ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Магистерская диссертация

обучающейся по направлению подготовки 03.04.02. Физика,
Программа физика конденсированного состояния
очной формы обучения,
группы 07001637
Аль Ани Али Абдуламир Тавфик

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, Вирченко Ю.П.

Рецензент:
кандидат физико-математических
наук, доцент Москаленко Н.И.

Белгород 2018

Аннотация

Аннотация. Предлагается вероятностно-феноменологическая модель зарождения трещины в образце хрупкого твердотельного материала. Построение модели основано на предположении о том, что хрупкое разрушение образца, находящего под внешней нагрузкой является следствием разростания в нем трещины. Рост трещины получается в результате присутствия напряжений, растягивающих образец вдоль одной из осей. Считается также, что трещина зарождается в результате возникновения случайным образом в каком-то малом объеме образца достаточно большого скопления пор. В результате, зарождения такой микротрещины и ее разрастания образец образуется макротрещина, что приводит к разрыву (разрушению) образца. Тем самым преодолевается предел прочности материала. Таким образом, модель представляет собой статистический ансамбль случайно распределенных в объеме образца материала пор, а предел прочности трактуется как случайная величина, связанная с наличием достаточно большой их случайной флуктуации. В предположении о статистической независимости распределения пор вычисляется вероятность возникновения флуктуации необходимой для зарождения трещины. Связь требуемой величины флуктуации с величиной внешней нагрузки основывается на теории Гриффитса зарождения трещины. В результате анализа модели устанавливается связь между размером образца и вероятностью его разрушения под нагрузкой – т.е. объемный эффект.

Ключевые слова

гипергеометрическое распределение
концентрация
объемный эффект
плотность распределения
пористость
распределение вероятностей
распределение Пуассона
предел прочности
случайная величина
случайные размещения
статистическая независимость
точечные дефекты
хрупкое разрушение

Оглавление

Правила использования обозначений

В работе мы придерживаемся следующих правил при употреблении шрифтов для обозначения математических объектов и операций над ними.

• Для обозначения математических операторов (функционалов), для которых в математике имеются устоявшиеся аббревиатуры на основе букв латинского алфавита, мы употребляем шрифт «roman» – A, B, C, ...; a, b, c, ... Например, Re и Im – реальная и мнимая части комплексного числа, Pr – вероятность случайного события и т.д. Если таковых устоявшихся аббревиатур не имеется, то мы используем для обозначения математических объектов различные шрифты, в зависимости от природы объекта, перечисленные ниже.

• Для обозначения стандартных математических структур используется ажурный шрифт – $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$. Например, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

• Операторы, отображения, функционалы обозначаются прописными буквами шрифта «sanserif» – $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$.

• Для обозначения числовых величин (параметров, функций и их аргументов) используются буквы латинского алфавита в шрифте «italic» – $a, b, c, \ldots$ и малые греческого алфавита. При этом латинские буквы $i, j, \ldots, n$ – обозначают целые числа.

• Для обозначения векторов (в том числе с целочисленными координатами) используется жирный латинский шрифт. При этом жирные буквы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \ldots, \mathbf{n}$ обозначают векторы с целочисленными компонентами.

• Знак $\sim$, поставленный над символом любого математического объекта, указывает на то, что этот объект является случайным.

Предметный список обозначений

N – число ячеек

V – объем образца

h – продольный размер трещины

d – поперечный размер трещины

$\mathbf{x}$ – векторы, описывающие положения ячеек

$k(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}), m(\mathbf{x}), n(\mathbf{x})$ – числа заполнения ячейки с меткой $\boldsymbol{x}$

W_m – вероятность появления в образце хотя бы одной ячейки с m дефектами

c – концентрация

v_* – критический объем ячейки, с которого начинается рост трещины

λ – интенсивность пуассоновского случайного поля центров расположения пор

α – показатель роста напряжения в теории Гриффитса роста трещины

p – механическое напряжение

p_* – критическое механическое напряжение (предел прочности)

σ – статистическая дисперсия

$\mathrm{Pr}\{\cdot\}$ – оператор вычисления вероятности

c_* – критическая концентрация

$\varkappa$ – постоянная Гриффитса

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена конструированию статистической теоретической модели, предназначенной для описания равновесного состояния образца хрупкого твердотельного материала, находящегося под внешней растягивающей его нагрузкой. По нашему замыслу, эта модель может быть использована для теоретических предсказаний относительно характера поведения твердотельного образца в результате возникновения в нем (в общем случае неупругих) деформаций вследствие силовых напряжений без учета тепловых процессов. В частности, она предназначена для установления связи между характеристиками состояния самой среды и той величиной нагрузки, которая может привести к разрушению образца, под которым понимается его разрыв.

Модель строится, с одной стороны, на основе феноменологических представлений о механизмах зарождения и роста микротрещин в твердотельной среде хрупкого материала, а, с другой стороны, так как физический механизм зарождения и роста трещины реализуется на пространственных масштабах порядка $10 \div 100$нм, на которых уже проявляются флуктуации усредненных термодинамических характеристик среды, она в своей конструкции использует статистические (вероятностные) представления.

Таким образом, в работе строится и изучается вероятностно-феноменологическая модель разрушения хрупкого материала.

Построение модели основано на предположении о том, что к разрыву образца, который может произойти катастрофическим образом в течение очень короткого промежутка времени, приводит спонтанное лавинное разрастание, под воздействием внешней растягивающей механической нагрузки продольно вдоль некоторого фиксированного направления, какой-либо из микротрещин в образце, появившихся в нем флуктуационным образом.

Лавинное разростание трещины начинается в тот момент, когда длина этой трещины превзойдет некоторую критическую величину.

В свою очередь, флуктуационное возникновение такой достаточно большой трещины мы связываем с наличием в образце хрупкого материала точечных дефектов в виде пор очень малого размера. Эти поры всегда присутствуют в образце твердотельного хрупкого материала с той или иной величиной средней концентрации c, которая зависит как от физической природы материала, так и от технологии приготовления образца. В нашей модели величина c является свободным феноменологическим параметром. Флуктуации концентрации (их отклонения от среднего значения) возникают вследствие того, что поры распределены в образце случайным образом. Такого рода случайность их расположения связана с тем, что, в процессе приготовления образца, технологически, можно управлять только лишь их концентрацией c, которая, в течение этого процесса, автоматически усредняется по пространственным областям Δ с некоторыми макроскопическими линейными размерами. Размеры же этих областей Δ, доступные технологической регулировке, намного больше, чем размеры d тех микротрещин, рост которых, в конце концов, может привести к старению материала и его разрушению под внешней нагрузкой. Поэтому возможно довольно значительные флуктуации концентрации пор на пространственных масштабах порядка d. Тогда, при наличии достаточно большой концентрации пор, т.е. их скопления, в какой-либо из пространственных областей Δ, под действием растягивающих напряжений в области Δ, которые возникают вследствие нагрузки, прикладываемой к границе образца, может произойти слияние большого числа пор, находящихся в этой области. При таком слиянии пор образуется микротрещина, длина которой может превзойти ту критическую величину, начиная с которой, происходит ее лавинный рост. В результате такого быстрого роста трещины в хрупком материале, находящемся под внешней нагрузкой, образуется макротрещина, и, наконец, когда линейный размер макротрещины достигает величины, сравнимой с линейным размером самого образца, происходит его разрыв.

Таким образом, критическому размеру микротрещины соответствует критическая величина флуктуации концентрации. С одной стороны ясно, что величина флуктуации концентрации пор тесно связана с величиной самой концентрации, то есть образование микротрещины критического размера есть следствие достаточно большой концентрации пор во всем образце. С другой стороны, ясно, что критический размер микротрещины и, как следствие, критическая величина флуктуации концентрации пор зависят от величины внешней одноосной нагрузки. Если такая зависимость известна, то можно найти теоретическую связь между концентрацией и пределом прочности материала – критической величиной внешней нагрузки, которая приводит к разрушению образца. Таким образом, должна существовать связь между концентрацией пор c_* и критическим механическим напряжением (пределом разрывной прочности) материала, который мы в дальнейшем обозначаем посредством p_*. Следовательно, теоретическая модель, которая претендует на предсказание количественных характеристик явления хрупкого разрушения материала должна устанавливать вид такой зависимости. В принимаемом в этой работе нами подходе, строится именно такая теоретическая модель.

Так как распределение пор по образцу материала является случайным, то математическое моделирование явления хрупкого разрушения, понимаемое как следствие случайного скопления пор, должно осуществляться на основе теоретико-вероятностных представлений и изучаться методами теории вероятностей. Поэтому тему настоящей работы можно отнести к направлению в статистической физике, который занимается изучением структуры «реального» твердого тела. Отличительной особенностью этого направления является то, что при решении задач, решаемых в рамках этого направления, приходится отказываться от микроскопических представлений *статистической механики*, например, о характере взаимодействия между отдельными парами молекул, а, наоборот, использовать некоторые феноменологическими зависимостями между физическими величинами, которые являются характеристиками твердотельной структуры на пространственных масштабах, намного превосходящих средние расстояния между молекулами среды, но намного меньшими, чем макроскопические размеры. Здесь под макроскопическими размерами мы понимаем, такие пространственные масштабы, при которых в соответствующих этим масштабам объемах среды с большой точностью применимы термодинамические представления. Для построения модели, о которой идет речь в настоящей работе, необходимо располагать какой-либо феноменологическим законом связи между критическим размером трещины, которая служит зародышем разрыва образца, и внешним механическим напряжением. Для этого мы используем закон, устанавливающий указанную связь, который дается в рамках известной теории Гриффитса [1], [2], которая феноменологически описывает зарождение и рост трещин в твердом теле. Именно использование такого рода феноменологической зависимости позволяет классифицировать предлагаемую в настоящей работе теорию, как относящуюся к статистической физике реального твердого тела.

Главным следствием устанавливаемой в работе зависимости между концентрацией пор и пределом прочности является предсказание количественной зависимости между линейным размером образца и пределом прочности. Наличие такой зависимости называется в материаловедении *объемным эффектом*) [3]. Наличие такого эффекта связано с тем, что увеличение размеров образца приводит к увеличению вероятности появления флуктуации обладающей величиной, бóльшей критической, в какой-то из малых областей внутри образца материала, т.е. к увеличению вероятности преодоления предела прочности локально в этой малой пространственной области.

Глава 1. Основы статистической теории процессов деградации материалов

В этой главе дается обзор состояния теории прочности материалов, с которой связана теория предлагаемая в диссертации. Производится разбор существующих теорий деградации и разрушения хрупких твердотельных сред.

1.1. Перколяционный механизм деградации

Несмотря на значительное разнообразие физических явлений, происходящих материалах, их теоретическое моделирование основано на небольшом наборе идей, используемых при построении той или иной модели. В частности, в статистической теории разрушения материалов, если разрушение носит квазистатический характер, то есть связано с медленными процессами внутренней структурной перестройки, происходящих вследствие малых случайных воздействий на среду, теоретические модели базируются на двух идеях. Это, во-первых, представление о «наиболее слабом звене». Это означает, что разрушение в среде зарождается флуктуационным образом, когда выход материала из строя развивается из некоторого слабого звена, расположенного локально в пространстве этой среды. Во-вторых, представление о том, что процесс разрушения состоит как бы из двух этапов. На первом этапе, который будем называть этапам старения материала, происходит относительно медленное накопление равномерно по образцу материала различного рода дефектов его структуры. Эти дефекты возникают как флуктуационно еще на этапе технологического процесса создания материала, так и в процессе эксплуатации материала, в результате случайных или регулярных внешних воздействий на него. Результатом количественного накопления микродефектов после достижения их плотности некоторого порогового значения является качественное изменение материала. При этом реализуется следующая картина. Дефекты с течением времени образуют большой кластер, представляющий собой связанную дефектную субструктуру, пронизывающую весь образец материала. Наличие связи между двумя дефектами в таком кластере указывает на их сильное взаимное влияние друг на друга. Возникновение дефектного кластера является тем стартовым моментом, с которого начинается второй этап разрушения, протекающего гораздо быстрее по сравнению с характерным временем формирования этого кластера. Такой сценарий разрушения естественным образом интерпретируется в терминах теории *перколяции* [4]. Эта теория исторически возникла для описания подобных физических явлений, в которых на первый план выступает свойство пространственной связанности большого набора однотипных объектов. Идеи и методы теории перколяции получили широкое применение в различных областях физики, в том числе – при изучении процессов разрушения материалов.

Описанный второй *перколяционный* сценарий разрушения предполагает пространственно нелокализованное развитие разрушения. Для реализации такого сценария разрушения неявно предполагается пространственная однородность «в среднем» распределения дефектов по образцу в каждый момент времени в течение первого из указанных этапов разрушения. В этом случае имеет смысл характеризовать процесс разрушения плотностью дефектов. Следовательно, перколяционный сценарий разрушения является как бы антиподом сценарию, связанному с представлением о наиболее слабом звене. Однако в реальных ситуациях в чистом виде ни тот ни другой тип разрушения не реализуется. Кроме того, при увеличении размеров слабого звена само представление о его пространственной локализации перестает быть адекватным, т.е. теряют смысл различия между обоими сценариями разрушения. И все же в определенных физических процессах разрушения можно говорить о преимущественной реализации одного из них. К первому типу разрушения обычно относят явления, традиционно изучаемые статистической теорией разрушения, такие, как усталость металлов и связанное с ней их хрупкое разрушение (см. [5]-[8]); ко второму типу относятся, например, процессы вязкопластического разрушения металлов [9] или процессы старения полимерных покрытий, развивающиеся из изначально встроенной при создании материала дефектной структуры [10],[11].

Тот факт, что перколяционный сценарий играет существенную роль при протекании процессов разрушения и то, что их учет может приводить к нестандартным распределениям вероятностей для значений параметров, характеризующих разрушение, был замечен в [11]. По-видимому, перколяционный сценарий разрушения материала должен проявляться всякий раз, когда старение является следствием воздействия проникающих в материал излучений, например, при разрушении полимеров под воздействием ультрафиолетового излучения, в результате которого происходит разрывы длинных молекул [10], [11], или разрушение полупроводниковых материалов под воздействием γ-излучения, в результате которого возникают металлизированные вкрапления [12], [13]. Можно также утверждать, что перколяционный подход является, по-видимому, более приемлемым при рассмотрении разрушения как процесса. В этом случае необходимо лишь определиться с тем, что понимать под перколяционной субструктурой. Она, например, может представляться в виде структуры дефектов поверхности тела, имеющего конечный (не пренебрежимо малый) объем по сравнению с объемом всего тела. Представление о «наиболее слабом звене» в этом случае становятся адекватными на заключительном этапе разрушения. В этом смысле перколяционный сценарий процесса разрушения существенно корректирует традиционный подход в статистической теории разрушения [5],[6],[9],[14] (см. также [15]), основанный на представлении о реализации одиночного случайного воздействия, превышающего порог разрушения материала.

Использование перколяционных представлений при исследовании разрушения в виде временно́й эволюции имеет еще одно преимущество. В рамках представлении о перколяционном сценарии разрушения можно учитывать наличие временны́х корреляций в процессе разрушения, когда неприменима вероятностная схема выборок независимых случайных величин.

При реализации перколяционного сценария разрушения, описание его развития во времени в известном смысле упрощается, так как естественным образом возникают феноменологические параметры, описывающие стадию старения материала – зависящие от времени плотности соответствующих типов дефектов. Соответствующие статистические теоретические модели в этом случае естественно синтезировать в терминах этих или пропорциональных им величин. Такой подход был впервые реализован в работе [16], где была поставлена задача о вычислении распределения вероятностей для времени разрушения материала в условиях перколяционного сценария его разрушения, т.е. распределения длительности этапа старения. Основной идеей предложенного подхода явилось введение представления о том, что состояние материала можно охарактеризовать зависящей от времени t случайной функцией $E(t)$, которая представляет величину энергии, затрачиваемую на разрушение в течение времени t. Эта энергия поступает в систему извне при воздействии на нее разрушающих возмущений $\xi(t)$. При это предполагается, что эта энергия пропорциональна плотности дефектов $c(t)$ в момент времени t. Акт разрушения при этом связывается с достижением энергией $E(t)$ некоторого уровня энергетического уровня за случайное время τ. Так как изучение динамики разрушения при таком подходе сводится к изучению изменения одного параметра, то развитый подход аналогичен некоторым задачам, решаемым в рамках теории надежности.

В указанной выше работе (см. также [17], [18]), используя довольно общие предположения о случайном функции $E(t)$, было вычислено распределение вероятностей для случайного времени разрушения τ. Предложенный в этой работе подход обладает определенной гибкостью. Рассматривая материал как входящий в состав какого-либо функционального элемента, под его разрушением необходимо понимать только потерю им свойств, необходимых для выполнения своей роли в составе этого элемента и, как результат, выход этого функционального элемента из строя. В связи с этим при изучении процесса разрушения необходим учет накопления только тех дефектов, которые физически приводят к изменению функциональных свойств материала.

Наряду с отмеченной простотой в способе описания процесса разрушения в случае реализации перколяционного сценария, нужно признать, что в случае, когда для описания мгновенного состояния среды требуется большой набор феноменологических параметров, при построении теории такого процесса разрушения возникает трудность, которая связана с большим произволом в выборе вероятностной модели [1)]. Следует понимать, что теоретическая модель только тогда познавательную ценность, когда изучаются такие свойства зависимостей между наблюдаемыми величинами (в частности их распределение вероятностей), которые не слабо зависят от выбора конкретных значений свободных феноменологических параметров теории.

Заметим, что акт выхода из строя образца материала при развитии перколяционного сценария разрушения можно уподобить термодинамическому «фазовому переходу» при изменении плотности дефектов. Пороговая плотность дефектов соответствует точке фазового перехода, в которой возникает бесконечный перколяционный кластер. Однако, для правомерности такой точки зрения нужно указать те характеристики среды, которые самоусредняются по макроскопическому объему образца материала, либо, что то же самое, в смысле терминологии теории вероятностей, указать какие предельные теоремы в термодинамическом пределе (неограниченном увеличении объема образца материала) имеют место.

Наконец, отметим, что одним из качественных свойств распределения вероятностей для статистических характеристик является его унимодальность. Несмотря на некоторое предубеждение, это свойство не всегда имеет место при наблюдении статистики физических наблюдаемых. Существуют экспериментальные данные [11], указывающие на то, что такое положение

[1)] Впрочем это обстоятельство характерно для всей статистической теории разрушения.

может иметь место и в теории разрушения.

1.2. Описание явления разрушения в механике сплошных сред

Известно, что при малых деформациях упругого тела справедлив закон Гука, т.е. предполагается линейная зависимость компонентов тензора напряжения от компонентов тензора деформации. Под воздействием значительных нагрузок тела или хрупко разрушаются, или испытывают неупругие пластические деформации. При длительном действии нагрузки материалы обнаруживают медленную текучесть. Это явление называется ползучестью; при этом с течением времени (и/или при достаточно большой нагрузке) материалы разрушаются.

В условиях ползучести различают «вязкое» [19], либо «хрупкое» процессы разрушения. Вязкое разрушение происходит при больших удлинениях (с образованием шейки) и отличаются относительной кратковременностью. Хрупкие разрушения происходят при малых деформациях, сопоставимых по величине с упругими деформациями (иногда менее 1 %) и реализуются обычно при сравнительно низких напряжениях. Хрупкое разрушение имеет место в огромном числе случаев разрушения реальных материалов и изделий. Возможны и смешанные типы разрушения — разрушение происходит хрупко, но при заметных деформациях.

Кроме того, реальные материалы могут разрушаться и под воздействием циклических нагрузок, интенсивность которых может быть значительно меньше предела упругости. Такое разрушение происходит вследствие накопления в материале необратимых изменений и называется усталостным. Характерное число циклов до разрушения $> 10^4$. Усталостное разрушение разделяется на две стадии. Первая стадия — накопление и агрегация микро- и субмикродефектов, а также создание условий для развития прогрессирующей макротрещины — носит ярко выраженный статистический характер. На эту стадию приходится до 90 % от полного разрушающего числа циклов. Вторая стадия — развитие макротрещины, т.е. хрупкое разрушение.

Классические методы расчета на прочность материалов основаны на методах и результатах механики сплошных микрооднородных сред. В основе таких расчетов лежит положение о том, что имеется полная детерминированность свойств материала и внешних воздействий на него. Такой подход к описанию явления разрушения основан на представлениях о бифуркационном характере разрушения, которое происходит при достижении достижении некоторым механическим параметром своей предельной величины. В самых первых теориях таким параметром являлось либо максимальное нормальное напряжение[2)], либо максимальная линейная деформация (E.Mariotte, A. J.-C. Barre de Saint-Venant), либо максимальное касательное напряжение (Ch.-Au. de Coulomb, H.E. Tresca). В этих теориях процесс разрушения характеризуется одним параметром – наибольшим по величине из всех напряжений, приложенных к телу. В последующих механических теориях прочности твердотельных материалов, в которые включается описание разрушения, предельное состояние материала характеризуется уже всеми действующими на него главными напряжениями (E. Beltrami, M.T. Huber, R.E. von Mises, H.Hencky). Кроме того, при построении теории прочности учитывается физико-механические свойства материала (Ch.O.Mohr), посредством введения критериев прочности или пластичности – соответствующих (определяемых экспериментально) коэффициентов, описывающих природу материала. Ясно, что оставаясь в рамках такого подхода к описанию разрушения невозможно устанавливать связи между параметрами, характеризующими физико-механические свойства материала, и параметрами, характеризующими разрушение. Единственно, что можно делать, так это постулировать, что такая связь существует, и, может быть, какимто образом ее моделировать при проведении конкретных расчетов. Здесь ситуация примерно такая же как в обычной термодинамике равновесных

[2)] Эта идея восходит еще к Г.Галлилею (G.Galilei) и Г.В. Лейбницу (G.W.Leibniz).

состояний различных сред, в которой приходится постулировать наличие связей между параметрами, характеризующими внешние статические воздействия на среду, и параметрами, характеризующими реакцию среды на эти воздействия. Такого рода связи называются уравнениями состояния среды, которые также приходится моделировать и/или устанавливать экспериментально для проведения конкретных расчетов.

1.3. Микроскопические механизмы зарождения трещин

Результаты, получаемые на основе теории прочности, формулируемой в рамках механики сплошных сред, как правило, оказываются достаточно удовлетворительными с практической точки зрения. При этом должно быть выполнено условие того, что исследуемые закономерности разрушения определяются процессами, охватывающими значительные объемы материала, — например, при статическом деформировании пластичных материалов. Однако, известны случаи, когда зависимости, полученные на основе гипотез о сплошности, микрооднородности и детерминированности материала, которые находятся в основе такой теории прочности, находятся в явном противоречии с результатами экспериментов и практики. Это относится в первую очередь к явлениям хрупкого и усталостного разрушения, когда наблюдается существенный разброс характеристик разрушения внешне одинаковых образцов при одинаковых условиях испытаний и эксплуатации; влияние на эти характеристики размеров тела и вида напряженных состояний в теле. Заметна также связь характеристик разрушения с параметрами структуры материала, ее неоднородности. Эти явления не находят объяснения в рамках классической механике разрушения.

Имеющиеся данные показывают, что в указанных выше случаях закономерности разрушения связаны с локальным характером протекания процесса. Характеристики локализованных процессов разрушения не определяются физическими величинами, усредненными по большим объемам материала, а, наоборот, они связаны а локальными дефектами в его образе и локальными случайными флуктуациями свойств материала. Дефекты и микронеоднородности структуры в локализованных процессах приобретают фундаментальное значение, так как они являются источниками разрушения. С другой стороны, дефектность и микронеоднородность реальных тел имеют не детерминированный, а случайный характер. Реальное тело представляет собой статистический ансамбль взаимосвязанных элементов со случайными физико-механическими свойствами и случайной дефектностью. Чем больше объем тела, тем больше вероятность наличия в нем опасного дефекта. В конечном итоге это приводит к случайности прочностных свойств тела.

Таким образом, дефектность и случайность – два взаимосвязанных свойства строения реальных твердых тел, не отделимые от сущности процесса их разрушения. Инструментом исследования влияния случайных факторов на прочность служат методы теории вероятностей и математической статистики, а теории разрушения, использующие эти методы, называют статистическими.

Хрупкое твердое тело разрушается в результате зарождения и развития трещин. Рассмотрим сначала возможные механизмы зарождения усталостных повреждений, т.е. явления, имеющие место в инкубационном периоде процесса усталостного разрушения. При этом различают дислокационный, вакансионный и термофлуктуационный механизмы.

Согласно дислокационным представлениям, в инкубационном периоде усталости происходит накопление в локальных объемах материала критической плотности дислокаций (вследствие их локального образования и миграции), группировка их в плоские скопления (полосы и пачки скольжения) и формирование субмикротрещин [20], [21]. Вакансионный механизм зарождения усталостных субмикротрещин исследован И.А.Одингом и В.С.Ивановой [20].

Для зарождения трещины за счет коагуляции вакансий необходимы их избыточная концентрация и наличие благоприятных условий для диффузии. Вакансии коагулируют с образованием пор [22], а дальнейшее развитие поры происходит как путем притока вакансий к ней, так и за счет разрядки дислокаций при выходе их на поверхность поры.

Термофлуктуационный механизм основан на теории теплового движения в твердых телах, которая была разработана Я.И.Френкелем. Согласно этой теории, положения атомов в твердом теле не являются строго фиксированными — атомы колеблются с определенной частотой около положения равновесия. Следовательно, атом имеет некоторую ненулевую вероятность разорвать связи с соседями и уйти со своего места, накопив необходимую энергию за счет энергии хаотических тепловых флуктуаций (кратковременного повышения энергии теплового движения атома). При этом считается, что внешняя механическая нагрузка только возбуждает межатомные связи, а разрыв таких связей происходит в результате термических флуктуаций. Накопление разорванных связей приводит к образованию микротрещины. [23], [24],[21].

Кроме перечисленных механизмов усталостного разрушения, в течение этого процесса могут увеличиваться в размерах уже имеющиеся в теле начальные структурные и технологические дефекты типа субмикротрещин и узких сплющенных полостей, а также могут зарождаться и развиваться трещины около других дефектов, способных вызывать большую концентрацию напряжений (например, около остроугольных включений)[25], [26], [27]. Приведем некоторые сведения о детерминистических условиях развития начальных трещин или зарождения трещин в окрестностях жестких включений, полученных с позиций линейной механики разрушения (в статической постановке, но без учета времени протекания процесса).

Как известно, Гриффитсу [1], исходя из допущения о наличии в теле начальных трещин, удалось объяснить большую разницу между теоретической прочностью твердых тел (прочностью межатомного взаимодействия) и низкой прочностью реальных (технических) материалов. Работа Гриффитса заложила основы теории трещин, механики хрупкого разрушения твердого тела с заданными дефектами. В его теории при рассмотрении хрупкого разрушения используется условие нормального отрыва слоев материала и среда считается идеально упругой вплоть до разрыва. Теоретическая прочность материала [28] определяется через силы межатомного взаимодействия в предположении правильности атомной решетки. Взаимодействие двух атомарных слоев в зависимости от расстояния между ними можно представить в виде

$$\sigma \; = \; \sigma_c \sin\frac{2\pi(r-r_0)}{r_0}\,, \qquad 0 < \frac{r-r_0}{r_0} < 1/2\,.$$

Интерпретируя $(r-r_0)/r_0$ как относительное удлинение ε, а E – как $(d\sigma/d\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, получаем

$$\sigma_c \; = \; \frac{E}{2\pi} \approx 0,1E\,.$$

Величина σ_c и будет теоретической величиной прочности.

Однако эксперименты показывают, что в действительности разрушение происходит при напряжениях по крайней мере на порядок ниже значения теоретической плотности, что объясняется неизбежным наличием в теле разнообразных дефектов (которые являются концентраторами напряжений). Учет дефектой структуры в среде может производиться в следующих двух направлениях:

1) изучить напряженно-деформированное состояние среды в окрестности изолированных особых точек;

2) ввести распределение вероятностей для непрерывного распределения дефектов, т.е. ввести в теорию прочности новые величины (параметры этого распределения вероятностей), которые характеризуют меру поврежденности в дополнение к традиционным характеристикам материала.

Обзору работ, связанных со вторым направлением, будут посвящены следующие разделы этой главы. Работы А.Гриффитса связаны именно с первым из указанных направлений исследования. В связи с этими работами, в последние десятилетия появилось очень много работ о напряженно-деформированном и предельном состоянии тел с дефектами (трещинами, включениями) [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], в которых рассмотрены различные случаи геометрии тел и дефектов при различных нагрузках.

Опишем основные положения теории Гриффитса, в связи с тем, что они являются базовыми в диссертации. Первой была решена задача о всестороннем растяжении бесконечной упругой плоскости с конечным прямолинейным разрезом. Математически плоская трещина моделируется узким эллиптическим вырезом с осями $b << a$. Предполагается, что разрушение происходит вдоль площадки, на которой нормальное растягивающее напряжение достигает критического значения. Вопрос – при каком критическом значении нагружения произойдет распространение трещины. Гриффитс предположил, что это возможно лишь при выполнении энергетического условия

$$\Delta U \ + \ \Delta\Pi \ = \ \Delta A \, .$$

Здесь $\Pi \ = 4\gamma a$ – введенная Гриффитсом поверхностная энергия трещины, γ – работа образования единицы свободной поверхности (или удельная поверхностная энергия), которая считается постоянной материала; a – полуразмер трещины; ΔU – изменение упругой энергии области роста трещины при разрастании трещины; ΔA – работа внешних сил. Критическое значение нагрузки определяется формулой

$$p^* \ = \ \sqrt{\frac{2\gamma E}{a(1-\nu^2)\pi}} \, ,$$

где ν – коэффициент Пуассона. Идеи Гриффитса обобщаются на большее число видов энергии [41], записав энергетический критерий разрушения в виде

$$\Delta U \ + \ \Delta\Pi \ + \ \Delta K \ = \ \Delta A \ + \ \Delta Q \, .$$

Здесь K – кинетическая энергия, Q – приток тепла. Для прямолинейной трещины в поле растяжения критическое напряжение совпадает с формулой Гриффитса.

Кроме энергетического критерия, существуют также и силовые критерии локального разрушения [42], [43], [44]. Силовые критерии связывают хрупкое разрушение с напряженным состоянием в конце трещины, а коэффициент интенсивности напряжения является функционалом от внешней нагрузки (отсюда и название). В подходе Ирвина [42] внимание концентрируется не на изменении энергии всего тела, а на распределение напряжений в окрестности вершины трещины. Г.И.Баренблатт [43] в своей модели постулирует следующие предложения:

1) берега трещины смыкаются плавно (т.е. угол раскрытия трещины равен нулю) и конфигурация концевой зоны не меняется при развитии трещины;

2) в малой зоне у вершины трещины действуют силы сцепления (в модели Гриффитса берега трещины свободны от напряжений);

3) напряжения в окрестности трещины конечны. Эти предположения Баренблатта снимают нефизичный результат линейной теории упругости о равенстве π угла раскрытия трещины. В.В.Новожилов [44] рассматривал появление трещины в сплошной среде как переход среды из одного равновесного состояния в другое. Несмотря на разницу подходов, и силовые, и энергетические критерии дают близкие величины критических нагрузок в тех задачах, в которых применимы оба подхода.

Для большинства реальных материалов (в частности, для металлов), из-за больших напряжений в малой области в окрестности вершины трещины, возникает зона пластического состояния. Ирвином [45] и Орованом [46] в предположении малости размеров пластической зоны по сравнению с длиной трещины бала предложена теория квазихрупкого разрушения, состоящая в распространении на этот случай энергетического критерия Гриффитса, но с добавлением в удельную поверхностную энергию необратимой работы пластической деформации, сопровождающей распространение трещины (для большинства металлов эта работа на несколько порядков больше поверхностной энергии).

Еще одна группа критериев разрушения – деформационные. Эффективность деформационных критериев основана на возможности достаточно точного экспериментального определения деформации вблизи вершины трещины. Наиболее известным является критерий Леонова-Панасюка-Дагдейла [47], [48]. В схеме Леонова-Панасюка предполагается, что в окрестности вершины трещины берега притягиваются с силой σ_c, где σ_c – теоретическая прочность, а размеры окрестности вершины определяются из условия ограниченности напряжений в вершине трещины. Берега в зоне вершины взаимодействуют, только если расстояние между ними меньше δ_k, причем δ_k есть постоянная материала. Дагдейл не вводил притяжение берегов, но считал, что в окрестности вершины действуют напряжения, достаточные для обеспечения текучести материала на продолжении трещины вдоль узкого слоя нулевой толщины (и относительно малой длины). Трещина распространяется, если ее раскрытие достигает критического значения δ_k. Критическая величина напряжения при этом равна (при условии малости размеров области притяжения берегов по сравнению с размером трещины)

$$p^* = \sqrt{\frac{\delta_k E \sigma_c}{a(1-\nu^2)\pi}}\,.$$

Деформационные критерии могут, помимо применения при анализе разрушения у вершины узкой трещины, использоваться при изучении ситуации в окрестности вершины углового выреза и вблизи разного рода включений. Однако, в силу предположения о том, что вязкость разрушения является постоянной характеристикой материала, рассмотренные в этом разделе теории не в состоянии объяснить многие важные эффекты процесса разрушения: масштабный эффект (с увеличением абсолютных размеров образца среднее разрушающее напряжение в сечении с трещиной падает), рост усталостных трещин при циклическом нагружении (при этом интенсивность напряжения за цикл нагружения меньше вязкости разрушения), скачкообразный рост трещины для некоторых упруго-пластических материалов, самоподдерживающееся разрушение и др.

1.4. Статистический подход к описанию хрупкого разрушения

Применение методов теории вероятностей и математической статистики к задачам механики деформируемых твердых тел началось сравнительно недавно, однако уже имеется огромное количество работ, посвященных данной проблеме (см. [8], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61]).

Первоначально случайность входных параметров при расчетах на прочность неявным образом учитывалась коэффициентами запаса прочности. На необходимость статистического подхода к назначению этих коэффициентов указал Майер [62]. Именно в таком аспекте статистические методы впервые нашли применение для решения задач механики деформируемых твердых тел. Ныне с применением статистических методов разработаны или разрабатываются множество проблем механики. Одной из основных целей такого рода исследований является построение статистических критериев прочности кратковременного и хрупкого разрушения твердых тел. Именно эти вопросы отражены в цитированных выше работах.

Первые указания на связь прочности образцов со статистическими представлениями имеются в работе А.П.Александрова и С.Н.Журкова [63], где экспериментально обнаружено значительное рассеяние предела прочности, а также масштабный эффект при разрушении стеклянных кварцевых нитей. Идеи о статистической природе хрупкого разрушения были развиты в работах В.Вейбулла [64], Т.А.Конторовой и Я.И.Френкеля [65], Н.Н.Афанасьева [7], и впоследствии другими.

Предложенные подходы к теории хрупкого разрушения можно разделить на две основные группы, в которых принимается следующее:

1) тело состоит из элементов случайной (различной) прочности, не изменяющейся в процессе взаимодействия элементов в процесе деформирования тела. При этом прочность тела определяется прочностью его наиболее

слабого элемента;

2) тело является микронеоднородной средой, и его прочность определяется относительным числом (величиной вероятности) разрушенных микроэлементов по определенному сечению или по всевозможным направлениям в некоторой «физической точке»;

Статистические подходы первой группы вполне приемлемы для достаточно хрупких тел, для которых в первом приближении можно пренебречь взаимодействием элементов, составляющих тело. Эти подходы в дальнейшем можно подразделить на два вида по отношению к источнику разрушения: статистические теории без учета дефектной структуры и статистические теории, основанные на образовании дефектов.

В следующих разделах мы дадим обзор работ, связанных с первым из этих подходов.

1.5. Статистические теории без учета дефектной структуры

Вейбулл в своей работе поставил задачу об определении вероятности разрушения образцов заданного объема V и их среднюю прочность при сделанном им предположении о случайности прочности одинаковых образцов, изготовленных из одного материала. При решении этой задачи он предположил, что известно вероятностное распределение $\mathsf{P}_1(\sigma)$ прочности элементарных образцов единичного объема при напряжениях, не превышающих заданного значения σ. При таком предположении он рассматривает образец объемом V в виде соединения из N элементарных брусков. При этом принимается, что величины прочности составляющих элементов являются независимыми случайными величинами, и что образец полностью разрушается, если разрушится хотя бы один его элемент (концепция наиболее слабого звена).

В случае, когда распределение вероятностей прочности σ элементов в виде

$$\mathsf{P}_1(\sigma) \;=\; 1 - \exp\left(-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m, \tag{1.4.1}$$

где σ_0, m – некоторые константы (m характеризует однородность материала), то вероятность разрушения $\mathsf{P}_N(\sigma)$ образца объема $V = N\rho$ (ρ – плотность элементов), имеет вид

$$\mathsf{P}_N(\sigma) \;=\; 1 - \exp\left\{-N\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right\}, \quad 0 \le \sigma \le \infty\,. \tag{1.4.2}$$

Среднее же значение разрушающего напряжения (его прочность) образца определяется выражением

$$\langle\sigma\rangle \;=\; \frac{\sigma_0\Gamma(1+1/m)}{N^{1/m}}\,. \tag{1.4.3}$$

Из формулы (2) видно вероятность разрушения тела с ростом его объема увеличивается, а из формулы (3) видно, что среднее значение прочности уменьшается. Таким образом, эти зависимости описывают т.н. *масштабный эффект* при хрупком разрушении. Однако, следует заметить, что последняя формула дает слишком сильную зависимость прочности тела от его размеров. Вейбулл также обобщил полученные им результаты для неоднородного напряженного состояния, разбив тело на элементарные объемы, в которых напряженное состояние можно считать однородным.

Несколько иной подход построения статистической теории прочности предложили Т.А.Конторова и Я.И.Френкель [65]. Они при решении задачу об определении прочности образца объемом V, исходили из следующих предположений:

1) источником разрушения являются дефекты структуры (в частности, микротрещины);

2) в материале имеется множество дефектов, величина опасности которых является случайной, причем закон вероятностного распределения этой величины известен;

3) тело разрушается, если напряжение в нем достигает величины прочности дефектного элемента с наиболее опасным дефектом.

В качестве параметра, характеризующего степень опасности каждого дефекта, авторы выбирали величину хрупкой прочности, которую имел бы образец, если бы источником его разрушения был данный дефект (т.е. каждый дефект характеризуется критическим напряжением σ, при достижении которого дефект начинает развиваться). Для решения задачи авторы использовали аналогию прочности хрупкого тела с прочностью цепи, состоящей из n звеньев, прочность которых является случайной величиной, распределенной по закону $\mathsf{P}_1(\sigma)$. Ясно, что прочность цепи – случайная величина, определяемая прочностью ее самого слабого звена. Вероятность разрушения для цепи из n звеньев при напряжении σ, определяется формулой

$$\mathsf{P}_n(\sigma) \;=\; 1 \;-\; [1 \;-\; \mathsf{P}_1(\sigma)]^n\,. \tag{1.4.4}$$

Считая, что в теле объемом V имеется $N \;=\; \rho V$ дефектных элементов (ρ – среднее число дефектов в единице объема), играющих роль звеньев цепи, Конторова и Френкель определили вероятность разрушения тела при некотором напряжении и наиболее вероятное значение прочности тела, а также предположили, что распределение прочности дефектных элементов подчиняется нормальному закону. Наиболее вероятное значение прочности при больших объемах $\sigma_m \sim (\ln V)^{1/2}$, при малых объемах $\sigma_m \sim 1/V$. Оказалось, что для образцов малого объема зависимость их прочности от объема является более резкой (хотя в предельных случаях эти формулы внутренне противоречивы), что согласуется с опытными данными.

Из сделанного нами обзора двух статистических теорий хрупкой прочности можно заметить, что, несмотря на некоторые различия в подходах к идеологическом обосновании проделываемых авторами этих теорий построений и вычислений, они основываются на одних и тех же предпосылках – представлении о «наиболее слабом звене». При этом физическая причина различной прочности первичных элементов материала не играет существенной роли при построении математической теории. Тогда с математической точки зрения задача сводится к отысканию функции распределения прочности образца объемом V по известной функции распределения прочности первичных элементов. Поскольку прочность образца в целом определяется прочностью наиболее опасных элементов, то, фактически, мы приходим к задаче о распределении вероятностей минимальных значений случайной величины (прочности) в выборке из достаточно большой (генеральной) совокупности из N элементов, распределение вероятностей каждого из которых описывается заданным распределением $\mathsf{P}_1(\sigma)$.

Из общих формул для распределения минимумов, считая число N слабых элементов в образце пропорциональным его объему, получаются формулы Вейбулла и Конторовой-Френкеля. Различия же в выражениях для наиболее вероятной прочности образцов у разных авторов объясняется различиями в выборе вида $\mathsf{P}_1(\sigma)$, а также различиями в сделанных авторами упрощениях в ходе решения задачи. Так, Т.А.Конторова и Я.И.Френкель принимают нормальный закон распределения прочности дефектов, который допускает некоторую вероятность отрицательной прочности, что физически не допустимо. Вейбулл же принял функцию распределения прочности первичных элементов в таком виде $\mathsf{P}_1(\sigma)$, который допускает только положительные значения прочности, однако не дает достаточного ее обоснования.

Для того чтобы дать физическое обоснование результатов Вейбулла с позиций теории Конторовой-Френкеля, Чечулин [3] показал, что формулу Вейбулла можно получить аналогично тому как в теории Френкель-Конторовой получается нормальный закон распределения для большого числа дефектов, если принять распределение опасности дефектов в виде χ^2 – распределения Пирсона. С другой стороны, было выяснено [50], [66], [67], что распределение Вейбулла является асимптотическим представлением распределения минимальных значений, кода число дефектов в образце очень велико и значения прочности ограничены снизу, то есть является предельным распределением теории вероятностей при соответствующем принципе перехода к асимптотически большим значениям N. С другой стороны, было выяснено [50], [66], [67], что распределение Вейбулла является асимптотическим представлением распределения минимальных значений, кода число дефектов в образце очень велико и значения прочности ограничены снизу.

Заметим, что распределение Вейбулла имеет место всегда, когда минимальное значение прочности $\sigma_{\min} = 0$. Асимптотическое представление распределения минимальных значений дает возможность обобщить результаты Вейбулла на случай, когда $\sigma_{\min} > 0$. Такое обобщение дано в работе [50], где также делается попытка обобщить теорию для сложного напряженного состояния.

Все перечисленные подходы имеют определенные недостатки: остается завуалированной роль дефекта в элементарном акте разрушения; без специальных экспериментов остается неясной связь структуры материала с параметрами вводимого распределения прочности; не учитывается тот факт, что для предсказания вероятности разрушения существенное значение имеют не только физическая природа дефекта и его величина, но и его размещение в теле и в поле напряжений. Один и тот же дефект имеет различную опасность в зависимости от того, находится ли он на поверхности тела или внутри него.

1.6. Статистические теории, основанные на образовании дефектов

Указанные выше недостатки устраняются при явном введении в модель материала дефектов структуры с законами вероятностного распределения их геометрических параметров. Функция распределения пределов прочности каждого из элементов материала при этом может быть вычислена по какому-то конкретному алгоритму при любом напряженном состоянии. В этом случае выявляется влияние структурных параметров и вида поля напряжений на вероятность разрушения элемента. Этот подход требует большой информации о структуре материала, но он может дать более цельное представление о роли дефектности материала в механизме потери прочности и прояснить связь некоторых феноменологических констант в со структурой материала и видом поля напряжений.

Некий «средний» путь между подходом, основанным на полном задании дефектов и неоднородностей их геометрическими параметрами вместе с их механическими свойствами, и подходом, основанном на характеризации их лишь пределом прочности дефектного элемента, описан в работах С.В.Батдорфа [68, 69]. Эта теория основывается на следующих предположениях:

1) рассматриваемый материал является макроскопически изотропной средой, содержащей равномерно распределенные по объему и случайно ориентированные (равновероятно по всем направлениям в пространстве) плоские микротрещины; взаимодействие трещин не учитывается;

2) наличие трещин не изменяет величину макроскопического напряжения, определяемого по теории упругости; это предположение накладывает определенные ограничения на размеры и плотность трещин;

3) каждая фиксированная трещина разрушает образец, если макроскопическое разрушающее напряжение в материале, нормальное к плоскости трещины, превышает критическое значение напряжения, характеризующее трещину; размеры и формы трещин, а также свойства материала специально не оговариваются.

Таким образом, в этих работах из геометрических характеристик дефектов принята во внимание только ориентация в пространстве, причем существенно допущение о равновероятности всевозможных ориентаций. В остальном трещины характеризуются критическим напряжением, при котором они начинают развиваться. Теорию Батдорфа при некоторых предположениях можно свести к теории Вейбулла.

В работе [70] рассмотрено приложение указанной теории к расчету вероятности разрушения реальных материалов при одно- и двухосном растяжении и построены кривые предельного состояния для этого случая, соответствующие определенным вероятностям разрушения. Вероятность разрушения при двухосном симметричном растяжении меньше, чем при одноосном (при одинаковых напряжениях и объемах тела), что согласуется с экспериментальными данными. К недостаткам подхода Батдорфа можно отнести следующие:

1) учитываются только растягивающие напряжения, нормальные к плоскости трещины. Вследствие этого теория неприменима, если напряжения, нормальные к плоскости трещины, сжимающие;

2) применение теории для анизотропных материалов (с преимущественной ориентацией трещин) затруднительно, а в случае статистической связи ориентации трещин и их размеров вообще невозможно.

Существует подход [71], [72, 73], [74], при котором параметры дефектов определяют не только ориентацию дефектов, но и их размеры. При таком подходе предполагается известным вероятностное распределение этих параметров и используются результаты детерминистической механики, устанавливающие величину критических напряжений для различных дефектов при заданных условиях нагружения.

В заключение данного нами в разд. 2-6 краткого обзора развития теории прочности и старения и разрушения материалов укажем также об имеющихся других подходах в этой теории, которые не опираются на предположения гипотезы наиболее слабого звена, что связано с подходом, отмеченным в п.2) разд. 1.4. Впервые такой подход был предложен Н.Н. Афанасьевым [8]. Предполагая тело микронеоднородным, он считает, что возникающие в нем напряжения в отдельных зернах будут случайными величинами, распределенными по некоторому закону. За критерий разрушения принимается условие разрушения n_* находящихся рядом друг с другом зерен из числа N_* всех разрушенных зерен в образце. В этом случае вероятность разрушения определяется как вероятность указанного события. Однако саму вероятность Афанасьев вычисляет математически неправильно. Похожий метод, был предложен Д.М.Шуром [75], [76], [77], в котором предполагается случайность прочности «физической точки» в различных направлениях. Распределение прочности по направлениям считается заданным. Мерой поврежденности материала в целом считается среднее значение вероятности разрушения по всем направлениям.

Укажем также на работы [78, 79], которые примыкают к этому направлению и в которых прочность тела оценивается по прочности его сечений, как стационарную случайную функцию положения сечения. Распределение прочности тела для определенной величины напряженной области вводится на основе прослеживания минимальных значений этой случайной функции в указанной области. В отличие от гипотезы наиболее слабого звена, этот подход предполагает некоторую корреляционную зависимость между прочностями отдельных сечений, ослабевающую при удалении сечений.

Наконец, сделаем следующее важное замечание. Рассмотренные в этом разделе подходы совершенно игнорируют наличие в материале дефектов, отличающихся от основной массы дефектов своим определяющим влиянием на прочность микрообъектов и тела в целом (микротрещин, пустот и других существенных дефектов). А как известно, наличие таких дефектов характерно для хрупких материалов.

Глава 2. Статистическая модель хрупкого разрушения

В этой главе мы формулируем статистическую модель, описывающую термодинамически равновесные состояния твердотельного материала, подвергающегося хрупкому разрушению под действием внешней нагрузки. Эта модель строится нами на основе физических представлений, предложенных в работах [80], [81]. Математические модели, основанные на этих представлениях, в дальнейшем исследовались [82], [83], [84].

2.1. Распределение вероятностей ансамбля пор

Феноменология процесса хрупкого разрушения состоит в следующем. К разрушению структуры материала может приводить образование в нем дефектов некоторых типов. Таковыми, например, являются поры. Процесс разрушения при этом протекает следующим образом. В результате внешних воздействий, пространственное распределение дефектов внутри образца может изменяться вследствие их случайного блуждания. Такое блуждание вызывается воздействием на поры флуктуаций плотности материала, изменение распределения температуры в нем, действие внешней механической нагрузки, воздействие внешних электрического и магнитного поля. Более того, полное количество дефектов в образце материала может увеличивается в результате воздействий облучения его проникающими вглубь различного видами излучений. Такой рост числа дефектов не может происходить неограниченно. При достижении их концентрацией определенной величины, в результате при образовании флуктуационных скоплений в какой-то его малой области, начинается процесс разрушения. Сценарий хрупкого разрушения предполагает скопление в небольшом участке образца некоторого критического количества микродефектов, из которых формируется зародыш будущей трещины. Если размеры этого зародыша превышают некоторую критическую величину, то образуется растущая вследствие приложенного к ней внешнего механического напряжения трещина, которая собственно и приводит к разрушению. Тогда для оценки прочности материалов представляет интерес нахождение распределения вероятностей существования таких критических скоплений микродефектов в образце.

Основной физической идеей, на которой основана изучаемая нами модель хрупкого разрушения, является наличие связи между плотностью расположенных в твердотельной среде пор и прочностью материала. Будем предполагать, что поры случайным образом распределены по объему исследуемого образца. Размеры пор будем предполагать настолько малыми, что ими можно пренебречь по сравнению со средним расстоянием между ними. Таким образом, мы будем моделировать поры геометрическими точками. Тогда случайное расположение пор по образцу Ω моделируется посредством случайных наборов $\tilde{X} = \langle \mathbf{x}_j; j1 = \div \tilde{n} \rangle$ несовпадающих друг с другом векторов в области пространства, занимаемой образцом, в которых случайными являются как сами векторы $\mathbf{x}_j$, $j = 1 \div \tilde{N}$, так и общее их число $\tilde{n}$. Таким образом, расположение пор в области Ω представляет собой с математической точки зрения *точечный случайное поле* (см. [86]). Тогда математическая конструкция модели предполагает наличие распределения вероятностей для указанных случайных наборов. Ввиду случайности числа $\tilde{n}$ пор в образце, которое может принимать, вообще говоря, любые сколь угодно большие значения $\tilde{n} = 0, 1, 2, 3, \ldots$, распределение вероятностей моделирующего точечного случайного процесса определяется (см. [87]) бесконечным набором $\langle D_0, D_1, D_2, \ldots \rangle$ плотностей распределения, каждая плотность $D_n(X_n)$, $X_n = \langle \mathbf{x}_j; j = 1 \div n \rangle$ из которых определяет распределение вероятностей фиксированного числа n пор, расположенных в Ω, то есть она определена на Ω^n. Плотности D_n являются положительными симметричными относительно перестановок компонент в наборах X_n, ввиду предполагаемой физической тождественности пор. Весь набор $\mathsf{D} = \langle D_0, D_1, D_2, \ldots \rangle$

плотностей связан условием нормировки полной вероятности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega^n} D(X_n) dX_n = 1\,, \qquad (2.1.1)$$

где $dX_n = d\mathbf{x}_1 ... d\mathbf{x}_n$. Заметим, что в этом условии нормировки интегрирование производится по всем наборам $X_n \in \Omega^n$, в отличие от аналогичной ситуации в равновесной статистической механике, где интегрируется по доле полного объема $|\Omega|^n$, равной $(n!)^{-1}$. Это связано с предполагаемой возможной экспериментальной идентификацией пространственного расположения конкретной поры в области Ω.

В общем случае поры, расположенные в хрупкой твердотельной среде, оказывают влияние на расположение друг относительно друга, создавая вокруг себя упругие напряжения, хотя, может быть, это взаимодействие и проявляется только на малых расстояниях между ними. Поэтому это влияние нужно каким-то образом учитывать при конструировании распределения вероятностей. Поэтому в общем случае необходим заложить в конструкцию модели какой-то физический принцип, на основе которого должны быть сконструированы все плотности D_n, $n \in \mathbb{N}_+$, составляющие набор D. Однако, если считать очень малыми и если вносимые ими искажения в распределение упругих напряжений распространяются на малые расстояния внутри материала, много меньшие среднего расстояния между ними, то с большой точностью можно считать, что поры не взаимодействуют между собой.

2.2. Пуассоновские среды

Итак, будем считать в конструируемой нами модели хрупкого разрушения, что поры не взаимодействуют между собой. Поэтому их случайные пространственные расположения в Ω будем рассматривать как наборы $X = \langle \tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{n}} \rangle$ *статистически независимых в совокупности* случайных векторов [3]. Статистическая независимость пространственных расположений пор означает, что плотности D_n факторизуются, то есть каждая из них представляется в виде

$$D_n(X_n) = p_n \prod_{j=1}^{n} f^{(n)}(\mathbf{x}_j)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.2.1}$$

где $f^{(n)}$ – нормированные плотности распределения случайного вектора в области Ω, p_n – вероятность того, что в области Ω содержится $n \in \mathbb{N}$ пор. Если к тому же считать, что расположение каждой случайной точки в области Ω не зависит от того, сколько вообще в этой области имеется таких случайных точек, то в этом случае все *одноточечные плотности* $f^{(n)}$ совпадают совпадают друг с другом, то есть имеется единая одноточечная плотность $f = f^{(n)}$, которая определяет все многоточечные плотности D_n согласно (1).

Кроме предположения о статистической независимости, в отсутствии внешних полей, действующих существенным образом на каждую пору по отдельности, естественно считать, что случайные точки, в которых располагаются поры, распределены однородно по Ω. Это означает, что попадание каждой точки в любую малую область $\Delta \subset \Omega$ не имеет никакого предпочтения перед любой другой областью $\Delta' \subset \Omega$ с точно такой же формой и размерами. Это предположение приводит к тому, что распределение вероятностей каждой фиксированной случайной точки из набора, описывающего расположение пор по образцу, является *равновозможным*, то есть плотность пространственного распределения $f^{(1)}$ этой точки равна $|\Omega|^{-1}$. В сочетании со сделанным выше предположением о статистической независимости $f^{(n)} = f$, получаем, что условная плотность распределения набора из $\tilde{n}$ точек при условии, что $\tilde{n} = n$, равна $|\Omega|^{-n}$ и, согласно (1), имеем

$$D_n(X_n) = \frac{p_n}{|\Omega|^n}\,. \tag{2.2.2}$$

[3] По поводу употребления этого термина см. [88].

Определим теперь вероятности p_n в рамках конструируемой нами модели. С этой целью предположим, что суммарный объем пор по образцу намного меньше объема $|\Omega|$ самого образца. При этом так как объем каждой поры очень мал, то мало отношение полного числа N пор к объему Ω, то есть мала объемная концентрация $c = N/|\Omega|$ пор. Тогда типичное случайное число $\tilde{n}$ пор намного меньше чем число $c|\Delta|$. Поэтому, приняв во внимание, что расположения пор независимо друг от друга, можно воспользоваться так называемой *схемой серий* для независимых испытаний со случайными исходами (см. [88]). В рамках такой схемы, положим, что значения вероятностей p_n случайного числа $\tilde{n}$ пор определяются связанным с ней предельным распределением вероятностей, которым является т.н. распределение Пуассона. Тогда, в этом случае, вероятность случайного события, состоящего в том, что в область $\Delta \subset \Omega$ попало n пор равна

$$p_n \equiv \Pr\{\tilde{n} = n\} = \frac{(c|\Delta|)^n}{n!} \exp(-c|\Delta|) \,. \tag{2.2.3}$$

Заметим, что неупорядоченные среды, у которых какие-то из ее структурных элементов моделируются геометрическими точками и для статистического описания пространственного распределения ансамбля случайных точек используется распределение Пуассона, называются *пуассоновскими средами* (см. [90], [91]). Покажем, более подробно, каким образом возникает распределение вероятностей (3) при описании точечного случайного поля.

Пусть имеется N точек $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N\}$, статистически независимых друг от друга, каждая из которых распределена равномерно в области Ω так, что $c = N/|\Omega|$ – концентрация этих точек в этой области.

Вычислим вероятность $\Pr\{\tilde{n} = n\}$ в указанных предположениях. Вероятность попадания одной точки с фиксированным номером в область Δ (это событие мы будем рассматривать как «успех» в схеме независимых испытаний) равна $|\Delta|/|\Omega|$. Соответственно, вероятность попадания этой точки в область $\Omega \setminus \Delta$ (это событие рассматривается как «неуспех») равна

$1-|\Delta|/|\Omega|$. Следовательно, перебирая последовательно одну за другой все точки с номерами 1, ..., N (последовательность независимых испытаний) найдем, что вероятность события, состоящего в том, что ровно n точек с какими-то номерами из общего их числа попали в область Δ, а $N-n$ точек попали в область $\Omega \setminus \Delta$ равна

$$\Pr\{\tilde{n}=n\} = \binom{N}{n} \left(\frac{|\Delta|}{|\Omega|}\right)^n \left(1-\frac{|\Delta|}{|\Omega|}\right)^{N-n}, \tag{2.2.4}$$

где

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

– соответствующий биномиальный коэффициент.

Теперь, к полученному выражению (4) для вероятностей попадания пор в фиксированную область $\Delta \subset \Omega$ можно применить предельную теорему Пуассона

$$\Pr\{\tilde{n}=n\} \to \frac{(|\Delta|)^n}{n!} \exp(-c|\Delta|)\,, \tag{2.2.5}$$

при $N \to \infty$, $N/|\Omega| = c = \text{const}$, что соответствует так называемому термодинамическому предельному переходу.

2.3. Конструкция модели и постановка задачи

Мы будем изучать равновесные состояния образца хрупкого твердотельного материала, находящегося под внешней растягивающей нагрузкой в рамках сделанного выше предположения о распределении вероятностей пор. Необходимо сконструировать математическую модель, которая бы позволяла установить связь между концентрацией пор и величиной нагрузки, которая может привести к разрушению образца, под которым понимается его разрыв. Для возможности установления такой связи нужно сделать предположения о физическом механизме разрыва образца. Мы считаем, что разрыву образца, который может произойти катастрофическим образом в течение очень короткого промежутка времени, приводит лавинное разростание под воздействием нагрузки какой-либо из микротрещин, длина d которой превосходит некоторую критическую величину d_*. В свою очередь, возникновение такой достаточно большой трещины мы связываем с наличием в образце хрупкого материала точечных дефектов в виде пор очень малого размера (см. [80], [81]). Эти поры всегда присутствуют в образце с той или иной средней концентрацией c, которая зависит как от физической природы материала, так и от технологии приготовления образца. В конструируемой модели величина c является свободным феноменологическим параметром.

Так как поры распределены в образце случайным образом, и, с точки зрения технологии приготовления, можно управлять только лишь их концентрацией, усредненной по пространственным областям Δ с макроскопическими линейными размерами в образце, то, неизбежно, в каждой такой области имеются флуктуации концентрации. Тогда ясно, что при наличии достаточно большой концентрации пор в какой-либо из пространственных областей Δ, может произойти слияние всех поры, находящихся в ней, под действием растягивающих напряжений, присутствующих в области Δ. Растягивающие область Δ напряжения, который действуют вдоль какой-то из осей X образца возникают вследствие приложения растягивающей нагрузки к поверхности границы образца, перпендикулярной оси X. При слиянии пор образуется микротрещина. При достаточно большой величине линейного размера области Δ, в которой проявилась достаточно большая (критическая) флуктуация концентрации, длина d самой микротрещины может превзойти ту критическую величину d_*, о которой речь шла выше. Вследствие этого, как раз, и возникает процесс быстрого роста рассматриваемой трещины в хрупком материале, находящемся под внешней нагрузкой, то есть образуется макротрещина, и если линейный размер макротрещины достигает величины, сравнимой с линейным размером самого образца, происходит его разрыв.

Таким образом, в конструкцию модели необходимо заложить однозначную связь $\bar{c}(d)$ между средней по области Δ величиной концентрации пор, $\bar{c} = m/|\Delta|$ (m – число пор в области) и размером d флуктуационно возникающей в этой области микротрещины. Это позволит определить связь между критическим размера d_* микротрещины с некоторой критической величиной c_* флуктуации концентрации, $c_* = \bar{c}(d_*)$.

Второе предположение физического характера, на котором основана предлагаемая нами модель, связано с тем, что размер микротрещины d, который является микроскопической характеристикой среды, зависит от макроскопической характеристики – величины p внешней одноосной нагрузки. Вид такой зависимости $d(p)$ также должен входить в конструкцию модели.

При наличии двух указанных зависимостей, в модели постулируется, что зависимость между c_* и величиной внешней нагрузки определяется как суперпозиция двух функций $c_* = \bar{c}(d)$ и $d = d(p)$. При этом величина p_*, определяемая значением обратной функции по отношению к сложной функции $c_* = \bar{c}(d(p))$ может быть интерпретирована как предел прочности материала, то есть как та критическая величина внешней нагрузки p_*, которая приводит к разрушению образца. Так как возникновение макроскопической трещины и является разрушения образца носит в рамках нашего подхода случайный характер, то физический смысл величины p_* состоит в том, что при превышении нагрузки p критической величины p_* образец разрушается с подавляющей вероятностью P. При этом величина этой вероятности должна быть функцией средней концентрации c пор в образце.

После этого, используя указанные в предыдущем разделе предположения относительно распределения вероятностей числа пор в любой фиксированной области Δ.

Очевидно, что явный вид функции $\bar{c}(d)$ зависит от выбора формы и размеров области Δ. С другой стороны, зависимость $d(p)$, как мы увидим ниже, также зависит от некоторого произвольно выбранного множителя

d_0. Однако при наличии определенного произвола в выборе указанных зависимостей реальный физический смысл имеет только их суперпозиция, то можно воспользоваться произволом в выборе области Δ для изучаемой статистической модели разрушения и выбрать оптимальным образом с точки зрения проведения конкретных расчетов. Поэтому мы далее положим, что область Δ выбирается кубической с ребрами куба, параллельными соответствующим ребрам макроскопического образца кубической формы. При этом величину ребра куба Δ положим равной d, связав ее с критическим размером зародыша трещины.

Построим теперь на основе зафиксированных зависимостей $\bar{c}(d)$ и $d(p)$ статистическую модель хрупкого разрушения материала.

Будем считать, что в объеме образца Ω случайным образом равномерно по образцу распределены поры пренебрежимо малых размеров так, что мы будем моделировать случайно расположенными в области Ω точками. Ввиду равномерного распределения вероятностей случайных расположений точек в образце Ω, мы принимаем в качестве модели твердотельной среды с распределенными в ней порами *пуассоновскую среду*, следуя введенной в предыдущем разделе терминологии. В рамках такой модели в каждую кубическую область Δ с линейным размером d, расположение которой в области Ω характеризуется радиус вектором ее центра $\mathbf{x}$, попадает какое-то случайное число $\tilde{m}(\mathbf{x})$ точек из всей случайной реализации точек $\tilde{X}_{\tilde{N}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{N}}\}$, в которых находятся поры в области Ω. Таким образом, возникает случайная функция $\tilde{m}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, распределение вероятностей для которой индуцируется распределением вероятностей для случайного пуассоновского точечного поля $\{\tilde{X}_{\tilde{N}}\}$. Если величина $\tilde{m}(\mathbf{x})$ превзойдет в какой-либо точке $\mathbf{x} \in \Omega$ величину $c_* d^3 \equiv m_*$, то области Δ с центром в этой точке $\mathbf{x}$ зарождается макроскопическая трещина, которая приводит к хрупкому разрушению материала. Следовательно, возникает задача:

Определить вероятность P существования в образце Ω такой куби-

ческой области Δ *с линейным размером* d*, в которой находится не менее чем* m_* *точек пуассоновского случайного поля со средней концентрацией* c.

Таким образом, искомая вероятность P должна зависеть от параметра c, определяющего распределение вероятностей пуассоновского поля, то есть задача состоит в вычислении функции $P(c)$.

Точное математическое определение вероятности $P(c)$ дается следующей формулой:

$$P(c) = \Pr\{\max\{\tilde{m}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} > m_*\} . \qquad (2.3.1)$$

Таким образом, вычисление вероятности $P(c)$ сводится к классической задаче об определении распределении вероятностей значений максимума выборки случайного поля. В такой форме, несмотря на достаточно простое распределение вероятностей для точечного случайного поля, описывающего расположение пор в Ω, задача оказывается очень сложной для точного аналитического решения.

Так как $P(c)$ зависит от геометрического размера L образца Ω, то существенное упрощение задачи состоит в учете того, что интерес представляет тот случай, когда в образце имеется очень большое число пор, то есть размер образца намного превосходит среднее расстояние между порами. В частности, если он намного превосходит размер d области Δ. Именно этот случай представляет интерес для теории прочности и с этой точки зрения нет необходимости находить точное аналитическое решение задачи, а, напротив, интерес представляет только асимптотика этого решения в пределе $V \to \infty$, $\langle \tilde{N} \rangle \to \infty$, $c = \langle \tilde{N} \rangle / V$=const, где $V = L^3$ – объем образца Ω. В статистической физике такой предельный переход называется *термодинамическим.* Тот факт, что изучается не буквально предельное значение $P(c)$ при $L \to \infty$, ввиду того, что такое предельное значение тривиальным образом равно единице, а именно главное значение асимптотического поведения этой вероятности, аналогичен тому положению, которое имеет место при изучении термодинамических флуктуаций в статистической физике, когда переход к термодинамическому пределу приводит к исчезновению флуктуаций и, соответственно, их распределения вероятностей и, поэтому, интерес представляет изучение именно асимптотических отклонений величин от термодинамически предельных значений. Заметим, что в пределе $L \to \infty$ вероятность $P(c)$ слабо зависит от формы области Δ.

Сделаем одно важное замечание относительно вида асимптотики вероятности $P(c)$ в термодинамическом пределе. Очевидно, что при равновероятном (однородном) распределении расположений точек, в частности, в том случае, когда такое точечное случайное поле является пуассоновским, эта вероятность должна стремиться к 1 при $L \to \infty$ и $c =$const. Это свойство вероятности $P(c)$ может быть интерпретировано таким образом, что образец может быть разрушен с подавляющей вероятностью, если его линейные размеры достаточно велики. В этом состоит известный в материаловедении т.н. масштабный эффект. (см., напр., [3], [89]). Таким образом, искомая асимптотика вероятности $P(c)$ в термодинамическом пределе должна быть такой, что $1 - P(c) \to 0$ и интерес представляет асимптотическое поведение разности $1 - P(c)$ в указанном пределе. В том случае, когда эта разность стремится к нулю экспоненциально (ср. (1.4.1)) относительно p при $N = cV \to \infty$, то естественным образом вводится определение критического напряжения – *предела текучести*, которое представляется показателем в этой асимптотике.

Заметим, однако, что, несмотря на значительное упрощение постановки задачи, связанное с достаточностью вычисления только асимптотического выражения для $P(c)$ при $L \to \infty$, задача нахождения этой асимптотики в рамках описанной выше математической модели оказывается все же очень сложной. Имеющиеся в физической литературе, посвященной проблеме хрупкого разрушения твердого тела решения этой задачи некорректны с математической зрения (см., например, работу [7], а также [80]).

По этой причине в следующем разделе мы сформулируем несколько упрощенную дискретную модель, для случайной функции $\tilde{m}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, которая допускает строгое, с математической точки зрения, исследование. В рамках такой более простой модели, в последующих разделах будет найдено решение поставленной задачи.

2.4. Дискретизованная статистическая модель. Асимптотическая формула для вероятности разрушения

В этом разделе мы построим более простую статистическую модель хрупкого разрушения образца твердотельной среды, которая основана на дискретизации модели описанной в предыдущем разделе. Такая дискретизация основана на замене непрерывного множества допустимых пространственных расположений пор на дискретное множество, которое представляется узлами решетки.

Пусть область Δ является кубической ячейкой с объемом $v_* = d^3$. Образец Ω представляется составленным из таких ячеек, число которых равно V/v_*. Будем считать, что трещина под напряжением p, приложенным в направлении ребер с размером h, зарождается в какой-то из ячеек, если в ней количество дефектов превышает определенную величину m_*. Занумеруем ячейки решетки целочисленными векторами $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, $x_1, x_2, x_3 = 1 \div L/d$. Это множество целочисленных векторов будем обозначать как и в исходной непрерывной модели посредством Ω. Введем случайную функцию $\tilde{m}(\mathbf{x})$, значением $m(\boldsymbol{x})$ которой для каждого целочисленного вектора $\mathbf{x}$ является случайное число точек, попавших в ячейку с меткой $\mathbf{x}$. Дискретизация пространственных расположений пор позволяет ввести упрощение в конструкцию случайной функции $\tilde{m}(\mathbf{x})$, а именно будем считать, что, ввиду малости области Δ по сравнению с размером всего образца Ω, все случайные величины $\tilde{m}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}, x_1, x_2, x_3 = 1 \div L/d$ составляют множество независимых в совокупности случайных величин, что находится в соответствии с разд. 2.2. Более того, ввиду однородности распределения пор по образцу Ω, можно считать, что все случайные величины $\tilde{m}(\mathbf{x})$ одинаково распределены. Введем в рассмотрение общее для них распределение распределение вероятностей случайной величины $\tilde{m}$,

$$Q_m = \Pr\{\tilde{m} = m\}\,. \tag{2.4.1}$$

Тогда, для любой ячейки с целочисленной меткой $\mathbf{x}$ имеет место

$$P_{m_*} = \Pr\{\tilde{m}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} < m_*\} = \sum_{m=0}^{m_*-1} Q_m\,. \tag{2.4.2}$$

Ввиду статистической независимости случайных величин $\tilde{m}(\mathbf{x})$ в совокупности вероятность $P(c)$, определенная (3.1), вычисляется следующим образом [15]:

$$P(c) = \Pr\{\max\{\tilde{m}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Omega\} \geq m_*\} = 1 - \Pr\{\tilde{m}(\mathbf{x}) < m_*; \mathbf{x} \in \Omega\} =$$

$$= 1 - \prod_{\mathbf{x}\in\Omega} \Pr\{\tilde{m}(\mathbf{x}) < m_*\} = 1 - P_{m_*}^N\,. \tag{2.4.3}$$

Ниже, в следующем разделе, мы покажем, что число $m_* = (d/h)^3 \gg 1$ очень велико. Для размеров ячейки Δ порядка 10^{-6} см, в ней может находиться порядка $10^2 \div 10^3$ пор. Тогда $m_* \approx 10^2$. Таким образом, так как $N = (L/d)^2(L/h) = L^3/d^2h = V/|\Delta|$, то для вычисления асимптотики вероятности $P(c)$ нужно вычислить асимптотику вероятности P_{m_*} нужно вычислить повторную асимптотику суммы

$$P_{m_*} = \sum_{m=0}^{m_*-1} Q_m \tag{2.4.4}$$

при заданном распределении вероятностей Q_m в том случае, когда $m_* \to \infty$. В свою очередь, так как $P(m_*) \to 1$ при $m_* \to \infty$, то интерес представляет асимптотика разности

$$1 - P_{m_*} = \sum_{m=m_*}^{\infty} Q_m\,, \tag{2.4.4}$$

которая, вообще говоря, не является универсальной, а зависит от распределения вероятностей Q_m. Подстановка (4) в (3) дает нам общий вид асимптотики для вероятности $P(c)$ в термодинамическом пределе

$$P(c) = 1 - P_{m_*}^N = 1 - \Big(1 - \sum_{m=m_*}^{\infty} Q_m\Big)^{V/|\Delta|} . \tag{2.4.5}$$

Если распределение вероятностей Q_m таково, что $Q_{m+1}/Q_m \to 0$ при $m \to \infty$, то асимптотика суммы в этой формуле дается ее первым слагаемым

$$\sum_{m=m_*}^{\infty} Q_m \sim Q_{m_*} . \tag{2.4.6}$$

Тогда из (5) следует

$$1 - P(c) = \Big(1 - Q_{m_*}\Big)^{V/|\Delta|} . \tag{2.4.7}$$

Полагая, согласно (2.5), что

$$Q_{m_*} = \exp\Big(-c|\Delta|\Big)\frac{(c|\Delta|)^{m_*}}{m_*!} , \tag{2.4.8}$$

находим выражение для главного члена асимптотики вероятности $P(c)$ в виде

$$1 - P(c) = \Big(1 - \exp\Big(-c|\Delta|\Big)\frac{(c|\Delta|)^{m_*}}{m_*!}(1 + o(m_*^{-1}))\Big)^{V/|\Delta|} . \tag{2.4.9}$$

При этом, очевидно, что выполняется условие применимости асимптотического соотношения (6), так как

$$Q_{m+1}/Q_m = \frac{c|\Delta|}{m+1} \to 0$$

при $m \to \infty$.

Для получения более простой формулы главного члена асимптотики можно воспользоваться приближенным выражением числа $m_*!$ на основе асимптотической формулы Стирлинга,

$$m_*! \approx (2\pi m_*) \left(\frac{m_*}{e}\right)^{m_*} . \tag{2.4.10}$$

В результате, учитывая, что $|\Delta| = d^3$, получаем следующую асимптотическую формулу

$$1 - P(c) = \left(1 - \frac{\exp\big[-cd^3\big]}{\sqrt{2\pi m_*}} \left(\frac{ced^3}{m_*}\right)^{m_*} (1 + o(m_*^{-1}))\right)^{V/d^3}. \qquad (2.4.11)$$

Глава 3. Масштабный эффект

В этом разделе мы, используя формулу (2.4.11) для вероятности наличия большой флуктуации числа пор в какой-то из ячеек Δ образца материала, получим формулу для вероятности разрыва образца в результате воздействия на него достаточно большой внешней нагрузки p и определения на ее основе предела текучести материала.

Для решения указанной задачи нужно дополнить сконструированную в разделе 2.4 статистическую модель, которая носит чисто теоретико вероятностный характер, двумя физическими положениями, о которых шла речь в разд. 2.3 и которые связывают «микроскопические» параметры статистической модели d и m_* с непосредственно измеряемыми физическими макроскопическими параметрами, которые, по предположению, полностью определяет макроскопическое состояние образца материала, а именно с концентрацией c пор и с внешним механическим напряжением, приложенным к кубическому образцу вдоль одного из его ребер.

Прежде всего, укажем связь между величиной критической концентрации m_* и размером d кубической ячейки d. По построению, описанному в разд.2.3, размер d является критической (флуктуационной) длиной трещины, с которой начинается ее развитие. Пусть длина h равна характерному расстоянию между ионами материала, при превышении которого в нем возникает явление текучести. По порядку величины эта длина равна среднему расстоянию между молекулами в жидком состоянии. Согласно теории Гриффитса [1], [2] величина d по порядку величины равна 10^{-6} см. Пусть h – расстояние, на котором должны находиться ионы материала по берегам трещины, ориентированной в направлении, перпендикулярном направлению действия внешней нагрузки. По порядку величины оно равно 10^{-8}см, то есть порядка среднего расстояния между атомами, то есть имеет место неравенство $d \gg h$. Положим, что при возникновении критической флуктуации в ячейке с размером d все поры выстраиваются в одной плоскости. Тогда в образовании трещины принимает участие $(d/h)^2$ пор, так как при этом они должны находиться на расстоянии h. Следовательно, при возникновении микротрещины в ячейке с размером d должно находиться не менее 10^4 пор. Мы считаем, что именно это число представляет, по порядку величину, критическое значение m_* числа пор, при превышении которого зарождается трещина. Это число определяет критическую концентрацию $c_* = m_*/d^3 = dh^2$ пор в ячейке Δ, которая приводит, согласно теоретическим представлениям работы, [1] к спонтанному возникновению трещины. Определение критической концентрации c_* вместо статистического параметра m_* решает первую из тех задач, решение которых необходимо для достижения поставленной в начале главы цели.

Запишем теперь выражение для вероятности $P(c)$ (2.4.11) исключив из нее статистический параметр m_*,

$$1 - P(c) = \left(1 - \frac{\exp\left[-(c-c_*)d^3\right]}{\sqrt{2\pi c_* d^3}}\left(\frac{c}{c_*}\right)^{c_* d^3}\right)^{V/d^3}. \qquad (3.1.1)$$

Перейдем к решению второй задачи. Необходимо указать связь величины напряжения p, связанным с внешним механическим воздействием, растягивающим образец. В нашей теории мы берем в качестве такой связи формулу теории Гриффитса [1] роста трещины, из которой следует, что

$$d = d_0\left(\frac{k}{p}\right)^{\alpha/2}, \qquad (3.1.2)$$

где $\alpha, d_0 > 0$ – феноменологические постоянные и k – т.н. постоянная Гриффитса. Такая форма зависимости d от p согласуется с представлением о том, что при $p \to \infty$ возможно развитие трещины со сколь угодно малых размеров d, а при $p = 0$ трещиной формально можно считать разломы в образце, имеющие макроскопические размеры. Что касается практического использования формулы (2), то в теории хрупкого разрушения часто используется модель с $\alpha = 4$ [81]..

Используя выражение (2), выразим вероятность $P(c)$, исключив из формулы (1) параметр d. Так как в этом случае

$$\left(1 - \frac{\exp\big[-(c-c_*)d^3\big]}{\sqrt{2\pi c_* d^3}}\left(\frac{c}{c_*}\right)^{c_* d^3}\right)^{V/d^3} =$$

$$= \left(1 - \frac{\exp\big[-(c-c_*)d_0^3(k/p)^{3\alpha/2}\big]}{\sqrt{2\pi c_* d_0^3 (k/p)^{3\alpha/2}}}\left(\frac{c}{c_*}\right)^{c_* d_0^3 (k/p)^{3\alpha/2}}\right)^{(V/d_0^3)(p/k)^{3\alpha/2}} =$$

$$= \left(1 - \frac{\exp\left[-\dfrac{(c-c_*)}{c_*}\left(\dfrac{p_*}{p}\right)^{3\alpha/2}\right]}{\sqrt{2\pi (p_*/p)^{3\alpha/2}}}\left(\frac{c}{c_*}\right)^{(p_*/p)^{3\alpha/2}}\right)^{V c_* (p/p_*)^{3\alpha/2}}, \qquad (3.1.3)$$

где введен феноменологический параметр $p_* = k\big(d_0 c_*^{1/3}\big)^{2/\alpha}$. Таким образом, мы получили формулу для вероятности $P(c)$, заменив статистические и микроскопические физические параметры N, m_*, d, h на три измеряемых физических параметра c, V, p и два феноменологических параметра c_* и p_*.

Наконец, воспользуемся тем, что показатель степени $V c_* (p/p_*)^{3\alpha/2}$ представляет собой большой параметр при $p \geq p_*$. Тогда можно воспользоваться аппроксимацией $(1-\eta)^A \approx \exp(-\eta A)$ при $A \to \infty$. В результате, учитывая (1), получаем следующую приближенную формулу

$$1 - P(c) = \exp\left(-\frac{V c_*}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(c-c_*)}{c_*}\left(\frac{p_*}{p}\right)^{3\alpha/2}\right]\left(\frac{c}{c_*}\right)^{(p_*/p)^{3\alpha/2}}\left(\frac{p}{p_*}\right)^{3\alpha/4}\right), \qquad (3.1.4)$$

В частности, при $\alpha = 4$, эта формула принимает вид

$$1 - P(c) = \exp\left(-\frac{V c_*}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(c-c_*)}{c_*}\left(\frac{p_*}{p}\right)^{6}\right]\left(\frac{c}{c_*}\right)^{(p_*/p)^{6}}\left(\frac{p}{p_*}\right)^{3}\right). \qquad (3.1.5)$$

Из этой формулы непосредственно усматривается, что вероятность $P(c)$ разрушения образца увеличивается с ростом его размеров, то соответствует упомянутому выше масштабному эффекту.

Из полученной формулы, в частности, можно определить зависимость предела текучести материала от объема образца. По определению, положим предел текучести равным такому значению напряжения p, когда, при значении концентрации $c = c_*$, вероятность разрушения составит 99%. Тогда, полагая в формуле (5), что $1 - P(c) = 0.01$ и $c = c_*$, находим

$$p = p_* \left(\frac{2 \ln 10 \sqrt{2\pi}}{V c_*} \right)^{1/3} .$$

Заключение

В результате проведенного теоретического исследования построена простая теоретическая статистическая модель, описывающая явление хрупкого разрушения материала по воздействием на него внешней нагрузки. В этой модели образование микротрещины критического размера проявляется как следствие наличия в образце достаточно большой флуктуации концентрации пор. Так как величина средней квадратичной флуктуации концентрации пор внутри образца материала связана с величиной самой концентрации, то, в результате, имеется зависимость между концентрацией пор и критическим механическим напряжением (пределом разрывной прочности) материала p_*. Построенная нами модель претендует на предсказание количественных характеристик хрупкого разрушения материала, так как она устанавливает вид указанной зависимости. На основе найденной формулы связи между концентрацией пор и пределом прочности материала, в частности, устанавливается зависимость между пределом прочности и размером образца. Наличие такой зависимости называется в материаловедении *масштабным эффектом*, который, качественно, связан с тем, что увеличение размеров образца приводит к увеличению вероятности появления в какой-то из малых областей внутри него достаточно большой флуктуации, величина которой превосходит критическую величину, начиная с которой происходит разростание трещины при воздействии на образец материала внешней растягивающей нагрузки, т.е. к увеличению вероятности преодоления локально в этой области внутри материала предела его прочности. Последнее, в конце концов, приводит к зарождению макроскопической трещины с последующим ее разрастанием и разрывом образца.

Список литературы

[1] Griffith A.A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids // Phil. Trans. Roy. Soc. of London.– 1921.– A221.– P.163-198.

[2] Griffith A.A. The Theory of Rupture, Proc / First Inter. Cong. Appl. Mech., Delft,. 1924.– P.55.

[3] Чечулин Б.Б., Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов. – М.: Металлургиздат, 1963.– 120 с.

[4] Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка / М., Наука, 1982.– 176 с.

[5] Конторова Т.А. Статистическая теория прочности // ЖТФ. – 1940.– 10; 11.– С.886.

[6] Frenkel Ya.I., Kontorova T.A. A statistical theory of the brittle strength of real crystals// J. Phys. (Moscow).– 1943.– 7. – С.108.

[7] Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов // ЖТФ. – 1940. – X; 19. – С.1953 -1568.

[8] Афанасьев Н.Н., Статистическая теория усталостной прочности металлов. – К., 1953. – 123 с.

[9] Weibull W. A statistical representation of fatigue failure in solids // Trans. Roy. Inst. Tech. (Stocholm). – 1949.– No. 27.

[10] Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Малунов В.В., Моисеев Ю.В., Молчанов С.А., Особенности перколяционной модели старения полимеров // Доклады АН СССР. – 1988. – 303; 3.– Р.535-537.

[11] Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Зайцева Г.М., Молчанов С.А. Теоретическое и статистическое исследование дефектного множества

в эмаль-лаковых электроизоляционных покрытиях// Доклады АН СССР.– 1988.– 303;2 , – С.270-274.

[12] Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation. I. General theory// Functional Materials.– 1996.– 3; 1. P.5-11.

[13] Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation. II. One-dimensional model analysis // Functional Materials.– 1996.– 3;3.– P.312-319.

[14] Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability // J.Appl.Mech.– 1951.– 18.– P.293.

[15] Гумбель Э. Статистика экстремальных значений / М.: Мир, 1965. Gumbel E. Statistics of Extremes / New York: Columbia University Press, 1962.

[16] Virchenko Yu.P., Percolation Mechanism of Material Ageing and Distribution of the Destruction Time // Functional Materials.– 1998. – 5;1. – P.7-13.

[17] Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. The formation of destruction time distribution of material ageing by statistically independent perturbations // Functional Materials.– 1999.– 6;1.– P.5-12.

[18] Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Distribution of destruction time in percolation picture of material ageing // Український фізичний журнал.– 2000.– 45;6.– P.731–737. (2000).

[19] Бейгельзимер Я.Е., Эфрос Б.М. О вязком разрушении материалов под давлением // Физика прочности и пластичности.– 1992.– 2; 3.– С.55-65.

[20] Одинг И.А., Иванова В.С. Дислокационные теории образования усталостных трещин // Прочность металлов при переменных нагрузках. – М., Наука. 1963. – С. 3-13.

[21] Сосновский Л.А., Статистическая механика усталостного разрушения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 288 с.

[22] Кондратьев П.А., Большанина М.А. Порообразование в процессе усталости.//Изв. АН СССР, Металлы.– 1968.– No 4. – С.118-125.

[23] Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел.//Вестн. АН СССР.– 1968.– No3.– С.46-52.

[24] Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.И. Кинетическая природа прочности.//Физика сегодня и завтра. – Л., 1970. – с. 90-179.

[25] Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов / Киев: Наукова думка, 1978. – 352 с.

[26] Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.И. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М., 1974. – 560 с.

[27] Витвицкий П.М., Попина С.Ю., Прочность и критерии хрупкого разрушения твердых тел. – К.: Наукова Думка, 1980. – 186 с.

[28] Морозов Н.Ф., Математические вопросы теории трещин / М.: Наука, 1984. – 256 с.

[29] Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / Киев : Наукова Думка, 1968. – 246 с.

[30] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения / М.: Наука, 1974. – 416 с.

[31] Разрушение т.2 / сб. научных трудов / М.: Мир, 1975. – 763 с.

[32] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / М.: Наука, 1974.– 640 с.

[33] Каминский А.А., Хрупкое разрушение вблизи отверстий / Киев: Наукова Думка, 1982.– 158 с.

[34] Хеллан К., Введениев механику хрупкого разрушения. – М.: Мир, 1988.–364 с.
Hellan K. Introduction to Fracture Mechanics / New York: McGrow-Hill Book Company, 1984.

[35] Gilvarry J.J. Fracture of Brittle Solids. II. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Experimental) // J.Appl.Phys. – 1961. – 32; 3.– P.400-410.

[36] Gilvarry J.J. Fracture of Brittle Solids. I. Distribution Function for Fragment Size in Single Fracture (Theoretical) // J.Appl.Phys. – 1961. – 32; 3. – P.391-399.

[37] Mechanics of fracture. vol.1 /Ed. G.C. Sih Nordoff/ Int. Publ. Leugen, 1973.

[38] Sneddon I. The distibution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. — Proc. Roy. Soc., ser. A, v. 187, 1946.

[39] Зорин И.С. О хрупком разрушении упругой плоoскости, ослабленной тонким вырезом / Вестник ЛГУ. – 1982.– No. 7.

[40] Никольская Н.А. О неустойчивости плоского решения задачи о растяжении пластины с внутренним разрезом / Вестник ЛГУ. – 1976.– No. 1.

[41] Rice J., Drucker D. Energy changes in stressed bodies due to void crack growth. — IJFM, 1967, v.3, No.1.

[42] Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. — J. Appl. Mech., 1957, v. 24, No.3.

[43] Баренблатт Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. — ПММ, 1969, т. 23, No. 3,4,5.

[44] Новожилов В.В. а) О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. — ПММ, 1969, в. 2. б) К основам теории равновесных трещин в квазихрупких телах. — ПММ, 1969, в. 5.

[45] Irwin G., Fracture dynamics.//Fracture of Metals, ASM, Cleveland, 1948.

[46] Orowan E., Fundamentals of brittle behavior of metals.//Fatigue and Fracture of Metals. — N.Y.: Willey, 1950.

[47] Панасюк В.В., О разрушении хрупких тел при плоском напряженном состоянии. — ПММ, т. 1, в. 9, 1961.

[48] Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960.– 8; 2.

[49] Биргер И.А. Применение теории случайных процессов для описания разрушения// В кн.: Прочность материалов и конструкций / Киев: Наукова думка, 1975. – С.297-314.

[50] Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике / М.: Изд-во лит. по стр-ву, архитектуре и строит. материалам, 1961. – 202 с.

[51] Болотин В.В. Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения// Расчеты на прочность. – 1962. – вып.8. – С. 36-52.

[52] Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов / М.: Машиностроение, 1964. – 275 с.

[53] Волков С.Д. Статистическая теория прочности / М.: Машгиз, 1960. – 176 с.

[54] Ворович И.И. Некоторые вопросы использования статистических методов в теории устойчивости пластин и оболочек // В кн.: Тр. IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин / Ереван, 1964.

[55] Каминский А.А. Разрушение хрупких тел со случайными неровностями поверхности // Прикл. механика. – 1972. – 8; 8. – С. 82-89.

[56] Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени / М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.

[57] Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел / М. : 1970. – 138 с.

[58] Ломакин В.А., Статистические задачи теории упругости // В кн.: Прочность и пластичность. – М., 1971.

[59] Седракян Л.Г., К статистической теории прочности / Ереван: Изд-во Арм. ин-та стройматериалов и сооружений, 1968. – 104 с.

[60] Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход) / М.: Наука, 1975. – 344 с.

[61] Grandall S.H., Marc W.D., Random vibration in mechanical systems / New York: Acad. Press, 1963.

[62] Maier M. Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften anstatt nach zulässigen Spannungen / Berlin: Springer-Verlag, 1926.

[63] Александров А.П., Журков С.Н. Явление хрупкого разрыва. – М.: Гостехтеориздат, 1933. – 52 с.

[64] Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials.//Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.– 1939.– No.151, P.5-45.

[65] Конторова Т.А., Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // ЖТФ.– 1941.– 11; No.3.– С.173-181.

[66] Писаренко Г.С., Трощиненко В.Т. Статистичні теорii міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів / Киев: Наукова думка, 1961. – 106 с.

[67] Epstein B. Application of the theory of extreme values in fracture problems.// Amer. Stat. Assoc. J.– 1948.– 13; No.9.– P.403-412.

[68] Batdorf S.B. A statistical theory for failure of brittle materials under combined stresses // AIAA Paper.– 1973.– No.381.– P.1-5.

[69] Batdorf S.B. Fracture statistics of brittle materials with intergranular cracks // Nucl. Eng. and Des.– 1975.– 35; No.3.– P.349-360.

[70] Batdorf S.B., Crose J.G. A statistical theory for the fracture of brittle structures subjected to nonuniform polyaxial stresses // Trans. ASME, E.– 1974.– 41; No.2. – P.459-464.

[71] Fisher J.C., Hollomon J.M. A statistical theory of fracture // Metals Technol.– 1947.– 14; No.5.– P.1-16.

[72] Витвицкий П.М. Прочность микронеоднородных хрупких тел со статистическим распределением дефектов типа трещин // Физ.-хим. Механика материалов.– 1968.– No.3.–С.413-419.

[73] Витвицкий П.М. Предельное равновесие хрупких пластин со стохастическим распределением дефектов типа трещин // Физ.-хим. Механика материалов.– 1970.– No.5.– С.52-58.

[74] Косычин Р.С., Романив О.Н. О несущей способности высокопрочных материалов после обработки, сопровождающейся образованием направленной структуры дефектов // Физика и химия обработки материалов.– 1970.– No.5.– С.69-76.

[75] Мелькин В.И., Шур Д.М., Егоров В.С., Васильев В.А. Прочность хрупких материалов при сложном напряженном состоянии // Изв. вузов. Машиностроение.– 1970.– No.2.– С.9-14.

[76] Шур Д.М. Статистический критерий опасности разрушения материалов при сложном напряженном состоянии // Машиноведение.– 1971.– No.1.– С.51-58.

[77] Шур Д.М. Статистический критерий прочности и пластичности материалов в условиях сложного напряженного состояния // Пробл. прочности.– 1972.– No.7.– С.15-21.

[78] Vorliček M. Stochasticke pojeti pevnosti // Stavebn. čas.– 1975.– No.5.– S.319-336.

[79] Vorliček M. Pouziti stochastickeho pojeti pevnosti // Stavebn. čas.– 1975.– No.6.– S.376-394.

[80] Зарембо К.Л., Зарембо Л.К. К статистической теории прочности хрупких твердых тел // Вест. Моск. ун-та. Сер. физ-астр.– 1991.– 3, No.6.– С.82-87.

[81] Зарембо Л.К., Юровский В.А. Об одной модели прочности на разрыв твердых тел // ЖТФ.– 1966.– 66; вып.4.– С.76-83.

[82] Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации // Теор. и мат. физика. – 2001.– 128;2.– С.161-177.
Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Geometric models of the statistical theory of fragmentation // Theoretical and Mathematical Physics. – 2001. – 128;2. – P.969-982.

[83] Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. To the Statistical Theory of Brittle Destruction of Solid Media // Доповіді НАНУ. – 2000. – 7. – P.92-95.

[84] Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Investigation of a One-Dimensional Model in Statistical Theory of Fragmentation // Доповіді НАН України. – 2000. – 8. – P.82-86.

[85] К.В.Гардинер Стохастические методы в естественных науках / М.: Мир, 1986. – 526 с.
Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, 2d ed.– Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1985.

[86] Й.Керстан, К.Маттес, Й.Мекке, Безграничноделимые точечные процессы. М.: Наука,1982. – 392 с.
Matthes K., Kerstan J., Mecke J. Infinitely Divisible Point Processes / New York: Chichester, 1978.

[87] Займан Дж. Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем // М.: Мир, 1982. – 734 с.

[88] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / М.: УРСС, 2005.

[89] Френкель Я.И. Введение в теорию металлов / Л.: Наука, 1972.– 424 с.

[90] Gilbert E.N. The Poisson random medium in statistical physics // Ann. Math. Statistics.– 1962.– 33, N3.– P.958.

[91] Вирченко Ю.П. Пуассоновские среды // Энциклопедический словарь. Математическая физика // М.: Российская энциклопедия, 1997.