ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСТОРИЧЕСКИХ СВЕДЕНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПРОИЗВОДНАЯ» В КУРСАХ МАТЕМАТИКИ 10-11 КЛАССОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01 Математика
очной формы обучения, группы 02041402
Бабичевой Алины Александровны

Научный руководитель
к.п.н., доцент
Остапенко С.И.

БЕЛГОРОД 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Переход из средней школы обучения в старшую школу начинается с изучения «алгебры и начала анализа» в 10 классе, учащиеся сталкиваются с довольно немалыми препятствиями. Это касается и одной из ключевых тем школьного курса — «Производной».

Практика доказывают, что сравнительно несложно научить учащихся давать формулировку производной, вычислять ее, находить производную функции в точке, используя основные правила дифференцирования. Без каких-либо затруднений учащиеся решают задачи и на применение производной к исследованию функции. Для этого, приступая к изучению темы, нужно найти верный путь введения производной, изложить на доступном для понимания всеми учащимися уровне учебный материал. Если учащийся сможет использовать определение производной для ее нахождения, показать геометрический и физический смыслы, то можем отметить, что он сумеет и далее определять ее в различных приложениях, например, в физике, химии или биологии.

Но будучи старшеклассниками, не владея знаниями об истории возникновения и развития производной в дифференциальном исчислении, теории вещественных чисел, теории предела и непрерывности, учащимся трудно освоить новый раздел математики. Откуда назревает вопрос: «Можно ли включить исторические сведения о производной в изучение курса алгебры и математического анализа?»

Актуальность темы дипломной работы «Использование исторических сведений при изучении производной в курсах математики» определяется противоречием между известными фактами возникновения и развития этого мощного инструмента дифференциальных исчислений и отсутствием их действенного применения при изучении курса алгебры и математического анализа в общеобразовательных школах. Разработкой и развитием этой темы занимались и такие выдающиеся ученые прошлых времен, как Тарталья, Галилей, Ньютон, Лейбниц – прародители дифференциального исчисления.

В школьном курсе математики тема «Производная» выступает в качестве одного из основных разделов математического анализа, в котором изучаются основные понятия, формулы, правила, что касается исторических сведений о возникновении и развитии этой темы, то в учебном пособии для общеобразовательных школ они отсутствуют.

Цель работы: изучить научно-методическую литературу по теме и сформировать материал в примерное содержание раздела учебника для процесса обучения учащихся.

Объектом исследования является производная в школьном курсе математики общеобразовательной школы.

Предмет исследования - исторические сведения по теме производная в курсе математики.

Цель исследования и объект обусловили выбор следующих задач:

- провести анализ учебной и учебно-методической литературы по теме «Производная»;
- познакомиться с теоретическим материалом, связанным с историей развития и возникновения производной в математике;
- разработать примерное содержание учебников по теме «Производная» с использованием исторических сведений;
- в процессе исследования получить систему заданий по теме производная;
- накопить информацию по теме.

Методы исследования: синтез, обобщение и систематизация математической литературы по теме; анализ школьных учебников.

В ходе выполнения дипломной работы была определена её структура: введение, теоретическая и практическая часть, заключение, список использованной литературы, приложение.

Во введении сформулирована актуальность, поставлены цели и задачи выпускной квалификационной работы, а также определены методы решения этих задач.

В первой главе рассмотрены теоретические аспекты изучения производной, основные понятия по теме производная, приведены таблица производных и правила дифференцирования, а также их доказательства. Рассмотрена история развития производной в дифференциальном исчислении и роль ученых Ньютона, Лейбница в ее возникновении.

Вторая глава посвящена практическому исследованию актуальности темы, разработана схема решения проблемы по теме. В этой главе также представлено разработанное нами примерное содержание главы по теме «Производна» с использованием исторических сведений.

В заключении подводятся итоги проделанной работы.

Глава 1 Теоретические основы изучения темы «Производная» в курсах математики общеобразовательной школы

При изучении такого курса алгебры, как «алгебра и начала анализа» в 10-11 классах, обучающиеся сталкиваются с некоторыми трудностями. Это касается и основной темы курса – темы «Производная». Однако понимание этого учебного материала выступает фундаментом изучения более сложных разделов высшей математики – математического анализа, дифференциальных и интегральных исчислений и других. Поэтому успешное освоение дальнейшего курса математики в школе невозможно без четкого смыслового понимания этого математического термина.

1.1 Понятие производной. Ее геометрический и физический смыслы. Правила дифференцирования и таблица производных

Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела, в школьной программе обычного класса которое не изучается, хотя вполне допустимо знакомство с ним в классах профильного уровня обучения, а также на факультативах и дополнительных внеклассных занятиях. Но определение предела нам сейчас неважно, главное – усвоить основную идею, лежащую в основе понятия предела.

Рассмотрим следующую последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Отметим члены этой последовательности на числовой прямой (рис 1.1.1) [31, с. 2].

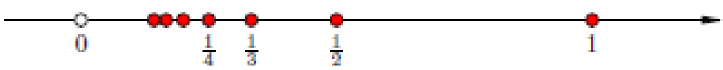


Рис. 1.1.1 Последовательность чисел $\frac{1}{n}\ (n \in N)$

Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают). Если начать с $n = 10$, все члены последовательности окажутся на расстоянии не более $\frac{1}{10}$ от нуля; начиная с $n = 100$, все они будут на расстоянии не более $\frac{1}{100}$ от нуля и т.д.

Говорят, что последовательность $\frac{1}{n}$ стремится к нулю, или сходится к нулю, или что предел этой последовательности равен нулю. Записать это можно так:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0, этот факт как раз и отражает понятие предела.

Точно так же последовательность

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \ (n \in N)$$

Будет «втекать» в точку 3. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3.$$

Подчеркнем, что «втекание последовательности в точку *a*» означает, что вблизи числа a находятся все члены данной последовательности, начиная с некоторого номера. Более точно, смысл выражения «предел последовательности a_n равен *a*» таков: какое бы расстояние ε мы наперед ни задали, все числа a_n, начиная с некоторого номера, будут находиться от числа a на расстоянии меньше ε [31, с. 3].

Кроме как о пределе последовательности можно говорить также и о пределе функции. Напомним, что функция $y = f(x)$ - это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого значения *x* получить единственное соответствующее ему значение *y*. В этом случае число *x* называется аргументом функции, а число *y* – значение функции.

Нас будет интересовать понятие предела функции в точке. При этом формализуется та же самая идея «вытекания». Только в этот раз график функции $y = f(x)$ будет «втекать» в некоторую точку координатной плоскости, при стремящемся к некоторому значению, аргументе *x*.

Так на рисунке (рис.1.1.2) мы видим параболу – график функции $y = x^2$. Возьмем значение x равное 2 ($x = 2$) найдем и отметим на графике соответствующую точку $A(2, 4)$.

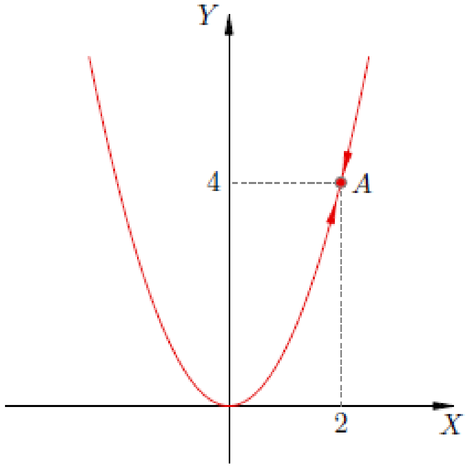


Рис.1.1.2 График функции $y = x^2$

Представим себе, что x приближается к 2 (неважно с какой стороны, справа или слева). При этом график «втекает» в точку A, что отмечено стрелками на графике (рис. 1.1.2.). Другими словами, значение функции стремится к 4, и данное утверждение записывается следующим образом [24, с. 33]:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Если предельное значение a аргумента x можно подставить в функцию $f(x)$ и при этом будет выполняться равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке a. В противном случае функция в этой точке будет называться разрывной.

Так, функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$ (как и в любой другой точке). Графиком этой функции является непрерывная линия, вычерчиваемая без отрыва ручки от бумаги [9].

На этом знакомство с пределом мы закончим и перейдем к определению производной и ее физическому, геометрическому смыслам.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x некоторая точка этой окрестности. Если существует предел отношения

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

при $x \to x_0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Обозначив $x - x_0 = \Delta x, \Delta f = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, получим

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Числитель дроби называют приращением функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx.

Определение. Если существует конечный предел при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$.

Замечание. Условие непрерывности $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ в принятых обозначениях можно записать в виде $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$. Это равенство называется разностной формой условия непрерывности функции в точке x_0.

Можно получить определение левой производной, если допускать лишь отрицательные Δx, и правой производной, допуская лишь положительные значения Δx [17, с. 107].

Производная функции имеет несколько обозначений:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}.$$

.

Иногда в обозначении производной используется индекс y'_x, f'_x, указывающий по какой переменной взята производная [30].

Физический смысл производной. Пусть x – время, а $y = f(x)$ - координата точки, движущейся по оси O_y в момент времени x.

Разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется средней скоростью точки на промежутке времени от момента x до момента $x + \Delta x$, а величина

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = v(x)$$

называется мгновенной скоростью точки в момент времени x. В том случае, если функция $y = f(x)$ произвольная, то производная $f'(x)$ будет характеризовать скорость изменения переменной y (функции) по отношению к изменению аргумента x [13, с. 12].

Геометрический смысл производной. Предположим, что задана прямоугольная система координат и дана прямая l. Обозначим буквой α величину угла, на который нужно повернуть ось O_x, чтобы совместить ее положительное направление с одним из направлений на прямой l, причем $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис.1.1.3).

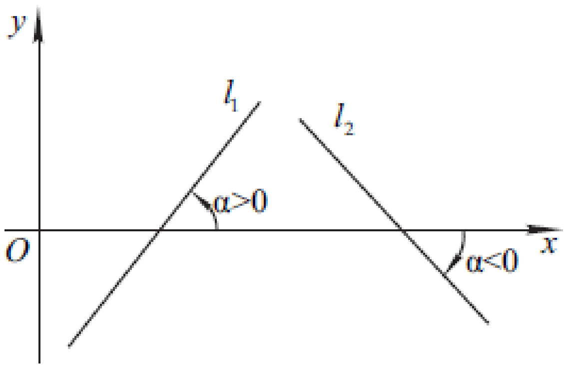


Рис.1.1.3 Поворот оси O_x

Число $k = tg\alpha$ называется угловым коэффициентом прямой l в данной системе координат. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, т.е. множество точек $(x, f(x)), x \in X$, где X – область определения этой функции. Отметим на графике точки $M\left(x, f(x)\right)$ и $N\left(x+\Delta x, f(x+\Delta x)\right)$. Прямую MN будем называть секущей по отношению к графику функции. Величину угла между секущей MN и осью O_x обозначим $\varphi(\Delta x)$ (рис.1.1.4). Устремим теперь Δx к нулю.

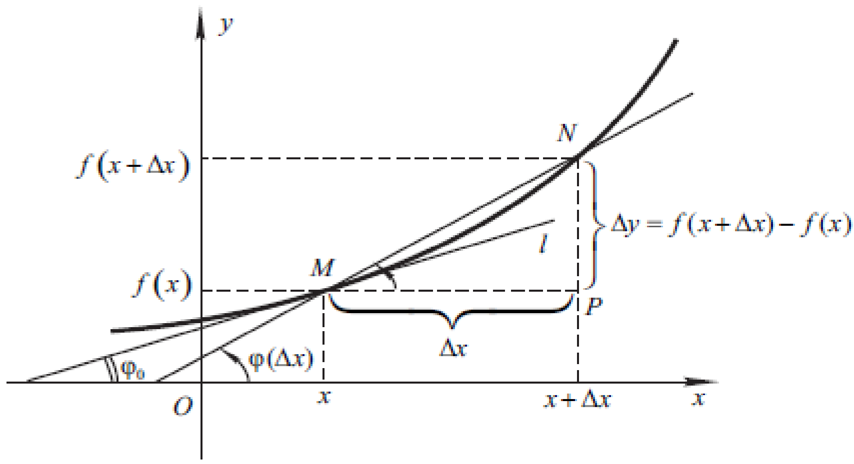


Рис.1.1.4 Секущая к графику функции

Определение. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0,$$

то, прямая l с угловым коэффициентом $k = tg\varphi_0$, проходящая через точку $M\left(x, f(x)\right)$, называется касательной прямой к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

Кроме того, говорят, что прямая l – это предельное положение секущей MN при $\Delta x \to 0$. Согласно этому можно сказать, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\left(x, f(x)\right)$ есть предельное положение секущей MN при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, то график функции имеет в точке $M\left(x, f(x)\right)$ касательную, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$.

Доказательство. Из треугольника MNP (рис.1.1.4) получаем:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \varphi(\Delta x) = arctg\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ и воспользуемся тем, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

и $arctgt$ - непрерывная функция. Получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}arctg\frac{\Delta y}{\Delta x}=arctgf'(x).$$

Отсюда по определению касательной следует, что существует касательная к графику функции в точке $M(x,f(x))$. При этом

$$\varphi_0=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=arctgf'(x),$$

и, следовательно, $k=tg\varphi_0=f'(x)$. Теорема доказана [14, с. 159].

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,f(x_0))$ имеет вид:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Вычисление производных от элементарных функций сводится к вычислению пределов. Произведем вычисления некоторых из них [7, с. 225]:

1. $f(x)=x^n, f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

Частный случай $n=0$: $f(x)=1, f'(x)=0$.

Частный случай $n=1$: $f(x)=x, f'(x)=1$.

Вычисление. Выпишем:

$$A(x_0,\Delta x)=\frac{(x_0+\Delta x)^n-x_0^n}{\Delta x}=x_0^n\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^n-1}{\Delta x}=x_0^{n-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^n-1}{\frac{\Delta x}{x_0}}.$$

Перейдем к пределу при $\frac{\Delta x}{x_0}\to 0$ и получим:

$$\lim_{\Delta x\to 0}A(x_0,\Delta x)=n\cdot x_0^{n-1}.$$

2. $f(x)=e^x, f'(x)=e^x$.

Вычисление. Запишем:

$$A(x_0,\Delta x)=\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}A(x_0,\Delta x)=e^{x_0}.$$

3. $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x.$

Вычислим:

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x}.$$

Используя известное тригонометрическое тождество (разность синусов), имеем:

$$A(x_0, \Delta x) = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = \cos(x_0).$$

4. $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x.$

Вычислить: $A(x_0, \Delta x) = \dfrac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x}.$

Используя известное тригонометрическое тождество (разность косинусов), имеем:

$$A(x_0, \Delta x) = -2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = -\sin(x_0).$$

5. $f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x}.$

Вычислим:

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\frac{\Delta x}{x_0}}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = \frac{1}{x_0}.$$

Напомним, что операцию по нахождению производной функции называют дифференцированием.

Рассмотрим основные правила дифференцирования.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то и функции $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в точке x, причем:

1. $\left(u(x) + v(x)\right)' = u'(x) + v'(x)$.
2. $\left(u(x) - v(x)\right)' = u'(x) - v'(x)$.
3. $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$.
5. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$, где $c = const$, а $f(x)$ – функция.

Докажем эти правила дифференцирования, начнем с самого первого, с правила нахождения производной суммы двух функций.

Правило 1. Производная суммы двух дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций.

Доказательство:

Есть функции $u(x)$ и $v(x)$, такие что

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ и } v'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Нужно доказать $\left(u(x) + v(x)\right)' = u'(x) + v'(x)$.

Пусть $u(x) + v(x) = f(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - \left(u(x) + v(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(u(x + \Delta x) - u(x)\right) - \left(v(x + \Delta x) + v(x)\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Значит, $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$, что и требовалось доказать [30, с. 97].

Замечание 1. Аналогично можно доказать правило 2, что

$$(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x).$$

Правило 3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений каждой функции на производную другой.

Доказательство. Обозначим $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Тогда:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = u(x + \Delta x) \cdot$$

$$\cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) =$$

$$= (u(x + \Delta x) - u(x)) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x)) =$$

$$= \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + \Delta v \cdot u(x).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x).$$

Перейдем теперь в этом выражении к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Отсюда заключаем, $f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = v(x) \cdot u'(x) + u(x) \cdot v'(x)$, что и требовалось доказать [2, с. 103].

Правило 4. Производную частного двух дифференцируемых функций можно найти по формуле:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2},$$

где $v(x) \neq 0$.

Доказательство.

По определению производной

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) \cdot v(x) - v(x+\Delta x) \cdot u(x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x) + \Delta u(x)\big) \cdot v(x) - \big(v(x) + \Delta v(x)\big) \cdot u(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u(x) - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot \Delta u(x) - u(x) \cdot \Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)} \cdot \left(v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Что и требовалось доказать [14, с. 167].

Следствие:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Правило 5. $\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$, где $c = const$.

Доказательство. По определению производной имеем [14, с. 98]:

$$\big(c \cdot f(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot f(x+\Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot \big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot \Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Произвольный множитель можно выносить за знак предельного перехода (это известно из свойств предела), поэтому

$$\big(c \cdot f(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot \Delta f(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x).$$

Получим итоговую таблицу производных, включающую производные важнейших функций [25, с. 12]:

Таблица 1

Производные основных функций

1. $c' = 0, c = const$	9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	10. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	11. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$	12. $\left(\mathrm{arccosx}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	13. $\left(\mathrm{arcsinx}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	14. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	14. $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$
8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	

Удобно иметь такую таблицу производных от элементарных функций при решении задач.

1.2 История развития и возникновения понятия производной и использование этих сведений в ходе учебных занятий

Термин «Производная» является буквальным переводом на русский язык французского слова «derivee», которое ввел в математику Ж. Лагранж в 1797 году, который также является автором современного обозначения производной y', f'. Русский термин «производная функции» впервые употребил В. И. Висковатов.

Производная – одно из базовых понятий математики. Оно возникло в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики, кинематики и математики, но прежде всего для построения касательной к кривой, которая описывает зависимость пройденного расстояния от времени, а также для определения скорости прямолинейного движения.

В математике она отражает числовое представление степени изменений величины, которая находится в одной и той же точке, под влиянием различных условий. Формула производной знакома нам ещё с 15 века. Выдающийся итальянский математик Тартальи применяет её в своих трудах, рассматривая и развивая вопрос о зависимости дальности полёта снаряда от наклона орудия.

В первом своем сочинении «Новая наука» 1537 года он впервые показал, что траектория полёта снаряда на всём протяжении есть кривая линия (парабола), между тем как до него учили, что траектория снаряда состоит из двух прямых, соединённых кривой линией; тут же он говорит о том, что наибольшая дальность полёта снаряда соответствует углу в 45°. Работа «Общий трактат о числе и мере» содержит обширный материал по вопросам арифметики, алгебры и геометрии. Имя Тартальи также связано с разработкой способа решения кубических уравнений [10].

Формула производной часто встречается нам в работах известных гениев в области математики 17 века. Ею пользуются Ньютон и Лейбниц. Активно развивалась кинематическая концепция производной, основанная на учении Г.Галилея о движении, которая связана с введением им понятия ускорения и дальнейшего обобщения его для случая криволинейного движения голландским учёным Христианом Гюйгенсом (1629 – 1695). Он первый применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие. Галилей посвящает целый трактат роли производной в математике.

Вслед за этим производная и различные изложения с её применением стали встречаться в работах многих известных математиков таких, как Декарт, французский математик Роберваль и англичанин Грегори. Значительный вклад по изучению производной внесли такие гении, как Лопиталь, Бернулли, Эйлер, Гаусс.

Именно в это время как никогда остро встали вопросы об определении и вычислении скорости движения и его ускорении. Решение этих вопросов привело к установлению связи между задачей о вычислении скорости движущегося тела и задачей о проведении касательной к кривой, описывающей зависимость пройденного расстояния от времени.

Действительно, когда материальная точка (рис.1.2.1) движется по кривой линии, вектор скорости v в каждый момент времени направлен по касательной MT к кривой.

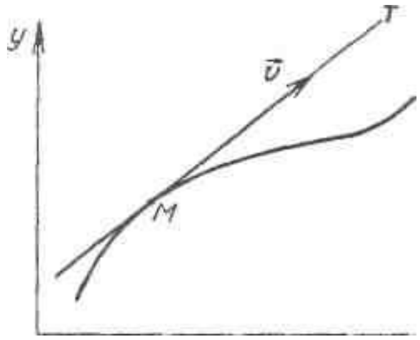


Рис.1.2.1 Движение материальной точки

Используя эту связь, Э.Торричелли вычислил вектор скорости тела, брошенного под углом к горизонту, и получил изящный способ построения касательной к параболе.

Задача о нахождении касательной к кривой выходит в это время в математике на первый план.

Первые общие методы построения касательных к широкому классу кривых были даны Р.Декартом и П.Ферма. Однако их методы, как и методы древних геометров, умевших строить касательные к окружностям, эллипсам, параболам, гиперболам и еще некоторым кривым, требовали специальных подходов в каждом конкретном случае. Все эти разнообразные способы не укладывались в единую схему вычисления. Чтобы найти единый подход к решению задачи об определении касательной, нужно было вскрыть то общее, что лежало за калейдоскопом решенных задач. Это и было сделано в конце XVII в. почти одновременно и независимо друг от друга английским физиком и математиком И.Ньютоном и немецким философом и математиком Г. Лейбницем [7, с. 220].

В качестве введения в дифференциальное исчисление рассматриваются задачи, связанные с формированием основного понятия дифференциального исчисления. Многие задачи, разные по своему содержанию, приводят к необходимости рассмотрения предела отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это, в частности, задачи о касательной к линии, о скорости неравномерного прямолинейного движения, и др.

Примеры, приводящие к понятию производной.

К понятию производной приводит задача о касательной к данной кривой, которая раскрывает геометрический смысл производной, рассматриваемый нами в первом параграфе.

Перейдем к рассмотрению других задач.

Задача о скорости движения материальной точки. Предположим, что материальная точка M движется неравномерно по какой-нибудь прямой согласно закону $S = S(t)$, где t - время, S - координата точки (расстояние до точки O, т.е. до начала координат). Это уравнение - уравнение движения, выражающее закон движения точки.

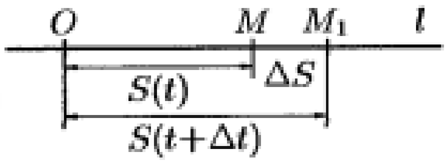


Рис.1.2.2 Движение материальной точки M

Зная закон движения точки, найти скорость движущейся точки в любой момент времени. Предположим, что в некоторый момент времени t, точка занимает положение M: $OM = x = S(t)$ через время Δt, т.е. в момент $t + \Delta t$, точка M_1, где $OM_1 = S + \Delta S = S(t + \Delta t)$.

За время равное Δt, точка пройдет путь

$$\Delta S = S\ \ t + \Delta t\ \ - S\ \ t\ \ .$$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скоростью точки за время Δt. Чем меньше Δt, тем точнее она выражает скорость движения точки в данный момент времени t. Предел средней скорости движении при $\Delta t \to 0$ называется скоростью движения точки в данный момент времени или мгновенной скоростью.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S\ t + \Delta t\ \ - S\ t}{\Delta t},$$

т. е. можно сказать, что $v = S'(t)$ [19, с. 4].

Таким образом, скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени. В этом и состоит механический смысл производной.

Задача о скорости химической реакции. Возьмем функцию $m = m(t)$, где m - количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ - средняя скорость химической реакции за отрезок времени Δt. Предел этого отношения при условии, что $\Delta t \to 0$, т.е. $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$, есть скорость химической реакции в данный момент времени t.

Аналогично рассматривается задача о скорости популяционного роста. Пусть $p = p(t)$ - размер популяции бактерий в момент времени t. Тогда, рассуждая, как и выше, получаем, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$ есть скорость роста популяции бактерий в данный момент времени t.

Задача о силе электрического тока. Пусть $q = q(t)$ - количество электричества, измеряемое в кулонах, протекающее через поперечное сечение проводника за время t; количество электричества есть функция времени, так как каждому значению времени t соответствует определенное значение количества электричества. Чтобы определить скорость изменения количества электричества с течением времени используют понятие сила тока. Обозначим через Δq количество электричества, которое протекает через указанное сечение за промежуток времени Δt, от момента t до момента $t + \Delta t$. Отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется средней силой тока за время от t до $t + \Delta t$ и обозначается через I_{cp}. В случае постоянного тока I_{cp} будет постоянной. Если в цепи переменный ток, то I_{cp} для различных промежутков времени будет различна. Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие силы тока I в данный момент t, определив ее как предел средней силы тока за промежуток времени от t до $t+\Delta t$, когда $I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$ [23, с.108].

Центральные определения дифференциального исчисления длительный период времени не были обоснованы надлежащим образом. Тем не менее, в начале XIX в. О. Коши, великий французский математик, дал строгое представление дифференциального исчисления на основе понятия предела [5].

В учебниках под редакцией Ш.А.Алимова, А.Н.Колмогорова, А.Г.Мордковича для общеобразовательных школ понятие производной вводится с понятием предела, без его строгого определения, либо вовсе без понятия предела. Учебники для общеобразовательных школ не рассчитаны на изучение производных обратных тригонометрических функций, а также многих приложений.

Учебники под редакцией А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, Н.Я. Виленкина для классов, в которых математика изучается углубленно, понятие производной определяют через понятие предела с предварительным и подробным его рассмотрением. Различные приложения производной подробно изучаются.

Познакомившись с содержащимся материалом, по теме производная в учебниках алгебры и математического анализа под редакциями А.Г. Мордковича, С.М. Никольского, Н.Я. Виленкина, А.Ш. Алимова, А.Н. Колмогорова, можно заметить, что основные принципы изучения темы «Производная» очень схожи. Они представляют собой стандартный набор сведений о производной, – ее понятие, геометрический смысл, таблица производных, правила дифференцирования, но имеют и несущественные различия в приложении по теме. К сожалению, немаловажная и интересная информация об истории возникновения и развития производной вовсе отсутствует. Устранить такое недоразумение в силах любого учителя математики, не предпринимая попыток повлиять на переиздание учебников с добавлением в них исторической справки о производной.

На уроке, факультативе или внеклассном занятии, посвященных истории развития понятия производной можно привести следующий материал. Практические задачи на нахождение кратчайшего пути, - это одни из важных предпосылок появления дифференциального исчисления. Первые задачи на нахождение максимума и минимума (экстремумов) функции были поставлены в V веке до н.э. Решением этих задач занимались Евклид, Архимед, Кеплер, Герон, Ферма. Однако общих способов не было разработано, каждая задача имела индивидуальное решение. В XVII веке Ньютоном и Лейбницем были разработаны общие методы решения задач на экстремум (максимум и минимум).

Развернутый материал об этих открытиях могут подготовить сами учащиеся и выступить с ним перед классом.

1.3 Роль Ньютона и Лейбница в создании дифференциального исчисления

Дифференциальное исчисление – это раздел математики, изучающий производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций. Оно основывается на таких фундаментальных понятиях, как действительное число, функция, предел, непрерывность. Эти понятия приняли современный вид в ходе развития дифференциального и интегрального исчислений. Основные идеи и понятия дифференциального исчисления связаны с изучением функций в малом, т. е. в малых окрестностях отдельных точек, для чего требуется создание математического аппарата для исследования функций, поведение которых в достаточно малой окрестности каждой точки области их определения близко к поведению линейной функции или многочлена. Этот аппарат основан на понятиях производной и дифференциала [17; 29].

Оформление дифференциальных исчислений в самостоятельную математическую дисциплину произошло во второй половине 17 века и связано с именами И. Ньютона и Г. Лейбница. Они сформулировали основные положения дифференциальных исчислений. С этого времени дифференциальное исчисление составляет основную часть математического анализа.

Говоря о развитии дифференциального исчисления нельзя обойти стороной две персоналии, внесшие, возможно, наиболее важный вклад в процесс становления этого метода: Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница. Математический инструментарий, созданный этими великими учеными, является основой современной математики.

Познакомимся с И. Ньютоном и его работой над темой о дифференциальном исчислении.

Исаак Ньютон (1643−1727) родился в маленьком городке Вулсторп, приблизительно в 200-х километрах к северу от Лондона, в семье небогатого арендатора земли. В соседнем городе он завершил обучение в общественной школе. Будучи школьником, соорудил ряд технических изобретений: построил крохотную ветряную мельницу, причем действующую, спустя время – водяные часы, самокат и др. В возрасте 18 лет поступает в один из колледжей Кембриджского университета – Тринити-колледж. Он попал на низшую ступень студенчества, из-за плохого материального положения Ньютон был освобожден от оплаты обучения. Эта категория студентов должна была прислуживать более состоятельным студентам: подносить блюда в столовой, ухаживать за одеждой и обувью и т. п. Учителем Ньютона в университете был И. Барроу, который совсем скоро приметил одаренного студента. Барроу читал в университете лекции по элементарной математике, хотя осведомлен в математике гораздо больше, поэтому Ньютон был в этой области самоучкой.

Ньютон собирался жениться. Однако в этот период времени уже была определена его карьера в университете, а профессора колледжа по обычаю средневековья должны были оставаться неженатыми. Ньютон без всяких сомнений отрекся от женитьбы.

Механика, физика, математика и астрономия - его главные научные занятия. Сам же Ньютон считал своей ведущей областью науки физику, а математикой занимался в большей степени, чтобы использовать в физике [10, с. 144].

В 1664−1666 гг. в Англии буйствовала эпидемия чумы. Учебные занятия в образовательных учреждениях были прерваны, и Ньютон уехал в родные места, где посвятил себя научному труду. Это был наиболее результативный период в его жизни, в течение которого он произвел свои главные открытия в математике и физике. В дальнейшем он остается при университете и вскоре становится профессором, заменив Барроу. Ньютон два раза избирался в парламент. Хорошие организаторские способности проявил, будучи директором Монетного двора. С 1703 г. Ньютон становится президентом Британского королевского общества.

Главнейшие его научные труды: «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», «Метод флюксий и бесконечных рядов», «Математические начала натуральной философии», «Рассуждение о квадратуре кривых», «Оптика», «Перечисление кривых третьего порядка» и др.

Тем не менее, работы Ньютона по математике и физике были изданы ещё при жизни. Говоря о работах по анализу бесконечно малых, то точного периода их издания неизвестно, они были изданы либо в последние годы его жизни, либо после смерти. Суть в том, что Ньютон не был доволен степенью строгости своих доказательств и хотел найти более строгие, более веские доказательства определенных теорем, но этого у него не получалось.

Из трудов по математике и физике максимальной популярностью пользуется работа «Математические начала натуральной философии», которое было издано в 1687 г. В ней изложены математические основы механики. Сперва им даются определения количества материи, количества движения, различного рода сил и т. п., а затем формулируются три аксиомы, или закона, движения: закон инерции; закон, выражаемый формулой $F = ma$, F- масса тела, a - ускорение движения; закон равенства действия и противодействия. Отсюда вытекают шесть следствий: о параллелограмме сложения сил, о движении центра тяжести системы материальных точек и др., а далее поочередно разворачивается значительная система предложений общей и небесной механики. Следовательно, Ньютоном впервые строится механика на основе аксиоматики. «Математические начала» явились начальной точкой всего последующего развития точного математического естествознания [5, с. 81].

Исчисляя бесконечно малые, Ньютон узнал, что той же областью математики занимался и Лейбниц. По анализу первым свои результаты получил И. Ньютон, но опубликовал свои заметки, которые были посвящены этой теме, первым Лейбниц. Анализ бесконечно малых у Ньютона и Лейбница представлен абсолютно по-разному, и справедливо считать его основоположниками обоих ученых.

Дифференциальное исчисление у Ньютона называется исчислением флюксий. Переменную величину он называет флюэнтой (от лат. $fluere$ – течь), а скорость изменения флюэнты флюксией ($fluxio$ – течение). Что такое скорость, он не определяет, вероятно, считая это понятие не нуждающимся в определении. Вообще анализ бесконечно малых Ньютон строит с помощью механики.

Общим аргументом флюэнт у него является время, но не обязательно физическое время, а любая величина, которая равномерно изменяется со временем. С современной точки зрения флюксии являются производными флюэнт по времени.

Позднее Ньютон стал обозначать флюэнты через x, y, z,… а их флюксии через $x', y', z', \dots$ Последние символы и сейчас используются в механике для обозначения производных по времени.

Основная проблема исчисления флюксий у Ньютона формулировалась так: по данному соотношению между флюэнтами найти соотношение между их флюксиями (т. е. по данному соотношению между функциями найти соотношение между их производными). Он решает ее на примере, но решение носит общий характер: оно применимо к любому алгебраическому уравнению, связывающему флюэнты.

Пример 1. Пусть уравнение с флюэнтами имеет вид:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

Для вывода соответствующего уравнения между флюксиями заменим в этом равенстве x на $x + x'O$, y на $y + y'O$, где O - Δt бесконечно малое приращение времени (т.е. x на $x + x'\Delta t = x + dx$, y на $y + y'\Delta t = y + dy$).

Будем иметь:

$$(x + x'O)^3 - a\ \ x + x'O\ \ ^2 + a\ \ x + x'O\ \ \cdot\ \ y + y'O\ \ -\ \ y + y'O\ \ ^3 = 0,$$

$$x^3 + 3x^2x'O + 3xx'^2O^2 + x'^3O^3 - ax^2 - 2axx'O - ax'^2O^2 + axy + ax'Oy +$$

$$+axy'O + ax'y'^{O^2} - y^3 - 3y^2y'O - 3yy'^2 - y'^3O^3 = 0.$$

В последнем равенстве сумма членов, не содержащих O, равна нулю на основании первоначального уравнения. Сократим оставшиеся члены на O (предполагая, что O не равно нулю). Получим:

$$3x^2x' + 3xx'^2O + x'^3O^2 - 2axx' - ax'^2O + ax'y + axy' + ax'y'O -$$

$$-3y^2y' - 3yy'^2O - y'^3O^2 = 0.$$

Теперь отбросим члены, все еще содержащие O или O^2 (принцип пренебрежения бесконечно малыми высших порядков):

$$3x^2x' - 2axx' + ax'y + axy' - 3y^2y' = 0.$$

Ньютон формулирует следующее правило: для того чтобы из уравнения с флюэнтами получить уравнение с флюксиями, нужно в каждом из членов каждую из флюэнт заменить ее флюксией и полученные произведения сложить. Например, флюксия степени $x^3 = x \cdot x \cdot x$ равна $x'xx + xx'x + xxx' = 3x^2x'$, а флюксия произведения $axy - ax'y + axy'$ [10, с. 147].

Фактически здесь запрятаны правила дифференцирования суммы, разности, произведения, степенной функции с натуральным показателем и свойство вынесения постоянного множителя за знак производной.

Позднее Ньютон пытается найти для этого правила другое, обоснование, более убедительное. Если же уравнение с флюэнтами содержит дроби или радикалы, то Ньютон использует обходной путь.

Подготовив аналитический аппарат, Ньютона приступает к геометрическим приложениям исчисления флюксий.

1. Определить наибольшие и наименьшие значения величин.

Сначала формулируется принцип остановки: «…когда величина наибольшая или наименьшая, то она в этот момент не течет ни вперед, ни назад», т. е. не возрастает и не убывает. Отсюда правило: найти флюксию и приравнять ее нулю. Это лишь необходимый признак экстремума функции, достаточного признака у Ньютона нет.

2. Провести касательные к кривым.

Эту задачу Ньютон решает подобно Барроу, а также Ферма. Он получает формулу $k_{\text{кас}} = \dfrac{y'}{x'}$, а отношение $\dfrac{y'}{x'}$ находит уже знакомым способом из уравнения кривой.

3. Определить величину кривизны кривой.

А эта задача была новой для математики того времени. На ее решении мы останавливаться не будем, и закончим с дифференциальными исчислениями Ньютона.

Перейдем к знакомству с Лейбницом и его дифференциальными исчислениями.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) родился в семье профессора, преподающего в Лейпцигском университете уроки морали. Завершил обучение на юридическом факультете этого университета. В 1666г. защитил докторскую диссертацию в области юридических наук и был приглашен работать в качестве профессора университета, однако это предложение он отверг. Поступил на службу к курфюрсту в Майнце, а позднее – к герцогу Ганновере.

Лейбниц был увлечен многими вещами: был дипломатом, юристом, историком, философствовал, привнес свою лепту в большинство естественных и общественных наук, например, в механике он ввел понятие кинетической энергии, в биологии и геологии работал над идеями эволюции, в психологии стал изучать сферу подсознания одним из первых.

В политических, дипломатических, философских, религиозных вопросах он считался приверженцем компромисса, иногда между такими противоборствующими силами, течениями, которые практически невозможно было привести к договору. Например, между различными немецкими государствами (тогда Германия была разделена), между буржуазией и феодальной аристократией, между католиками и протестантами церквей, между научным и религиозным, даже между идеализмом и материализмом. Идея компромисса отразилась и на его философских взглядах. В их основе лежал идеализм: по Лейбницу, мир состоит из единых и нематериальных объектов, обладающих в некоторой мере чувствительностью, сознанием и активностью. Однако в учениях о материи, в физике он придерживается позиции механического материализма, вдобавок ко всему в его концепциях познания доминировали рационалистические мотивы [10, с. 153].

Особенно известным, в качестве философа, дипломата, историка Лейбниц становился в Европе. В Берлине им была организована Академия наук. Он давал советы Петру 1 относительно основания в Петербурге академии наук. Также Лейбниц пользовался огромной популярностью в мире ученых.

Что касается математики, то он, преимущественно, занимался самообразованием. Самостоятельно исследовал работы Декарта, Кавальери, Ферма, Паскаля, Валлиса и др., а будучи в командировке в Париже завел научные связи с действующим тогда президентом академии наук Гюйгенсом.

В 1675-1676 гг. трудился над принципами дифференциального и интегрального исчислений; соответствующие труды он издает позднее.

Лейбниц был не женат. В преклонном возрасте он стал испытывать различные недуги, в частности, подагру, уложившую его в кровать. Его, еще не так давно столь известного, никто уже не навещал. Почти незамеченною была его смерть.

В 1684 г. в журнале Лейбниц публикует свой первый печатный труд по дифференциальному исчислению – маленькую статью, которая состоит из 7 страниц и называется «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». В самом заглавии печатной статьи имелся намек на метод наибольших и наименьших значений функции ученого Ферма [5, с. 101].

Дифференциалом абсциссы x точки кривой он называет любой отрезок и обозначает его символом dx образовав его от латинского $differentia$ – Δ разность. Дифференциалом ординаты y точки он называет такой отрезок dy что $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{l}$, где $l-$ подкасательная. Следовательно, здесь основным понятием для Лейбница была не скорость, как у Ньютона, а касательная.

Затем он приводит правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени и корня без доказательств. Эта новая область математики Лейбницем стала называться дифференциальным исчислением.

Но почему же он приводит вышеперечисленные правила дифференцирования без доказательств? Вероятнее всего дело в том, что он торопится зафиксировать за собой преимущество первой публикации по дифференциальному исчислению: он знал, что аналогичными работами занимаются и некоторые другие ученые, в частности Ньютон.

Аргументацию правил Лейбниц дает в других своих трудах. В них дифференциал им определяется иначе: дифференциалом величины

x называется разность двух ближайших друг к другу значений $x{:}\, dx = x_1 -$ $-x_0$.

Хотя это определение противоречиво, так как на основании свойства плотности множества действительных чисел для непрерывной величины ближайших друг к другу ее значений не существует.

Тем не менее, Лейбниц получает верные формулы. Например, $d\ x^2\ =$ $= 2xdx$, поскольку $d\ x^2\ =\ x + dx\ ^2 - x^2 = 2xdx + dx^2 = 2xdx$ (принцип пренебрежения бесконечно малыми высших порядков).

Аналогично,

$$d\ yz\ =\ y + dy\ \cdot\ z + dz\ - yz = ydz + zdy + dydz = ydz + zdy.$$

Отсюда видно отождествление Лейбницем дифференциала функции с ее приращением. Многие ученые XVIII века считали так же. Только в XIX веке эти понятия стали разграничивать, что призвало, в частности, иное определение дифференциала функции [10, 155].

Познакомимся с приложениями дифференциального исчисления.

Посмотрим, как, например, Лейбниц решает вопрос о наибольшем и наименьшем значениях величины.

Наибольшая или наименьшая ордината точки кривой задается условием, что касательная к кривой параллельна оси абсцисс, а для этого необходимо, чтобы $dy = 0$. А вот достаточный признак экстремума: наибольшую ординату Лейбниц отличает от наименьшей по тому, обращена ли кривая к оси абсцисс вогнутостью или выпуклостью, а об этом судит по знаку $d\ dy$ (т. е. по знаку d^2y, если $d\ dy\ < 0$, то ордината будет наибольшей, а если $d\ dy\ > 0$, то наименьшей.

Вспомним, что в сегодняшнем дифференциальном исчислении верна формула $d^2y = y''dx^2$. Из нее следует, что обозначения d^2y и y'' одинакового знака. Следовательно, признак экстремума, который сформулировал Лейбниц, равнозначен известному достаточному признаку экстремума с помощью второй производной. Подобным образом обстоит дело и с достаточным признаком вогнутости или выпуклости кривой. Но эти утверждения Лейбниц не доказал [10].

Созданные Ньютоном и Лейбницем дифференциальные исчисления распахнули дверь в новую эпоху развития математики. Вслед за этим появляется серия математических дисциплин: теории рядов, теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и вариационного исчисления, которые широко применяются на сегодняшний день.

Глава 2 Методические аспекты изучения темы «Производная» в курсах математики 10-11 классов общеобразовательной школы посредством использования исторических сведений

В данной главе нами будет проведен собственный анализ учебников по теме «Производная». Мы рассмотрим наиболее интересные варианты изложения выбранной темы, выясним, используются ли исторические сведения о производной в основных учебниках по алгебре общеобразовательных школ, воплотим собственные идеи преподавания данной темы, разработаем методические рекомендации по теме «Производная» в школьном курсе математики 10-11 классов с использованием истории.

2.1 Анализ различных подходов к изложению темы «Производная» в учебниках для классов общеобразовательных школ

Анализ изложения темы «Производная» в учебниках следует проводить по самым важным для данной темы факторам, а именно:

1. Понятие производной. Определение производной.
2. Геометрический смысл производной.
3. Непрерывность функции и предельный переход.
4. Вычисления производной. Правила дифференцирования.
5. Производные элементарных функций.
6. Исследование функций. Возрастание и убывание функций.
7. Экстремумы функций.
8. Схема исследования функций.

Рассмотрим различные варианты изложения темы «Производная» по основным пособиям, используемых в общеобразовательных школах. Это учебники под редакцией Колмогорова А.Н., автора Алимова Ш.А., а также учебники базового и профильного уровней Мордковича А.Г., Башмакова М.И..

Сначала проанализируем учебник под редакцией Колмогорова А.Н. согласно выведенным нами факторам.

1. Понятие производной. Определение производной.

У Колмогорова глава учебника, посвященная изучению темы «Производная», начинается с параграфа, в котором дается определение приращения функции, что отличает его подход к определению данного понятия от других авторов. Понятие приращения рассматривается на нескольких примерах. Один из примеров демонстрирует нахождение углового коэффициента секущей через приращение. В следующем параграфе автором дается определение касательной к графику функции и вводится определение мгновенной скорости. Причем определение предела не используется, взамен этого Колмогоров работает с понятием «стремится к».

Определение: Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$.

В своей системе ознакомления обучающихся с понятием производной Колмогоровский учебник имеет некоторую особенность: автор старается сначала подвести достаточно большую базу примеров и соответствий, с опорой на более легкие по усвояемости понятия, а затем приступить непосредственно к вычислениям.

2. Геометрический смысл производной.

Вводится понятие касательной. Прямую, проходящую через точку с координатами $(x_0, f(x_0))$, с отрезком которой практически сливается график функции f при значениях x близких к x_0, называют касательной к графику функции f в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$.

Затем ставится задача определения точного положения касательной к графику данной функции f в заданной точке, что является геометрическим смыслом производной. Приходят к выводу: для каждой гладкой кривой можно точно определить положение касательной в данной точке.

3. Непрерывность функции и предельный переход.

Колмогоров определяет непрерывность функции следующим образом: если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют непрерывной. В этом параграфе автор углубляется в математический анализ, он разбирает свойство непрерывности и предельный переход.

4. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

Автор формулирует и доказывает основные правила дифференцирования: производную суммы, произведения, частного, а также вынесение множителя за знак производной.

Определяется понятие сложной функции и выводится формула ее дифференцирования.

$$f\left(g(x)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Без внимания не остаются и тригонометрические функции, формулы дифференцирования которых также выводятся и доказываются Колмогоровым.

5. Производные элементарных функций.

С одной стороны, проблема состоит в том, что если глава «производная» рассматривается перед изучением каких-либо элементарных функций, то нахождение производных от этих функций необходимо будет рассматривать позже, а это может запутать и отвлечь от смысла. С другой стороны, если разместить производные в самом конце учебника, то сложность материала может расти неравномерно, что может отразиться на успехах учащихся в обучении.

Формулы нахождения производных показательной и логарифмической функций у Колмогорова выводятся также позже и применяются в решении задач. Однако, производные тригонометрических функций, которые к этому моменту уже изучены, рассматриваются в главе «производная» в качестве отдельного пункта. Можно отметить, в процессе вывода формулы нахождения производной от синуса, проводится доказательство следующего утверждения:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство усложняется тем, что переменная выступает в качестве угла и длины, необходим переход к длине отрезка от длины дуги. Имея в распоряжении формулу производной синуса, нетрудно найти производные остальных функций.

6. Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

Колмогоров, основываясь на формуле Лагранжа:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

проводит доказательство признаков возрастания и убывания функции.

7. Экстремумы функций.

Основными теоремами в параграфе этого учебника выступают: теорема о необходимом условии экстремума (производная в точке экстремума должна быть равна 0), теорема о признаках максимума и минимума функции. Колмогоров методично приводит доказательства каждой теоремы.

8. Схема исследования функций.

Схема включает в себя следующие пункты:

- Находим область определения функции;
- Выполняем проверку на четность или нечетность;
- Находим точки пересечения с осями;
- Находим промежутки, на которых знак не меняется (знакопостоянство);
- Находим промежутки возрастания и убывания функции;
- Находим точки максимума и минимума, и значения функции в этих точках;
- Исследуем поведение функции в окрестностях «особых» точек и бесконечности [16].

В итоге анализа можно сделать вывод, что данное пособие соответствует стандарту общего образования. Производная изучается на двух уровнях: на наглядно-интуитивном, так как производная рассмотрена как угловой коэффициент касательной и как мгновенная скорость движения, а также на формально-логическом, где определение производной вводится без использования понятия предела.

Рассмотрим учебное пособие автора Алимова Ш.А..

1. Понятие производной. Определение производной.

В учебном пособии автора Алимова изучение производной начинается с рассмотрения задачи о мгновенной скорости, то есть дается определение через механический смысл. Для понимания обучающимися такое соответствие более открыто. Затем Алимов кратко объяснив значение понятия «предел» в той же задаче применительно к мгновенной скорости, сразу же переходит к точному определению производной через пределы.

Определение: Пусть функция $f\ x$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x+h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f\ x+h\ -f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется производной функции $f(x)$ в точке x.

Таким образом,

$$f'\ x\ = \lim_{h \to 0} \frac{f\ x+h\ -f\ x}{h}.$$

Система знакомства обучающегося с понятием производной в учебниках данного автора имеет следующую особенность: небольшая аннотация главы о производных предоставляет обучающимся шанс приступить к вычислению производных быстрее, получив минимум сведений о производной.

2. Геометрический смысл производной.

Геометрический смысл производной изучается сразу после ознакомления обучающихся с производными элементарных функций, а также с применением правил дифференцирования к решению задач на интуитивном уровне. Выводится уравнение касательной к графику функции.

3. Непрерывность функции и предельный переход.

Выводится строгое определение предела функции и дается его пояснение. Определяется понятие непрерывной функции.

4. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

В учебнике Алимова приводятся доказательства лишь двух первых формул, однако каждая формула иллюстрируется 1-2 примерами.

Говоря о сложной функции:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) g'(x).$$

Алимов упростил данный раздел, он заменил формулу нахождения производной сложной функции на линейную замену аргумента, а именно ее частный случай: $\left(f(kx+b)\right)' = kf'(kx+b)$.

5. Производные элементарных функций.

Используя определение производной выводятся формулы:

$$C' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2.$$

Далее производная степенной функции определяется интуитивно перед выводом основных правил дифференцирования: производной суммы, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной. После, в отдельном параграфе Алимов рассматривает формулы производных других элементарных функций, таких как показательная, логарифмическая, тригонометрическая. Однако доказывается формула нахождения производной только для синуса, зато для каждой функции есть решенная задача. Формулируется правило вычисления сложной функции. Такая последовательность расположения материала очень удобна, необходимость возвращения к изученному пропадает.

6. Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

Признаки возрастания и убывания формулируются в начале главы о производной. Приводится теорема Лагранжа для доказательства теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функций.

7. Экстремумы функций.

Алимовым даются понятия критических и стационарных точек, экстремумов функций (точек максимума и минимума). Приводится формулировка теоремы Ферма, которая имеет наглядный геометрический смысл, для доказательства теоремы о необходимом и достаточном условии для нахождения точек максимума и минимума.

8. Схема исследования функций.

Автор предлагает схему исследования свойств функции, а также алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции:

- Находим область определения функции.
- Находим производную функции.
- Определяем точки, подозрительные на экстремум (те точки, в которых производная функции обращается в ноль).
- Выбираем среди точек, подозрительных на экстремум, те, которые не выходят за пределы данного отрезка и области определения.
- Вычисляем значения функции в этих точках.
- Из числа полученных значений выбираем наибольшее или наименьшее[1].

Данное пособие дополняется соответствующим задачником, содержание которого выстраивается по трехуровневой системе: задания делятся на обязательные, дополнительные более сложные, трудные, выделенные серым, светло-розовым и темно-розовым цветами соответственно. Задачник так же содержит раздел «Проверь себя».

Подведем итоги анализа: в учебнике введение понятия производной начинается со знакомства обучающихся со средней и мгновенной скоростями движения. Производная определяется как предел разностного отношения. Понятие предела формулируется после определения производной без подробного изучения. При нахождении производных элементарных функций используют наглядные представления.

Перейдем к анализу учебника под редакцией Башмакова М.И. базового уровня, согласно нашим факторам.

1. Понятие производной. Определение производной.

Как и в учебнике Алимова, в учебнике Башмакова производная определяется через механический смысл, а именно производная – это мгновенная скорость движения. Но Башмаков прежде чем перейти к точному определению производной последовательно и подробно рассматривает механический смысл и геометрический, рассматривая производную на разных случаях.

2. Геометрический смысл производной.

В учебнике Башмакова геометрический смысл производной определяется аналогично определению геометрического смысла, которое дается Колмогоровым, а именно установление связи между абстрактным определением касательной и уже изученными геометрическими объектами, подсознательные фигуры которых уже закреплены в сознании. Также, Башмаков заостряет внимание обучающихся на то, что с увеличением масштаба графика функции, он все больше уподобляется прямой. Автор примечает, что, получить приближенное изображение графика, можно проводя отрезки между его точками. В учебнике наглядно иллюстрируется «вырезание» графика из бумаги – в данной точке касательной выступает положение ножниц, в тот момент, когда до этой точки дойдет разрез.

3. Непрерывность функции и предельный переход.

У Башмакова предельный переход разъясняется без обращения к подробностям, а лишь на примерах.

4. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

Формулы, которые были упомянуты нами, анализируя учебник Колмогорова, в пособии под редакцией Башмакова выводятся очень подробно и понятно, каждый шаг разъясняется.

5. Производные элементарных функций.

Башмаков целый параграф отводит вычислению производной через приращения, в котором им выводятся 5 формул для дифференцирования линейной функции, квадрата, куба, гиперболической функции и корня. С этого параграфа и начинается вычисление производных. Далее, познакомившись с правилами дифференцирования автор выводит формулу для нахождения производной степенной функции. Производным показательной и логарифмической функций отводится отдельная глава, а вычисление производных тригонометрических функций не включены в учебный курс по данной теме.

6. Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

В начале раздела, посвященного исследованию функций, в учебном пособии Башмакова сформулированы две теоремы: признак монотонности функции и теорема о постоянной функции, которая имеет на промежутке производную, тождественно равную 0. Далее формулируются признаки возрастания или убывания функции, которые располагаются в начале глав учебников.

7. Экстремумы функций.

Основными теоремы в этом параграфе представляются: необходимое условие экстремума, которое заключается в том, что производная в точке экстремума равняется 0, признаки максимума и минимума функции, Башмаков старается в доказательствах теорем и рассуждениях обходиться без формул, отдавая предпочтение описанию свойств производной.

Заметим, что Башмаков посвятил отдельный параграф для рассмотрения особых точек, представляющих собой точки, производная в которых не существует, однако функция может быть непрерывной.

8. Схема исследования функций [4].

Рассматривается исследование функций только на монотонность.

Нам осталось проанализировать учебники под редакцией Башмакова М.И. профильного уровня и базового и профильного уровней под редакцией Мордковича А.Г..

Анализ учебника Башмакова М.И. профильного уровня.

Учебник М.И. Башмакова «Алгебра и начала анализа для 10-11 классов» имеет некоторые отличия от действующих в настоящее время учебников, как других авторов, так и от собственного учебника 1993 года издания, в первую очередь по своей структуре. Он содержит 6 глав, каждая из которых начинается со списка вопросов и задач, которые помогут определить уровень готовности обучающихся к изучению нового материала. Далее автором устанавливаются примерные результаты, которых обучающиеся должны достигнуть. Результаты рассматриваются 3 уровней: А – минимальный, Б – основной, В – углублённый. Содержание каждой главы начинается с вступительной беседы, подготавливающей появление новых основных понятий. Каждая глава завершается заключительной беседой, содержащей информацию, необязательную для изучения. Благодаря большому количеству заданий, имеющих разные уровни сложности, данный учебник может быть использован в классах с различным уровнем математической подготовки обучающихся.

1. Понятие производной. Определение производной.

Автором формулируется понятие производной как угловой коэффициент касательной к графику функции. Механический смысл производной иллюстрируется в «приложение».

Учебник Башмакова профильного уровня считается подходящим для изучения материала самостоятельно. Понятия производной автор объясняет очень сжато, но тщательно выстроенная цепочка доказательств помогает быстро и понятно вникнуть в суть темы. Отличительная черта – Башмаков на конкретных примерах «воплощает» в жизнь все абстрактные математические понятия.

Башмаков демонстрирует, как с помощью производной находятся и такие физические характеристики, как сила, импульс, кинетическая энергия.

2. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

Приводится таблица производных и правила дифференцирования. Автором факты лишь сообщаются без их доказательств.

3. Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

Башмаковым определяется, в каком случае функция убывает, а в каком возрастает. Эти свойства доказываются с помощью чертежей, подробно, красочно и понятно.

4. Экстремумы функций.

Экстремумы функций рассматриваются автором на примерах, а также задачах практического применения. Много геометрических задач, на каждую задачу предоставляется готовый чертеж, благодаря этому учащиеся не отвлекаются на построении чертежа, а непосредственно работают с производными.

5. Схема исследования функций.

Приводится алгоритм исследования функции на монотонность:

- Найти область определения функции $y = f(x)$.
- Найти $f'(x)$ в области определения функции.
- Найти критические точки в область определения функции.

а) в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$;

б) в которых $f'(x)$ не существует.

- Изобразить на числовой оси область определения функции и все ее критические точки.
- Определить интервалы знакопостоянства производной в каждом из промежутков, на которые критические точки разбивают область определения функции.
- На основании достаточных условий монотонности сделать заключение о характере монотонности в каждом из указанных в п.5 промежутков [3].

Завершаем изучение пособий для общеобразовательных школ анализом учебников базового и профильного уровней под редакцией Мордковича А.Г..

Анализ учебника базового уровня.

Структура учебника включает:

Определение производной.

Вычисление производной.

Уравнение касательной к графику функции.

Применение производной для исследования функций.

1. Понятие производной. Определение производной.

Содержание раздела начинается с задач, которые приводят к понятию производная. Очень точно и понятно сформулировано определение.

Определение: Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'\ x_0$, часто пользуются и обозначением y'.

2. Геометрический смысл производной.

Изучение данной темы начинается именно со знакомства обучающимися с геометрическим смыслом. Нашему вниманию представлен график с полным его описанием, сформулированным в форме задачи с решением.

3. Вычисления производной. Правила дифференцирования.

Далее автором дается определение дифференцируемой функции. Формулы для нахождения производных конкретных функций, именуемые так же формулами дифференцирования, даются как факты, не углубляясь в подробности, однако правила дифференцирования разделены на отдельные части, каждое из правил подкрепляется разобранным примером. Дифференцирование сложной и обратной функций не дается.

4. Производные элементарных функций.

Приводятся без доказательств, наряду с другими производными. Даются теоремы о производной суммы, произведения и частного.

5. Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

В учебнике описан алгоритм исследования функций.

6. Экстремумы функций.

Мордовичем также формулируется алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

- Найти производную $f'(x)$.
- Найти стационарные $(f'\ \ x\ = 0)$ и критические $(f'\ \ x$ не существует) точки функции $y = f(x)$.
- Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
- На основании теорем, приведенных в учебнике сделать выводы о монотонности и точках экстремума функции [22].

В учебнике Мордковича изложение материала многим очень нравится. Теория излагается на понятном уровне, обучающиеся без особых затруднений могут самостоятельно заниматься изучением материала, разбирать примеры, предложенные в теории.

В задачнике, который выдается в комплекте с учебником, предложены задания разного уровня в довольно большом количестве, на решение всех задач времени отведенного на данную тему может и не хватить.

Анализ учебника профильного уровня под редакцией Мордковича А.Г. произведем по иной схеме, не пользуясь введенными нами ранее факторами.

1. Тема «Производная» в учебнике профильного уровня начинается со знакомства обучающихся с задачей на физический смысл производной, в которой вычисляется мгновенная скорость прямолинейного движения.

Пусть $s(t)$ - закон прямолинейного движения тела, тогда производная определяет мгновенную скорость в момент времени t: $v = s'(t)$.

2. Устанавливается, что следует понимать под касательной к плоской кривой.

Дана кривая L на ней выбрана точка М. Возьмем еще одну точку на кривой, причем достаточно близкую к М – точку Р. Проведем секущую МР. Далее будем приближать точку Р по кривой L к точке М. Секущая МР будет изменять свое положение, она как бы поворачивается вокруг точки М. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некоторое предельное положение секущей; эту прямую – предельное положение секущей – называю касательной к кривой L в точке М.

3. В ходе рассмотрения задачи о касательной к графику функции, а также задачи на скорость выводится новая математическая модель – предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

4. Формулируется определение производной следующим образом:

Определение: Пусть функция $y = f(x)$ определена в конкретной точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окрестности.

Найдем соответствующее приращение функции Δy и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при условии $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'\ \ x\ .$$

1. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой

коэффициент касательной: $k = f'(a)$, в этом заключается геометрический смысл производной.

2. Мордович в своем учебнике выводит алгоритм для нахождения производной, этот алгоритм состоит из пяти шагов:

- Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
- Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
- Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Вычислить $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел и есть производная $f'(x)$.

Далее на использование этого алгоритма рассматриваются два примера.

3. Дается понятие дифференцируемой функции в точке, как название операции нахождения производной.

4. Выясняется как связаны между собой два свойства функции, а именно непрерывность и дифференцируемость функции в точке. Формулируется способ определения по графику дифференцируемость функции.

5. Мордовичем вводятся основные формулы дифференцирования, которые были найдены по определению производной:

$$C' = 0,\ (x)' = 1,\ (kx + m)' = k,\ (x^2)' = 2x,\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0),$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0),\ (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x.$$

Затем даются основные правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной, в результате чего Мордович выводит формулы для нахождения производных от тангенса и котангенса. Дифференцирование степенной функции производится по формуле, выведенной интуитивно.

6. Автор формулирует понятия производных от второго до n-ого порядка. Мордович приходит к выводу о механическом смысле второй производной, заключается, что ускорение есть вторая производная координаты по времени.

7. Формулируется определение композиции, иными словами сложной функции. Выводится формула для нахождения производной сложной функции. Вычисляется производная для функции $y = f(kx + m)$, а также формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций – арксинус и арккосинус.

8. Составляется уравнение касательной к графику функции в точке, по представленному Мордовичем алгоритму:

- Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
- Вычислить $f(a)$.
- Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
- Подставить найденные числа в формулу $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

9. Производная имеет довольно обширное применение: при исследовании функции на монотонность (связь между характером монотонности и знаком ее производной); если необходимо доказать тождества и неравенства; а также с ее помощью строятся графики функций.

10. Мордович в своем учебном пособии для профильных классов формулирует следующие факты: признак возрастания и признак убывания функции, критические точки функции, признаки экстремумов, теорему о постоянстве функции, теорему о нахождении точек максимума и минимума, все они мало чем отличаются от представленных фактов в учебнике базового уровня.

Даются также понятия асимптот: горизонтальной и вертикальной. Приводятся пошаговые алгоритмы для исследования функции на монотонность и точки экстремумов; исследования функции и построение ее графика; нахождения наименьших и наибольших значений обязательно непрерывной функции на некотором промежутке.

11. Анализируются решения нескольких задач оптимизации.

12. Завершив изучение логарифмической и показательной функций, формулируется правило нахождения их производной [21].

В комплекте с учебником идет соответствующий сборник задач, в котором все упражнения разделены на два блока. Первый блок включает в себя задания базового уровня, без отметок, и среднего уровня трудности, отмеченные белым кружком. Во второй блок входят дополнительные задания среднего уровня и задания повышенной трудности, которые отмечены черным кружком. Количество задач представлено в избыточном объеме, что дает возможность реализовать уровневую дифференциацию на уроке.

Все эти учебники практически схожи между собой с точки зрения принципов изучения данной темы, но они все же отличаются в большей степени приложениями производной. Учебник под редакцией Колмогорова отличается огромным количеством материала по теме «Производная» и большой степенью детальности. Учебник Алимова ориентирован больше на практику, содержит даже отдельные пункты, состоящие полностью из примеров решения задач, но у учебника есть и слабая сторона, - доказательства. Башмаков материал в своем учебнике излагает весьма кратко, зато последовательно, а доказательства приводятся элементарные и понятные. В учебнике под редакцией Мордовича содержится много теоретической информации и примеров для работы самостоятельно, что делает его подходящим для дифференцированного обучения.

Изложения темы «Производная» в рассмотренных учебниках А.Г. Мордковича базового и профильного уровней, А.Н. Колмогорова, Ш.А. Алимова, а также в учебниках базового и профильного уровней Башмакова М.И. имеют общие моменты. А именно: изложение темы ведется на наглядно-интуитивном уровне; определение производной дается после поверхностного знакомства с пределом; приводится вывод уравнения касательной; дифференцирование функций: сложных, показательных, логарифмических, тригонометрических; применение производной для нахождения максимального и минимального, наименьшего и наибольшего значений; для исследования функций и построения их графиков.

Проанализировав содержащийся в основных учебниках для общеобразовательных школ материал по теме «Производная», легко заметить, что ни в одном из них не уделяется внимание историческим сведениям по данной теме, которые могли бы сделать изучение данной темы более интересным, познавательным и простым. В следующем параграфе мы постараемся сформулировать методические рекомендации авторам учебников по включению исторических сведений о производной в курс по данной теме, приведем примерное содержание раздела учебника, отведенного под нашу тему, уже с использованием истории.

2.2 Разработка методических рекомендаций для учителей общеобразовательных школ по включению в изучение темы «Производная» исторических сведений

Учебник – учебное издание, содержащее систематическое изложение учебного предмета, его раздела, части, соответствующее учебной программе, и официально утвержденное в качестве данного вида издания (ГОСТ 7.60-2003).

Учебник – это основная учебная книга по конкретному предмету. В нем излагается система базовых знаний, обязательных для усвоения учащимися. Содержание учебника должно соответствовать требованиям федеральных государственных образовательных стандартов, федеральных государственных требований и полностью раскрывать учебную программу по конкретному предмету.

К написанию учебников всегда предъявляются особые требования. Создание разнообразных учебных пособий связано с потребностью по-новому взглянуть на материал по определенной дисциплине.

Учебник должен обеспечивать обучающихся необходимой и достаточной информацией по данному предмету. В основе формирования и отбора содержания лежат принципы научности, систематичности и последовательности.

Научность - факты, изложенные в учебнике, должны быть достоверными и научно доказанными. Содержание учебника должно быть построено таким образом, чтобы у учеников была возможность для сравнения, анализа. В учебнике должны использоваться как индуктивные (от частного знания - к общему), так и дедуктивные (от общего знания – к частному) способы изложения информации.

Систематичность и последовательность - материал учебника должен быть изложен логически. При предъявлении материала должна присутствовать система. Обязательна опора на предыдущий, ранее усвоенный материал. Также обязательным является учет межпредметных связей (например, связь рисунка и живописи, сольфеджио и музыкальной литературы и т.д.).

Содержание учебника должно иметь большой объем полезной информации по предмету, но это объем должен быть оптимально сбалансирован и дозирован, а также доступен для обучающихся соответствующих классов. Допускается создание учебника по отдельной части учебного предмета при условии, что эта часть входит самостоятельной дидактической единицей в примерный учебный план.

В учебнике при представлении каждой темы сначала дается план изучения темы или предварительные разъяснения, выделяются основные понятия темы. Излагается основной материал, создается теоретическая база темы, являющаяся основой для практической части изучения учебного предмета [27].

Основываясь на рекомендациях по составлению учебников, сформулированных в законе «Об образовании в Российской Федерации» представим свою разработку части учебника по теме «Производная» с использованием исторических сведений о ней, которые ранее в уже изданных учебниках под редакцией Мордовича, Алимова, Колмогорова, Никольского, Башмакова и других авторов, не включались в содержание.

Структура раздела учебника по теме «Производная»:

§1. Исторические сведения по теме «Производная»

1. Развитие и возникновение понятия производной

2. Примеры, приводящие к понятию производной

3. И. Ньютон и его дифференциальное исчисление

4. Роль Лейбница в создании дифференциального исчисления

§2. Производная и ее применение

6. Приращение функции

7. Понятие о производной

8. Понятия о непрерывности и предельном переходе

9. Физический и геометрический смысл производной

10. Правила вычисления производных

11. Производные некоторых элементарных функций

12. Производная степенной функции. Производная сложной функции

13. Производные тригонометрических функций

§3. Применение производной к исследованию функций

14. Признак возрастания (убывания) функции

15. Экстремумы функции (критические точки функции, максимумы и минимумы)

16. Применение производной к построению графиков функции

17. Наибольшее и наименьшее значения функции

§4. Система заданий по теме «Производная»

Рассмотрим примерное содержание каждого из подпунктов наших параграфов раздела по теме «Производная».

§1. Исторические сведения по теме «Производная»

1. Развитие и возникновение понятия производной

Термин «Производная» является буквальным переводом на русский язык французского слова «$derivee$», которое ввел в математику Ж. Лагранж в 1797 году, который также является автором современного обозначения производной. Русский термин «производная функции» впервые употребил В. И. Висковатов.

Производная – одно из базовых понятий математики. Оно возникло в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики, кинематики и математики, но прежде всего для построения касательной к кривой, которая описывает зависимость пройденного расстояния от времени, а также для определения скорости прямолинейного движения.

Формула производной знакома нам ещё с 15 века. Выдающийся итальянский математик Тартальи применяет её в своих трудах, рассматривая и развивая вопрос о зависимости дальности полёта снаряда от наклона орудия. Она также часто встречается нам в работах известных гениев в области математики 17 века. Ею пользуются Ньютон и Лейбниц. Активно развивалась кинематическая концепция производной, основанная на учении Г.Галилея о движении, которая связана с введением им понятия ускорения и дальнейшего обобщения его для случая криволинейного движения голландским учёным Христианом Гюйгенсом (1629 – 1695). Он первый применил разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие. Галилей посвящает целый трактат роли производной в математике.

Вслед за этим производная и различные изложения с её применением стали встречаться в работах многих известных математиков таких, как Декарт, французский математик Роберваль и англичанин Грегори. Значительный вклад по изучению производной внесли такие гении, как Лопиталь, Бернулли, Эйлер, Гаусс.

Именно в это время как никогда остро встали вопросы об определении и вычислении скорости движения и его ускорении. Решение этих вопросов привело к установлению связи между задачей о вычислении скорости движущегося тела и задачей о проведении касательной к кривой, описывающей зависимость пройденного расстояния от времени. Первые общие методы построения касательных к широкому классу кривых были даны Р.Декартом и П.Ферма [7, с. 220].

2. Задача о скорости движения, приводящая к понятию производная

По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения и направление, движется материальная точка (тело). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t - время (в секундах), $s(t)$ - положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах). Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

Решение.

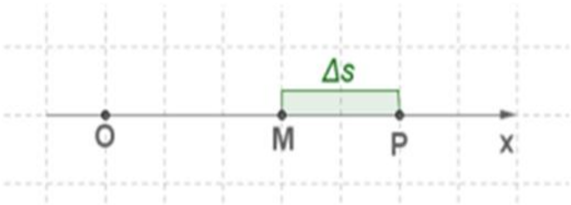


Рис. 2.2.1 Скорость движения точки

Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке M.

Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим ситуацию в момент времени $t + \Delta t$. Координата материальной точки станет другой, тело в этот момент будет находиться в точке P: $OP = s(t + \Delta t)$.

Значит, за Δt секунд тело переместилось из точки M в точку Р. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$. Полученную разность мы назвали в приращением функции: $s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $MP = \Delta s$(м). Нетрудно найти среднюю скорость v_{cp} движения тела за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$: $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (м/с).

А что такое скорость $v(t)$ в момент времени t? Можно сказать так: это средняя скорость движения за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается все меньше и меньше; точнее: при условии, что $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v\ \ t\ = \lim_{\Delta t \to 0} v\text{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ [29, с. 186].

3. И. Ньютон и его дифференциальное исчисление

Имя Исаака Ньютона (1642-1727 гг.) золотыми буквами вписано в историю мировой науки, именно ему принадлежат величайшие открытия в физике, астрономии, механике, математике.

Первые математические открытия Ньютон сделал ещё в студенческие годы: классификация алгебраических кривых 3-го порядка (кривые 2-го порядка исследовал Ферма) и биномиальное разложение произвольной (не обязательно целой) степени, с которого начинается ньютоновская теория бесконечных рядов — нового и мощнейшего инструмента анализа. Разложение в ряд Ньютон считал основным и общим методом анализа функций, и в этом деле достиг вершин мастерства. Он использовал ряды для вычисления таблиц, решения уравнений (в том числе дифференциальных), исследования поведения функций. Ньютон сумел получить разложение для всех стандартных на тот момент функций

Около 1666 года И. Ньютон разработал метод флюксий (производных). Ньютон рассматривал, в частности, две задачи механики: задачу об определении мгновенной скорости движения по известной зависимости пути от времени и задачу об определении пройденного за данное время пути по известной мгновенной скорости. Непрерывные функции времени Ньютон называл флюентами, а скорости их изменения - флюксиями. Таким образом, у Ньютона главными понятиями были производная (флюксия) и неопределённый интеграл (флюента). Он пытался обосновать метод флюксий с помощью теории пределов, которая в то время была развита недостаточно.

Позднее Ньютон стал обозначать флюэнты через $x, y, z, \ldots$,а их флюксии через x', y', z' .... Последние символы и сейчас используются в механике для обозначения производных по времени.

Основная проблема исчисления флюксий у Ньютона формулировалась так: по данному соотношению между флюэнтами найти соотношение между их флюксиями (т. е. по данному соотношению между функциями найти соотношение между их производными). Он решает ее на примере, но решение носит общий характер: оно применимо к любому алгебраическому уравнению, связывающему флюэнты [10].

4. Роль Лейбница в создании дифференциального исчисления

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646— 1710 гг.) - немецкий философ. Родился в Лейпциге. Интересы Лейбница были многогранны: помимо философии, он оставил серьезный след в логике, математике и физике (независимо от Ньютона разработал дифференциальное и интегральное исчисление), занимался юриспруденцией, историей и языкознанием.

В середине 1670-х годов Г. В. Лейбниц разработал удобные алгоритмы дифференциального исчисления. Основными понятиями у Лейбница являлись дифференциал как бесконечно малое приращение функции и определённый интеграл как сумма бесконечно большого числа дифференциалов. Он ввёл обозначения дифференциала и интеграла, термин «дифференциальное исчисление», получил ряд правил дифференцирования, предложил удобную символику. Дальнейшее развитие дифференциального исчисления в 17 веке шло в основном по пути, намеченному Лейбницем.

Дифференциалом абсциссы x точки кривой он называет любой отрезок и обозначает его символом dx, образовав его от латинского слова *differentia*, что означает Δ разность. Дифференциалом ординаты y точки он называет такой отрезок dy что $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{l}$, где l - подкасательная. Следовательно, здесь основным понятием для Лейбница была не скорость, а касательная.

Далее он приводит без доказательства правила нахождения дифференциала суммы, разности, произведения, частного, степени и корня. Лейбниц называет эту новую область математики дифференциальным исчислением.

Лейбниц получает верные формулы. Например, $d\ x^2\ =2xdx$, поскольку $d\ x^2\ =\ x+dx\ ^2-x^2=2xdx+dx^2=2xdx$ (принцип пренебрежения бесконечно малыми высших порядков). Он отождествляет дифференциал функции с ее приращением. Так же считали и большинство ученых XVIII веке. Лишь в XIX веке эти понятия стали различать, что потребовало, в частности, иного определения дифференциала функции [10].

§2. Производная и ее применение

6. Приращение функции

Не всегда в жизни нас интересуют точные значения каких-либо величин. В некоторых случаях интересно узнать изменение этой величины, например, средней скорости автобуса, отношение величины перемещения к промежутку времени и другие. Чтобы удобнее было сравнивать значения функции в некоторой точке со значениями этой же функции в других точках, используют такие понятия, как «приращение функции» и «приращение аргумента».

Допустим, x – некоторая произвольная точка, которая лежит в какой-либо окрестности точки x_0. Приращением аргумента в точке x_0 называется разность $x - x_0$. Обозначается приращение следующим образом: Δx.

$$\Delta x = x - x_0.$$

Иногда эту величину еще называют приращением независимой переменной в точке x_0. Из формулы следует: $x = x_0 + \Delta x$. В таких случаях говорят, что начальное значение независимой переменной x_0, получило приращение Δx.

При изменении нами аргумента, значение функции тоже будет изменяться.

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению Δx называется разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Приращение функции обозначается следующим образом Δf. Таким образом, получаем по определению:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Иногда, Δf еще называют приращением зависимой переменной и для обозначения используют Δy, если функция была, к примеру, $y = f(x)$.

7. Понятие о производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x некоторая точка этой окрестности. Если существует предел отношения

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

при $x \to x_0$, то этот предел называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Обозначив $x - x_0 = \Delta x, \Delta f = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, получим

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пример. Найти производную $f(x) = x^2$.

Составим разностное отношение

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Если $\Delta x \to 0,$ то $2x + \Delta x \to 2x,$ поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$.

8. Понятия о непрерывности и предельном переходе

Изучение теории пределов не входит в программу средней школы. Поэтому некоторые формулы производных строго не доказываются.

Тем не менее, приведем строгое определение предела функции в точке.

Определение. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta,$ где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Можно взять сколь угодно малое положительное число ε и убедиться в том, что для всех x, отличающихся от x_0 меньше чем на некоторое число δ, модуль разности между $f(x)$ и числом A будет меньше взятого числа ε.

Например, если $f(x) = (x-2)^2 + 3,$ то $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

Действительно, $f(x)-3=|x-2|^2$. Пусть задано $\varepsilon>0,$ тогда неравенство $|f(x)-3|<\varepsilon$, т.е. неравенство $|x-2|^2<\varepsilon$, равносильно неравенству $|x-2|<\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x, таких, что $|x-2|<\delta$, где $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x)-3|<\varepsilon$. Например, если $\varepsilon=0{,}01,$ то $\delta=0{,}1$.

Некоторая функция f будет стремиться к числу A при $x\to x_0$ тогда, когда разность $f(x)-A$ будет являться сколь угодно малой. Иными словами, выражение $|f(x)-A|$ становится меньше любого заранее заданного фиксированного числа $h>0$, при уменьшении модуля приращения аргумента $|\Delta x|$ [14].

Предельный переход.

Нахождение этого числа A по функции f называют предельным переходом. В школьном курсе предельный переход будет встречаться в двух основных случаях.

1. Предельный переход в отношении $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при нахождении производной.

2. При определении непрерывности функции.

Непрерывность функции.

Функция называется непрерывной в точке x_0, если $f(x)$ стремится к $f(x_0)$ при стремлении x к x_0. При этом: $f(x)-A=f(x)-f(x_0)=\Delta f$. Это означает, что $|\Delta f|$ будет малым при малых $|\Delta x|$. Если описывать словами, то малым изменениям аргумента соответствуют малые изменения значения функции.

Функции, которые встречаются в школьном курсе математики, например, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция и другие, непрерывны в каждой точке области, на которой они определены. У этих функций графики изображаются непрерывными кривыми линиями.

Правила предельного перехода.

При использовании операции предельного перехода следует руководствоваться следующими правилами:

1. Если функция f непрерывна в точке x_0, то $\Delta f \to 0$ при стремлении $\Delta x \to 0$ к нулю.

2. Если функция f имеет производную в точке x_0, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x)$, при $\Delta x \to 0$.

3. Пусть $f(x) \to A,\ g(x) \to B,$ при $x \to x_0$.

Тогда: $f(x) + g(x) \to A + B$; $f(x)g(x) \to AB$; $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$, при $B \neq 0$ [13].

9. Физический и геометрический смыслы производной.

Физический смысл производной.

Обозначим через x – время, а $y = f(x)$ - координата точки, движущейся по оси O_y, в момент времени x.

Разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется средней скоростью точки на промежутке времени от момента x до момента $x + \Delta x$, а величина

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = v(x)$$

называется мгновенной скоростью точки в момент времени x. В случае произвольной функции $y = f(x)$ производная $f'(x)$ характеризует скорость изменения переменной y (функции) по отношению к изменению аргумента x.

Геометрический смысл производной.

Пусть l – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой l.

Любая прямая, пересекающая l не менее чем в двух точках называется секущей.

Касательной к кривой l в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, если точка M стремится к M_0, двигаясь по кривой. Из определения очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0существует, то она единственная.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$ (т.е. график функции $y = f(x)$). Пусть в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ он имеет невертикальную касательную M_0N. Ее уравнение:

$$y - f(x_0) = y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

(уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ и имеющую угловой коэффициент k).

По определению углового коэффициента $k = tg\beta$, где β – угол наклона прямой M_0N к оси Ox.

Пусть α – угол наклона секущей M_0M к оси Ox, где $M(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Так как M_0N– касательная, то при $\Delta x \to 0$

$$M_0M \to M_0N \Rightarrow \alpha \to \beta \Rightarrow tg\alpha \to tg\beta$$

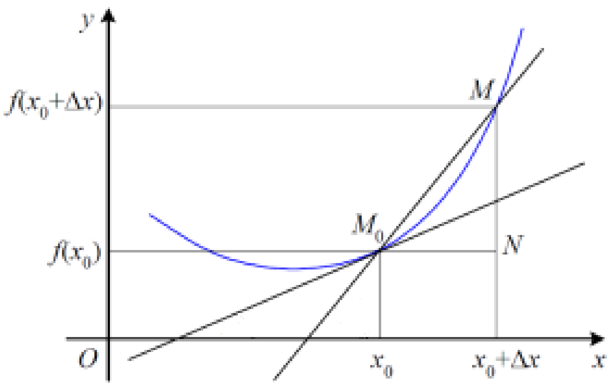


Рис. 2.2.2 Касательная к графику функции

Таким образом, получили, что $f(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ (геометрический смысл производной функции в точке). Поэтому уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$ [29].

10. Правила вычисления производных

Вычисление производных основано на применении следующих правил, которые мы будем использовать без доказательств, поскольку доказательства выходят за рамки школьного курса математики.

Правило 1. (производная от произведения числа на функцию). Справедливо равенство

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),$$

где c – любое число. Производная от произведения числа на функцию равна произведению этого числа на производную функции.

Правило 2. (производная суммы). Производная суммы функций вычисляется по формуле

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

то есть производная от суммы функций равна сумме производных этих функций.

Правило 3. (производная разности). Производная разности функций вычисляется по формуле

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x),$$

то есть производная от разности функций равна разности производных этих функций.

Правило 4. (производная произведения). Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

то есть производная от произведения двух функций равна производной от первой функции, умноженной на вторую функцию, плюс первая функция, умноженная на производную от второй функции.

Правило 5. (производная частного). Производная от частного двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

11. Производные некоторых элементарных функций

Элементарные функции — это все, что перечислено ниже в таблице производных. Производные этих функций надо знать наизусть. Тем более что заучить их совсем несложно — на то они и элементарные.

Таблица 2

Производные основных функций

1. $c' = 0, c = const$	9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

3. $a^x\ ' = a^x \ln a$	11. $ctgx\ ' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
4. $e^x\ ' = e^x$	12. $\mathrm{arccosx}\ ' = -\frac{1}{\overline{1-x^2}}$
5. $\log_a x\ ' = \frac{1}{x \ln a}$	13. $\mathrm{arcsinx}\ ' = \frac{1}{\overline{1-x^2}}$
6. $\ln x\ ' = \frac{1}{x}$	14. $arctgx\ ' = \frac{1}{1+x^2}$
7. $\sin x\ ' = \cos x$	14. $arcctgx\ ' = -\frac{1}{1+x^2}$
8. $\cos x\ ' = -\sin x$	

12. Производная сложной функции

Определение. Рассмотрим две функции $f\,(x)$ и $g\,(x)$. Сложной функцией или «функцией от функции» называют функцию вида $f(g(x))$. При этом функцию $f\,(x)$ называют внешней функцией, а функцию $g\,(x)$ – внутренней функцией.

Правило нахождения производной сложной функции. Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$f\ \ g\ \ x\ \ \ ' = f'\ \ g\ \ x\ \ \ g'\ \ x\ \ .$$

Другими словами, для того, чтобы найти производную от сложной функции $f(g(x))$ в точке x нужно умножить производную внешней функции, вычисленную в точке $g(x)$, на производную внутренней функции, вычисленную в точке x.

§3. Применение производной к исследованию функций

14. Признак возрастания (убывания) функции

Определение возрастающей функции. Функция $y = f(x)$ возрастает на интервале X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. То есть, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение убывающей функции. Функция $y = f(x)$ убывает на интервале X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f\left(x_2\right) < f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Замечание: если функция определена и непрерывна в концах интервала возрастания или убывания $(a;b)$, то есть при $x = a$ и $x = b$, то эти точки включаются в промежуток возрастания или убывания. Это не противоречит определениям возрастающей и убывающей функции на промежутке X.

Признак возрастания функции: Если $f'\left(x\right) > 0$ в каждой точке интервала X, то функция f возрастает на этом интервале.

Признак убывания функции: Если $f'\left(x\right) < 0$ в каждой точке интервала X, то функция f убывает на этом интервале.

Таким образом, чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

- найти область определения функции;
- найти производную функции;
- решить неравенства $f'\left(x\right) > 0$ и $f'\left(x\right) < 0$ на области определения;
- к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна [28, с. 171].

15. Экстремумы функции (критические точки функции, максимумы и минимумы)

Необходимое условие экстремума

Если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является критической точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна 0, либо не существует.

Замечание. Приведенное условие является только необходимым условием экстремума, но не является достаточным: критическая точка не обязательно является точкой экстремума (рис 2.2.3).

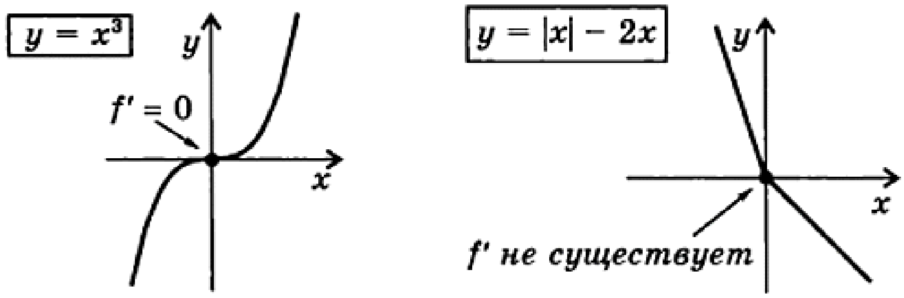


Рис. 2.2.3 Необходимое условие экстремума

Достаточное условие экстремума.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$.

Максимум. Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка максимума.

Минимум. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка минимума.

Замечание. В самой точке x_0 производной у функции y=f(x) может не существовать [28, с. 174].

При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется теорема Лагранжа:

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, то существует точка $c \in (a;\ b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

16. Применение производной к построению графиков функции.

Можно использовать следующую схему исследования функции $y = f(x)$ и построения ее графика [18, с. 140]:

1) Находим область определения функции $y = f(x)$.

2) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность (для тригонометрических функций).

3) Находим точки пересечения функции $y = f(x)$ с осями координат (если их можно найти).

4) Находим производную $f\,'(x)$ и критические точки.

5) Находим промежутки возрастания, убывания, точки экстремума, экстремумы функций.

6) Исследуем поведение функции на концам промежутков области определения (если можно исследовать).

7) Используя полученные результаты, строим график функции или его эскиз.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения: $D(f) = R$.

2) $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - (-x)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = f(x)$; функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат.

3) Точка пересечения с осью Оy: $x = 0; y = \frac{1}{2} \cdot 0^4 - 0^2 - 4; y = -4$.

Точки пересечения с осью Оу: $y = 0; \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0;\ x_{1,2} = 2$.

Итак, имеем точки пересечения с осями координат: $(0; -4), (2; 0), (-2; 0)$.

4) $f'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$; критические точки $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1$.

5) Составляем таблицу. Отметим в ней промежутки возрастания и убывания функции, и критические точки:

Таблица 3

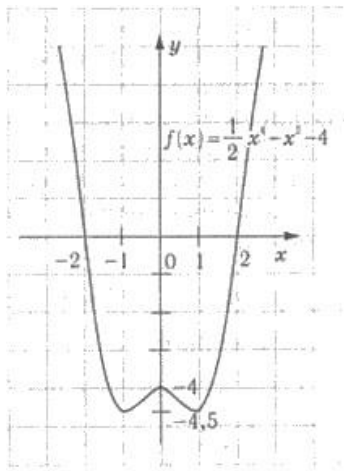
Возрастание, убывание, критические точки.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↓	-4,5	↑	-4	↓	-4,5	↑
Вывод	Функция убывает	min	Функция возраст	max	Функция убывает	min	Функция возрастает

В таблице приведены также выводы об критические точки (являются ли они точками максимума или минимума).

6) Поскольку $D(f) = R$, то нет концов области определения.

7) Строим график функции, используя результаты исследования (рис 2.2.4).



мал. 105

Рис. 2.2.4 График функции $f\ \ x\ \ = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4$

Построение графика функций (или его эскиза) помогает при решении некоторых задач, связанных с нахождением корней уравнения (их количества, ближайших значений и т.п.).

17. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Такая функция на этом отрезке достигает наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке отрезка $[a;\ b]$, либо на границе отрезка.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a;\ b]$ необходимо:

1) найти критические точки функции в интервале (a, b);

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть при $x = a$ и $x = b$;

4) из всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Функция $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}, f(2) = 9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4-3}{x^2}, 3x^4 - 3 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$.

Интервалу $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ принадлежит одна стационарная точка $x_1 = 1, f(x) = 4$.

3) Из чисел $6\frac{1}{8}, 9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

§4. Система заданий, как средство усвоения понятия производной в школьном курсе математики (Приложение 1).

1.3 Реализация методических рекомендаций по теме

Подготовленная система заданий была апробирована на занятиях 10 класса МБОУ «СОШ №20» г. Белгорода в период прохождения педагогической практики. Было разработано и проведено 2 занятия (2 часа) в классах базового и профильного уровней обучения на тему: «Производная и ее история. Решение задач».

Анализ результатов

Количество учащихся в классе с базовым уровнем изучения математики: 7. Количество учащихся в классе с базовым уровнем изучения математики: 20. Количество присутствующих на занятии: 27. Учащиеся класса с базовым уровнем изучения математики самостоятельную работу написали на:

- «отлично» - 2 человека.

- «хорошо» - 4 человека.
- «удовлетворительно» - 1 человек.
- «неудовлетворительно» - 0 человек.

Результат выполнения самостоятельной работы:

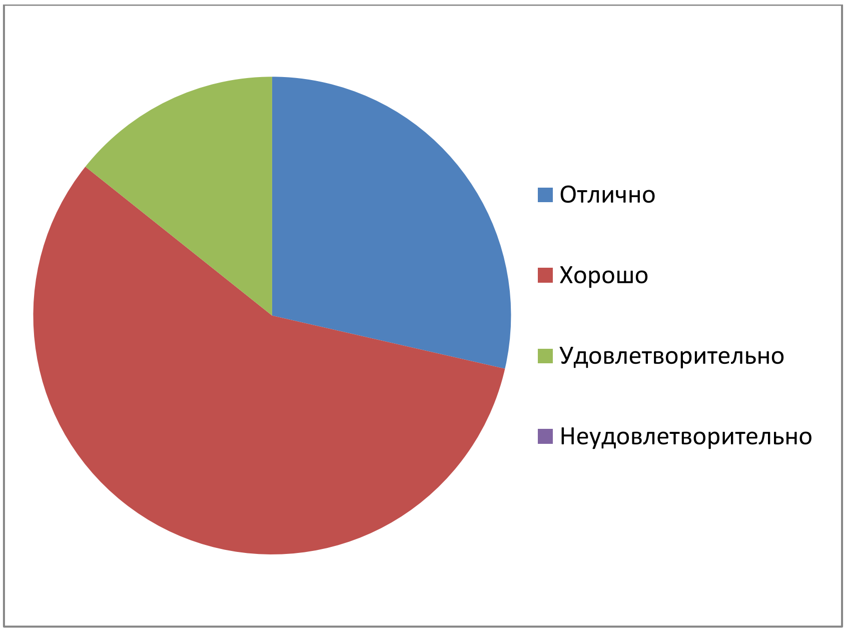


Рис. 2.3.1 Выполнение самостоятельной работы (база)

Учащиеся класса с профильным уровнем изучения математики самостоятельную работу написали на:

- «отлично» - 11 человек.
- «хорошо» - 6 человек.
- «удовлетворительно» - 2 человека.
- «неудовлетворительно» - 0 человек.

Результат выполнения самостоятельной работы:

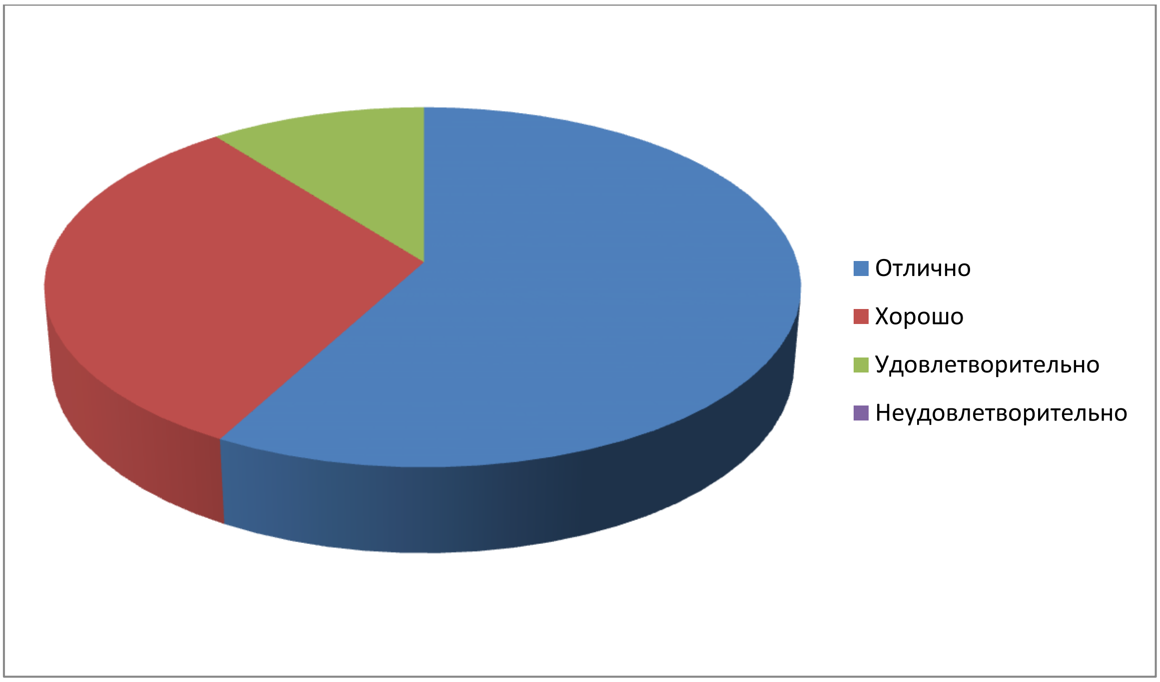


Рис. 2.3.2 Выполнение самостоятельной работы (профиль)

Результат работы учащихся определяется не тем, что мы пытались им дать, а тем, что они сами взяли в процессе обучения. Об этом свидетельствуют высокий уровень самостоятельности, самодеятельности учащихся на занятии; наблюдались навыки выполнения работы через организацию коллективной деятельности, отмечалось дружелюбие в отношении друг к другу, взаимопомощь, поддержка; учащиеся продемонстрировали умение применять полученные теоретические знания на практике.

Итоги самостоятельных работ показали, что теоретический материал доступен для понимания и успешного выполнения учащимися подготовленной системы заданий как профильного, так и базового уровней изучения математики. Это доказывается полученными учащимися оценками за самостоятельные работы - большая часть класса выполнила задания на 4 и 5, неудовлетворительных оценок не было.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Производная, как отмечалось выше, представляет собой один из мощнейших орудий исследования, поэтому данная работа спланирована таким образом, чтобы изложенный материал представлял собой интересный и освобожденный от излишних трудностей для обучающихся.

В ходе анализа научно-методической литературы было рассмотрено содержание учебников по теме «Производная» под редакцией некоторых авторов, что сподвигло нас к формированию другого содержания главы по данной теме с использованием исторических сведений.

Дипломная работа содержит огромный полезный материал для практического применения. В ней были рассмотрены история развития и возникновения понятия производной, исторические личности, причастные к дифференциальным исчислениям, определения, основные положения, связанные с производной в школьном курсе математики, основные методы нахождения производных, таблица производных, которые могут пригодиться школьникам на занятиях по алгебре, а также применение производной к исследованию функций, нахождению точек экстремума, наибольшего и наименьшего значения. В пунктах продемонстрированы примеры решения некоторых задач с использованием различных методов.

Цель выпускной квалификационной работы, которая была сформулирована следующим образом: изучить научно-методическую литературу по теме и сформировать материал в примерное содержание учебника для процесса обучения учащихся, была достигнута.

В целом, по итогам проведенной работы, можно сделать вывод о том, что все задачи были выполнены: нами был проведен анализ учебной и учебно-методической литературы по теме «Производная». Мы познакомились с теоретическим материалом, связанным с историей развития и возникновения производной в математике. Разработали примерное содержание раздела учебников по теме «Производная» с использованием исторических сведений; в процессе исследования получили набор задач с решениями по теме производная, накопили информацию по теме и систематизировали ее.

Данная работа имеет и практическую значимость, она может быть применена в учебной практике в школе, гимназии или лицее с углубленным изучением математики, а также в средних общеобразовательных учреждениях в качестве методического пособия для учителей в работе с обучающимися на уроках и факультативах. Также ученики могут использовать его как справочный материал.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров; Под ред. Ш.А. Алимова. - М.: Просвещение, 2006. - 384 с.

2. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу: Учебник для университетов и пед. вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. - 5-е изд. - М.: Высш. шк., 1999. - 695 с.

3. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса. Профильный уровень / М. И. Башмаков. - М.: Дрофа, 2008. - 286 с.

4. Башмаков М. И. Математика: Учебник для 10 класса. Базовый уровень / М. И. Башмаков. - М.: Изд. центр «Академия», 2007. - 304 с.

5. Белл Э. Т. ТВОРЦЫ МАТЕМАТИКИ: Предшественники современной математики: Пособие для учителей. Перевод с английского В. Н. Тростникова, С. Н. Киро, Н. С. Киро / Под редакцией и с дополнениями С. Н. Киро. - М.: «Просвещение», 1979. - 256 с.

6. Виноградов И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградов, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. - М.: Дрофа, 2001. - 416 с.

7. Виноградов И.М. Элементы высшей математики / И.М. Виноградов. - М.: Наука, 1999. - 507 с.

8. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс: Учебник. 4-е изд., стер. / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. - Спб.: Издательство "Лань", 2008. - 960 с.

9. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. - М.: «Наука», 1977. - 437 с.

10. Галкин Е.В. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ: Учебное пособие для педагогических университетов и педагогических институтов / Е.В. Галкин. - Челябинск, 2003. – 229 с.

11. Галусарьян Р.Т. Сборник задач и упражнений по курсу «Высшая математика» / Р.Т. Галусарьян, ч. II. - Обнинск: ИАТЭ, 2008. - 76с.

12. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. - 13-е изд., испр. - М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. - 624 с.

13. Ильин В. А. Математический анализ. Начальный курс / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А. Н. Тихонова. – 2-е изд., - перераб. – М.: Изд-во МГУ, 1985. - 662 с.

14. Ильин В. А. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб. для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - 7-е изд. - М.: Физматлит., 2005. - 648 с.

15. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа. 10-11 класс: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А. П. Карп. - М.: Просвещение, 1995. - 176 с.

16. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 2007. - 384 с.

17. Малахов А.Н. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Учебно-методический комплекс / А. Н. Малахов, Н. И. Максюков, В. А. Никишкин. - М.: Изд. центр ЕАОИ, 2009. - 396 с.

18. Мацкин М.С. Функции и пределы. Производная: Пособие для учителей / М.С. Мацкин, Р.Ю. Мацкина. - М.: «Просвещение», - 1968. - 182 с.

19. Могильницкий, В.А. Производная и ее применение: учебное пособие / В.А. Могильницкий, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. - 107 с.

20. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа: 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) 6-е изд., стер. / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. -М.: Мнемозина, 2009. - 424 с.

21. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа: 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1.: Учебник для учащихся общеобразовательных

учреждений (базовый уровень). 10-е изд., стер. / А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2009. - 399 с.

22. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа.10-11 кл.: В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; Под ред. А.Г. Мордковича. - 5-е изд. - М.: Мнемозина, 2014. - 432 с.

23. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике: Учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений / А. Д. Мышкис. - 4-е изд. - М.: «Наука», 2007. - 640 с.

24. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, Том 1: Учебное пособие для вузов / Н. С. Пискунов, - 13-е изд. - М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1985. - 432 с.

25. Побережный А.Н. Краткий справочник по математике (Курс средней школы) / А. Н. Побережный, - Изд.: Синтез-88, Одесса. - 1990. - 16 с.

26. Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников: Учебное пособие / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1988. – 96 с.

27. Сластенин В.А. и др. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр "Академия", 2002. - 576 с.

28. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике / П.Ф. Фильчаков. - К.: Наукова думка, 1972. – 744 с.

29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 / Г.М. Фихтенгольц. - М.: Книга по Требованию, 2013. - 608 с.

30. Черкасов А.Н. Введение в высшую математику: Учебное пособие / А.Н. Черкасов. - М.: «Наука», 1964. - 244 с.

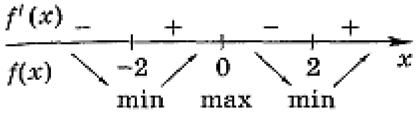
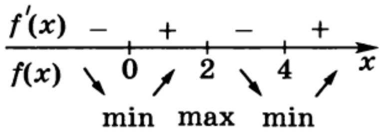
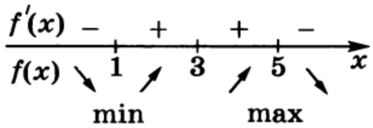
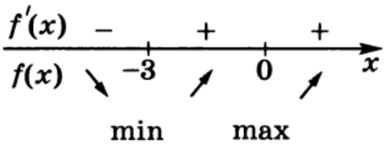
31. Яковлев И.В. Материалы по математике: Теоретическое пособие / И.В. Яковлев. - М.: Мнемозина, 2013. - 30 с.

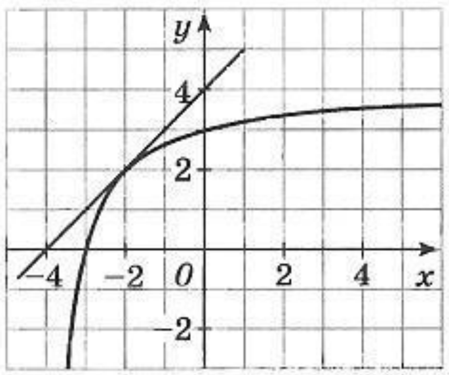
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Система заданий

№	Содержание задания	Ответ
1.	Найдите приращения Δx и Δy в точке x_0, если $y = x^2$, $x_0 = 2$ и $a)\ x = 1{,}9\ b)\ x = 2{,}1$.	
	Дана функция $y = x^2 + 2x - 4$. Найти приращение Δy при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}5$.	
	Дана функция $y = 2x + 5$. Найдите x и Δy при $x_0 = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$.	
	Дана функция $y = \frac{1}{x}$. Найти приращение Δy при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}2$.	
2.	Пользуясь определением, найдите производную функции	
	1) $f(x) = 4x - 5$	
	2) $f(x) = x^2 + 4x - 6$	
3.	Найдите производные функций:	
	1)$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$	
	2)$f(x) = e^x \cdot cosx$	
	3)$f(x) = x^6 - 2^x$	
	4)$f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$	
	5)$f(x) = \sqrt{2x-3}$	
	6)$f(x) = \frac{2cosx}{x^2+4}$	
	7)$f(x) = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$	
	8)$f(x) = 5^x - \sqrt[4]{x}$	
4.	Найдите производную функции $y = x^4 + sinx$	
	1. $x^3 + cosx$ 3. $4x^3 + cosx$ 2. $\frac{x^5}{5} + cosx$ 4. $4x^3 - cosx$	
	Найдите производную функции $y = 4x^4 - e^x$	
	1. $20x^5 - e^x$ 3. $4x^4 - e^x$ 2. $20x^5 + e^x$ 4. $20x^4 - e^x$	
5.	Найдите производную сложной функции	
	1)$f(x) = (3x - 8)^{10}$	
	2)$f(x) = \sin(2x - 1)$	

	$3) f(x) = 11^{3-5x-x^2}$	
	$4) f(x) = \ln(sin^2 x)$	
	$5) f(x) = e^{3x+10}$	
	$6) f(x) = (4-x^2)\sqrt{x^2-5}$	
	$7) f(x) = (x+7)^2 \cdot e^{4-x}$	
6.	Вычислите $f'(e)$, если $f(x) = x^4 \cdot \ln x$	
	1. $2e^3$ 3. $5e^3$ 2. $3e^3$ 4. $4e^2$	
7.	Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 11$ равна нулю.	
8.	Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + e^x$ в точке $x_0 = 0$	
	2. 1 3. 5 3. -1 4. 0	
9.	Найти промежутки возрастания и убывания функции:	
	$1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$	
	$2) f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$	
	$3) f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{2x}$	
10.	Найдите критические(стационарные) точки функции $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x - 7$. В ответ укажите сумму критических точек, принадлежащих промежутку [-2; 3].	
11.	1)Найдите точку минимума функции $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$	
	2)Найдите точку максимума функции $$f(x) = \frac{324}{x} + x + 6$$	
12.	1)Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 7$ на промежутке [0; 2].	
	2)Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^4 - -2x^2 + 3$, а также наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [-2; 2].	
13.	Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и постройте ее график.	
	Исследуйте функции методами производной и установите	

	соответствия между функциями и их поведением на указанных интервалах	
	1. $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-4)^2$ 3. $f(x)=-x+\frac{4}{3-x}-2$ 2. $f(x)=x^4+4x^3+2$ 4. $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-4)^2$	
14.	1.  2.  3.  4. 	
	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$, где x – расстояние от точки отсчета (в метрах), t – время (в секундах), измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=9$с.	
15.	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^4+9t^3-7t^2-7t+24,$ где x - расстояние от точки отсчета (в метрах), t – время (в секундах), измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) через 5 секунд после начала движения.	
	Точка движется по координатной прямой по закону $x(t)=2+2t+t^2$, где $x(t)$ - координата точки (в метрах) в момент времени t (в секундах). В какой момент времени скорость точки будет равна 5 м/с?	
	Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I(t)=2t^2-5t$, где I– сила тока в амперах, t– время в секундах. Найдите скорость изменения силы тока в конце 10-й	

	секунды.	
	Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени по закону $\varphi\ t\ = 0{,}3t^2 - -0{,}5t + 0{,}2$ (φ – угол в радианах, t – время в секундах). Найдите угловую скорость вращения тела (в радианах в секунду) в момент времени t =10 с.	
	На рисунке изображен график функции $y = f\ (x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Найдите $f'\ x_0$. 	
16.	Вставьте пропущенные слова и ответьте на вопросы:	
	Русский термин «производная функции» впервые употребил ___________________ (В. И. Висковатов).	
	Огромное значение в изучение производной привнесли такие гении, как______________(Лопиталь, Бернулли, Эйлер, Гаусс).	
	Как назывался метод производных, который был разработан Ньютоном около 1666 года? (метод флюксий)	
	Какими символами Ньютон обозначает флюксии? (сейчас они используются в механике для обозначения производных по времени). (x', y', z')	
	Основным понятием у Лейбница являлся _______________ как бесконечно малое приращение функции. (дифференциал)	
	Каким символом Лейбниц обозначает любой отрезок, называемый дифференциалом абсциссы x точки кривой? (dx)	
	Новую область математики, в которой Лейбниц приводит без доказательства правила нахождения дифференциала суммы, разности, произведения, частного, степени и корня называет______________. (дифференциальным исчислением)	