



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДФУ)

ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА

Кафедра механики и математического моделирования

Чайка Кирилл Александрович

**АНАЛИЗ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ В ПАКЕТЕ MATLAB**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика,
профиль «Математическое и компьютерное моделирование механических систем
и процессов»

Владивосток
2018

Оглавление

Введение	2
1. Задача теории упругости	4
2. Растяжение пластины с круглым отверстием	8
2.1. Задача	8
2.2. Результаты аналитического решения	9
3. Анализ задачи в PDE Toolbox.....	11
3.1. Задача нагрузки.....	11
3.2. Построение геометрии с помощью инструментов <i>Draw</i>	12
3.3. Задание коэффициентов и граничных условий.....	12
3.4. Разбиение области на конечные элементы.....	16
3.5. Решение и визуализация результата	17
Заключение.....	20
Список литературы.....	21

Введение

В работе проводится анализ конечно-элементной плоской задачи теории упругости в пакете MATLAB. Для анализа задачи используется PDE Toolbox, пакет расширения MATLAB, который содержит инструменты для исследования и решения уравнений в частных производных. PDE Toolbox это приложение с графическим интерфейсом пользователя, использование которого не требует глубокого понимания метода конечных элементов. Среда позволяет задать геометрию области, тип и коэффициенты дифференциального уравнения, граничные и начальные условия, произвести разбиение области на конечные элементы и визуализировать результат [7].

Для начала рассматривается аналитическое решение задачи о растяжении пластины с круглым отверстием. Решение задачи о концентрации напряжений на краю отверстия представляет большой практический интерес. Подобные задачи очень актуальны, так как применяются почти во всех областях. В судостроении, авиастроении, машиностроении, геологии и строительстве. Широкое практическое приложение имеют задачи о концентрации напряжений возле отверстий в конструкциях и материалах, нередко их можно свести к плоским задачам об упругой плоскости с отверстиями. К таким задачам можно отнести, например, задачи о туннелях, скважинах, перфорированных пластинах.



Рисунок 1 – Отверстие в палубе судна



Рисунок 2 – Отверстия в фюзеляже самолета

1. Задача теории упругости

Основная задача теории упругости заключается в том, чтобы по заданным действующим на твердое тело внешним силам находить те изменения формы, которые тело претерпевает, и те внутренние силы упругости, которые при этих изменениях формы возникают между частями тела. В таком общем виде задача теории упругости еще далеко не разрешена, но имеется целый ряд достаточно полно исследованных частных случаев. Этим результатам можно пользоваться при решении весьма важных технических задач, когда приходится иметь дело выбором прочных размеров частей инженерных сооружений и машинных конструкций. Вопросы эти в курсах сопротивления материалов решаются на основании различных допущений, более или менее оправдываемых на практике. В теории упругости те же задачи решаются аналитическим путем. Мы находим здесь выражения для перемещений и внутренних сил упругости деформируемого тела, применяя начала механики и математический анализ к исследованию равновесия и движения твердого тела, способного несколько изменять свою форму под действием внешних сил.

Прежде всего нужно установить понятие об упругом твердом теле. В статике и динамике под твердым телом подразумевают систему неизменно связанных между собой материальных точек. Поскольку при действии на такое тело внешних сил расстояния между отдельными его точками не изменяются, то внутренние силы не входят в уравнения задачи и внутреннее строение твердого тела в этом случае не имеет никакого значения. Переходя к определению внутренних сил, мы должны принять во внимание способность твердых тел несколько изменять свою форму под действием внешних сил: при этом необходимо выяснить внутреннее строение упругого твердого тела.

Основатели теории упругости при установлении основных уравнений этой теории исходили обыкновенно из представления молекулярного строения вещества. Твердые тела они себе представляли состоящими из отдельных материальных частиц, молекул, между которыми действуют силы взаимодействия. Силы взаимодействия между двумя молекулами считали

обыкновенно направленными по линии, соединяющей центры молекул, и предполагали, что величина этих сил зависит лишь от расстояния между частицами. При действии на твердое тело внешних сил расстояние между частицами изменяется, вместе с тем изменяются и силы взаимодействия.

Эти изменения продолжают до тех пор, пока не наступит равновесие между внешними и внутренними силами. При дальнейшем развитии теории молекулярного строения вещества пришлось принять во внимание также и тепловые явления, которые сопровождают изменения формы тел. Пришлось допустить, что молекулы, из которых состоит твердое тело, находятся в постоянном колебательном движении и что этими колебаниями определяется температура тела.

С современной точки зрения эти представления о строении твердых тел весьма несовершенны. Приходится признать, что наши знания недостаточны для построения теории упругости, в которой было бы принято во внимание действительное строение твердых тел. Поэтому в дальнейшем мы будем оперировать с некоторым гипотетическим идеальным упругим телом, и этому телу припишем такие свойства, чтобы те заключения, которые будут получены аналитическим путем, по возможности точнее согласовались с данными опыта.

Предположим следующее:

1. Вещество идеального упругого тела непрерывно распределено по его объему. В случаях, когда нам придется выделять из этого тела бесконечно малые элементы, будем допускать, что и для этих элементов имеют место все те физические свойства, которыми обладает идеально упругое тело.

2. Будем считать идеально упругое тело однородным. Если в таком теле выделить две одинаковых и одинаково ориентированных элемента, то они будут тождественны по своим физическим свойствам.

3. При отсутствии внешних сил и при определенной температуре упругому телу свойственно иметь определенную форму и определенный объем. Это состояние тела будем называть естественным состоянием.

4. Чтобы при постоянной температуре изменить форму тела, необходимо приложить внешние силы. Причем определенному изменению формы тела соответствует вполне определенная система внешних сил. Мы в дальнейшем ограничимся изучением весьма малых изменений формы и объема тел, и потому относительные перемещения точек тела при деформации будем считать малыми величинами.

5. При удалении внешних сил деформированное упругое тело возвращается к своему естественному состоянию, соответствующему данной температуре. Таким образом, естественное состояние идеального упругого тела при данной температуре является устойчивой формой равновесия при этой температуре. Упругое тело обладает свойством накапливать в себе энергию в обратимой форме. Для того чтобы вызвать деформацию тела, нужно затратить известное количество работы и наоборот, такое же количество работы получаем при удалении внешних сил, когда тело возвращается к своему естественному состоянию (при деформации температура тела предполагается все время постоянной).

Перечисленными свойствами идеального упругого тела в большей или меньшей степени обладают и те естественные тела, с которыми на приходится иметь дело при различных технических расчетах. Такие материалы, как железо и сталь, к которым особенно часто приходится применять выводы теории упругости, обладают весьма однородным строением и если деформации не выходят за известные пределы, то материалы эти можно считать идеально упругими; они возвращаются к своему естественному состоянию, если удалить силы, вызывающие деформации. Вследствие этого выводы теории упругости, относящиеся к идеальному упругому телу, можно с большой точностью применять к железу и стали. Конечно, при этом не будут учтены такие обстоятельства, как явление гистерезиса и влияние времени на деформацию. Но для таких материалов, как железо и сталь, они не имеют существенного практического значения. Чугун, камни и дерево по своим свойствам больше отличаются от однородного идеального упругого тела и выводы теории упругости

с гораздо меньшей точностью применимы к этим материалам. На практике при расчете конструкций, изготовленных из этих материалов, можно ограничиваться значительно меньшей точностью. В таком случае результаты теории упругости в применении к этим материалам можно рассматривать как первое приближение [3].

2. Растяжение пластины с круглым отверстием

2.1. Задача

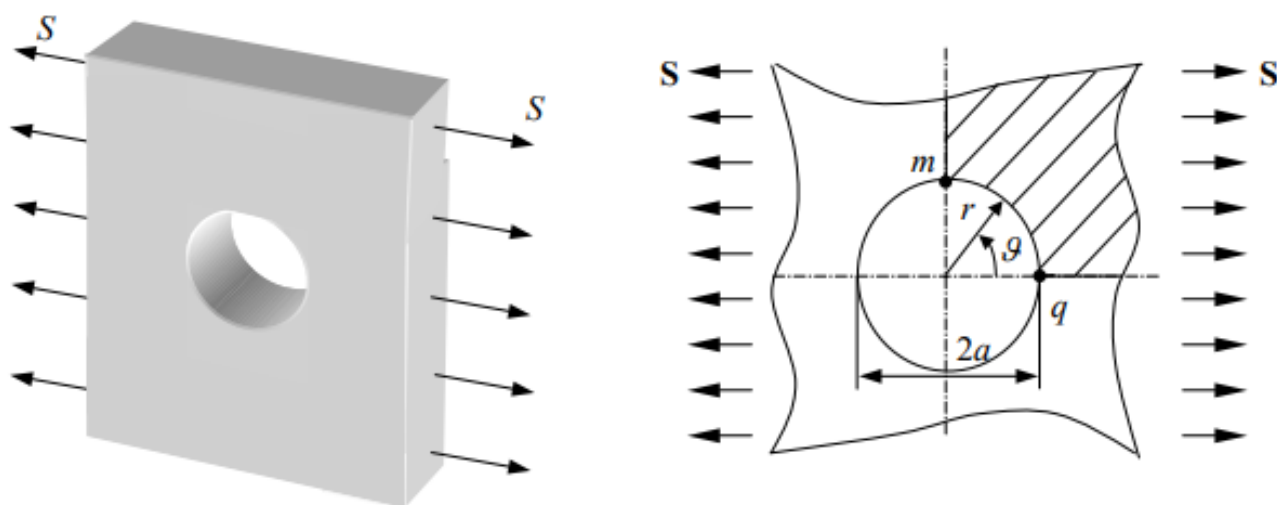


Рисунок 1.1 - Модель пластины с отверстием

На рисунке 1.1 видно, что можно создать модель растяжения пластины в виде ее четверти, задав соответствующие симметрии задачи граничные условия. Модель можно создать как в прямоугольной, так и в полярной системе координат. При создании модели в виде четверти квадрата (первый квадрант) в прямоугольной системе координат нижняя граница области закреплена по координате y и свободна по x , левая – закреплена по x и свободна по y . Пусть растягивается тонкая квадратная пластина 200×200 мм с отверстием диаметром $2a = 80$ мм в центре. Отношение размеров достаточно для сравнения с решением растяжения бесконечной пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии. Характеристики материала при задании нагрузок в виде сил и последующем анализе напряжений не имеют значения: $E = 1000$ Па, $\nu = 0.3$. По двум краям пластины приложено равномерное растяжение $S = 100$ Па.

2.2. Результаты аналитического решения

На рисунке 1.1 показан фрагмент тонкой пластины с отверстием радиусом $r = a$. Пластина подвержена одноосному растяжению равномерно распределенными по границе пластины напряжениями S в направлении оси x . В пластине возникает плоское напряженное состояние. В результате решения задачи в полярных координатах получены значения напряжений σ_r , σ_ϑ и $\tau_{r\vartheta}$ как функции координат r , ϑ и нагрузки S (положение начала координат показано на рисунке 1.1). В частности:

$$\sigma_\vartheta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\vartheta. \quad (1.1)$$

Как следует из (1.1) напряжение σ_ϑ достигает максимального значения, когда

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$, то есть на конце m диаметра, перпендикулярного к направлению

растяжения. В этом случае $\sigma_\vartheta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right)$ достигает максимального

значения на краю отверстия при $r = a$, $\sigma_{\vartheta_{max}} = 3S$. На рисунке 1.1 показаны

также оси прямоугольной системы координат, в которой удобнее строить конечно-элементную модель. В точке m направления σ_ϑ и σ_x совпадают,

поэтому можно записать $\sigma_{\vartheta_{max}} = \sigma_x = 3S$. Теоретический коэффициент концентрации напряжений, отражающий величину возрастания напряжений по сравнению с равномерно распределенной нагрузкой, равен 3.0. В точке q

$\sigma_\vartheta = \sigma_y = -S$, то есть в этой точке действует сжимающее напряжение.

Влияние отверстия носит локальный характер: с увеличением отдаления от

отверстия напряжения σ_ϑ приближаются к значению S . Этот принцип носит имя

Сен-Венана (Saint-Venant): система взаимно уравновешенных нагрузок,

приложенная к малой части тела, вызывает напряжения, быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок. Локальный характер оправдывает возможность сравнения решений, полученных для бесконечной пластины и пластины конечных размеров. Если ширина пластины превышает четыре диаметра, разница в решениях по наиболее чувствительному параметру $\sigma_{\theta max}$ не превысит 6%. По остальным параметрам разница много меньше.

Решение при других видах нагрузки. Считая, что в направлении x действует растягивающая нагрузка S , а в направлении y сжимающая $-S$, получаем случай чистого сдвига. В точке m напряжения σ_{θ} составят $4S$, в точке q $\sigma_{\theta} = -4S$. Следовательно, при чистом сдвиге пластинки максимальное окружное напряжение на границе отверстия в 4 раза превышает приложенное напряжение чистого сдвига [3].

3. Анализ задачи в PDE Toolbox

PDE позволяет решать задачи в следующих областях:

- 1) Механика твердого тела – задача нагрузки;
- 2) Механика твердого тела – задача деформации;
- 3) Электростатика;
- 4) Магнитостатика;
- 5) Переменное электромагнитное поле;
- 6) Электропроводящие среды;
- 7) Диффузия;
- 8) Теплопроводность.

3.1. Задача нагрузки

Тонкая прямоугольная пластина под одноосным натяжением имеет равномерное распределение напряжений. Введение кругового отверстия в пластине нарушает равномерное распределение напряжений вблизи отверстия, что приводит к значительно более высокому среднему напряжению. Тонкая пластинка, подверженная нагрузке в плоскости, может быть проанализирована как двумерная задача упругости плоского напряжения. Теоретически, если пластина бесконечна, то напряжение вблизи дырки в три раза выше среднего напряжения. Для прямоугольной пластины с конечной шириной коэффициент концентрации напряжений зависит от отношения диаметра отверстия к ширине пластины. Этот пример аппроксимирует коэффициент концентрации напряжений с использованием пластины с конечной шириной.

3.2. Построение геометрии с помощью инструментов *Draw*

Построим квадрат 200x200 мм, зададим координаты левого торца (-0.1) и нижнего левого угла (-0.1). Далее построим окружность диаметром 80 мм. Координатные оси настроим так, чтобы при задании координат центра окружности (0 0), она по центру вписалась в квадрат (Рисунок 2.1).

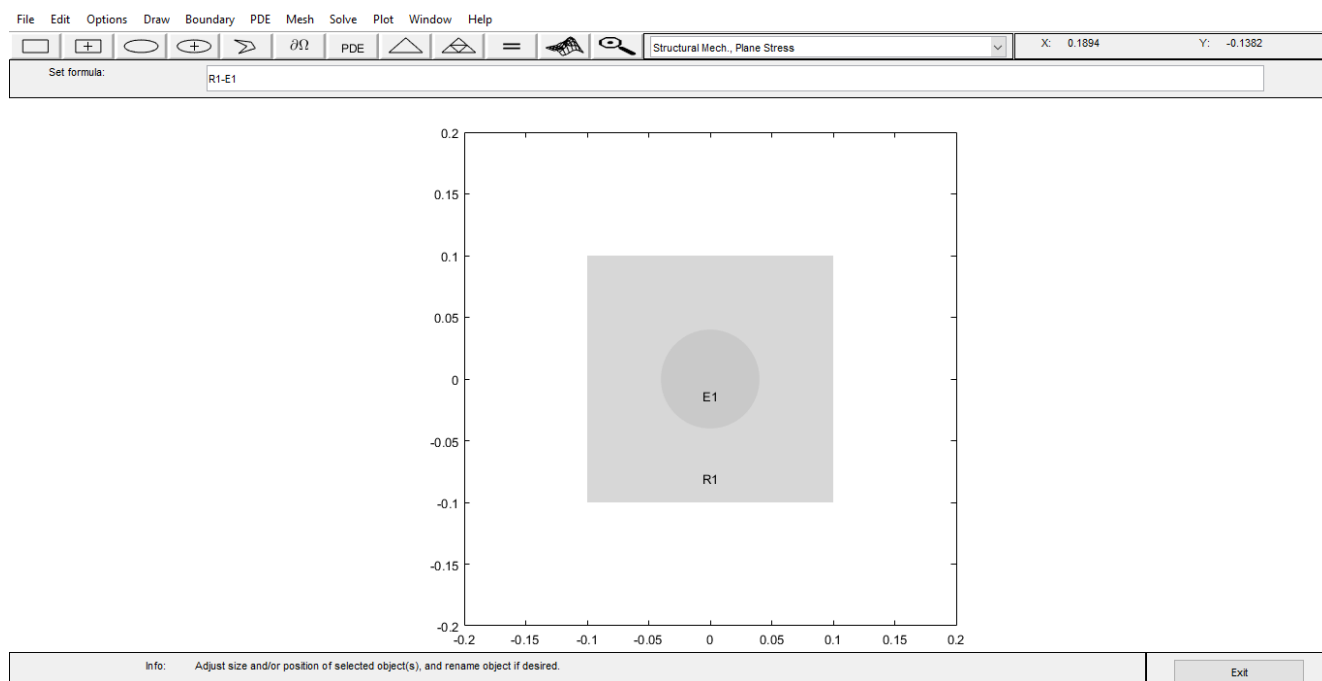


Рисунок 2.1 – Геометрия модели в режиме *Draw*

3.3. Задание коэффициентов и граничных условий

Стационарное поле механических напряжений в твёрдом теле характеризуется пространственным распределением следующих физических величин: тензор (второй валентности) механического напряжения σ , тензор (второй валентности) деформации ϵ , вектор перемещения u . Источником этого поля является пространственное распределение вектора объёмной плотности нагружающей силы (нагрузки) f . При записи уравнений внешнее произведение тензоров любой валентности будем обозначать \otimes .

Линеаризованные уравнения теории упругости имеют вид:

$$e = 0.5 \cdot (\text{grad} \cdot u + \nabla \otimes u);$$

$-\text{div} \sigma = f$ – уравнение равновесия в отсчётной конфигурации;

$\sigma = \lambda \cdot \text{tr}(e) \cdot 1 + 2\mu e$ – уравнение, описывающее изотропные упругие свойства вещества; здесь 1 – единичный шаровой тензор второй валентности.

Из последнего уравнения видно, что линейные изотропные упругие свойства вещества характеризуются двумя параметрами λ и μ , которые называются коэффициентами Ламэ: λ – модуль упругости; μ – модуль сдвига. В справочной литературе приводятся также и другие параметры упругих свойств

вещества: модуль объёмного сжатия $\chi = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3}$; модуль Юнга

$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$; коэффициент Пуассона $\nu = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)} \cdot \frac{1}{2}$. Коэффициенты

Ламэ могут быть выражены через модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.1)$$

С учётом сказанного определяющее линеаризованное уравнение теории упругости имеет вид:

$$\sigma = \lambda \cdot \text{div} u \cdot 1 + \mu \cdot (\text{grad} u + \nabla \otimes u).$$

Это уравнение связывает поле тензора напряжений с полем вектора перемещений. Если его подставить в уравнение равновесия, то получится линеаризованное уравнение математической физики относительно поля вектора перемещений:

$$-\text{grad}(\lambda \cdot \text{div}u) - \text{div}(\mu(\text{gradu} + \nabla \otimes u)) = f. \quad (2.2)$$

PDE Toolbox решает уравнение (2.2). По команде «PDE/PDE Specification» разворачивается диалоговое окно ввода коэффициентов PDE, изображённое на рисунке 2.2. В этом окне коэффициенты PDE имеют следующие имена: E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; K_x – x -составляющая объёмной плотности нагружающей силы; K_y – y -составляющая объёмной плотности нагружающей силы; ρ – плотность вещества. Коэффициенты Ламэ, входящие в (2.2), вычисляются по формулам (2.1). Установим $E = 1000$; $\nu = 0,3$; $K_x = 0$; $K_y = 0$; $\rho = 0$ (коэффициент ρ в режиме “Elliptic” игнорируется).

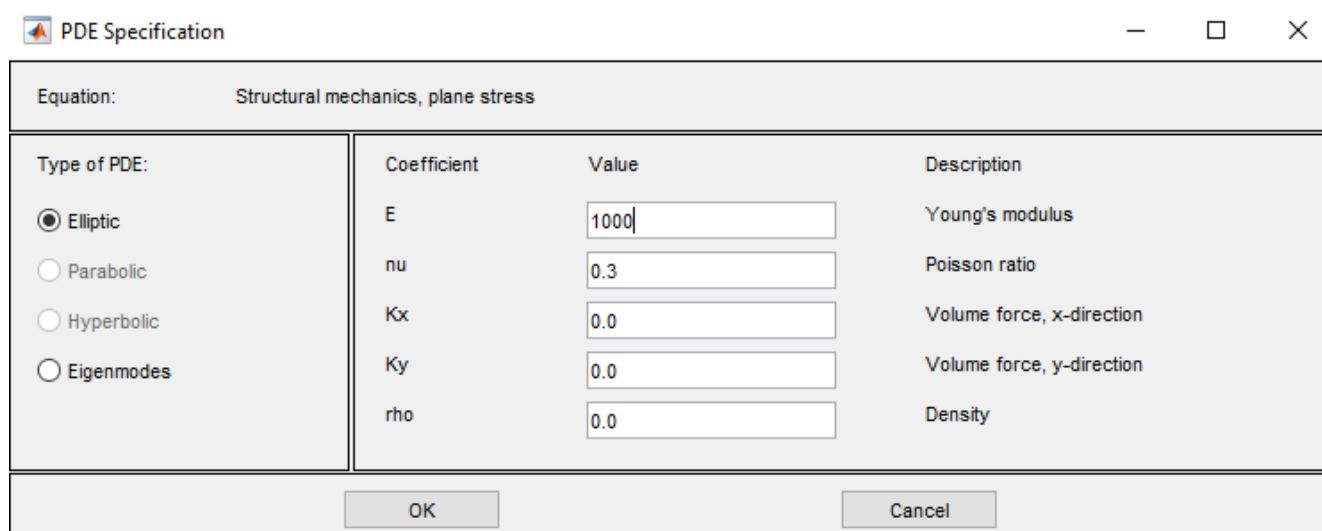


Рисунок 2.2 – PDE Specification

PDE поддерживает три варианта граничных условий: граничные условия первого рода (Дирихле), граничные условия второго рода (Неймана) и смешанные (Mixed). В режиме Boundary (рисунок 2.3) зададим граничные условия Дирихле, которые имеют вид:

$$[h] \cdot [u] = [r]$$

где $[h]$ – матричный коэффициент размера, $[r]$ – матричная правая часть размера.

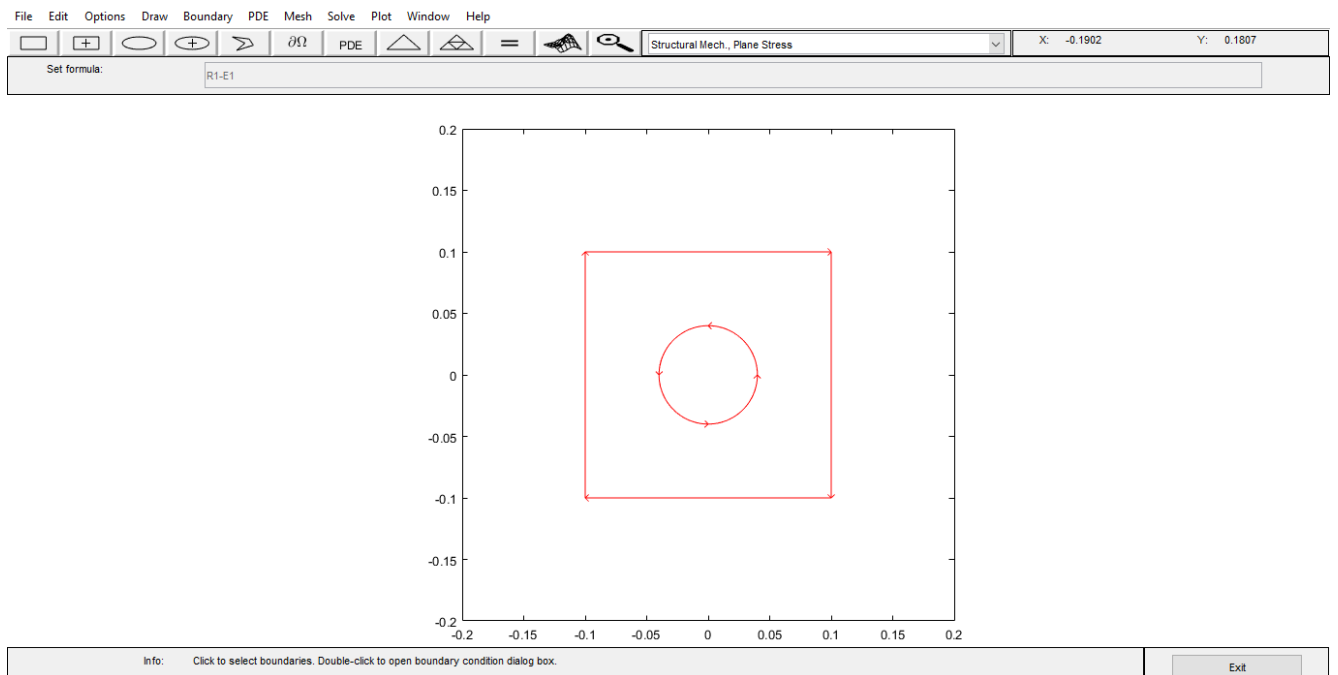


Рисунок 2.3 – режим Boundary

3.4. Разбиение области на конечные элементы

Выбрав функцию Initialize Mesh проводится процедура триангуляции (создание сетки). Область разбивается на достаточно крупные треугольные элементы. Для получения решения с приемлемой точностью начального разбиения недостаточно, следует уменьшить шаг разбиения области. Это можно сделать выбрав функцию Refine Mesh (рисунок 2.4).

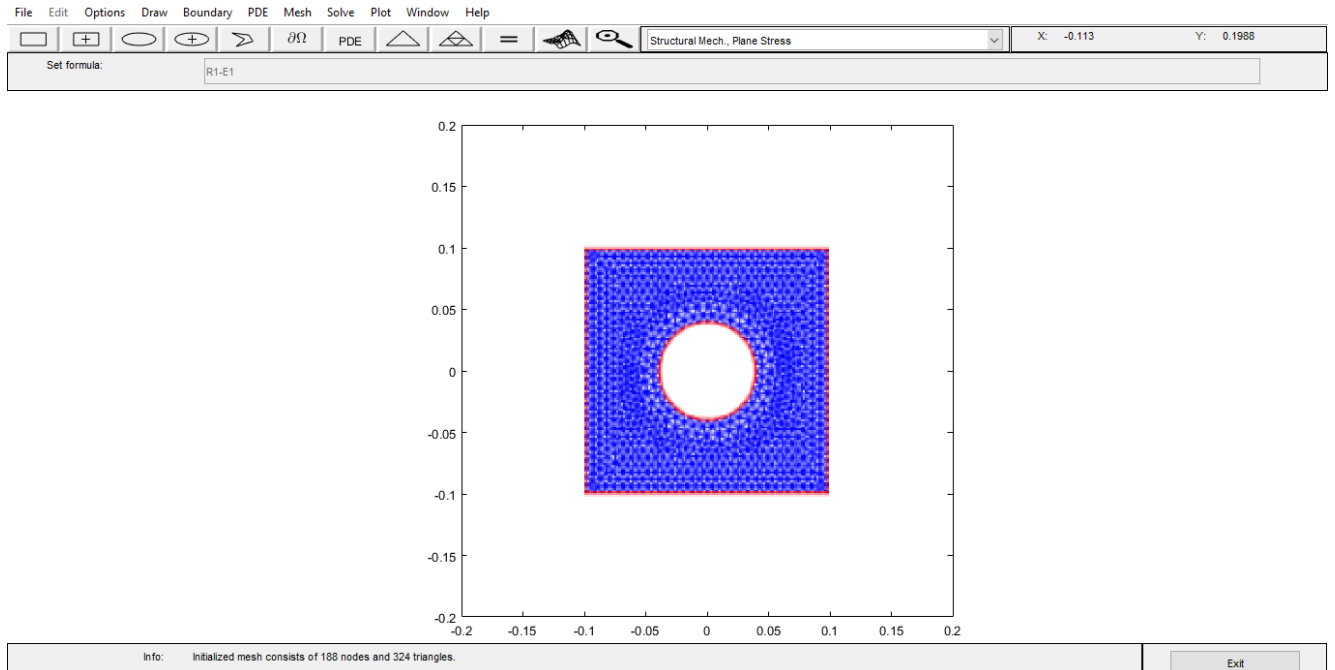


Рисунок 2.4 – Разбиение области на конечные элементы

3.5. Решение и визуализация результата

Выбрав режим Plot и отредактировав график, появится визуализация x-компонент нормального распределения напряжений. Напряжение равно приложенному напряжению вдали от круговой границы. На рисунке 2.5 видно, что значение напряжения вблизи круговой границы приблизительно равно 350 Па, что в 3.5 раза превышает напряжение по краям пластины. Решение в PDE удовлетворяет аналитическому решению задачи о растяжении пластины с круглым отверстием. Уменьшения концентрации напряжений вокруг отверстия можно достичь, например, добавлением буртика или подкрепляющего кольца.

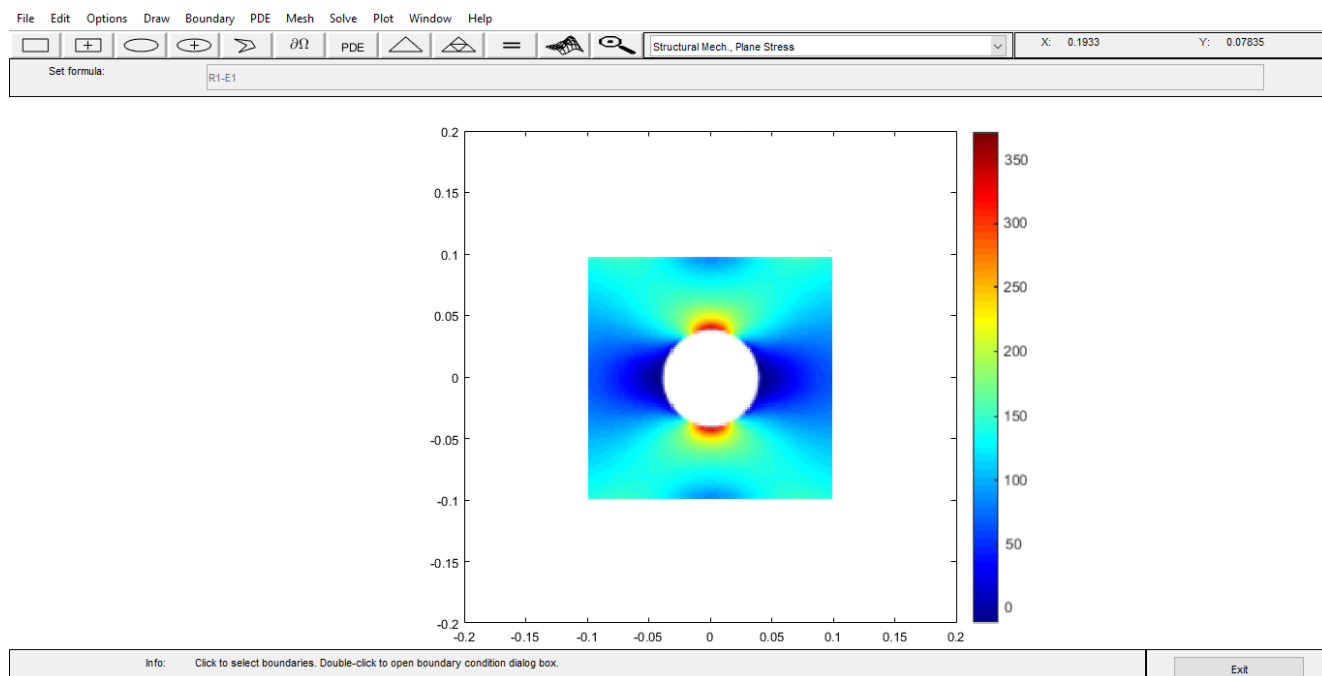


Рисунок 2.5 - распределения напряжений

Чтобы увидеть детали изменения напряжений вблизи круговой границы, сперва необходимо определить множество точек на границе. Затем интерполировать значения напряжений в этих точках, используя функцию `InterpolateStress`. Эта функция возвращает структурный массив с полями, содержащими значения интерполированных напряжений. На рисунке 2.6 видим график зависимости нормального напряжения от углового положения точек интерполяции.

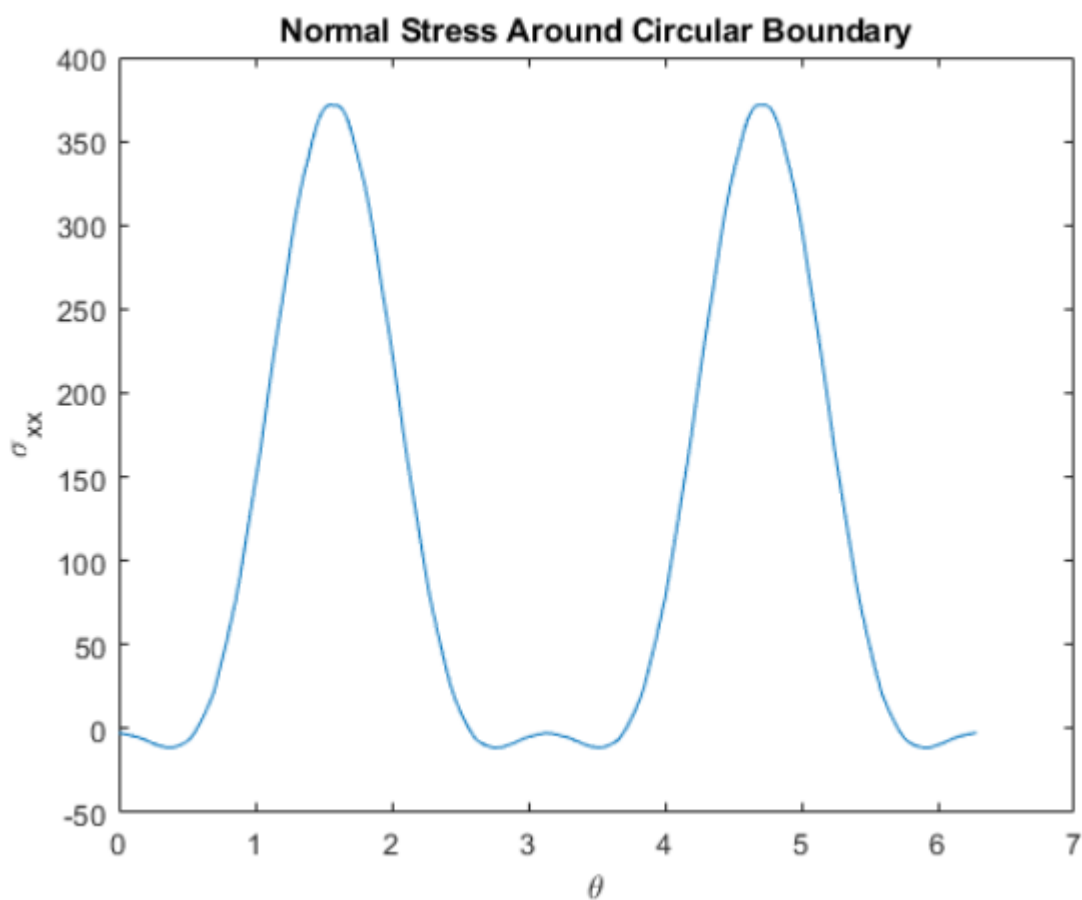


Рисунок 2.6 - изменения напряжений вблизи круговой границы

Проведем аналогичную процедуру решения задачи в PDE рассматривая четверть пластины с соответствующими симметрии задачи граничными условиями. Зададим структурные свойства материала. Создадим сетку и построим x-компонент нормального распределения напряжений. Результаты получаются идентичными первому решению, напряжение приблизительно равно 350 Па, как и в случае, когда рассматривалась полная модель пластины.

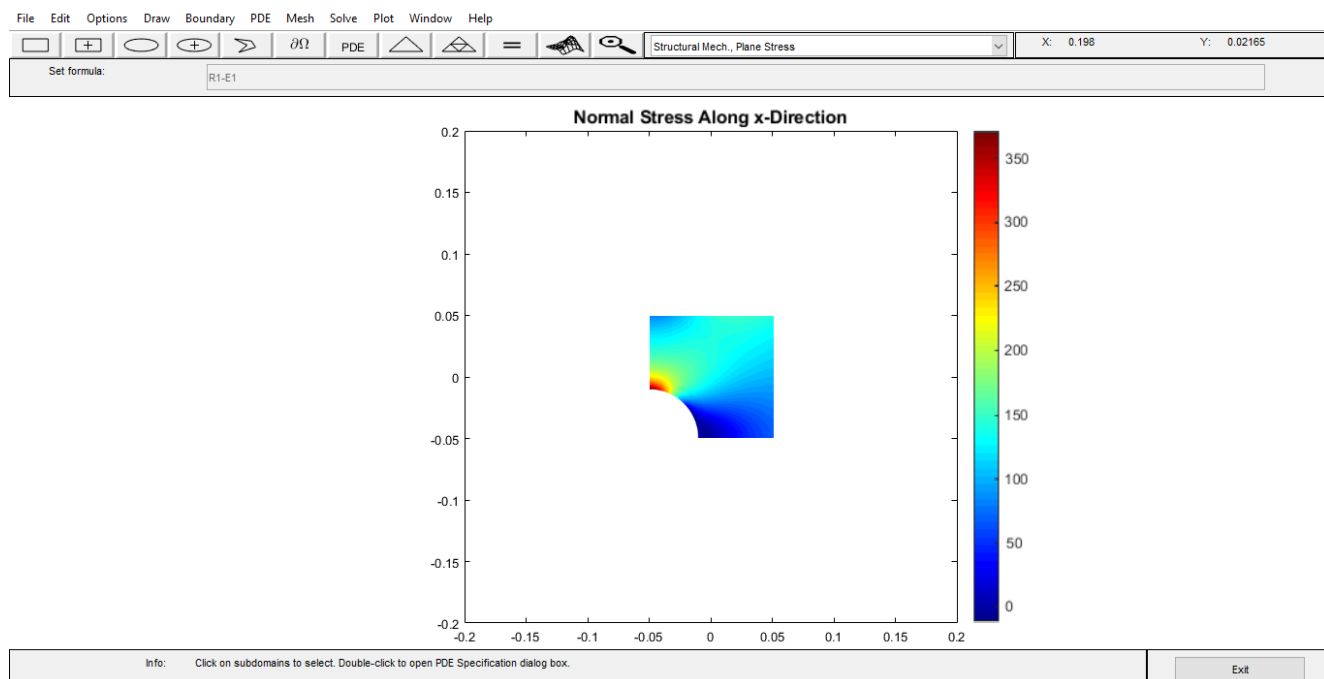


Рисунок 2.7 – распределения напряжений в $\frac{1}{4}$ пластины

Заключение

Высокая концентрация напряжений на краю отверстия представляет большой практический интерес. В самом общем случае при решении подобных задач рассматривается бесконечная пластина. Однако на практике приходится иметь дело с пластинами конечной ширины.

Мы рассмотрели аналитическое решение плоской задачи теории упругости и произвели решение в PDE Toolbox. Приложение позволяет решать задачи из разных областей, а удобный интерфейс не требует глубокого понимания метода конечных элементов. В результате мы получили решение, которое полностью удовлетворяет аналитическому.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основы задач математической упругости. – М.: АН СССР, 1954.
2. Макаров Е.В. Основы математической теории упругости. – М.: МГОУ, 2007.
3. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: НАУКОВ ДУМКА, 1972.
4. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: Самарский университет, 2001.
5. Биргера И.А., Шорра Б.Ф., Иосилевича Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1993.
6. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979.
7. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н., MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
8. MATLAB & Toolboxes [Электронный ресурс]. – <http://matlab.exponenta.ru/>.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

Инженерная школа

Кафедра механики и математического моделирования

ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ

на выпускную квалификационную работу студента Чайка Кирилла Александровича

направление подготовки 15.03.03 «Прикладная механика» группа Б3409

Руководитель ВКР старший преподаватель кафедры МиММ Ратников А.А.

На тему Анализ конечно-элементной плоской задачи теории упругости в пакете MatLab

Дата защиты ВКР «04» июля 2018 г.

Работа посвящена определению напряжённо-деформированного состояния плоской квадратной пластинки с круговым вырезом при действии одноосного растягивающего напряжения.

В работе рассматривается несколько плоских задач теории упругости, решение которых осуществлялось как аналитическими методами, так и методом конечных элементов с помощью приложения PDE Tools из пакета MatLab.

Сравнение полученных решений показало эффективность применения указанного приложения к решению плоских задач теории упругости и механики деформируемого твёрдого тела.

В ходе выполнения ВКР студент Чайка К.А. показал навыки работы с современными CAD/CAE системами, владение средствами компьютерного инжиниринга, знания основных методов решения задач механики, умение работать с литературой.

В дальнейшем работа может быть продолжена с учётом различных способов подкрепления вырезов, например, жёсткими кольцевыми элементами.

В целом считаю, что студент Чайка К.А. достоин присуждения степени бакалавра по направлению подготовки «Прикладная механика» и может быть рекомендован к поступлению в магистратуру. Оценка работы на усмотрение государственной экзаменационной комиссии. Заимствование составляет 30 %.

Руководитель ВКР

«02» июля 2018 г.

Собственноручная подпись
тов. Ратникова А.А.

удостоверяется

М.А. Масина Н.Г.




подпись

Ратников А.А.
И.О. Фамилия