойства твердой среды близки к свойствам бетона, а параметры газовой фазы соответствуют воздуху. Тогда для рассматриваемого решения системы безразмерные параметры примут значения:

$$\pi_1 = 7.06 \cdot 10^{-4}; \pi_2 = 5.93 \cdot 10^{-9}; \pi_3 = 0.333;$$

$$\pi_4 = 2.778; \pi_5 = 2.34 \cdot 10^{-2}; \pi_6 = 1.85 \cdot 10^3;$$

$$\pi_7 = 2.179; \pi_8 = 4.68 \cdot 10^2.$$

Они соответствуют следующим размерным величинам:

$$H = 10 \text{ м}; t_* = 1 \text{ с}; u_* = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}; T_* = 300 \text{ К};$$

$$p_* = 10^5 \text{ Па}; \rho_* = 1.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \rho_c = 2.2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; C_c = 9.2 \cdot 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\alpha = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; C_{gp} = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; k_1 = 10^{-8} \text{м}^2;$$

$$a_* = 10 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; c_{s1} = 1.458 \cdot 10^{-8} \text{м}^2; c_{s2} = 110.4 \text{К}; \quad (2.2.2)$$

$$R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}; \lambda = 1.2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; a = 0.3.$$

На рисунках 2.2.1-2.2.5 показано распределение температуры фаз, плотности газа, давления, скорости фильтрации по высоте пористого объекта. Через четыре часа после начала течения горячего газа твердая фаза достаточно прогрелась. Однако для перехода системы к стационарному режиму, когда температура твердой среды стала равной температуре газа, потребовалось чуть более пяти часов.

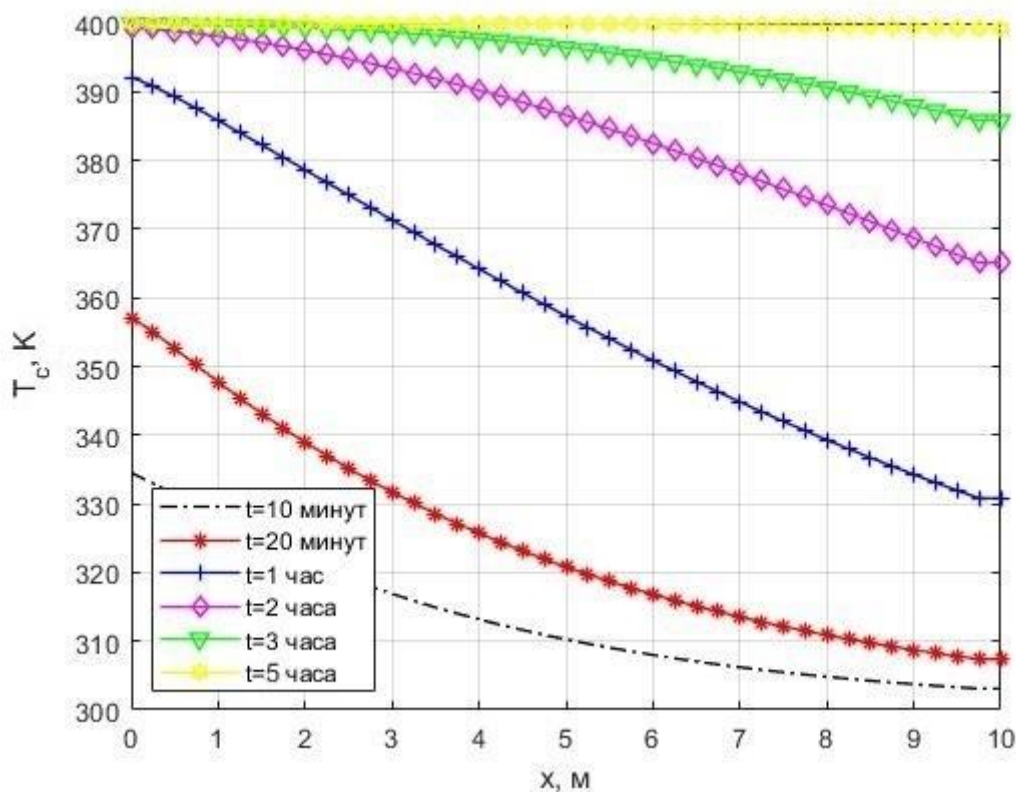


Рис. 2.2.1 Температура твердой фазы

Из рисунка 2.2.1 видно, что температура твердой фазы на входе в пористый объект быстро возрастет, что приводит к быстрому изменению всех остальных параметров. Рост температуры газа со временем приводит к уменьшению плотности газа. При разогреве, газу становится сложнее проходить через пористый объект, и скорость фильтрации уменьшается. В сочетании с уменьшением перепада температур это приводит к тому, что с течением времени скорость изменения температуры уменьшается.

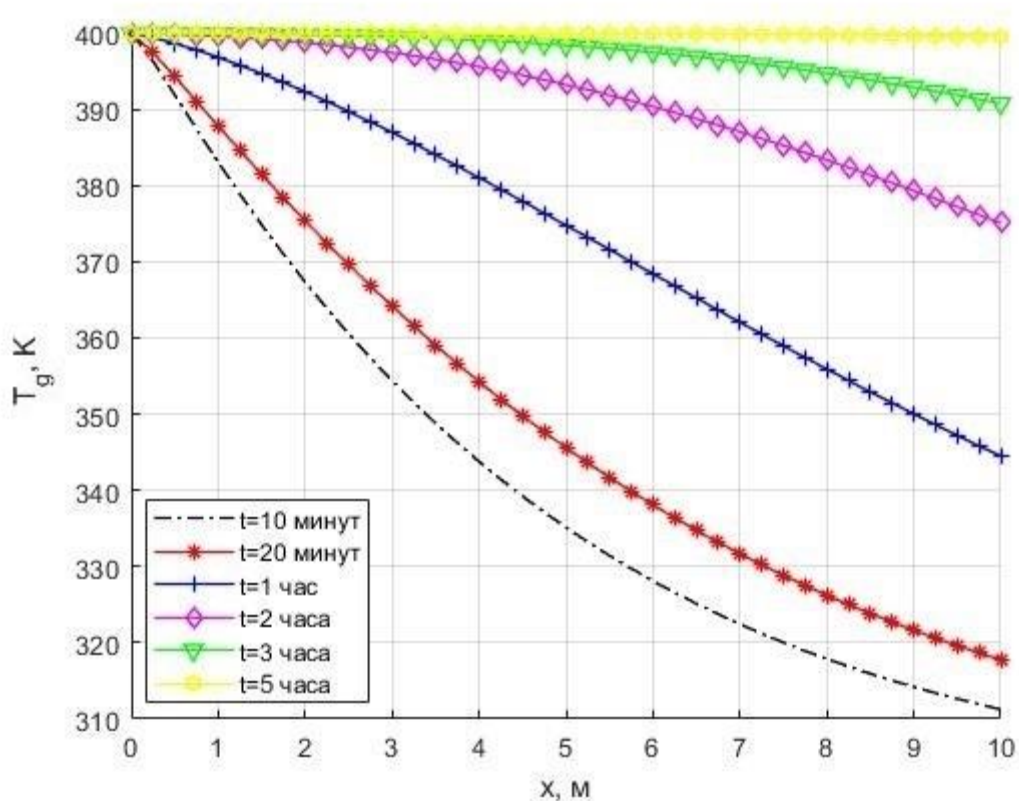


Рис. 2.2.2 Температура газа

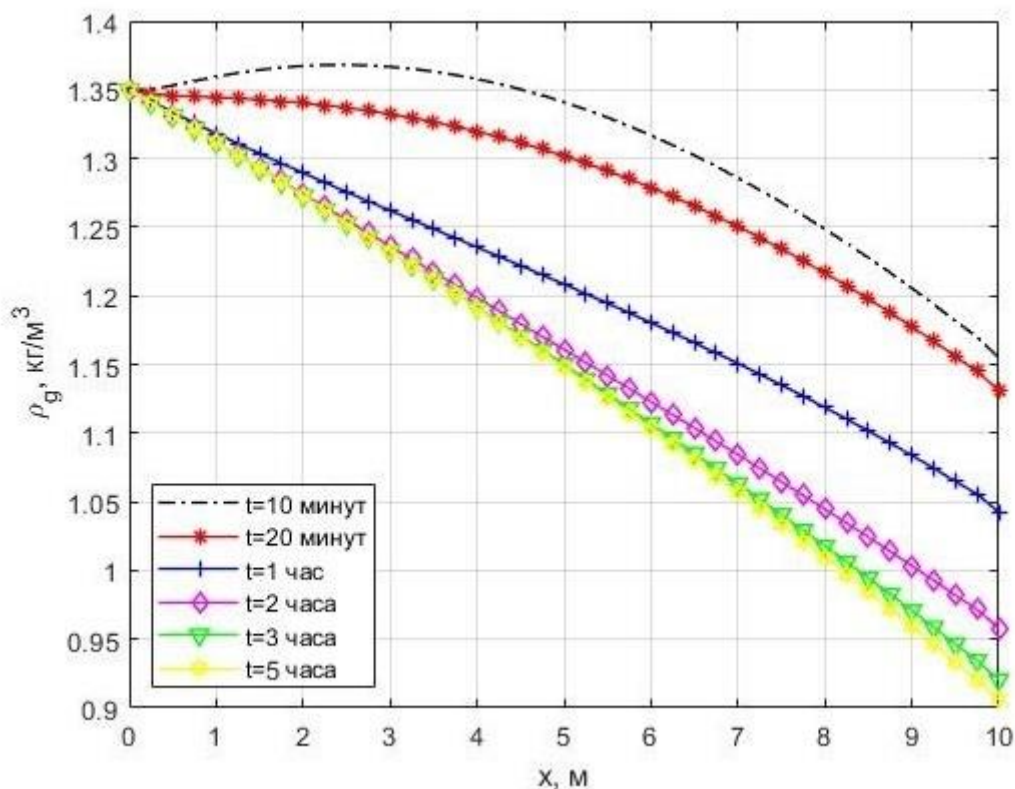


Рис. 2.2.3 Плотность газа

На рисунке 2.2.3 кривая для 10 минут показывает, как в первое время происходит возрастание плотности газа (достигая максимального значения 1.34 кг/м^3 при $x = 2.5 \text{ м}$), а затем его уменьшение. Данный эффект связан с интенсивным уменьшением температуры газа (кривая температуры газа на начальном этапе имеет выпуклость вниз). Газ, доходя до $x = 2.5 \text{ м}$, отдает большую часть своей тепловой энергии пористой среде, при этом давление уменьшается лишь на 25%, что и приводит к возрастанию плотности. Это явление сохраняется до тех пор, пока изменение температуры газа вдоль пористого элемента не придет к более плавному виду.

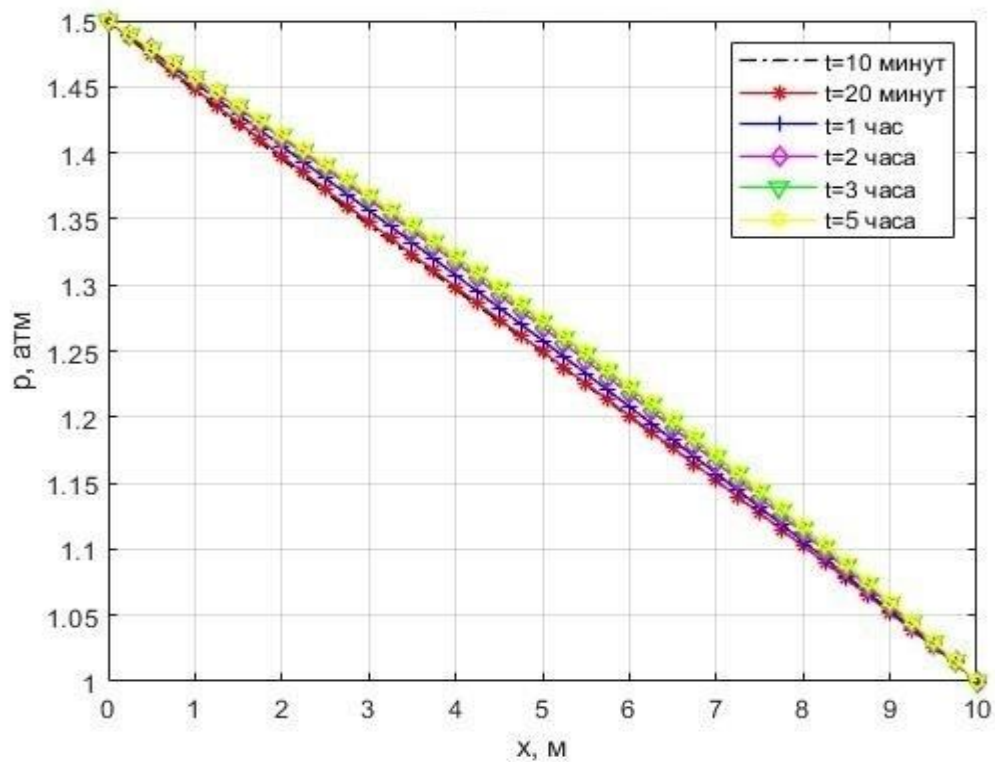


Рис. 2.2.4 Давление

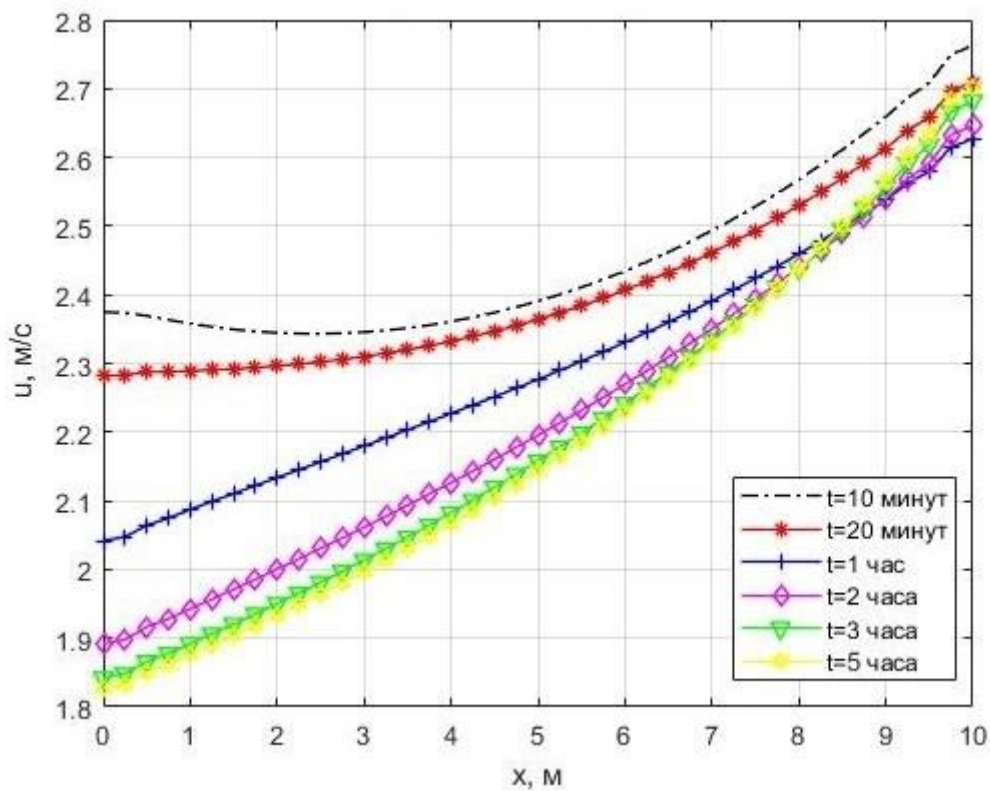


Рис. 2.2.5 Скорость фильтрации газа

На рисунке 2.2.5 показано распределение скорости фильтрации газа, из которого видно, что кривая для $t = 10$ минут сначала убывает до значения 2.34 м/с, а затем идет на увеличение. При этом минимум скорости находится в той же точке пористого элемента, что и максимум плотности газа. С течением времени средняя скорость фильтрации газа уменьшается, однако при рассмотрении кривой для $t = 4$ часов видно, что скорость фильтрации вдоль пористого элемента возрастает быстрее, чем при $t = 20$ мин или 1 часу. Всё это указывает на то, что плотность газа существенно влияет на скорость фильтрации.

На рисунке 2.2.6 показано изменение со временем температур твердой и газовой фаз на выходе из пористого элемента.

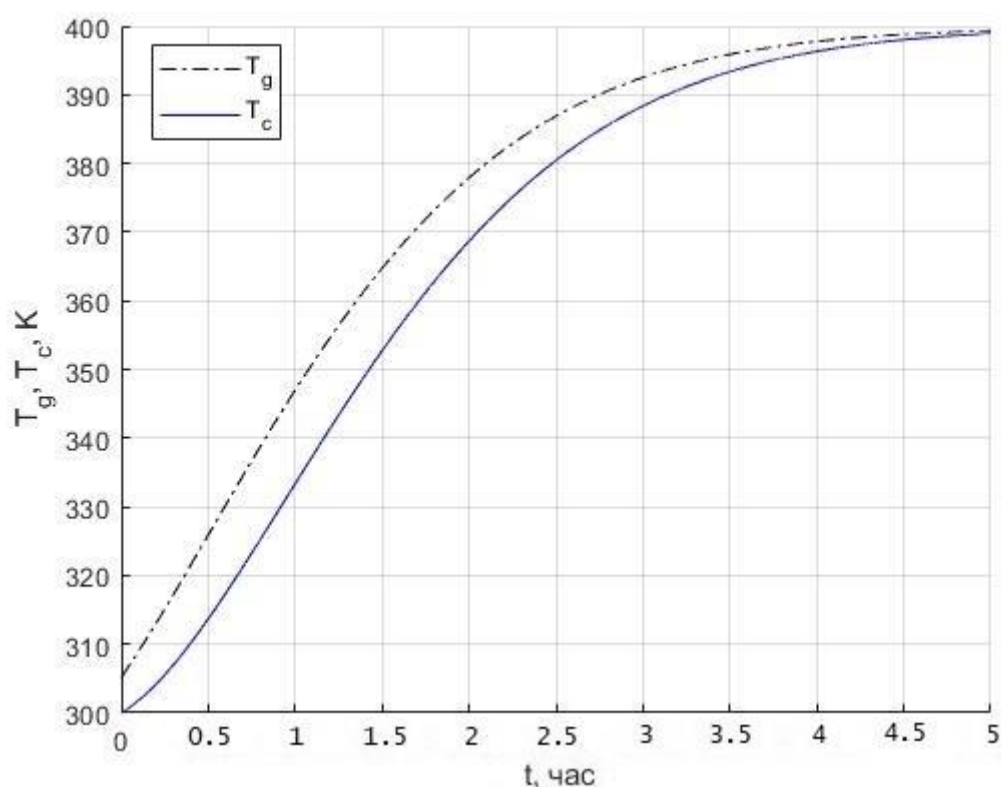


Рис. 2.2.6 Изменение температур фаз на выходе

Рассмотрим влияние пористости на нестационарный режим нагрева пористого объекта.

На рисунках 2.2.7 и 2.2.9 представлены графики изменения температуры твердой и газовой фазы для различной пористости при одинаковом моменте времени, а на рисунках 2.2.8 и 2.2.10 – разница температур фаз на выходе из пористого элемента при различной пористости. Здесь и в дальнейшем под разностью температур понимается выражение $T|_{a_{i+1}} - T|_{a_i}$, при $t = 30$ минут,

где a_i – пористость $a_i \in (0.9:0.1)$

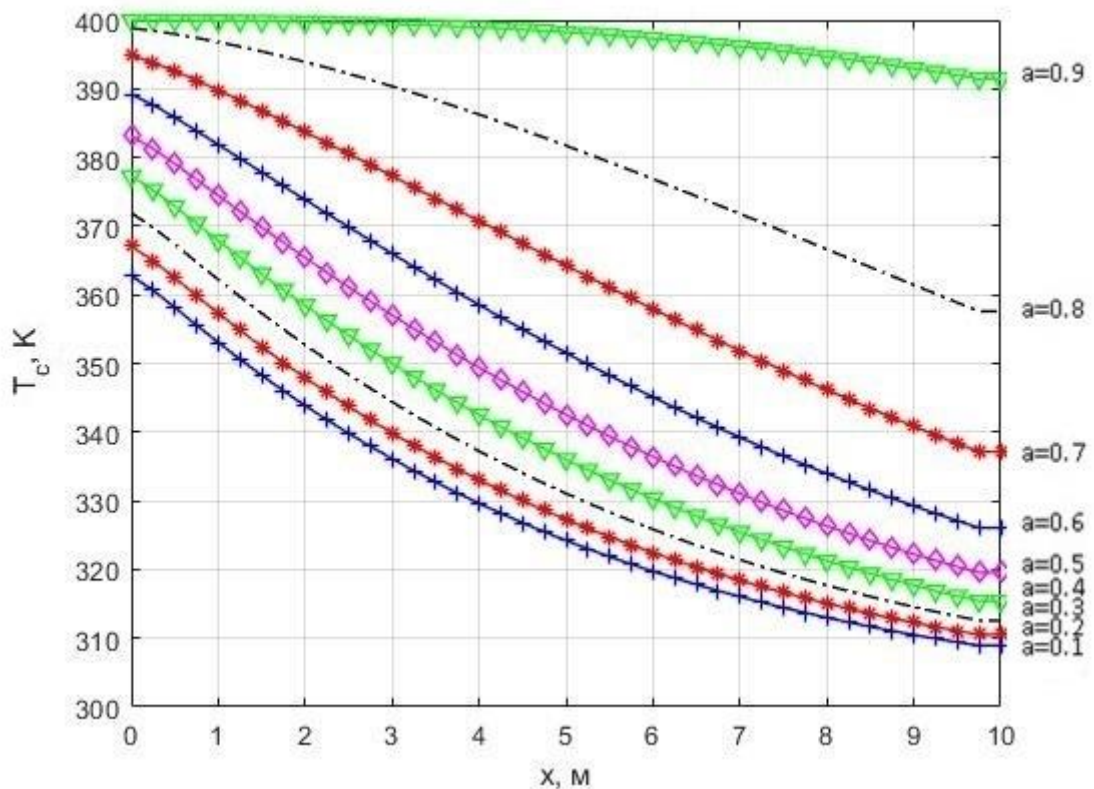


Рис. 2.2.7 Температура твердой фазы

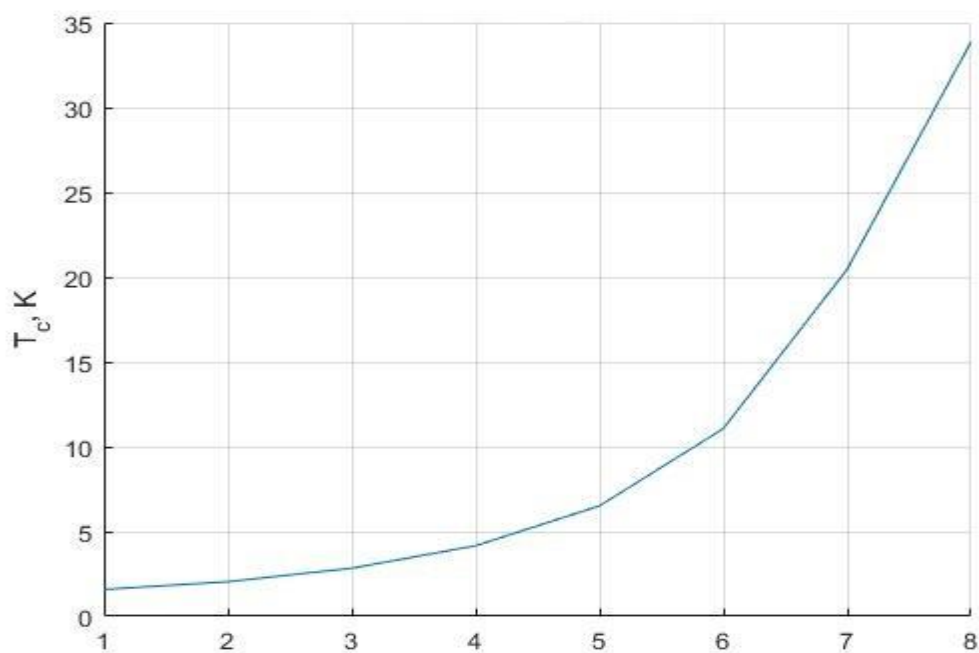


Рис. 2.2.8 Разница температур твердой фазы на выходе из пористого элемента при различной пористости

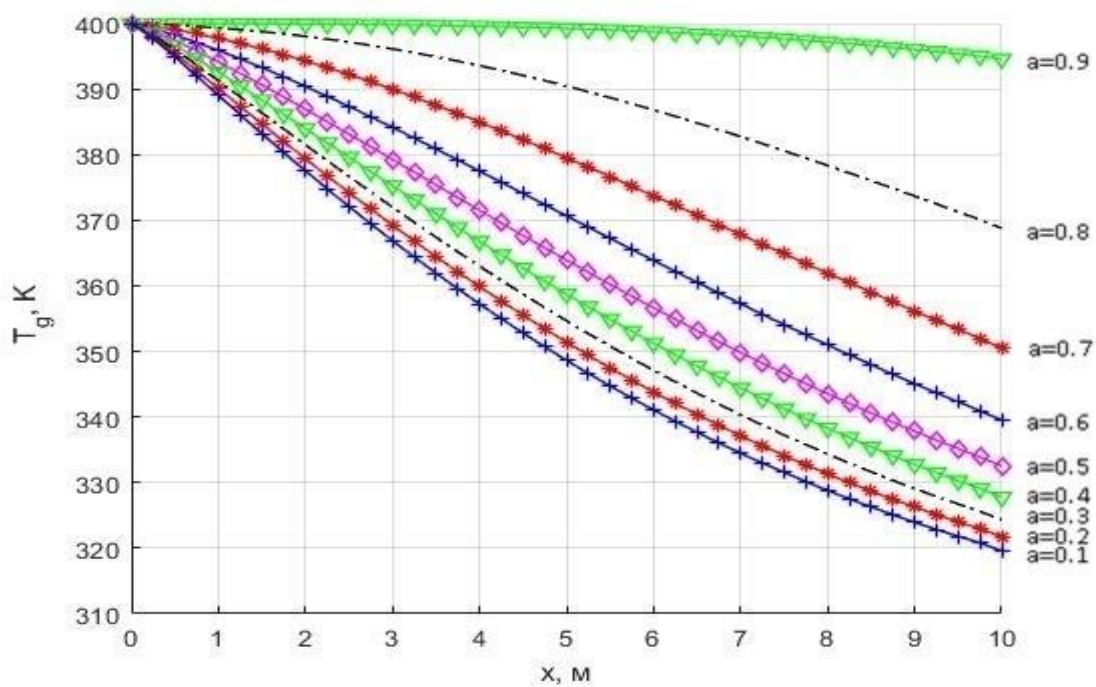


Рис. 2.2.9 Температура газа

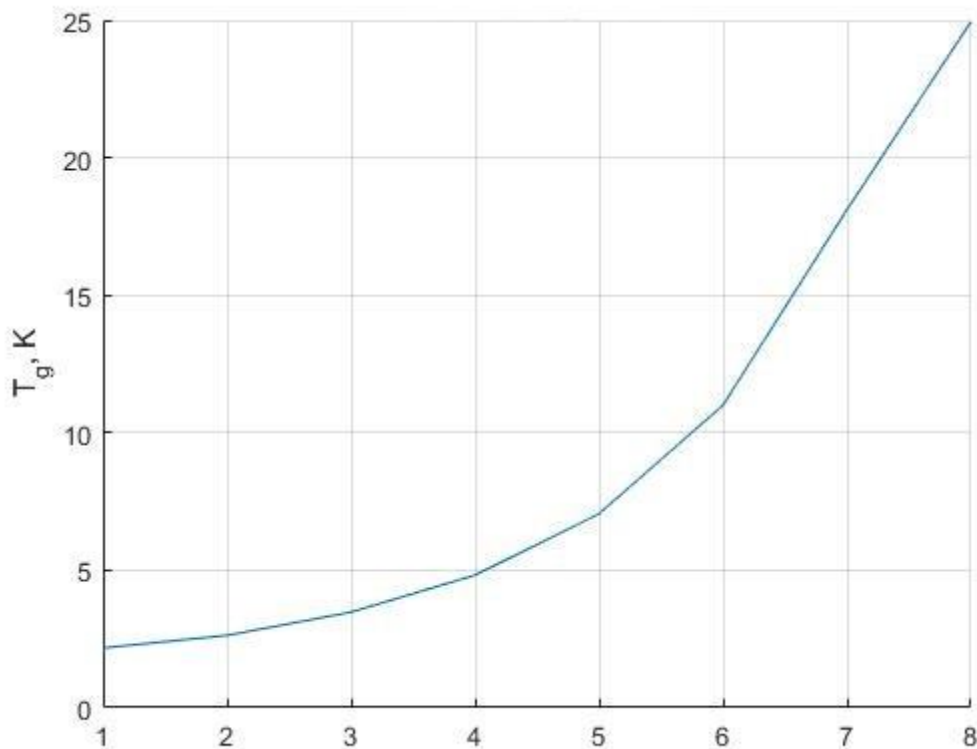


Рис. 2.2.10 Разница температур газа на выходе из пористого элемента при различной пористости

Пористость напрямую связана с площадью поверхности твердой фазы. Из увеличения пористости следует увеличение площади соприкосновения твердой фазы с газовой. Также с увеличением пористости растет расход протекающего через элемент газа и уменьшается масса твердой среды в пористом элементе. За счет этого общая скорость теплообмена и нагрев твердой фазы увеличиваются.

2.3. Результаты вычислительных экспериментов о нестационарном режиме охлаждения пористого элемента

Рассмотрим результаты вычислений для течения холодного газа через неподвижный разогретый пористый объект. Пусть давление на входе в пористый объект резко достигает 1.5 атм и после этого остается постоянным. На выходе из пористого элемента газ попадает в свободное

пространство с постоянным давлением 1 атм. Температура газа на входе составляет 300 К и не меняется.

$$p_0 = 1.5 \text{ атм}; T_{g0} = 300 \text{ К}; p_h = 1 \text{ атм}; \quad (2.3.1)$$

Пусть свойства твердой среды близки к свойствам бетона, а параметры газовой фазы соответствуют воздуху. Тогда для рассматриваемого решения системы безразмерные параметры примут значения:

$$\pi_1 = 7.06 \cdot 10^{-4}; \pi_2 = 5.93 \cdot 10^{-9}; \pi_3 = 0.333;$$

$$\pi_4 = 2.778; \pi_5 = 2.34 \cdot 10^{-2}; \pi_6 = 1.85 \cdot 10^3;$$

$$\pi_7 = 2.179; \pi_8 = 4.68 \cdot 10^2.$$

Они соответствуют следующим размерным величинам:

$$H = 10 \text{ м}; t_* = 1 \text{ с}; u_* = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}; T_* = 300 \text{ К};$$

$$p_* = 10^5 \text{ Па}; \rho_* = 1.2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \rho_c = 2.2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; C_c = 9.2 \cdot 10^2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$\alpha = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; C_{gp} = 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; k_1 = 10^{-8} \text{ м}^2;$$

$$a_* = 10 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}}; c_{s1} = 1.458 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2; c_{s2} = 110.4 \text{ К}; \quad (2.3.2)$$

$$R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}; \lambda = 1.2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}; a = 0.3.$$

На рисунках 2.3.1-2.3.5 показано распределение температуры фаз, плотности газа, давления, скорости фильтрации по высоте пористого объекта. Через пять часов после начала течения холодного газа, пористый объект полностью остыл, и система пришла к стационарному режиму.

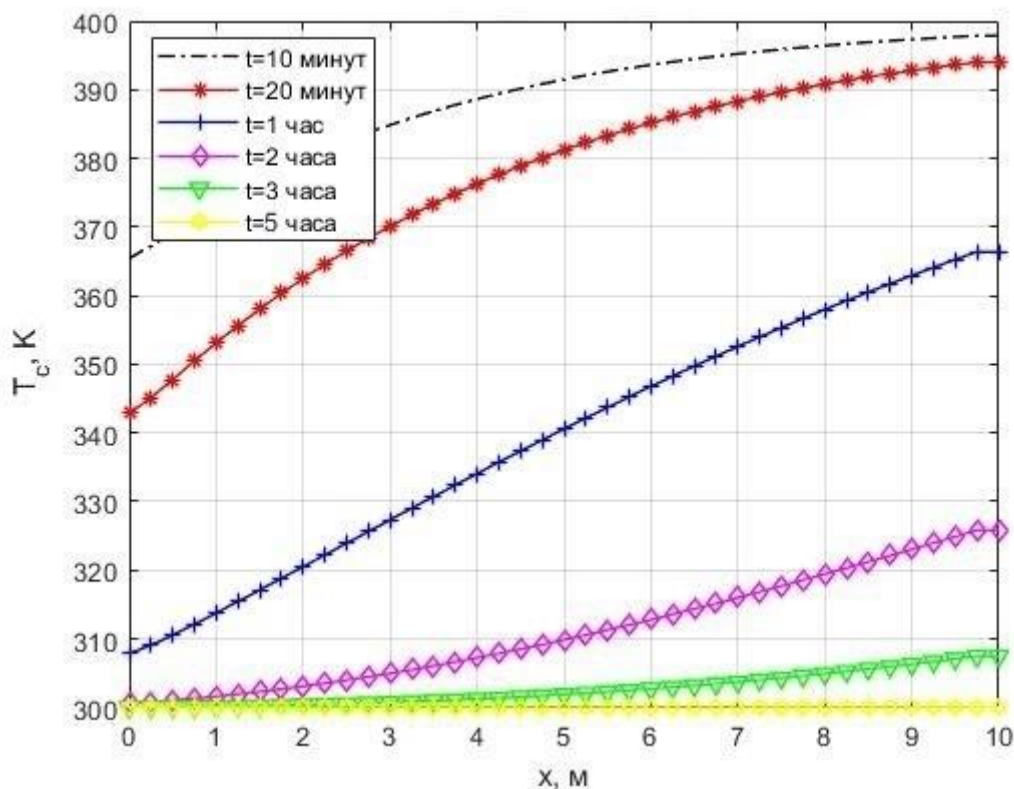


Рис. 2.3.1 Температура твердой фазы

Из рисунков 2.3.1 – 2.3.2 видно, что температура твердой фазы на входе в пористый объект резко убывает. Как и было описано ранее, наибольшая скорость нагрева (охлаждения) газа пористым элементом имеется в первое время, пока разница между температурами фаз достаточно велика. Со временем разность температур уменьшается, вместе с этим уменьшается скорость нагрева, но увеличивается время поддержания температурного диапазона низких температур.

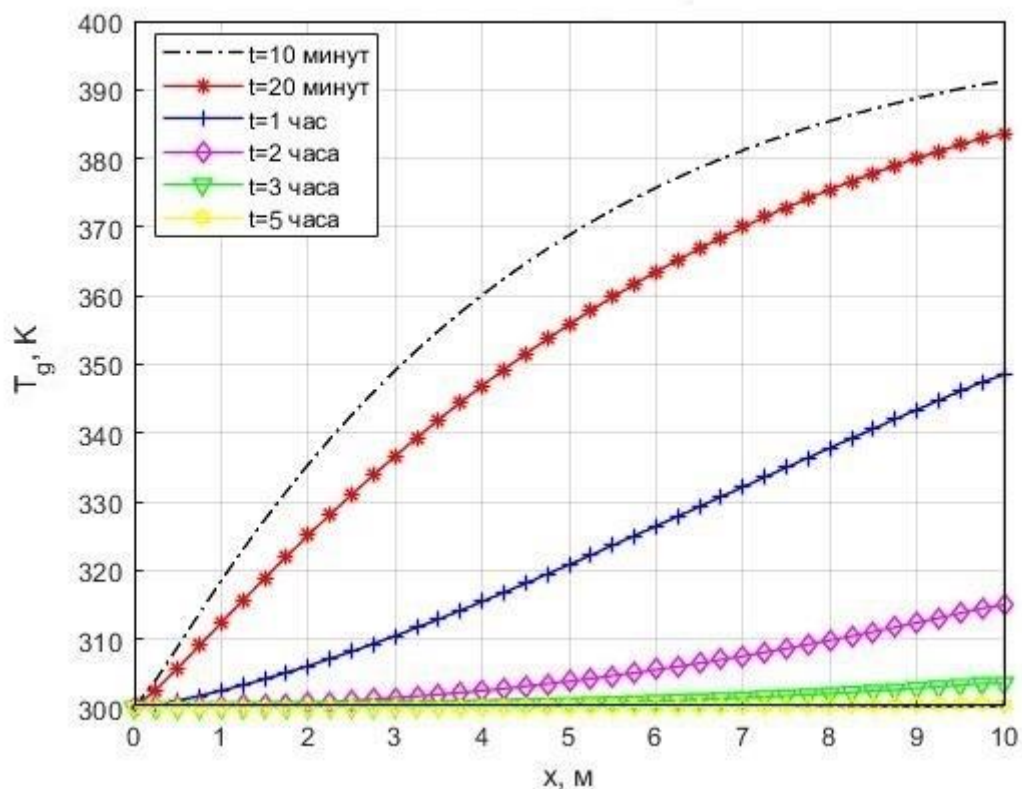


Рис. 2.3.2 Температура газа

Ближе к входу в пористый элемент, скорость фильтрации меньше, чем на выходе из него. В совокупности с тем, что температура твердой фазы еще достаточно велика, это приводит к тому, что кривые распределения температуры газа в промежутке от 0 секунд до 40 минут имеют выпуклость вверх, после – выпуклость вниз.

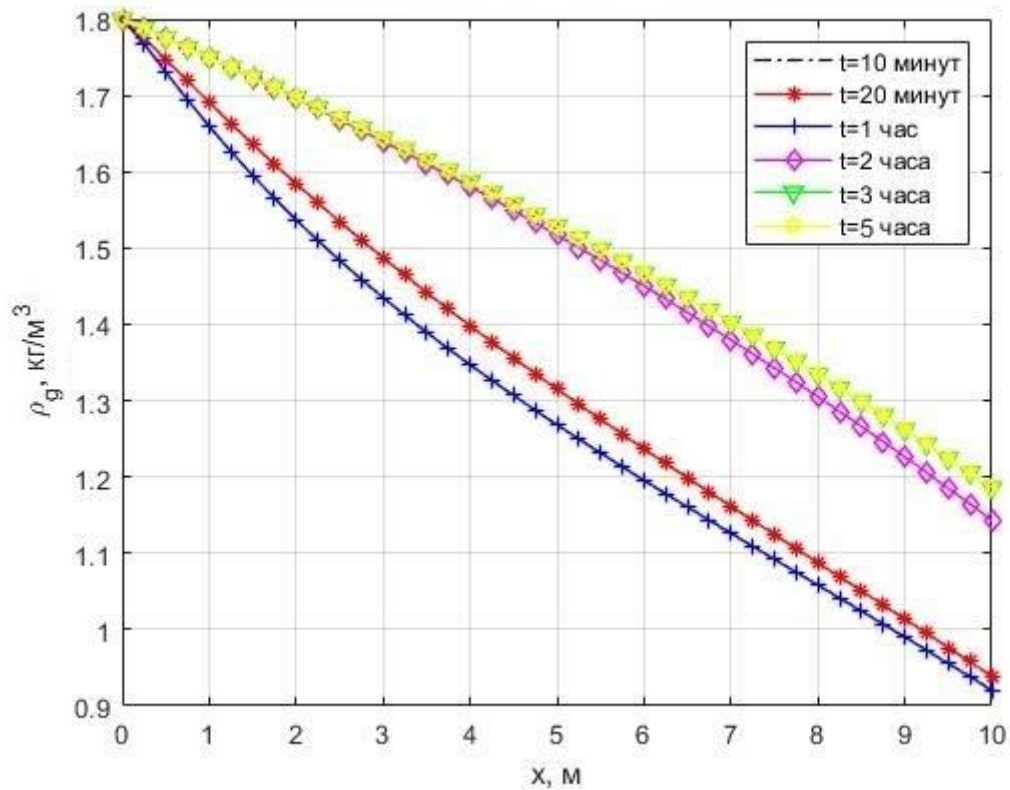


Рис. 2.3.3 Плотность газа

При режиме нагрева холодного газа пористым элементом возрастание, а затем убывание (или наоборот) распределение плотности газа, как на рисунке 2.2.3, не проявилось. Со сменой выпуклости кривой плотности газ становится менее разряженным, так как из-за постоянного оттока тепла твердая фаза нагревает газ менее эффективно, вплоть до полного остывания системы ($T_g = const$), тогда изменение плотности газа вдоль пористого объекта зависит исключительно от перепада давления.

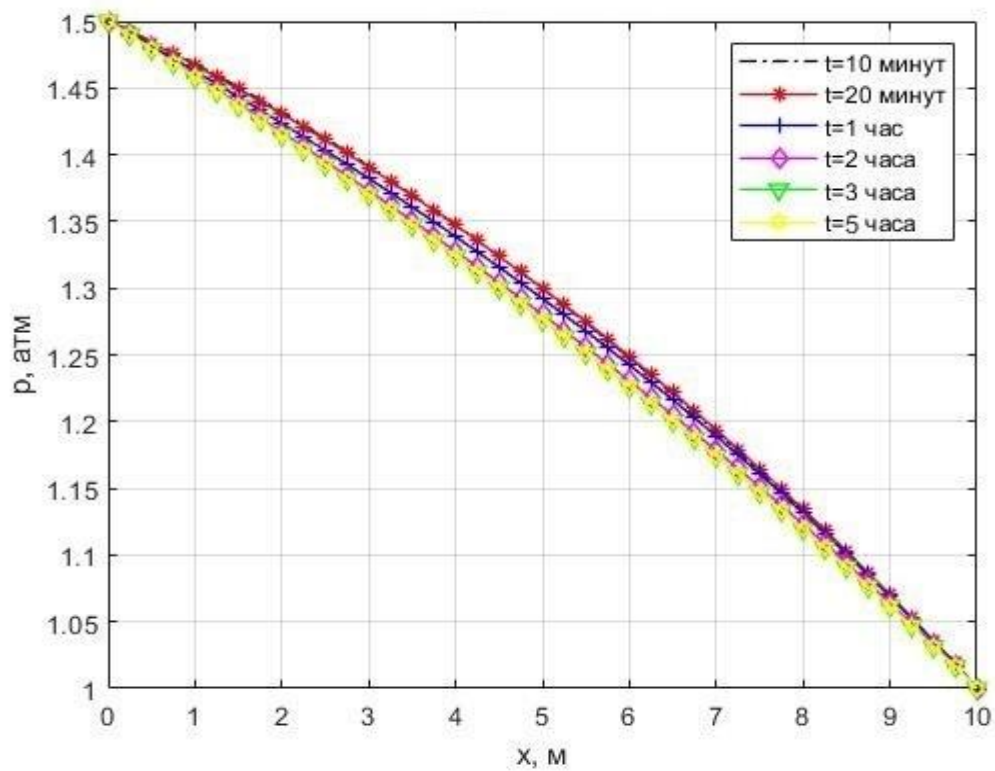


Рис. 2.3.4 Давление

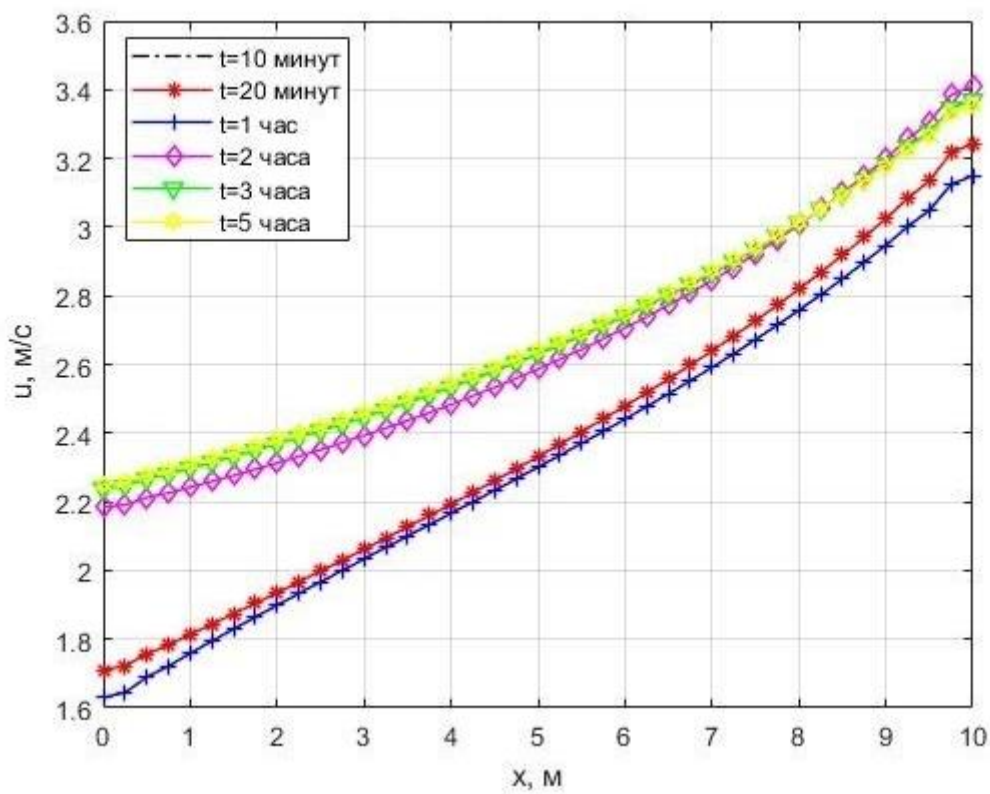


Рис. 2.3.5 Скорость фильтрации газа

На рисунке 2.3.6 показано изменение со временем температур твердой и газовой фаз на выходе из пористого элемента.

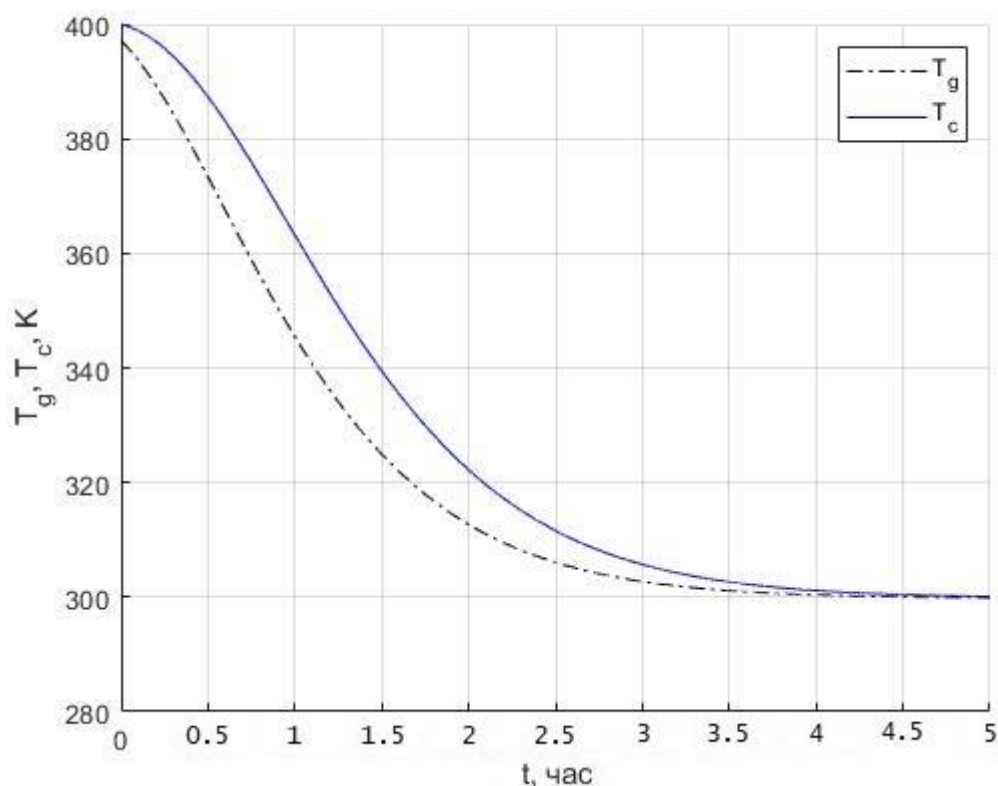


Рис. 2.3.6 Изменение температур фаз на выходе

Рассмотрим влияние пористости на нестационарный режим охлаждения пористого объекта.

На рисунках 2.2.7 и 2.2.9 представлены графики изменения температуры твердой и газовой фазы для различной пористости после 30 минут от начала процесса, а на рисунках 2.3.8 и 2.2.10 — разница температур фаз на выходе из пористого элемента при различной пористости.

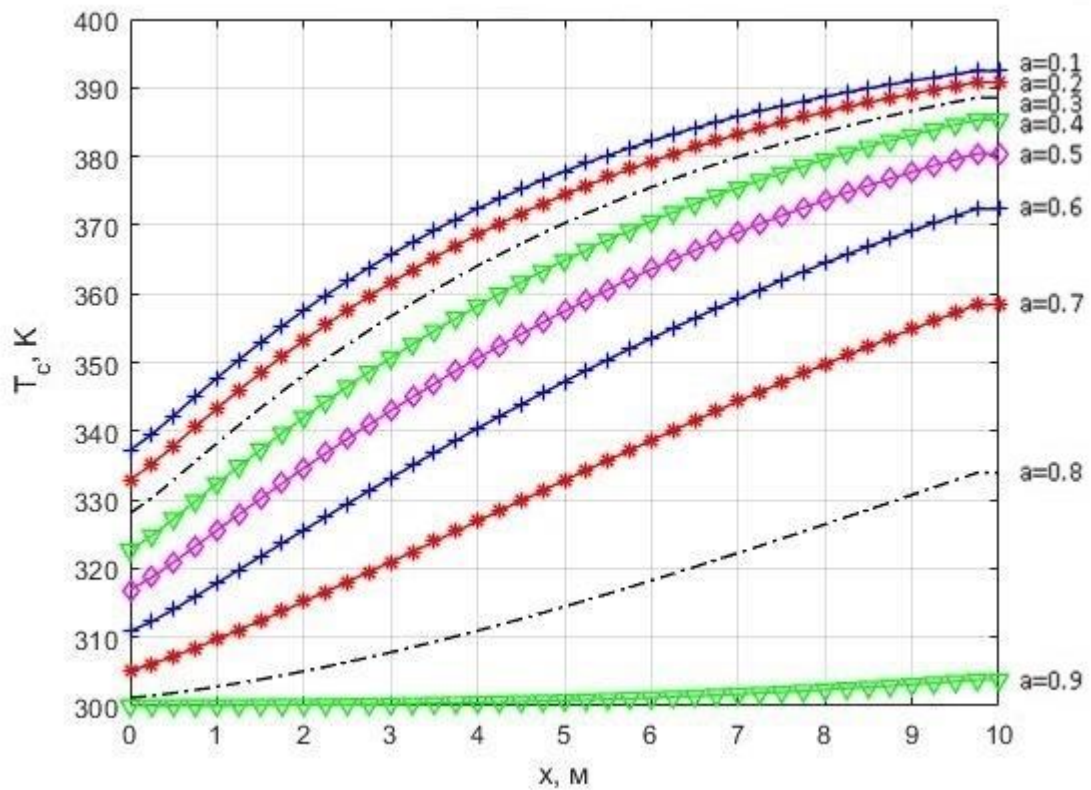


Рис. 2.3.7 Температура твердой фазы

Средняя разница между кривыми температур твердой фазы на входе составляет 4.6 К. При этом на выходе из пористого элемента каждая последующая разница температур, начиная с $a=0.1$, в среднем в полтора раза меньше предыдущей.

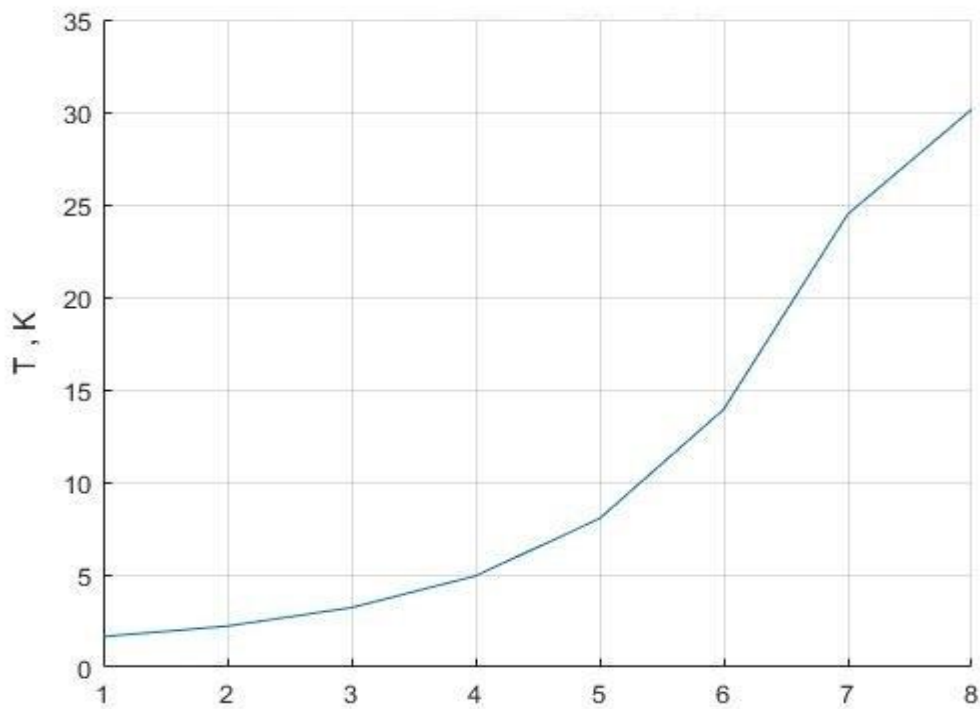


Рис. 2.3.8 Разница температур твердой фазы на выходе из пористого элемента при различной пористости

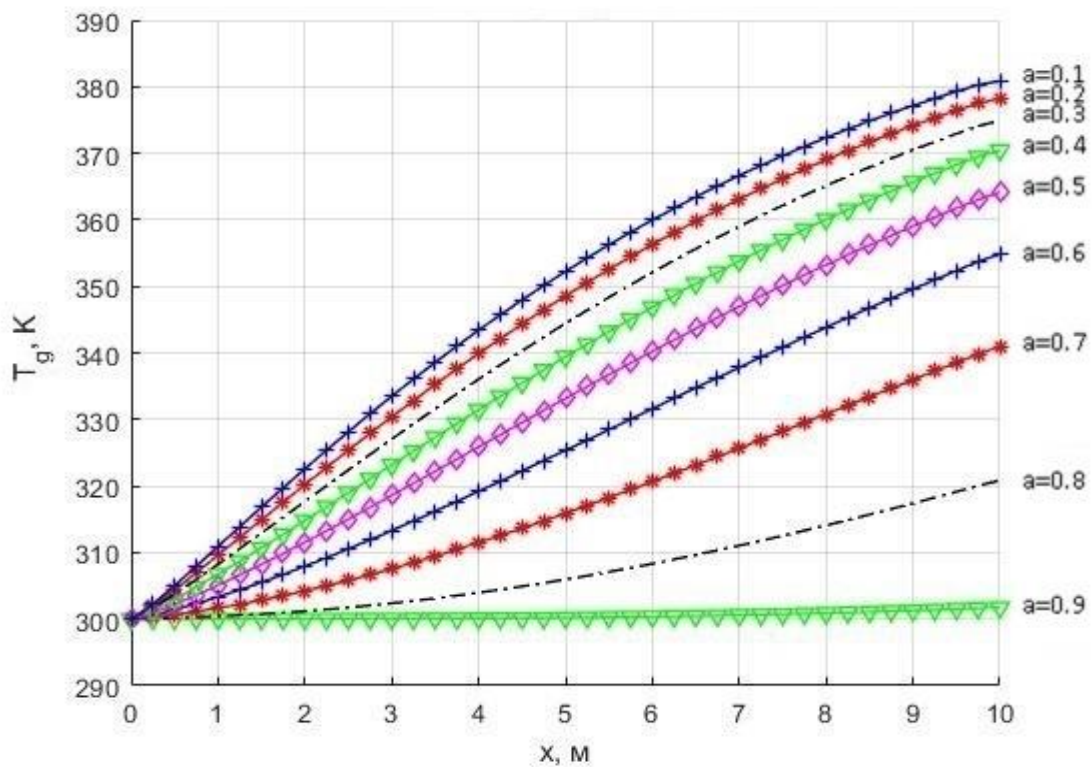


Рис. 2.3.9 Температура газа

Подобная тенденция видна и с температурами газа (рис 2.2.8 и 2.2.10). График зависимости разницы температур от пористости имеет экспоненциальный характер.

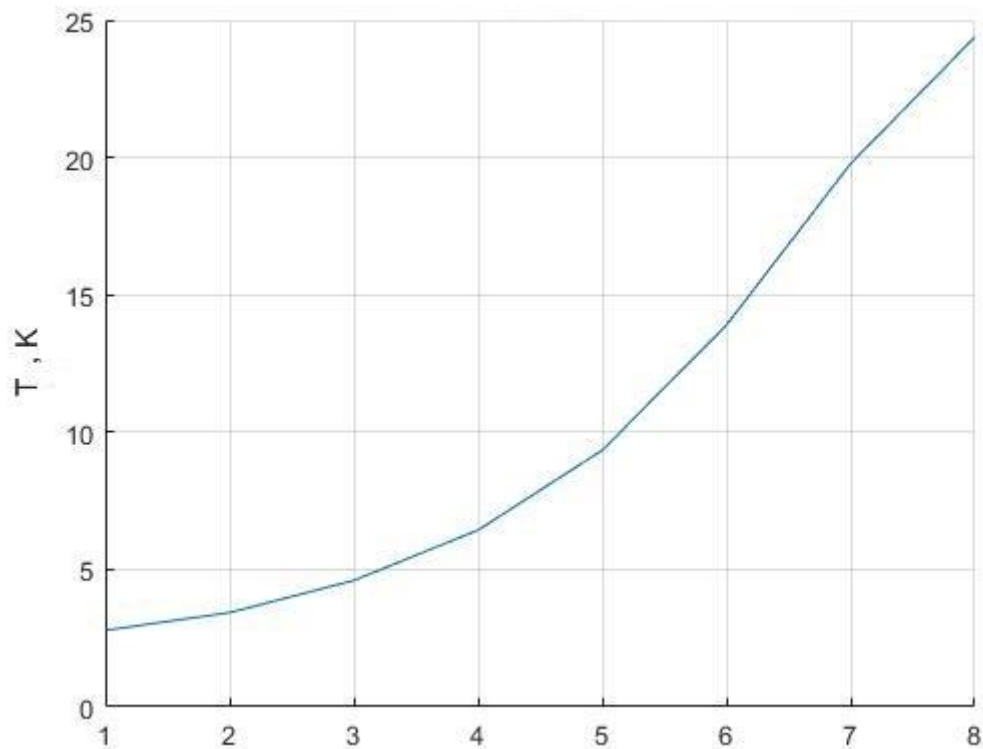


Рис. 2.3.10 Разница температур газа на выходе из пористого элемента при различной пористости

Заключение

Предложена модель и численный метод для моделирования движения газа через пористый теплоаккумулирующий объект. Разработано программное средство, реализующее предложенный численный метод, и проведено его тестирование. Получено численное решение системы уравнений, описывающей процессы движения газа через пористый теплоаккумулирующий объект. Исследованы два случая одномерного нестационарного движения газа при заданном перепаде давления на открытых границах объекта и заданной температуре входящего газа:

- 1) движение горячего газа через слой холодного теплоаккумулирующего пористого объекта;
- 2) движение холодного газа через слой разогретого теплоаккумулирующего пористого объекта.

Проанализировано влияние пористости твердой среды на распределение температур. Выявлено, что для более энергоемкого теплоаккумулятора необходимо использовать маленькую пористость. В случае необходимости его быстрой зарядки во вред энергоемкости требуется выбрать большую пористость.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 636 с.
2. Ентов В.М., Теория фильтрации// Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. с. 121-123.
3. Жуковский Н.Е. О влиянии давления на насыщенные водою пески. // Собр. соч., т. 7. – М.: Гостехиздат, 1950. – с. 73-89.
4. Левин В.А., Луценко Н.А., Фецов С.С. Моделирование движения газа через слой гранулированного теплоаккумулирующего материала с фазовым переходом // Доклады Академии наук. 2018. Т. 479, № 4. С. 386-389
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
6. Луценко Н.А. Одномерный стационарный режим фильтрации газа через слой неподвижного тепловыделяющего конденсированного материала// Дальневосточный мат. журнал. 2002. Т. 3. № 1. с. 123-130.
7. Луценко, Н. А. Нестационарные режимы охлаждения пористого тепловыделяющего элемента / Н. А. Луценко // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – № 3. – С. 120–128.
8. Луценко, Н. А. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений газа через пористые объекты с источниками энерговыделения / Н. А. Луценко // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9. – № 3. – С. 331–344.
9. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М. – Л.: Гостоптехиздат, 1949. 628 с.
10. Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 120 с.

11. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Нигматулин Р.И., Динамика многофазных сред. Т. 1.: Наука, 1987. 464 с.
13. Ольховский, Г. Г. Воздушно-аккумулирующие газотурбинные электростанции (ВАГТЭ) / Г. Г. Ольховский и соавт. – Ижевск: ИКИ, 2011. – 360 с.
14. Павловский Н.Н. О фильтрации воды через земляные плотины. – Л.: Кубуч, 1931. – 259 с.
15. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М.: Наука, 1976. 536 с.
17. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. – 318 с.
18. Barbour E. Adiabatic compressed air energy storage with packed bed thermal energy storage. Applied Energy. 2015. Vol. 155. Pp. 804-815.
19. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. – Paris, 1856. – 647 p.
20. Luo, X. Overview of current development in compressed air energy storage technology. Energy Procedia. 2014. Vol. 62. Pp. 603-611.
21. Peng H. Modeling on heat storage performance of compressed air in a packed bed system. Applied Energy. 2015. Vol. 160. Pp. 1-9.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

Инженерная школа
Кафедра механики и математического моделирования

ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ

на выпускную квалификационную работу студента Гнатюка Максима Викторовича
направление подготовки 15.04.03 «Прикладная механика» группа М3208
Руководитель ВКР к.ф.-м.н., доцент Луценко Николай Анатольевич
Тема ВКР: "Численное моделирование нестационарных течений газа через пористый теплоаккумулирующий элемент"
Дата защиты ВКР «04» июля 2018 г.

В работе Гнатюка Максима Викторовича рассмотрено одномерное нестационарное движение газа через накопители тепловой энергии пористого типа. Актуальность данной работы обусловлена возможным использованием указанных объектов в качестве составной части перспективных крупномасштабных накопителей энергии сжатого воздуха. Для исследования рассматриваемых процессов предложен и реализован на языке C++ численный метод. Численно исследованы режим аккумуляции тепла в накопителе и режим отдачи накопителем тепловой энергии. Проанализировано влияние пористости объекта на изучаемые процессы.

Все исследования, отраженные в выпускной работе, выполнены М.В. Гнатюком самостоятельно. В процессе проведения исследований М.В. Гнатюк показал способность работать с учебной и научной литературой, анализировать и выбирать способ решения поставленных задач, продемонстрировал любознательность и инициативность. Считаю, что выпускная работа М.В. Гнатюка заслуживает оценки «отлично», а ее автор заслуживает присвоения ему искомой степени магистра по направлению «Прикладная механика».

Руководитель ВКР

«29» 06

к.ф.-м.н., доцент

Уч. степень и звание

2018 г.



Н.А. Луценко

И.О. Фамилия

РЕЦЕНЗИЯ

на выпускную квалификационную работу студента

Гнатюка Максим Викторовича

направление подготовки 15.04.03 «Прикладная механика», группа М3208

Руководитель ВКР: к.ф.-м.н., доцент Луценко Николай Анатольевич

Тема ВКР: Численное моделирование нестационарных течений газа через пористый теплоаккумулирующий элемент

Дата защиты ВКР: «04» июня 2018 г.

1. Актуальность ВКР: В работе рассматриваются процессы в пористых объектах, моделирующих накопители тепловой энергии. Данные накопители могут быть составной частью перспективных крупномасштабных накопителей энергии сжатого воздуха, иначе называемых воздушно-аккумулирующими газотурбинными электростанциями. Накопители энергии в настоящее время активно разрабатываются с целью нивелирования разности между производством и потреблением энергии. Таким образом, актуальность настоящей работы не вызывает сомнений.
2. Достоинства работы: В работе предложен конечно-разностный алгоритм и создана программа на языке C++ для исследования процессов в пористых теплоаккумулирующих элементах. Данная программа может быть использована для разностороннего анализа изучаемых процессов. Полученные численные решения и их анализ уже позволили сделать некоторые выводы о рассматриваемых процессах.
3. Недостатки и замечания: В работе излишне подробно описано конструирование численного алгоритма - некоторые детали можно было бы опустить без потери понимания. В то же время можно было бы более развернуто описать графики, демонстрирующие полученные результаты численного моделирования.
4. Целесообразность внедрения: Как уже сказано выше, при описании достоинств работы, разработанное программное средство может быть использовано для разностороннего анализа процессов в пористых теплоаккумулирующих элементах, что может быть полезным при конструировании таких объектов.
5. Общий вывод: Работа выполнена на хорошем уровне, демонстрирует компетенции автора в механике сплошных сред, вычислительной математике и программировании. Считаю, что работа заслуживает оценки "отлично", а ее автор заслуживает присвоения ему степени магистра по направлению «Прикладная механика».

Оценка: отлично.

Рецензент: с.н.с. ИПМ ДВО РАН, к.ф.-м.н. Бризицкий Роман Викторович.

« 29 » 06

2018

Р.В. Бризицкий


Подпись: Бризицкого Р.В. зав. кафедрой
Ученый секретарь ИИПМ ДВО РАН
К.ф.-м.н. Юваскина В.А.