

Санкт-Петербургский государственный университет
кафедра теории систем управления электрофизической аппаратурой

Пономарев Владимир Андреевич

Выпускная квалификационная работа

Моделирование электрических полей в сложных структурах

Направление 09.06.01

Системный анализ, информатика и управление

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Овсянников Дмитрий Александрович

Рецензент
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Ворогушин Михаил Феофанович

Санкт-Петербург 2018

Содержание

1	Введение	3
2	Разработка программного модуля расчета полей	4
2.1	Постановка задачи	4
2.2	Используемые методы	5
2.2.1	Определение граничных точек	5
2.2.2	Составление СЛАУ.	6
2.2.3	Резанные ячейки	6
2.3	решение СЛАУ	7
2.3.1	Метод релаксации	7
2.3.2	Метод соряженных градиентов	8
2.3.3	Особенности реализации	8
2.3.4	Проверка результата	9
2.4	Расчет напряженности в области	10
2.4.1	Проверка результата	12
3	LEPТА	14
3.1	Постановка задачи	15
3.2	Результаты расчета	16
3.3	Анализ полей E_x и E_y вдоль оси ловушки	21
3.4	Анализ вращающегося поля на оси ловушки	28
3.5	Аппроксимация вращающегося поля	30
4	Заключение	32

1 Введение

Одной из актуальных задач современной физики является изучение физических свойств позитронных пучков. Проект LEPTA (Low Energy Particle Toroidal Accumulator) направлен на исследования в этой области. Для удержания и накопления антивещества используются электромагнитные ловушки. Наиболее распространенной ловушкой является ловушка Пеннинга-Малмберга. Не смотря на огромное развитие ловушек, не все процессы, влияющие на накопление частиц, изучены. Численное моделирование динамики частиц и полей в ловушке позволит оптимизировать процесс накопления позитронов.

В настоящее время разработано много программ и программных комплексов для численных расчетов. Но все они, в основном, используют одинаковые методы, без возможности оптимизации под физические особенности установок для которых производятся расчеты. В подходящих программных комплексах нет возможности использования нужной точности расчетов или оптимизировать реализованные в них методы под архитектуру используемых вычислительных ресурсов.

Использование сразу нескольких программных комплексов для одного расчета (например, для расчета динамики пучка заряженных частиц внешние поля рассчитывать в одной программе, а динамику пучка - в другой) не представляется возможным из-за резко возрастающей сложности.

На основании всего вышеизложенного было принято решение о разработке программного комплекса, в котором реализованы необходимые численные методы, а так же была бы возможность выбора точности расчетов, оптимизация методов под особенности вычислительного эксперимента а так же архитектуру вычислительных ресурсов.

2 Разработка программного модуля расчета полей

2.1 Постановка задачи

Пусть $\bar{G} = G \cup \partial G$ — замкнутая область, где $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, U — потенциал электрического поля, ρ — функция распределения плотности объемного заряда, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость среды, \vec{n} — вектор нормали к кривой, $g(x_1, x_2)$ — некоторая непрерывная функция. Рассмотрим задачи решения уравнения Пуассона и нахождения напряженности электрического поля в зависимости от используемой системы координат.

Двумерные декартовы координаты (x, y) , компоненты напряженности электрического поля E_x и E_y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad (x, y) \in G, \quad (2)$$

$$U = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2. \quad (4)$$

Двумерные цилиндрические координаты (r, z) (аксиально-симметричный случай), компоненты напряженности электрического поля E_r и E_z

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (r, z) \in G, \quad (5)$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (r, z) \in G, \quad (6)$$

$$U = g(r, z), \quad (r, z) \in \Gamma_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (r, z) \in \Gamma_2. \quad (8)$$

Полярные координаты (r, φ) , компоненты напряженности электрического поля E_r и E_φ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (r, \varphi) \in G, \quad (9)$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, E_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (r, \varphi) \in G, \quad (10)$$

$$U = g(r, \varphi), \quad (r, \varphi) \in \Gamma_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_2. \quad (12)$$

Трёхмерные декартовы координаты (x, y, z) , компоненты напряженности электрического поля E_x, E_y, E_z

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (x, y, z) \in G, \quad (13)$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (x, y, z) \in G, \quad (14)$$

$$U = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Gamma_1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_2. \quad (16)$$

2.2 Используемые методы

Для решения уравнения Пуассона в различных системах координат был выбран метод конечных разностей. Он имеет ряд преимуществ по сравнению с методом конечных элементов. Как правило в методе конечных элементов используется разбиение расчетной области на треугольники (тетраэдры в трехмерном случае). Из-за сложных областей расчетная сетка получается неоднородной, что влечет за собой ряд сложностей. Из-за такой сетки появляются неточности и нестабильности в результатах, особенно на краях расчетной области. А так же столь неоднородная сетка усложняет процесс симуляции динамики пучка частиц.

При использовании прямоугольной сетки и метода конечных разностей большинства проблем, связанных с крайне неоднородной сеткой метода конечных элементов, можно избежать. Но на такой сетке будет проблема в том, что сетка, в большинстве случаев, не будет совпадать с границами расчетной области, что вызовет проблемы с точностью и стабильностью результатов на границах области. Эта проблема решается использованием метода резанных ячеек.

Метод конечных разностей в сочетании с методом резанных ячеек более стабилен в приграничных областях (что будет показано далее), а так же упрощает задачу для моделирования движения частиц.

2.2.1 Определение граничных точек

Пусть $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ - множество всех точек, где M_1 - множество регулярных точек сетки, M_2 - множество нерегулярных точек сетки, M_3 - множество граничных точек сетки. Регулярными точками называются точки, у которых все соседние точки не являются граничными. Нерегулярными точками называются точки, у которых есть хотя бы одна соседняя точка является граничной. Граничной точка - точка которая либо лежит на границе либо за границей расчетной области.

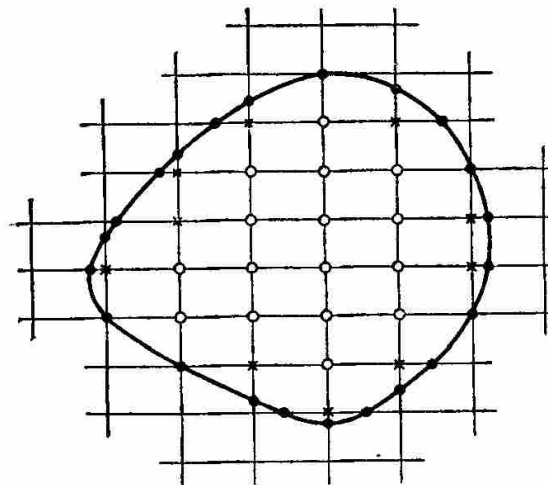


Рис. 1: Пример регулярных(круги), нерегулярных (крестики) и граничных точек (черные точки). Рисунок взят из [1]

Граничные точки, которые лежат за пределами области G определяются еще на этапе создания сетки. Граничные Точки, которые лежат в области G и соответствуют внутренним границам (например, границы соответ-

ствующие катоду или запирающей сетке), определяются уже после создания сетки.

Сначала находятся все точки пересечения границы ∂G и сетки. Затем для каждой точки пересечения ищется точка сетки, помеченная как граничная. Если такой точки нет, то ближайшая точка сетки к точке пересечения помечается как граничная. Граничным точкам записываются параметры, соответствующие точке: ребро границы, тип граничного условия, значение граничного условия.

2.2.2 Составление СЛАУ.

Для решения уравнения Пуассона применяется метод конечных разностей, используется конечно-разностная схема крест (см. рис.2). [1]

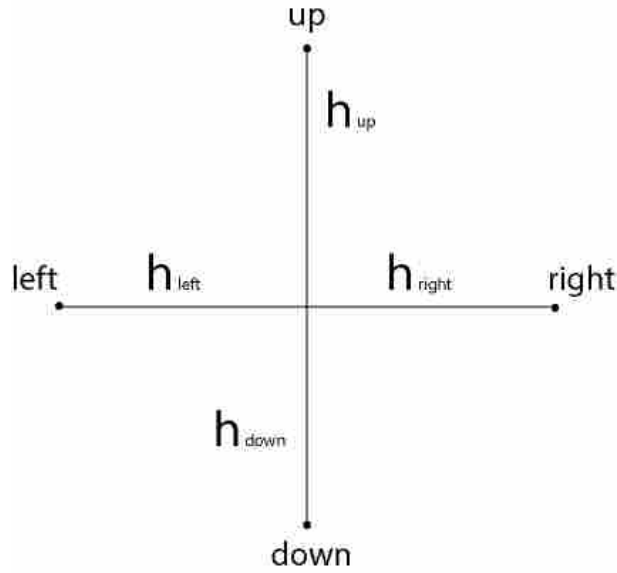


Рис. 2: Конечно-разностная схема крест для двумерной системы координат

Конечно-разностное уравнение будет иметь вид:

для декартовых координат (двумерный случай)

$$\frac{U_{left} + U_{right} - 2U_0}{h_{right}^2} + \frac{U_{up} + U_{down} - 2U_0}{h_{up}^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17)$$

для цилиндрических (аксиально-симметричный случай) и полярных координат

$$\frac{U_{right} - U_0}{r \times h_{right}} + \frac{U_{left} + U_{right} - 2U_0}{h_{right}^2} + \frac{U_{up} + U_{down} - 2U_0}{h_{up}^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

для декартовых координат (трехмерный случай)

$$\frac{U_{deep} + U_{outward} - 2U_0}{h_{deep}^2} + \frac{U_{left} + U_{right} - 2U_0}{h_{right}^2} + \frac{U_{up} + U_{down} - 2U_0}{h_{up}^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (19)$$

2.2.3 Резанные ячейки

Для повышения точности решения был применен метод резанных ячеек. Он заключается в том, что для нерегулярных точек, используется схема крест с неодинаковыми расстояниями до точек (рис. 3). Нерегулярные рас-

стояния в схеме вычисляются до соответствующей точки пересечения сетки и границы области. Тогда конечно-разностное уравнение (для двумерного случая декартовых координат) принимает вид:

$$\frac{2U_{left}}{h_{left}(h_{left} + h_{right})} + \frac{2U_{right}}{h_{right}(h_{left} + h_{right})} + \frac{2U_{up}}{h_{up}(h_{up} + h_{down})} + \frac{2U_{down}}{h_{down}(h_{up} + h_{down})} + \frac{U_{right} - U_0}{r \times h_{right}} - \frac{2U_0}{h_{up}h_{down}} - \frac{2U_0}{h_{up}h_{down}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (20)$$

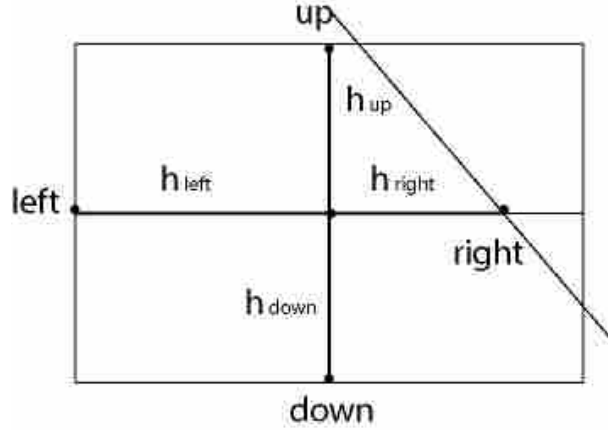


Рис. 3: Пример схемы крест для нерегулярной точки сетки

Для случая граничных условий Неймана метод резаных ячеек не применялся из-за ненужности. Границы расчетной области, соответствующие граничным условиям Неймана можно представить так, что бы они совпадали с границами ячеек сетки.

2.3 решение СЛАУ

2.3.1 Метод релаксации

Методом релаксации [2]. Формула для решения методом релаксации

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)} \right) \quad (21)$$

Где ω - релаксационный коэффициент, a_{ij} - матрица системы линейных уравнений, b_i - линейный вектор, k - итерационный шаг. Релаксационный коэффициент ω вычислялся по формуле

$$\omega = \frac{8 - \sqrt{64 - 16t^2}}{t^2}$$

$$t = \cos(\pi/N_x) + \cos(\pi/N_y) \quad (22)$$

где N_x и N_y - количество узлов сетки вдоль осей координат. Так как расчетная область в большинстве случаев имеет сложную форму, то берется максимальное количество узлов вдоль каждой из осей координат

2.3.2 Метод сопряженных градиентов

Для решения СЛАУ выбирается начальное приближение

$$x_i^0 \quad (23)$$

$$r_i^0 = \sum_j a_{ij} x_j \quad (24)$$

$$z_i^0 = r_i^0 \quad (25)$$

После запускается итерационный процесс

$$\alpha^k = \frac{\sum_i (r_i^k)^2}{\sum_i \sum_j a_{ij} z_j^k z_i^k} \quad (26)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \alpha^k z_i^k \quad (27)$$

$$r_i^{k+1} = r_i^k - \alpha^k \sum_j a_{ij} z_j^k \quad (28)$$

$$\beta^k = \frac{\sum_i (r_i^{k+1})^2}{r_i^k} \quad (29)$$

$$z_i^{k+1} = r_i^{k+1} + \beta^k z_i^k \quad (30)$$

$$(31)$$

Нельзя однозначно сказать, что один из методов лучше другого. С одними задачами метод сопряженных градиентов справляется быстрее, с другими - метод релаксации.

2.3.3 Особенности реализации

СЛАУ хранится в наборе векторов. Индексы точек, которые задействованы в уравнении и их коэффициенты записываются в отдельные вектора. Всего 11 векторов: `ups`, `downs`, `lefts`, `rights`, `middles` – индексы точек; `c_ups`, `c_downs`, `c_lefts`, `c_rights`, `c_middles` – коэффициенты уравнения; `lin_vect` – свободный член уравнения.

Для достижения скорости решения СЛАУ записывалось не в виде матрицы, а в виде векторов, тогда формула для метода релаксации принимает вид (для декартовых координат, двумерный случай):

$$\begin{aligned} x[middles[k]] = & -(x[rights[k]] * c_rights[k] + x[lefts[k]] * c_lefts[k] + \\ & + x[ups[k]] * c_ups[k] + x[downs[k]] * c_downs[k]) * \omega / c_middles[k] + \\ & + (1 - \omega) * x[middles[k]] + \omega * vect[middles[k]] / c_middles[k] \end{aligned} \quad (32)$$

До этого использовалась разреженная матрица в формате CRS [5], но от нее пришлось отказаться в пользу векторов из-за недостаточной скорости вычислений.

Код написан таким образом, что создание кода для вычислений в новой двумерной системы координат можно осуществить написанием нескольких простых функций, вычисляющих коэффициенты уравнения.

2.3.4 Проверка результата

В качестве тестового примера была выбрана квадратная область с большим круглым вырезом по середине. Сторона квадрата равнялась 0.10 М, диаметр круга – 0.6 М. На вертикальной границе слева потенциал равен 100

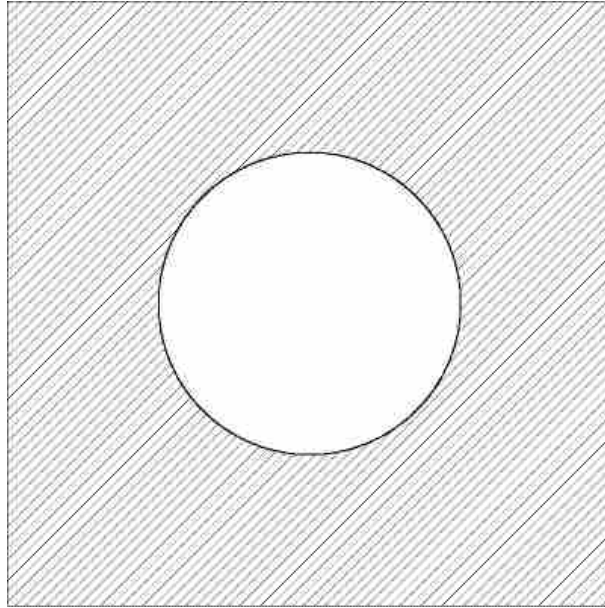


Рис. 4: Тестовая расчетная область

В, на вертикальной границе слева – 0 В. На границе выреза, круге - 50 В. На нижней и верхней горизонтальных границах установлены естественные граничные условия. Для проверки результата была выбрана линия, проходящая рядом с границей, вдоль которой будут строиться график потенциала, по которому будет происходить сравнение различных параметров. Эта линия показана на рисунке 5. Сравнение проводилось с расчетами в программном комплексе COMSOL. Расчет без использования метода резанных ячеек и с использованием проводился на сетке с шагом в 0.001 М.

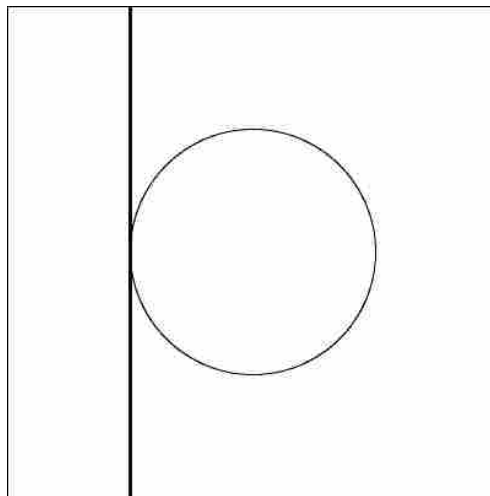


Рис. 5: Линия, вдоль которой строятся графики

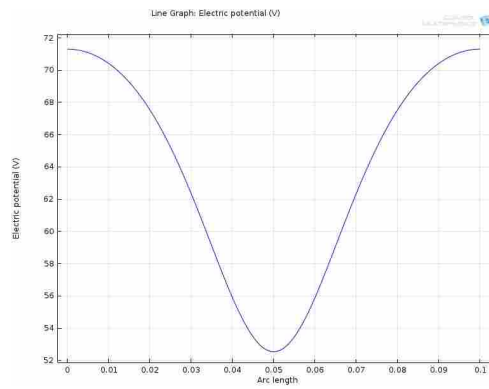


Рис. 6: график потенциала, посчитанного в COMSOL

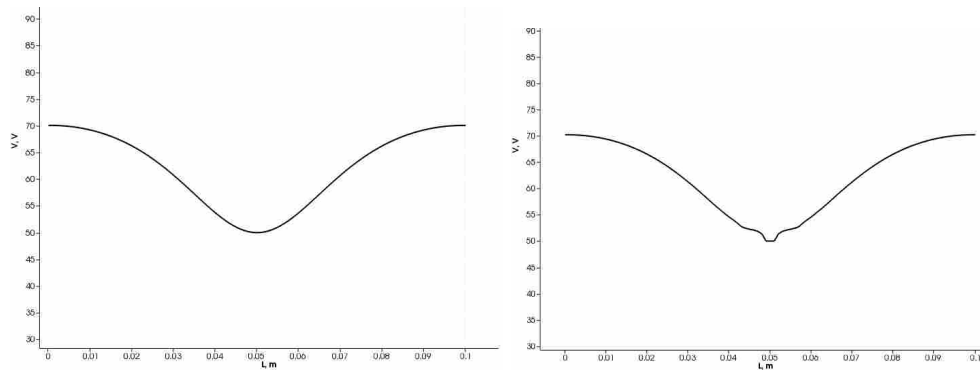


Рис. 7: графики потенциала, посчитанного с использованием метода резанных ячеек и без него

2.4 Расчет напряженности в области

В общем случае напряженность вычисляется по формуле.

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial U}{\partial r} \\ E_z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (33)$$

Для расчета напряженности на сетке используется конечно-разностная схема второго порядка.

Было опробовано несколько способов нахождения напряженностей полей в узлах сетки.

При вычислении потенциала в граничных точках были записаны значения потенциала, соответствующего точке пересечения границы расчетной области и сетки (из-за использования метода резанных ячеек эти точки не всегда совпадают). Поля рассчитываются в точках пересечения границы и сетки по конечно-разностным формулам, а затем, значения полей на границе экстраполируются в граничные точки.

Для вычислений напряженностей были использованы формулы (34)-(38), полученные из разложения функции в ряд Тейлора.[4]

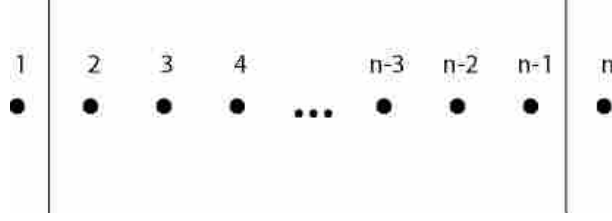


Рис. 8

$$f'_{i-1} = \frac{1}{H_i} \left(-(2 + \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i - \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right) \quad (34)$$

$$f'_i = \frac{1}{H_i} \left(-\delta_{i+1}f_{i-1} + \frac{\delta_{i+1}^2 - 1}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right) \quad (35)$$

$$f'_{i+1} = \frac{1}{H_i} \left(\delta_{i+1}f_{i-1} - \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{2 + \delta_{i+1}}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right) \quad (36)$$

$$H_i = h_i + h_{i+1} \quad (37)$$

$$\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i} \quad (38)$$

Для регулярных точек (на рисунке 8 это точки 3, 4, $n - 3$, $n - 2$) используется формула 39

$$f'_i = \frac{f_{i-1} - f_{i+1}}{2h} \quad (39)$$

Для нерегулярных точек, у которых граничная точка слева (на рисунке 8 это точка 2) используется формула

36. Для нерегулярных точек, у которых граничная точка справа (на рисунке 8 это точка $n - 1$) - формула 34.

Для граничной точки, у которой граница слева (на рисунке 8 это точка 1)

$$f'_1 = \frac{h}{h_-} (f'_{bound} - f'_{ir}) + f'_{ir} \quad (40)$$

Для граничной точки, у которой граница справа (на рисунке 8 это точка n)

$$f'_n = \frac{h}{h_-} (f'_{bound} - f'_{ir}) + f'_{bound} \quad (41)$$

Где f'_{bound} - значение напряженности на границе, f'_{ir} - значение напряженности в нерегулярной точке, h_- - расстояние от нерегулярной точки до границы. В случае совпадения граничной точки и границы напряженность будет вычисляться по формулам (36),(34).

При данном подходе проявляется нестабильность результатов, особенно рядом с границей. Для решения проблемы стабильности, был опробован дугой подход. Сначала значение потенциала экстраполировалось в граничную точку (которая в общем случае лежит за границей расчетной области). Затем вычислялись напряженности полей в узлах сетки. В этом случае для вычислений напряженностей в регулярных и нерегулярных точках использовалась формула (39) Для граничных точек использовались формулы (40) и (41)

Этот метод оказался гораздо более стабильным, чем описанный ранее.

Так же для повышения стабильности расчета были использованы кубические сплайны.

Сплайн строился для каждой неграничной точки сетки.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \quad (42)$$

После построения сплайна по продифференцированному уравнению сплайна находилась напряженность поля. По горизонтальным линиям вычислялась напряженность E_x , а по вертикальным — E_y . Результат стал более стабильным.

В дальнейшем использовались конечно-разностные уравнения, с тем отличием, что вместо шага сетки брался полуторный шаг, а вместо f_{i-1} и $f_{i+1} - f_{i-1.5}$ и $f_{i+1.5}$. Соответствующие значения потенциала вычислялись через сплайны. Подобная схема дала наибольшую стабильность результата.

Использование сплайнов не дало значительного результата, а только усложняло вычисления. В конечном итоге было принято решение их не использовать.

2.4.1 Проверка результата

Для проверки результатов расчета напряженности полей был взят тестовый пример, такой же как и в расчете потенциалов. Графики напряженности Ez строились вдоль прямых, изображенных на рисунках 5 и 9. Сравнивались методы нахождения напряженностей по потенциалу, найденному с использованием метода резанных ячеек.

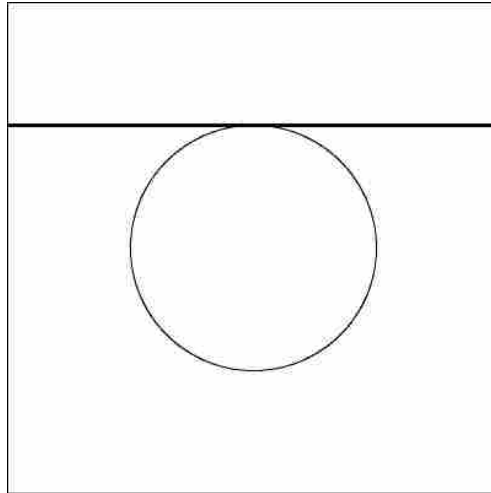
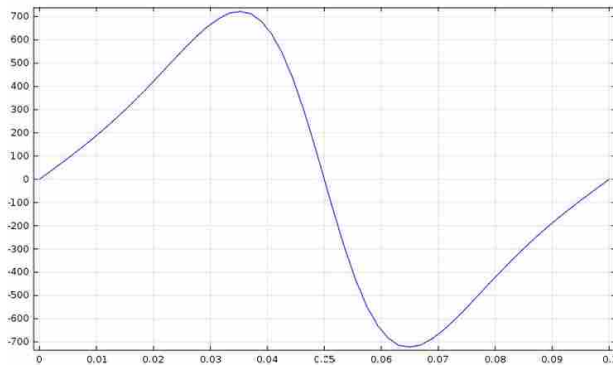
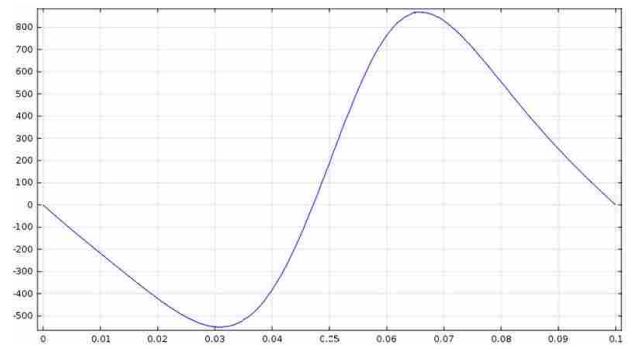


Рис. 9: Линия, вдоль которой строятся графики
Графики, полученные в среде COMSOL



а



б

Рис. 10: Графики, полученные в среде COMSOL

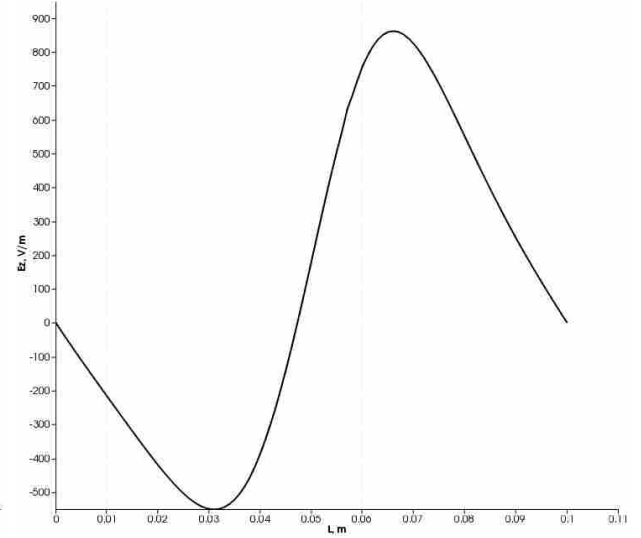
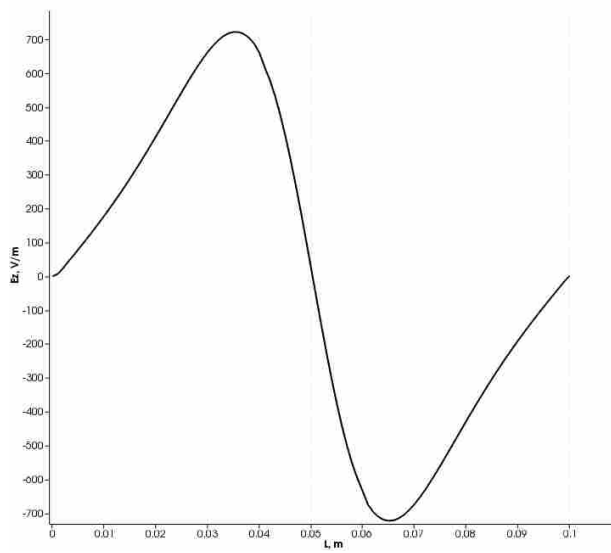


Рис. 11: Метод конечных разностей для сетки 0.001 м.

Из графиков видно, что решения полученные в Daizu полностью совпадают с решением, полученным в COMSOL.

3 LEPTA

Проект LEPTA был запущен в 2004 году и направлен на изучение физических свойств пучков позитрония. Ловушка Пеннинга-Малмберга-Сурко, используемая в установке LEPTA [7], состоит из 8 электродов (рис. 12). Электроды I-III предназначены для поддержания разности давлений буферного газа на концах ловушки, осуществляющего охлаждение частиц по средствам неупругих столкновений по пути в область IV - VI электродов, где и происходит основное накопление позитронов. Для увеличения эффективности накопления в данной ловушке применяется "вращающееся поле"[8, 9]. Этот метод заключается в том, что к стационарному полю добавляется электрическое поле, вращающееся в перпендикулярной к оси ловушки плоскости. Для его реализации IV электрод продольно разделен на 4 сегмента. На каждый из них подается переменное напряжение амплитудой 1 Вольт с разницей по фазе в 90 градусов между соседними сегментами. Основные параметры электродов ловушки представлены в таблице 1.

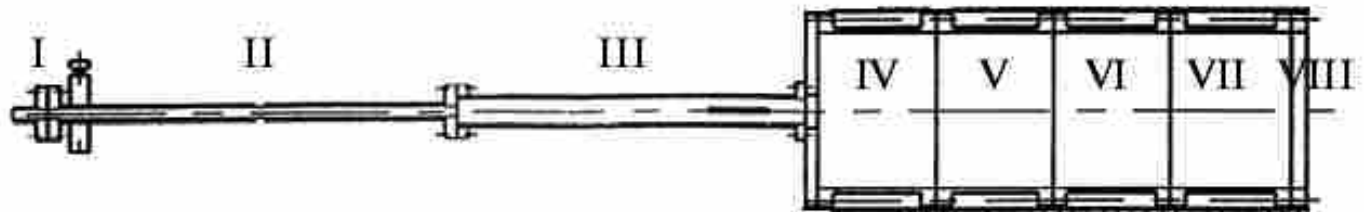


Рис. 12: Схема ловушки в установке LEPTA

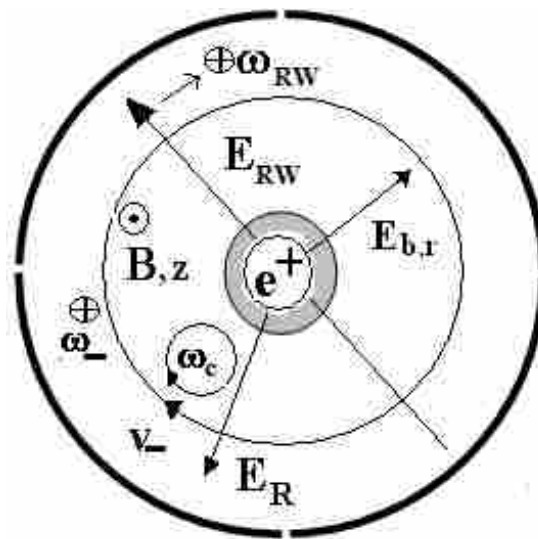


Рис. 13: электрод IV в поперечном разрезе

Значение потенциала электростатического поля наиболее интересно в области канала прохождения и накопления частиц. Это происходит внутри электродов I — VIII. Электроды представляют из себя полые цилиндры, наполненные специальным газом. В данной задаче считалось, что внутри электродов вакуум. Расчетная область полей должна полностью охватывать внутреннюю область электродов, поэтому она определяется исходя

Таблица 1: Основные параметры электродов ловушки LEPTA

Электрод	Диаметр, мм	Длина, мм	Потенциал, В
<i>I</i>	12	50	44.8
<i>II</i>	12.7	500	40.5
<i>III</i>	30	495	32.9
<i>IV</i>	200	160	20
<i>V</i>	200	160	20
<i>VI</i>	200	160	20
<i>VII</i>	200	160	100
<i>VIII</i>	200	20	100

из параметров электродов.

Электроды I – VIII плотно прилегают друг к другу, для сохранения газа, при этом они изолированы друг от друга. на каждом из них задается свой потенциал. Эти потенциалы приведены в таблице 2. Электрод IV продольно разделен на 4 равные части для создания эффекта «rotating wall». Для стационарной задачи будем считать, что на всех частях этого электрода потенциалы одинаковые.

Для нестационарной задачи потенциал на одной из частей электрода IV вычисляется по формуле $U = U_4 + U_{40}\cos(\omega t + \phi)$, где U_{40} – амплитуда, равная 1В, ϕ - фаза, которая соответствует одной из 4-х частей электрода (0, $\pi/2$, π или $3\pi/2$).

3.1 Постановка задачи

Пусть $\bar{G} = G \cup \partial G$ – замкнутая область, где $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$ - граница области, $\Gamma_1 - \Gamma_6$ соответствуют граничным условиям Дирихле, а Γ_7 - Неймана (рис. 14), U – потенциал электрического поля. Потенциал поля удовлетворяет уравнению Лапласа в декартовых координатах (x, y, z)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in G, \quad (43)$$

Уравнения для компонент напряженности поля E_x , E_y и E_z имеют вид

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (x, y, z) \in G. \quad (44)$$

Эффективность ловушки определяется максимальным количеством частиц, удерживаемым ловушкой в области накопления частиц. Основная утечка позитронов из ловушки происходит через область инъекции. Поэтому наибольший интерес представляет область накопления позитронов (область IV - VI электродов), а так же область, через которую происходит инъекция позитронов в накопительное кольцо (область VII-VIII электродов).

Расчет производился в программном пакете DAISI. В нем реализованы описанные выше методы расчета полей. Так же DAISI удобен для расчета динамики частиц.

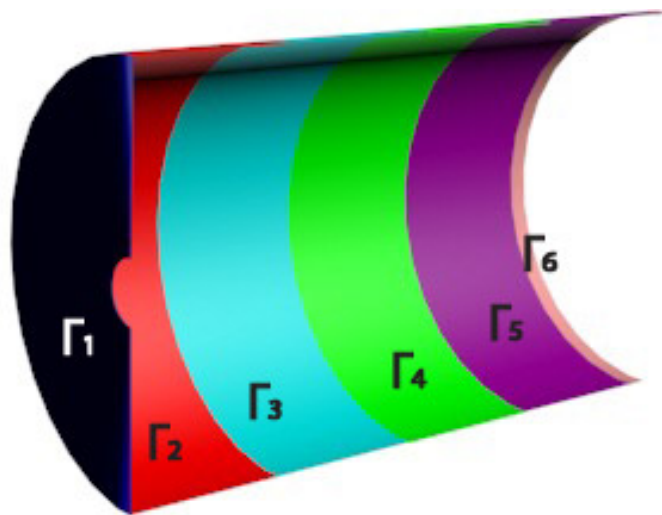


Рис. 14: Расчетная область в продольном разрезе. Γ_1 соответствует электроду III, Γ_2 - электроду IV, Γ_3 - электроду V, Γ_4 - электроду VI, Γ_5 - электроду VII, Γ_6 - электроду VIII.

3.2 Результаты расчета

Расчет полей произведен на сетке с одинаковым по всем осям шагом 0.5 мм. [10, 11]

Результаты расчетов потенциалов стационарного и вращающегося полей представлены отдельно друг от друга, из-за различных диапазонов значений.

На рисунке 15б представлен потенциал стационарного поля в плоскости, проходящей через ось ловушки, как показано на рисунке 15а

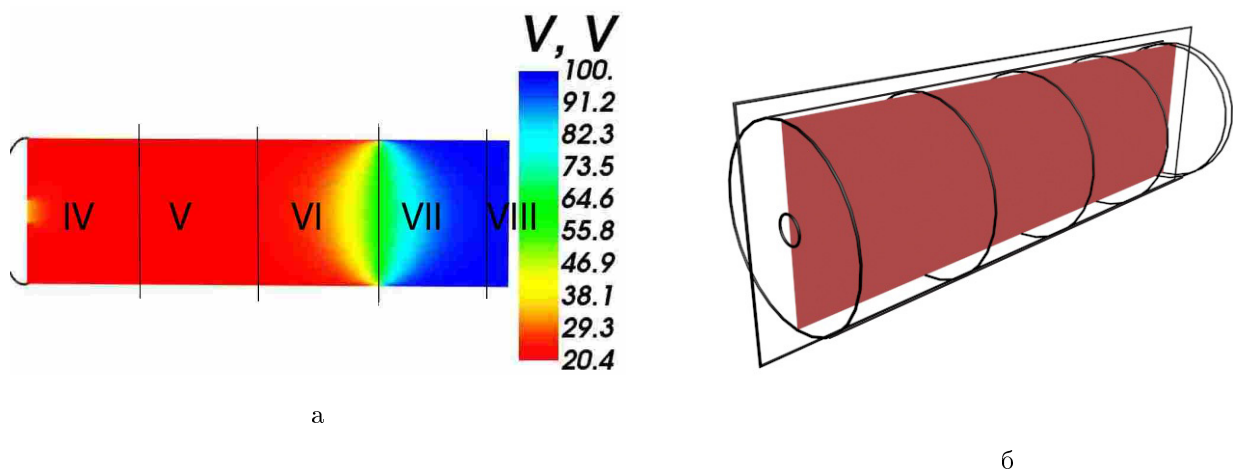
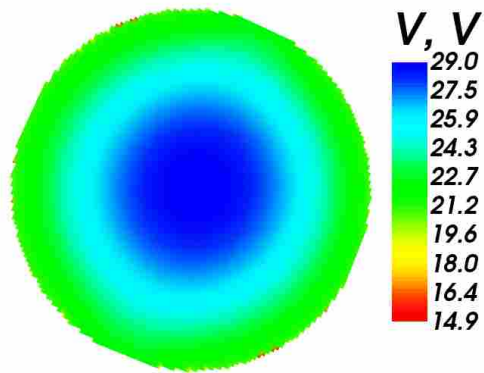


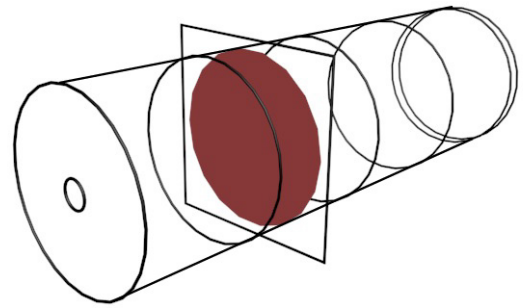
Рис. 15: а) Потенциалы стационарных полей в IV-VIII электродах в продольной плоскости на оси ловушки (рис. б)

На рисунке 16б) представлен потенциал стационарного поля в плоскости, проходящей перпендикулярно оси ловушки, пересекая ловушку в середине IV электрода, как показано на рисунке 16а

На рисунке 17б) представлен потенциал стационарного поля в плоскости, проходящей через ось ловушки, как



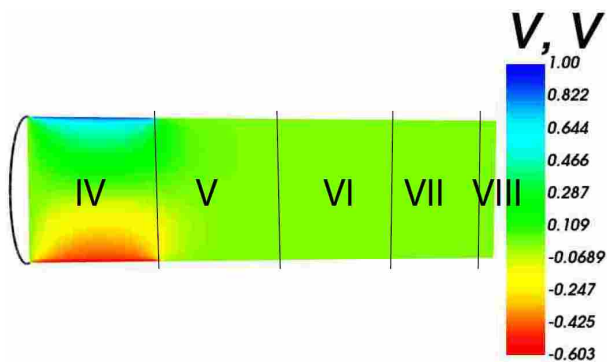
а



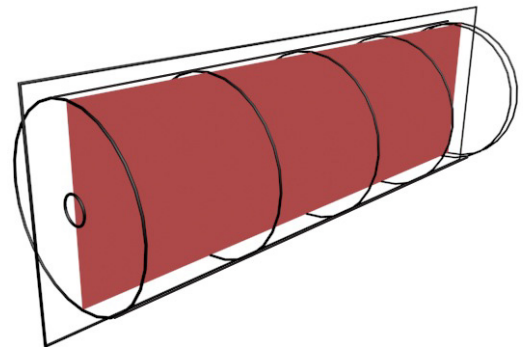
б

Рис. 16: а) Потенциалы стационарного поля в середине V электрода в поперечной плоскости (рис. б)

показано на рисунке 18а



а



б

Рис. 17: а) Потенциалы вращающегося поля в IV-VIII электродах в продольной плоскости, на оси ловушки (рис. б)

На рисунке 18б представлены потенциал стационарного поля в плоскости, проходящей перпендикулярно оси ловушки, пересекая ловушку в середине IV электрода, как показано на рисунке 18а

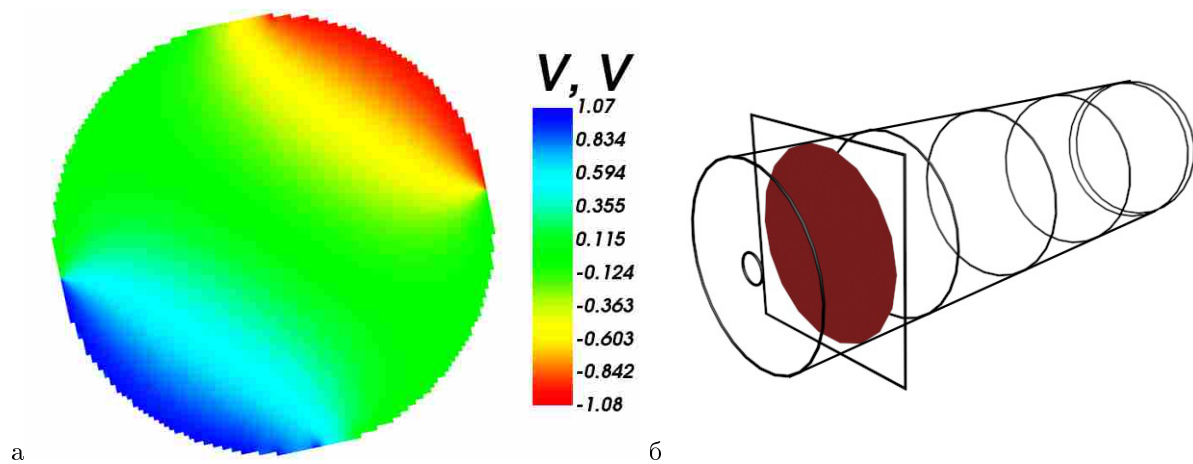


Рис. 18: а) Потенциалы вращающегося поля в середине IV электрода в поперечной плоскости (рис. б)

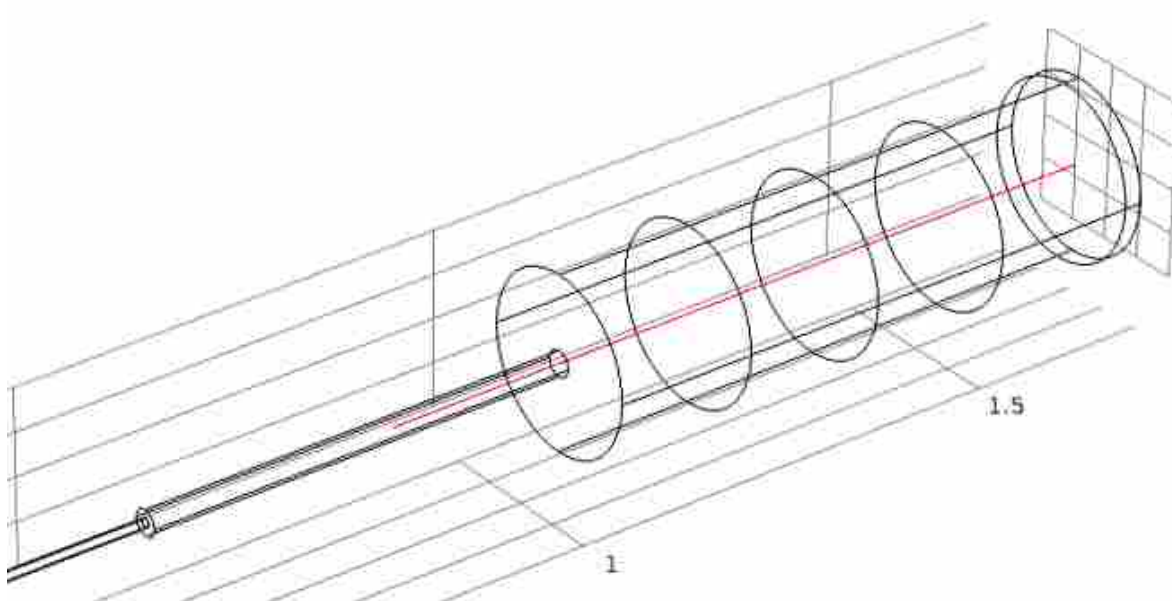


Рис. 19: Красной линией обозначена ось ловушки вдоль 200мм III электрода и IV – VIII электродов.

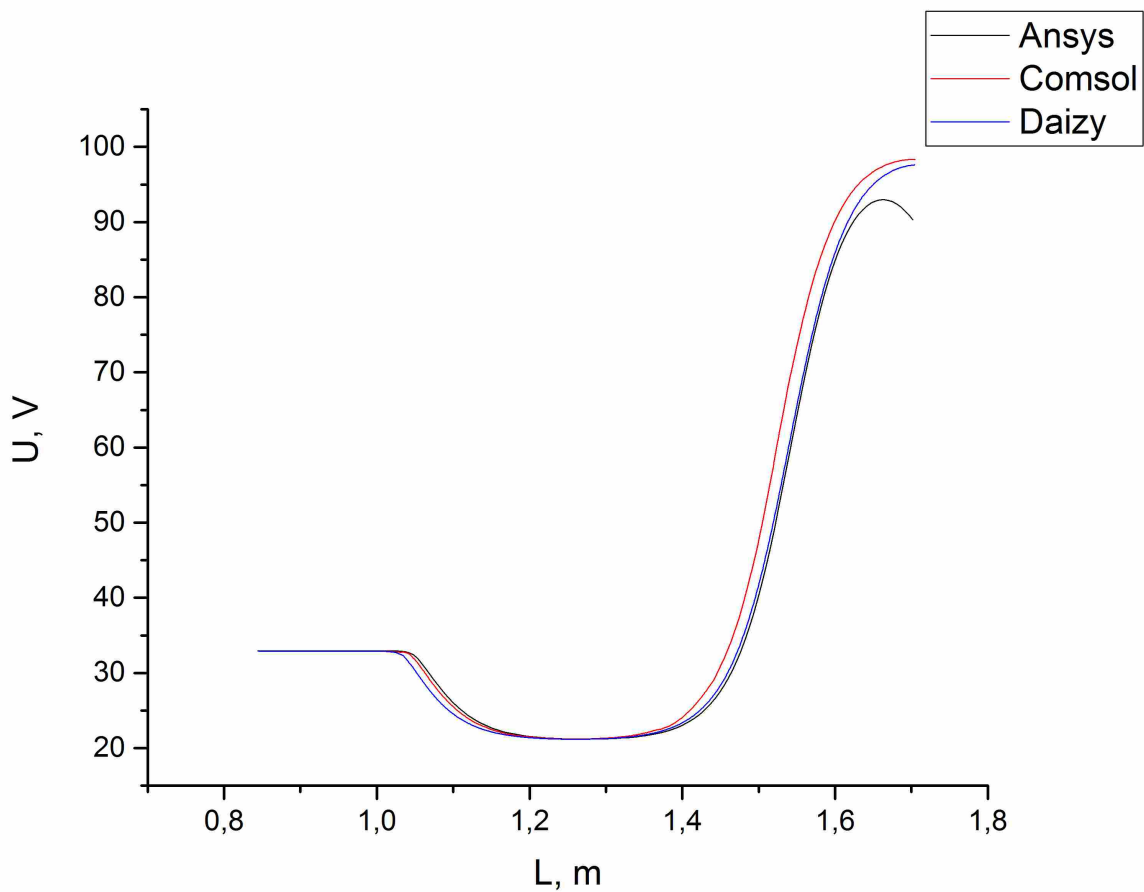


Рис. 20: Графики потенциала вдоль оси ловушки, посчитанного в Daizy, COMSOL и ANSYS.

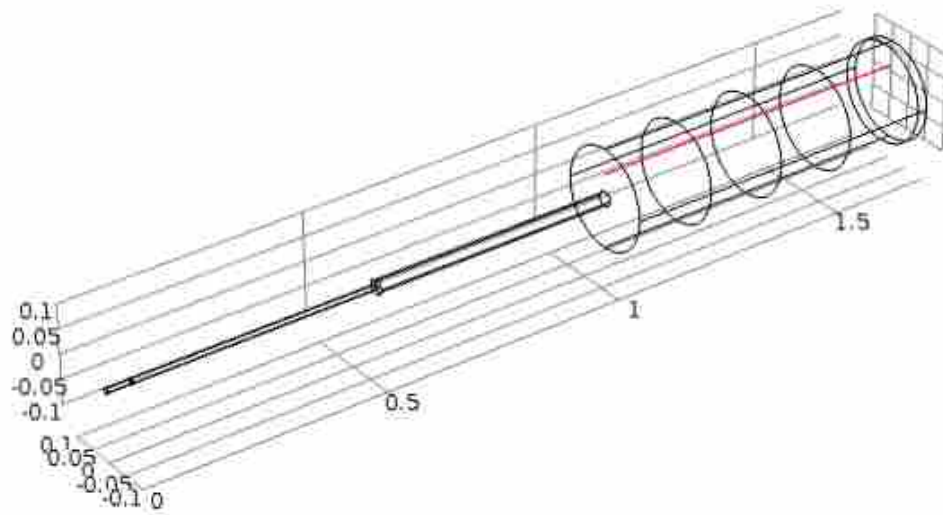


Рис. 21: Красным нарисована линия, параллельная оси ловушки. Она строго выше оси ловушки, и проведена вдоль IV – VIII электродов, на высоте равной половине радиуса IV электрода.

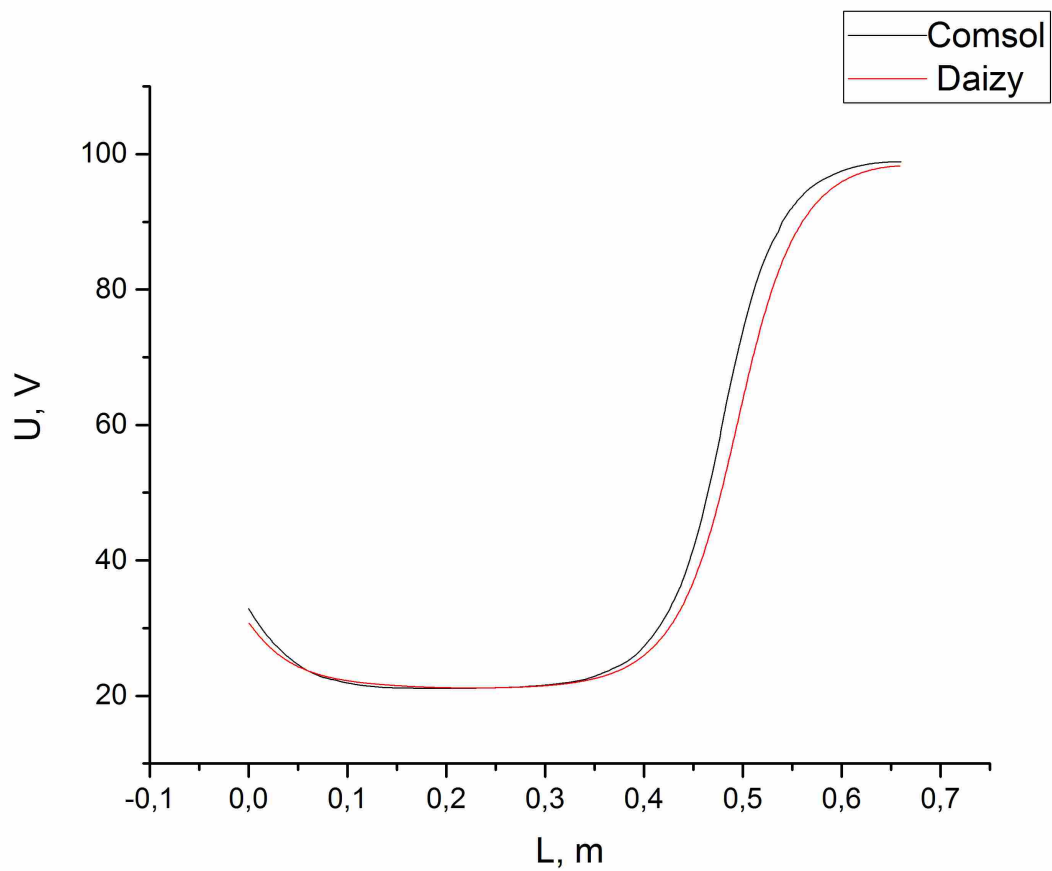


Рис. 22: График потенциала вдоль линии над осью ловушки. Черная линия — расчет в Comsol, красная линия — в Daizy.

3.3 Анализ полей E_x и E_y вдоль оси ловушки

Для потенциала, не на оси ловушки, можно использовать следующее приближение

$$U(r, z) = U(r) - \frac{r^2}{2} U''(z) + \frac{1}{2^2} \frac{r^4}{2} U^{(IV)}(z) - \frac{1}{(3!)^2} \frac{r^6}{2} U^{(VI)}(z) + \dots \quad (45)$$

Мы ограничимся вторым приближением.

Формулы для полей E_x и E_y будут выглядеть следующим образом:

$$E_x = \frac{x}{2} U''(z) \quad (46)$$

$$E_y = \frac{y}{2} U''(z) \quad (47)$$

Графики вдоль оси ловушки E_x вдоль оси ловушки при $x = 0.01$, $y = 0.0$, вычисленный по формуле (46) и E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.01$, вычисленный по формуле (47) совпадают, поэтому на графиках ниже будет нарисован график только для E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.01$. Как мы видим далее по графикам, E_x и E_y вычисленные по формулам (46) и (47) хорошо согласуются с расчетами, выполненными численно при решении уравнения Лапласа. Однако согласование уменьшается при отдалении от оси ловушки. Возможно стоит учесть 3й член разложения из формулы (45).

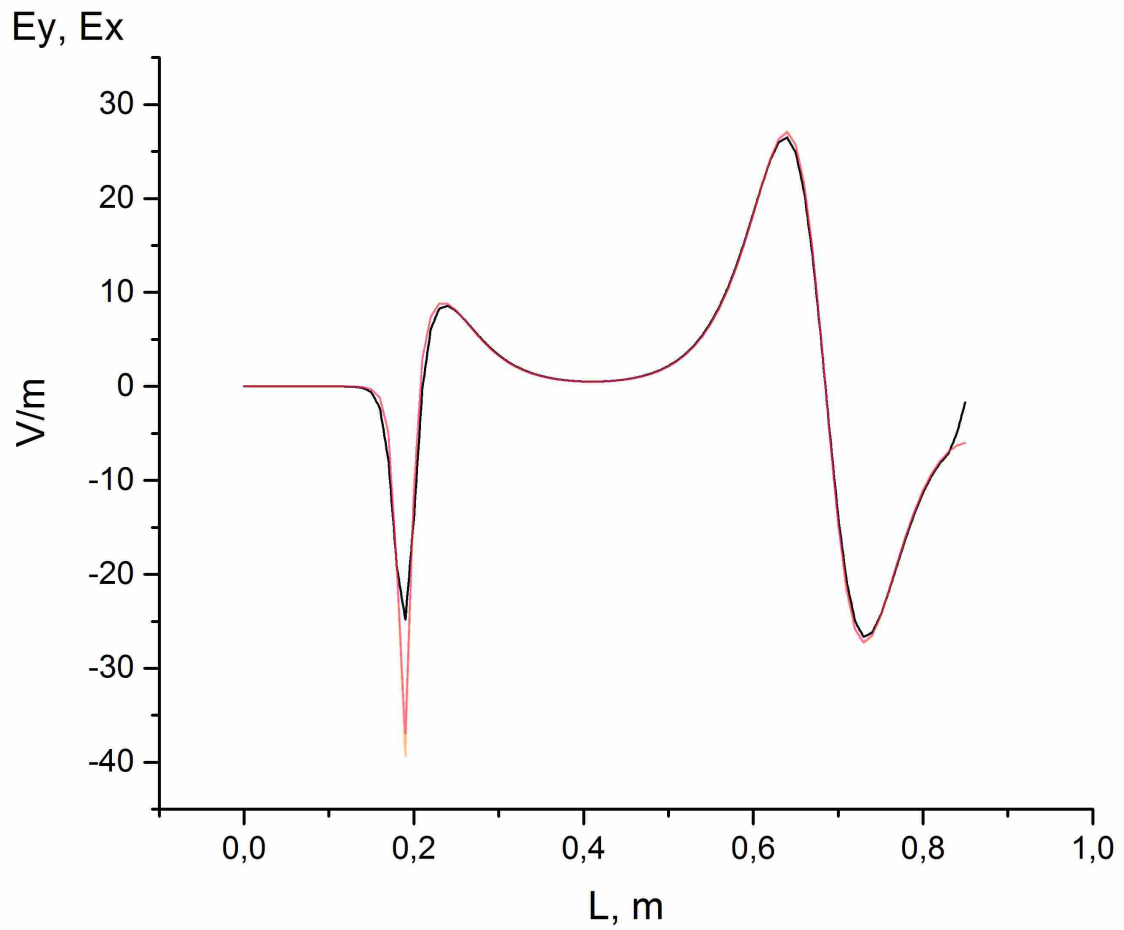


Рис. 23: Черный график — E_y вдоль оси при $x = 0.0$, $y = 0.01$, вычисленной по формуле (3). Розовый график — E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.01$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график — E_x вдоль оси ловушки при $x = 0.01$, $y = 0.0$, вычисленный при решении уравнения Пуассона. Оранжевый график и розовый полностью совпадают

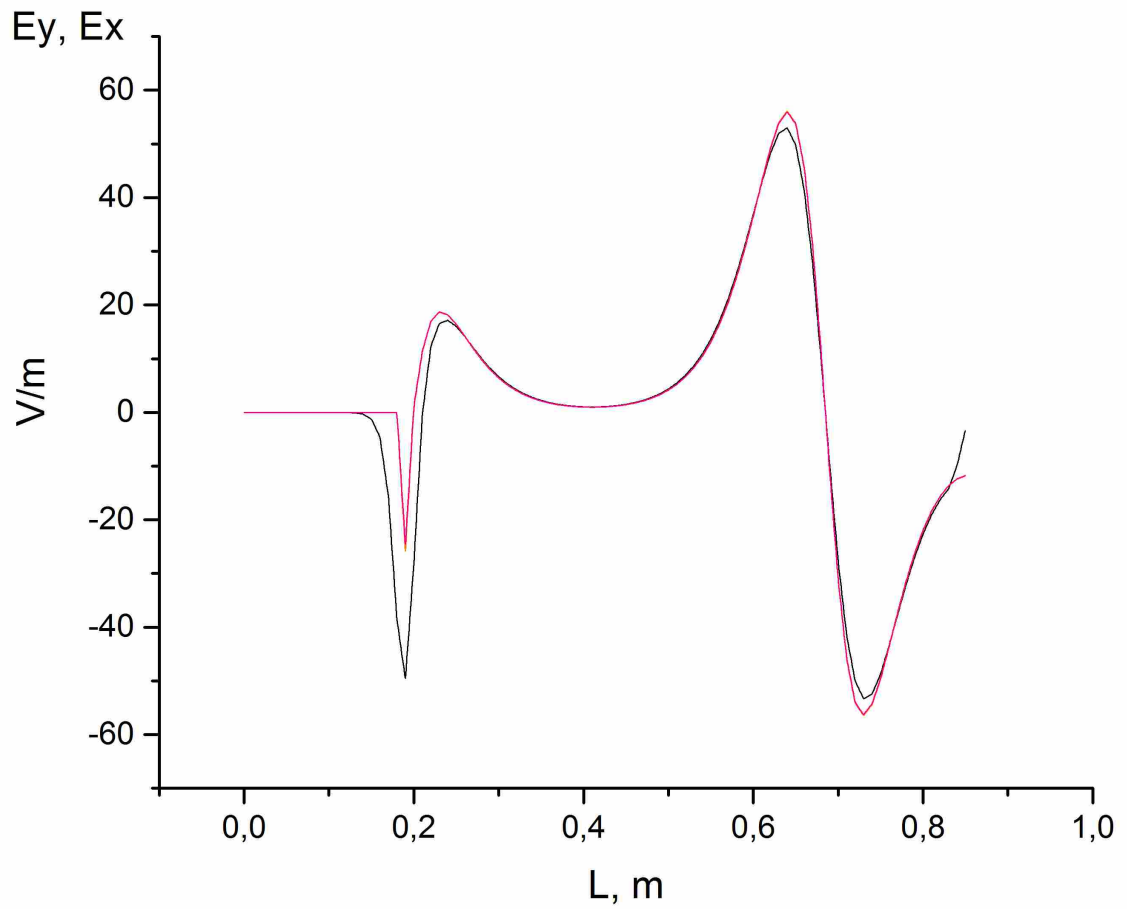


Рис. 24: Черный график — E_y вдоль оси при $x = 0.0$, $y = 0.02$, вычисленной по формуле (3). Розовый график — E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.02$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график — E_x вдоль оси ловушки при $x = 0.02$, $y = 0.0$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график и розовый полностью совпадают

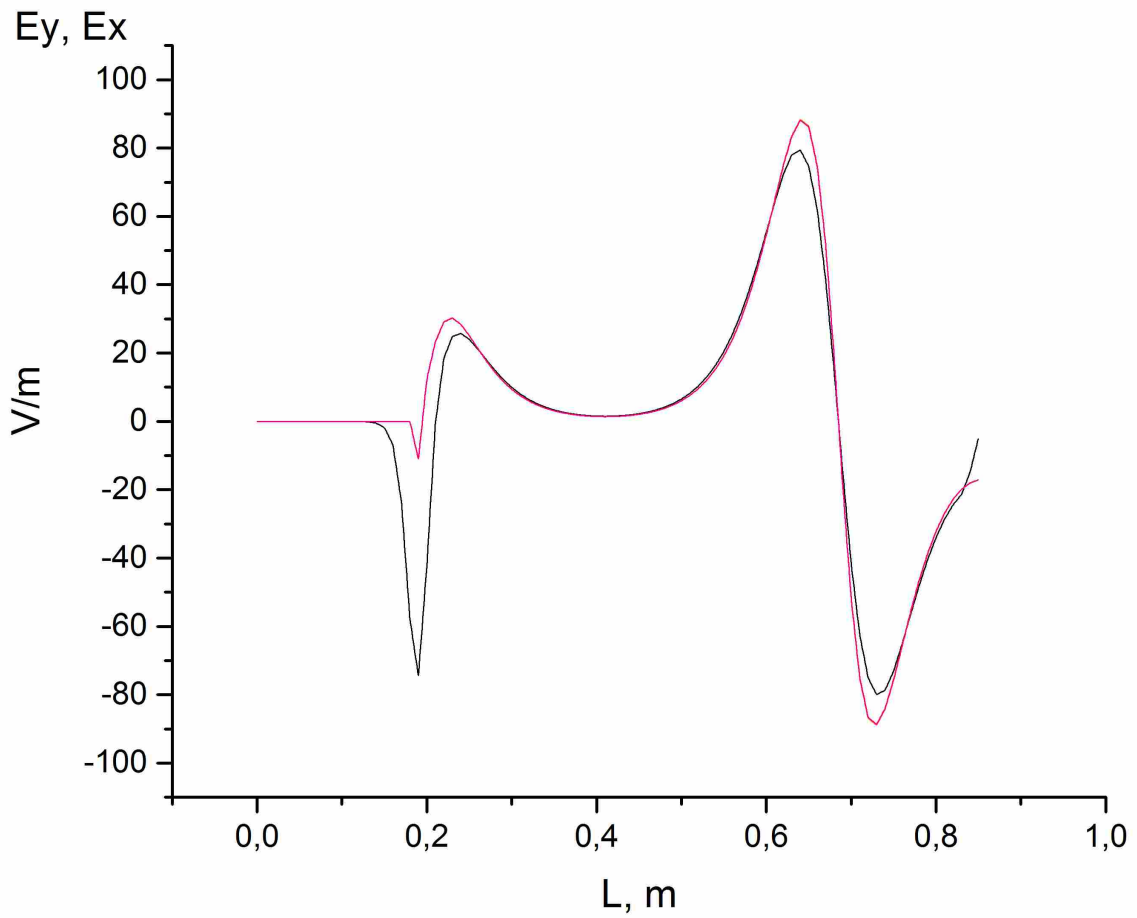


Рис. 25: Черный график — E_y вдоль оси при $x = 0.0$, $y = 0.03$, вычисленной по формуле (3). Розовый график — E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.03$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график — E_x вдоль оси ловушки при $x = 0.03$, $y = 0.0$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график и розовый полностью совпадают.

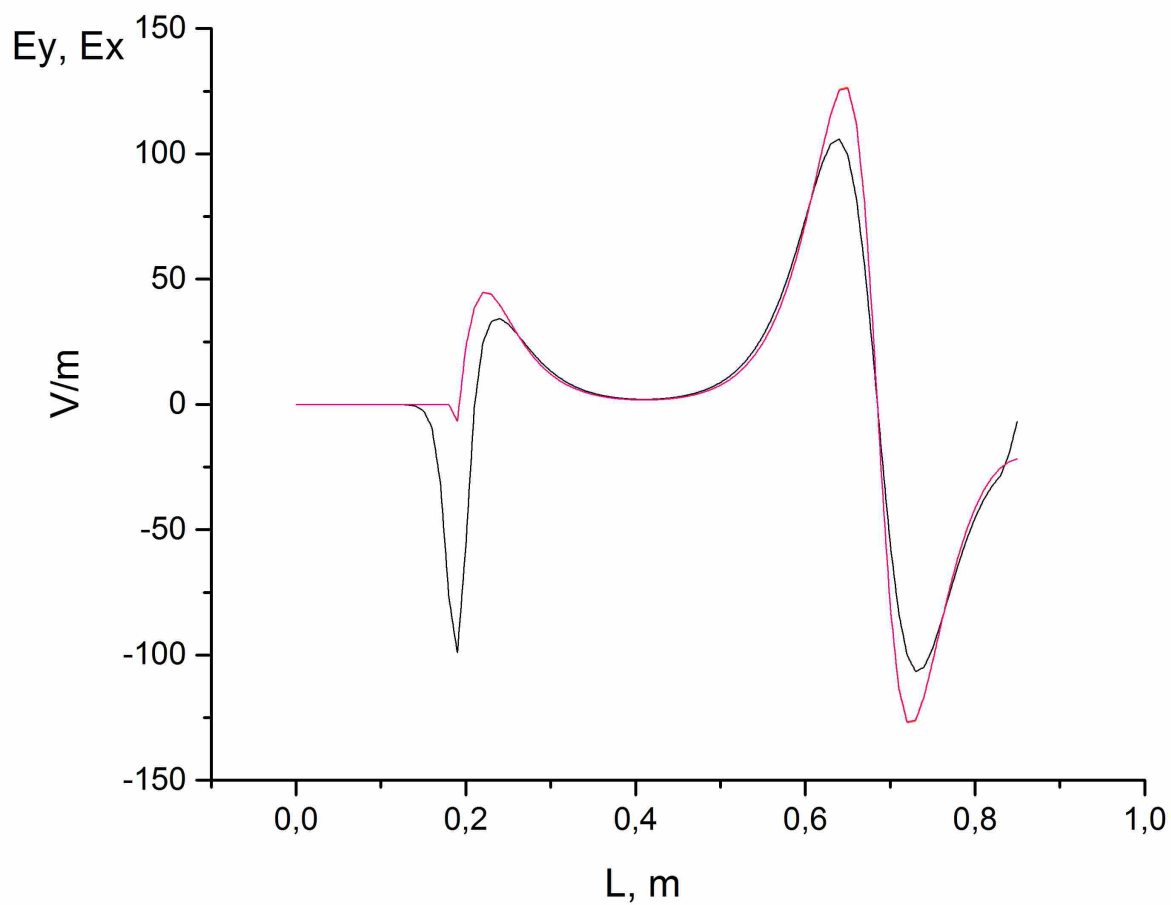


Рис. 26: Черный график — E_y вдоль оси при $x = 0.0$, $y = 0.04$, вычисленной по формуле (3). Розовый график — E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.04$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график — E_x вдоль оси ловушки при $x = 0.04$, $y = 0.0$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график и розовый полностью совпадают

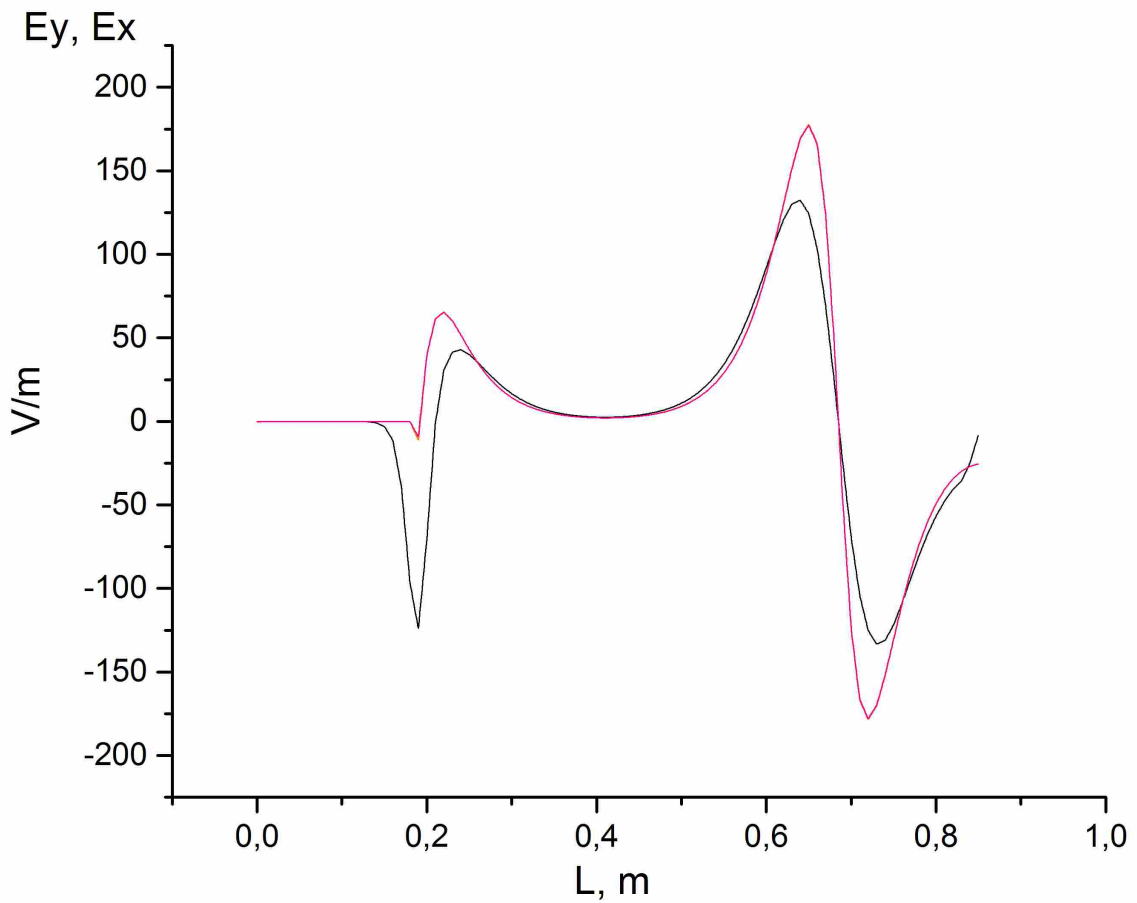


Рис. 27: Черный график — E_y вдоль оси при $x = 0.0$, $y = 0.05$, вычисленной по формуле (3). Розовый график — E_y вдоль оси ловушки при $x = 0.0$, $y = 0.05$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график — E_x вдоль оси ловушки при $x = 0.05$, $y = 0.0$, вычисленный при решении уравнения Лапласа. Оранжевый график и розовый полностью совпадают

По формуле (47) E_y не зависит от координаты x , следовательно при $y = 0$ по формуле (47) $E_y = 0$. Однако, интересны графики при $y = 0$ и при x не равном нулю, полученные при решении уравнения Лапласа. Ниже приводятся такие графики на рисунках 28 и 29. Заметим, что поля E_y значительно меньше (на 2-3 порядка) полей на рисунках 23 - 27, что согласуется с тем, что мы получаем из формулы (47). Поля E_x при $x = 0$, а y не равным нулю, будут так же на 2-3 порядка меньше поле на рисунках 23 - 27.

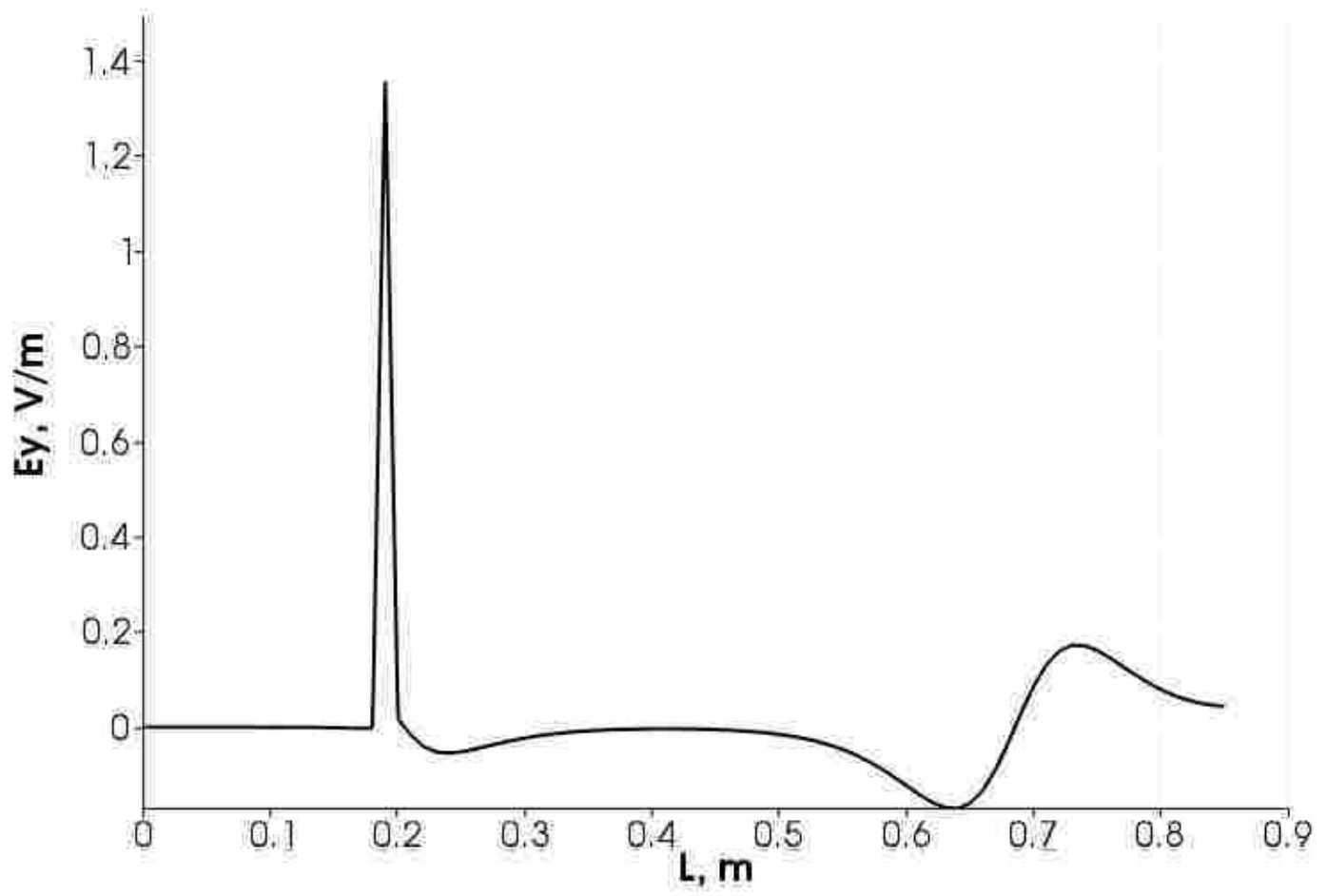


Рис. 28: График E_y , вдоль оси ловушки при $x = 0.01$ м, $y = 0.0$ м.

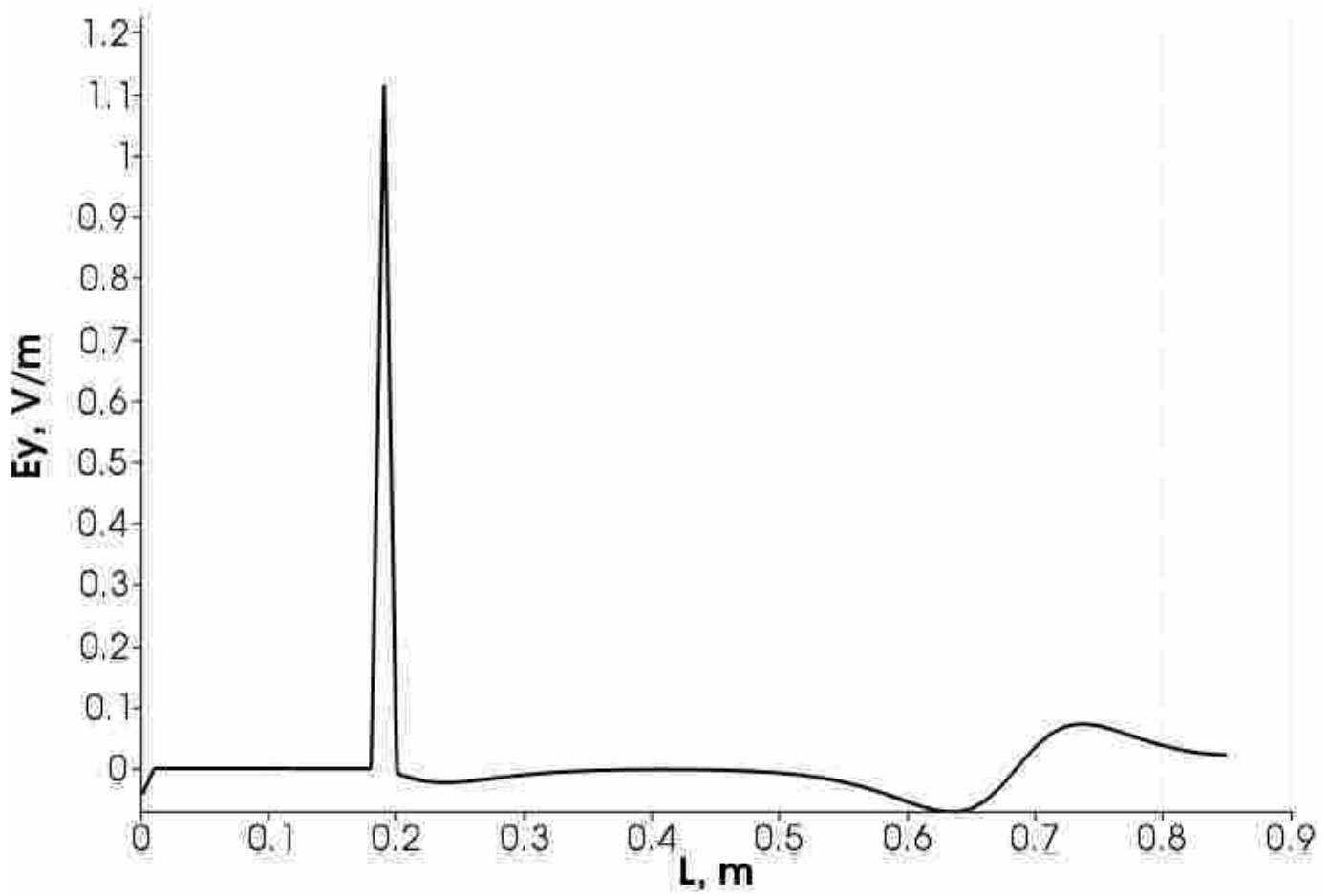


Рис. 29: График E_y , вдоль оси ловушки при $x = 0.05$ м, $y = 0.0$ м.

3.4 Анализ вращающегося поля на оси ловушки

На рисунках ниже графики компонент вращающегося поля E_x , E_y , E_z для разных фаз вращения через каждые $\pi/4$. Графики получены при численном решении уравнения Лапласа. В этом решении учитывалось только вращающееся поле (без учета основного). Максимум по модулю полей E_x (они представлены на рисунках 33 и 37 для фаз вращения $3\pi/4$ и $7\pi/4$ соответственно) и E_y (они представлены на рисунках 31 и 35 для фаз вращения $\pi/4$ и $5\pi/4$ соответственно) совпадает с теоретическим максимумом.

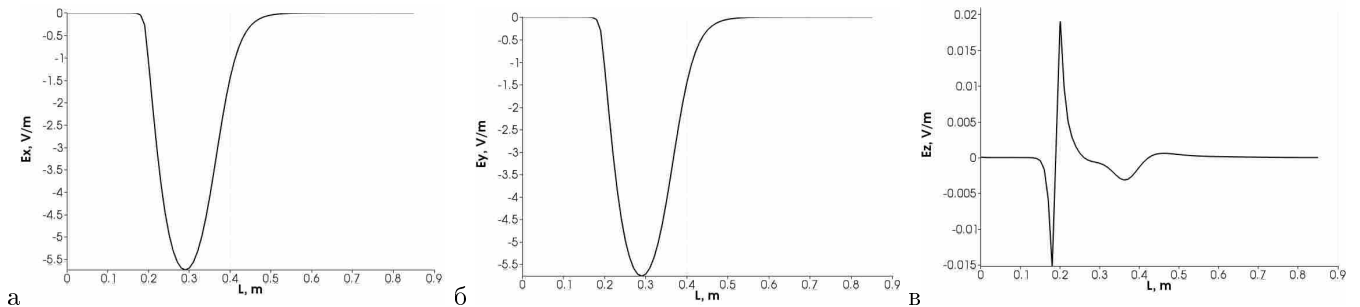


Рис. 30: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения 0

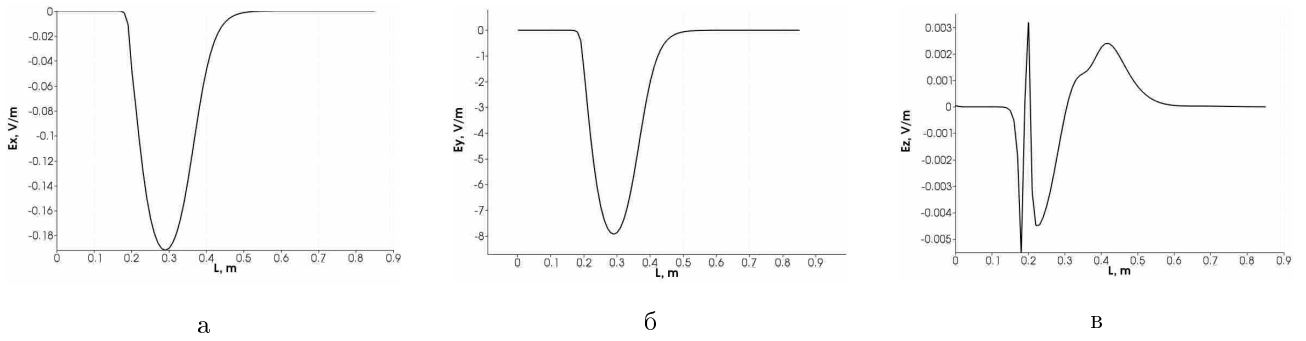


Рис. 31: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения $\pi/4$

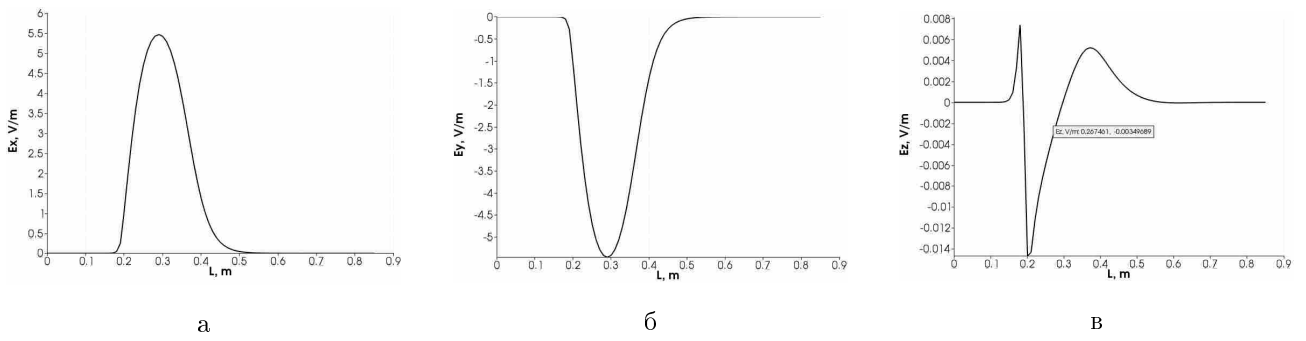


Рис. 32: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения $\pi/2$

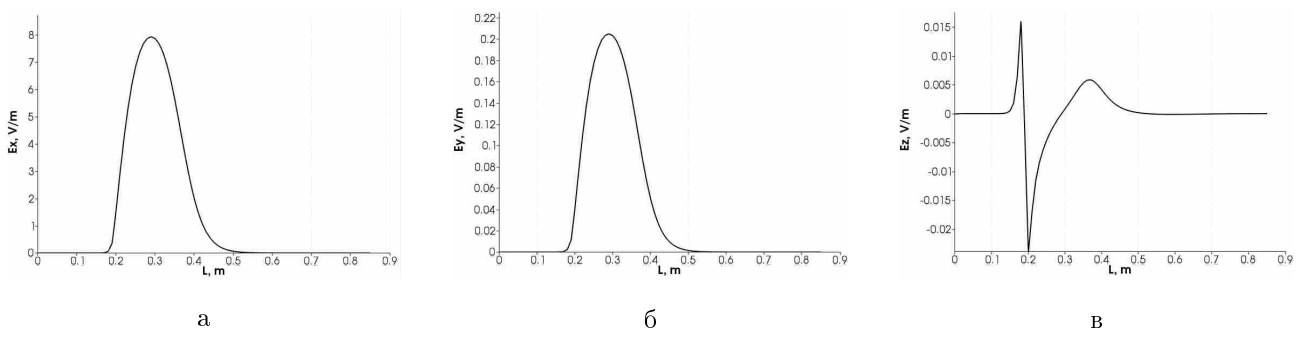


Рис. 33: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения $3\pi/4$

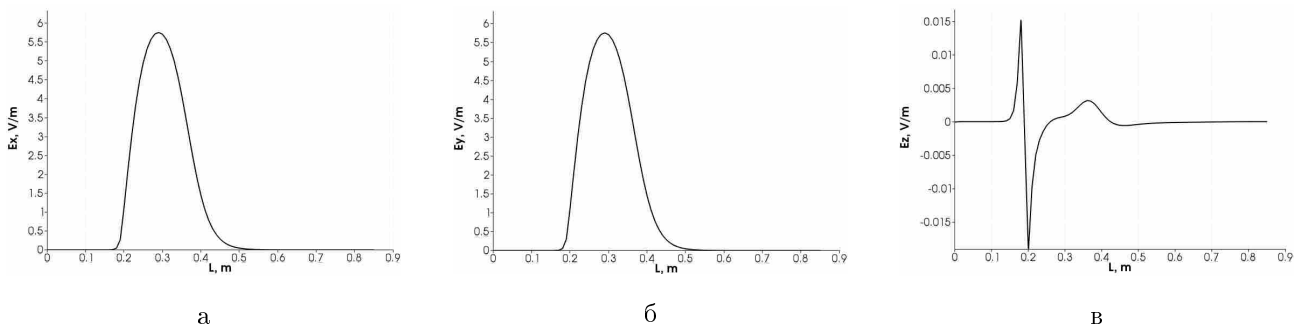


Рис. 34: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения π

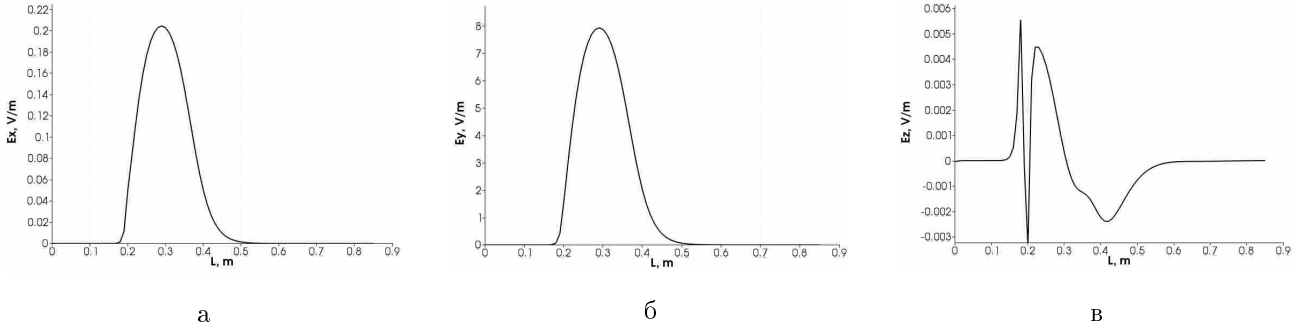


Рис. 35: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения $5\pi/4$

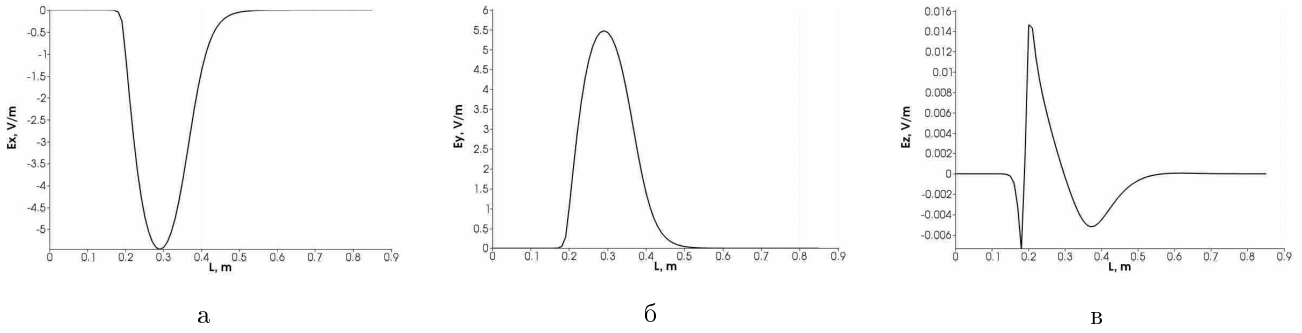


Рис. 36: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения $3\pi/2$

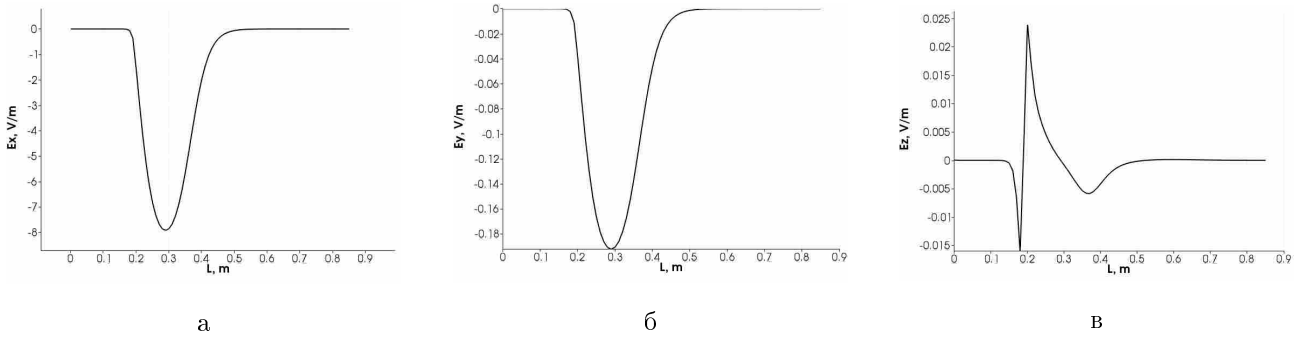


Рис. 37: Графики компонент а) E_x б) E_y в) E_z для фазы вращения $7\pi/4$

3.5 Аппроксимация вращающегося поля

При моделировании динамики необходимо рассчитывать вращающееся поле на каждом шаге интегрирования вследствие изменения граничных условий. Из описания следует, что компоненты напряженности вращающегося поля E_x^{rw} и E_y^{rw} можно записать как

$$E_x^{rw} = E_{rw} \cos(\phi) \quad (48)$$

$$E_y^{rw} = E_{rw} \sin(\phi), \quad (49)$$

где ϕ - фаза вращающегося поля, E_{rw} - амплитуда вращающегося поля, которая зависит только от z координаты (рис. 38). Это позволяет аппроксимировать E_{rw} полиномом 4й степени и заменить расчет на сетке формулами

(4)-(5) .

При сравнении динамики частиц при различных способах расчета вращающегося поля существенных различий в результатах не было выявлено.

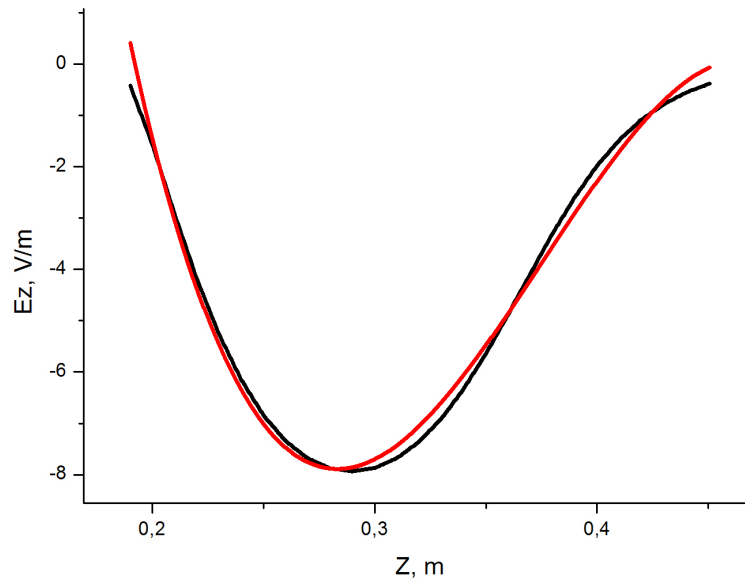


Рис. 38: Черная линия - напряженность вращающегося поля вдоль оси ловушки (E_z), красная линия - аппроксимация напряженности вращающегося поля вдоль оси ловушки

4 Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем

- Разработан программный модуль для расчета потенциалов и напряженностей электростатических полей для областей любой геометрической сложности
- Получены результаты расчета полей в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко установки LEPTA. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования динамики позитронов в ловушке.
- Была выполнена оптимизация расчета полей путем разделения вычислений стационарного и вращающегося полей, а так же заменой расчета на сетке вращающегося поля аппроксимационными формулами.

Список литературы

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., Издательство МГУ, 1999.
- [2] James R. Nagel Solving the Generalized Poisson Equation Using the Finite-Difference Method (FDM). Department of Electrical and Computer Engineering University of Utah, 2011.
- [3] J. Loverich, C. Nieter, D. Smithe, S. Mahalingam, P. Stoltz Charge Conserving Emission from Conformal Boundaries in Electromagnetic PIC simulations. Tech-X Corporation, 2010
- [4] Шарый С. П. Курс вычислительных методов. Институт вычислительных технологий СО РАН. 2012.
- [5] Ivan P. Stanimirovic, Milan B. Tasic. Performance comparison of storage formats for sparse matrices. Facta Universitatis. Ser. Math. Inform. 2009.
- [6] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Third Edition. Cambridge University Press.
- [7] Мешков И.Н. Развитие проекта LEPTA // Письма в ЭЧАЯ. 2010.Т.7, №7(163). С. 814-820
- [8] М.К. Есеев, А.Г. Кобец, И.Н. Мешков, А.Ю. Рудаков, С.Л. Яковенко Исследование накопления заряженной плазмы в ловушке с вращающимся электрическим полем установки LEPTA // Физика Плазмы 39. 883(2013)
- [9] М.К. Есеев, А.Г. Кобец, Мешков И.Н., А.А. Сидорин, О.С. Орлов Механизм накопления заряженных частиц в ловушке Пеннинга-Малмберга-Сурко с вращающимся электрическим полем // Письма в ЖЭТФ. том 102. вып. 5. с.291-296
- [10] V. Ponomarev, V. Altsybeyev Development of 2D Poisson Equation C++ Finite-Difference Solver for Particle-in-Cell Method // Proc. of International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, Saint-Petersburg, 2015.p. 138-141
- [11] V. Altsybeyev, V. Ponomarev Application of Gauss's law space-charge limited emission model in iterative particle tracking method // Journal of Computational Physics, Volume 324, 2016, p. 62-72