ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки 44.03.01
Педагогическое образование, профиль Математика
заочной формы обучения, группы 02041351
Бочаровой Ирины Юрьевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Сокольский А.Г.

БЕЛГОРОД 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни мы часто употребляем слово «функция». Функции государства, функции денег, функции того или иного предмета мебели или техники. В толковом словаре Ожегова имеется пять значений этого понятия. В математике – это закон, по которому каждому значению переменной величины (аргумента) ставится в соответствие некоторая определенная величина, а также сама эта величина [15]. Поэтому функция является одним из важнейших общенаучных и математических понятий, и играет большую роль в познании реального мира.

История развития идеи функциональной зависимости начинается в древности. Это подтверждается первыми математически выраженными соотношениями между величинами, первыми правилами действий над числами, формулами для нахождения площади и объема различных фигур. Так, вавилонские ученые (4-5тыс. лет назад) хоть и неосознанно, установили, что площадь круга является функцией от его радиуса посредством нахождения грубо приближенной формулы: $S=3r^2$. Примерами табличного задания функции являются астрономические таблицы вавилонян, древних греков и индийцев, а примерами словесного задания функции – теорема о постоянстве отношения площадей круга и квадрата на его диаметре или античные определения конических сечений, причем сами кривые выступали в качестве геометрических образов соответствующей зависимости.

Изучение поведения функций и построение их графиков является важным разделом математики, который необходимо тщательно изучать. Многие задачи возможно решить только с помощью построения графика функции, и нередко этот способ является единственным решением. Следовательно, свободное владение техникой построения графиков функции является необходимым условием при изучении данной темы. Изучение свойств функций позволяет познавать явления окружающего мира. [16, с. 8].

В науке и жизни часто используются приборы для автоматической фиксации протекания разных процессов. С помощью этих приборов получают графики различных функциональных зависимостей. Например, кардиограф дает графическое описание работы сердца, сейсмограф позволяет получить графическое описание колебаний земной поверхности.

В государственной итоговой аттестации в 9 и 11 классах встречаются задания на построение графиков функций, определение общих точек, установление соответствия между функцией и ее графиком. Кроме того, умение строить графики функций для многих обучающихся в школе представляет большой самостоятельный интерес.

Всё вышеизложенное актуализирует тему выпускной квалификационной работы «Построение графиков функций в средней школе».

Цель данной работы разработать систему учебных занятий по теме «Функция и ее график».

Объектом исследования является процесс изучения математики в основной школе.

Предметом исследования выступают функции и их графики.

Реализация поставленной цели потребовала решения ряда задач:

1. Изучить основные теоретические положения по данной теме.

2. Проанализировать учебно-методическую литературу.

3. Определить методические особенности изучаемой темы.

4. Подобрать дидактический материал.

5. Разработать систему учебных занятий по теме «Функция и ее график».

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследования:

1. Изучение школьной документации и продуктов деятельности учащихся.
2. Изучение педагогического опыта.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во введении приводится обоснование актуальности темы выпускной квалификационной работы .

В первой главе раскрываются теоретические основы изучения темы «Функции» в средней школе.

Вторая глава посвящена примерам с решениями по изучаемой теме.

В третьей главе представлены методические рекомендации по разработке уроков по данной теме.

Заключение содержит выводы по результатам работы.

В приложении приведены технологические карты уроков по изучаемой теме.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ФУНКЦИЯ» В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1.1. Понятие функции, график функции

Классическое определение функции сформировалось в математике не так давно – лишь в начале прошлого века. И хотя математики многие века изучали различные конкретные функции, прошло достаточно много времени прежде, чем были сформулированы элементарные понятия и их обобщения, и появилось осознание необходимости общего определения функции.

У древних математиков, а также и у математиков нового времени вплоть до конца XVII в., когда работами Ньютона и Лейбница было завершено построение дифференциального и интегрального исчислений, не было общего определения функции. В то время не было нужды в таком определении, так как отдельные конкретные функции представляли большое поле исследования. Функцию определяли как результат некоторых (алгебраических или простейших трансцендентных) операций над независимыми переменными. Впервые подобная формулировка появилась в работе Иоганна Бернулли в 1718г. В ней функция определена как «аналитическое выражение».

В дальнейшем Декарт, рассматривая в своей «Геометрии» лишь те кривые, которые возможно представить с помощью алгебраических уравнений, проложил путь к первому общему определению. Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения – формулы.

Термин «функция» (от латинского functio – исполнение, совершение) впервые ввел немецкий математик Готфрид Лейбниц. У него функция связывалась с геометрическим образом (графиком функции). В дальнейшем швейцарский математик Иоганн Бернулли и член Петербургской Академии наук знаменитый математик XVIII в. Леонард Эйлер рассматривали функцию как аналитическое выражение. Функцию как зависимость одной переменной величины от другой ввел чешский математик Бернард Больцано.

В методике обучения математике известны два основных направления в трактовке понятия «функция»: классическое и современное. Различные подходы к определению родового понятия отражены в схеме (рис. 1.1):

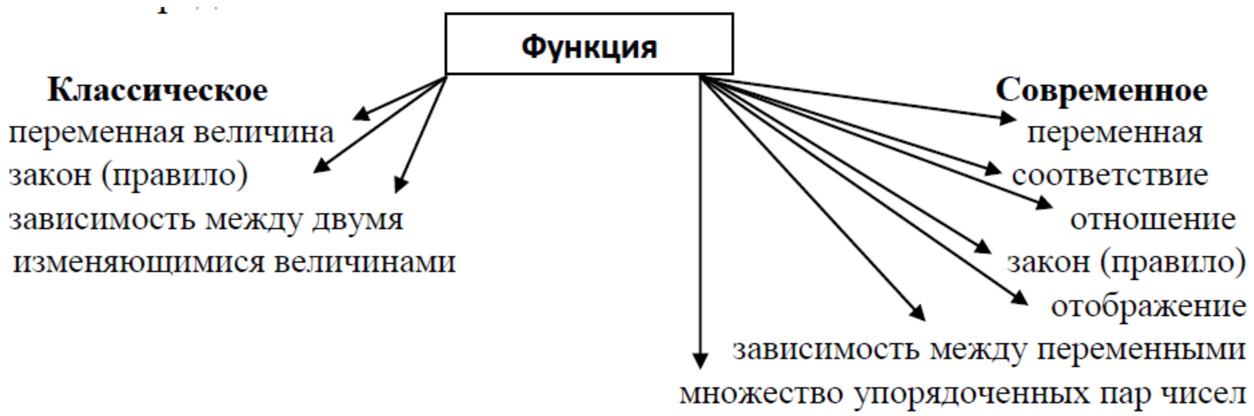

Рис. 1.1

Ниже приведены различные определения функции, распространенные в настоящее время.

Функция переменной величины есть аналитическое выражение, составленное из этой величины и постоянных.

И.Бернулли, 1718.

Функция есть кривая, начертанная свободным влечением руки.

Л.Эйлер, 1748.

Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних изменяются и первые, то первые называются функциями вторых.

Л.Эйлер, 1755.

Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих других количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно произвести, чтобы перейти от них к первому.

С.Лакруа, 1797.

Функция от x есть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа. Зависимость может существовать и оставаться неизвестной.

Н.И.Лобачевский, 1834.

y есть функция от x, если всякому значению x соответствует вполне определенное значение y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие.

П. Дирихле, 1837.

А. Н. Колмогоров в свое время рекомендовал отнести понятие функции к неопределяемым понятиям. М. И. Башмаков считает, что «в определенном смысле понятие функции является одним из основных, близких к неопределяемым исходным понятиям» [1, с. 133]. А. Г. Мордкович отказывается «от формального определения функции при первом его появлении» и ограничивается «пояснительным описанием функциональной ситуации» [13, с. 9].

Использование свойств функций лежит в основе метода решения математических задач. Например, при решении уравнений и неравенств, их систем часто полезно сравнить области значений функций, стоящих в левой и правой частях. Может оказаться, что их пересечение пусто или равно одной точке. Это позволяет сделать вывод о решении уравнения или неравенства. При решении задач с параметрами часто помогают найти решение графики рассматриваемых в задании функций. Вообще графическое решение, основанное на использовании графиков функций, является одним из методов решения математических задач.

В жизни мы часто сталкиваемся с тем, что многие величины меняют свои значения, а некоторые из них связаны между собой, то есть между ними существует зависимость. Например, площадь круга зависит от его радиуса, масса металлического бруска зависит от его объема и плотности металла, объем прямоугольного параллелепипеда зависит от его длины, ширины и высоты. Все процессы, зависящие от времени, представляют собой функциональные зависимости.

Рассмотрим примеры из учебника Алгебра 7 класс (автор Макарычев):

Пример 1. Площадь квадрата зависит от длины его стороны. Пусть сторона квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2.

Для каждого значения, переменной a можно найти соответствующее значение переменной S. Так,

если $a = 2$, то $S= 2^2 = 4$;

если $a = 10$, то $S = 10^2 = 100$;

если $a = 0{,}5$, то $S = 0{,}5^2 = 0{,}25$.

Зависимость переменной S от переменной a выражается формулой

$$S = a^2$$

(по смыслу задачи $a>0$).

Значения переменной a выбираются произвольно, поэтому она называется независимой переменной, а значения переменной S определяются выбранными значениями a, поэтому она называется зависимой переменной.

Зависимость, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной, называется функциональной зависимостью или функцией. Независимую переменную иначе называют аргументом, а о зависимой говорят, что она является функцией от этого аргумента. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции. Например, область определения функции, рассмотренной в примере 1, состоит из всех положительных чисел [7, с. 55 – 56].

Заметим, что определения функции, которые даются в учебниках алгебры в основной школе, являются осовремененной разновидностью классического направления. Они педагогически целесообразны для первоначального знакомства с функцией, так как основаны на понятиях, уже известных учащимся, близких к их привычным представлениям.

Функция может быть задана различными способами, но наиболее распространенным способом является формула. Она дает возможность путем вычислений находить для любого значения аргумента соответствующее значение функции. Однако, есть и другие способы, например, графический, табличный и аналитический.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y=\frac{6}{x+3}$, где $-2 \le x \le 3$. Для наглядного отображения соответствия значений аргумента значениям функции построим таблицу (табл. 1.1):

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Табл. 1.1

Каждое значение x на 1 больше предыдущего. Говорят, что составлена таблица значений функции с шагом 1.

В координатной плоскости изобразим точки с координатами (x, y) все найденные пары значений. При этом значение x является абсциссой, а соответствующее значение y ординатой (рис. 1.1). Можно выбрать другие значения аргумента из промежутка от – 2 до 3 и найти соответствующие им значения функции по заданной формуле $y=\frac{6}{x+3}$. Таким образом, мы получим другие пары значений, которым соответствует некоторая точка координатной плоскости. Все эти точки образуют график функции, заданной формулой $y=\frac{6}{x+3}$, где $-2 \le x \le 3$ (рис. 1.2) [7, с. 62 – 63].

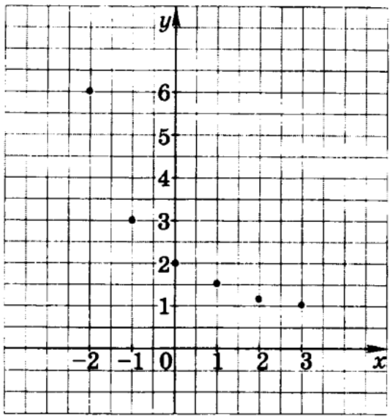

Рис. 1.1

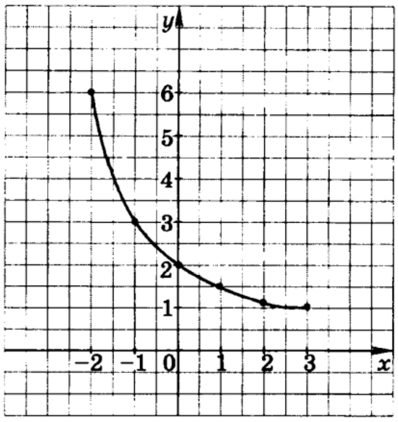

Рис. 1.2

Таким образом, графиком функции называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Графики функций помогают разобраться, какой процесс описывает данная функция — непрерывный или дискретный; понять многие свойства функций, такие, как монотонность на множестве, нули функции, области положительных и отрицательных значений функции. При этом «каждый год обучения ориентирован на конкретную модель реальной действительности»[14, с. 29].

При построении графика функции по точкам, учащиеся должны научиться подбирать «удобные» значения аргумента для нахождения значений функции. Ученик должен понимать, что метод построения графика функции по точкам до конца реализовать нельзя, но чем больше удаётся отметить точек, тем точнее получится график. Используя график функции, можно определить соответствующее значение функции по значению аргумента, и наоборот, по значению функции найти те значения аргумента, которым оно соответствует.

Пример 3. На рисунке 1.3 изображен график температуры воздуха в течение суток.

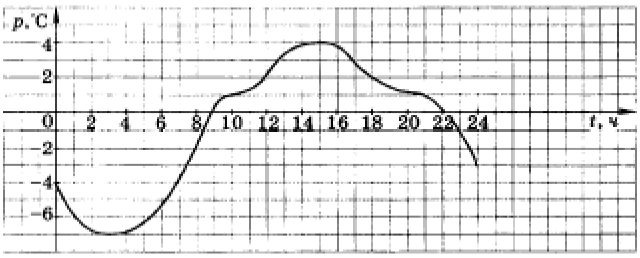

Рис. 1.3

С помощью этого графика для каждого момента времени t (в часах), где $0 \le t \le 24$, можно найти соответствующую температуру p (в градусах Цельсия). Например,

если $t = 4$, то p=-7;

если $t = 15$, то $p = 4$;

если $t = 18$, то $p = 2$.

График – еще один способ задания функции. Он дает наглядное представление о зависимости между величинами. Действительно, по данному графику можно узнать, когда температура была равна нулю, была выше нуля, ниже нуля, возрастала, убывала [7, с. 64].

В науке и жизни часто используются приборы для автоматической фиксации протекания разных процессов. С помощью этих приборов получают графики различных функциональных зависимостей. Например, кардиограф дает графическое описание работы сердца, сейсмограф позволяет получить графическое описание колебаний земной поверхности.

Пример 4. Пусть функция задана формулой

$$y = \frac{3x-1}{2}, \text{ где } -3 \le x \le 3$$

Найдем значения *y*, соответствующие целым значениям *x*, все полученные значения будем записывать в таблицу, поместив в верхней строке значения аргумента, а в нижней строке — соответствующие значения функции (таблица 1.2):

X	3	-2	-1	0	1	2	3
У	-5	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4

Таблица 1.2

В рассмотренном примере была указана область определения функции. Если функция задана формулой, но ее область определения не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений аргумента, при которых эта формула имеет смысл. Например, область определения функции, заданной формулой $y = x(x + 5)$, состоит из всех чисел, а область определения функции, заданной формулой $y = \frac{1}{x-2}$, состоит из всех чисел, кроме числа 2 (так как знаменатель не должен быть равен 0).

С помощью формулы, которая задает функцию, также решается задача нахождения значений аргумента, соответствующего значению функции.

Пример 5. Функция задана формулой

$$y = 12x - 3{,}6.$$

Найдем, при каком значении x значение функции равно 2,4.

Подставим в формулу $y = 12x - 3{,}6$ вместо y число 2,4. Получим уравнение с переменной x:

$$2{,}4=12x-3{,}6.$$

Решив его, найдем, что $x = 0{,}5$.

Значит, $y = 2{,}4$ при $x = 0{,}5$.

Необходимо отметить, что решение этой задачи стало возможным, так как она свелась к уравнению, способ решения которого известен [10, с. 149].

Таким образом, многообразие примеров, приведенные в современных учебниках по алгебре, призваны проиллюстрировать понятие функции. Ведь проводя аналогии между различными примерами, учащиеся интуитивно нащупывают суть самого понятия функции, строят догадку относительно функциональных зависимостей в быту и в природе, и получают ее подтверждение в последующих примерах. Так же не менее важным является и то, что каждый из этих примеров содержит функцию заданную одним из возможных способов.

1.2. Элементарные функции и их графики в основной школе

Изучение свойств функций и их графиков занимает значительное место как в школьной математике, так и в последующих курсах. Причем не только в курсах математического и функционального анализа, и даже не только в других разделах высшей математики, но и в большинстве узко профессиональных предметов. Например, в экономике – функции полезности, издержек, функции спроса, предложения и потребления, в радиотехнике – функции управления и функции отклика, в статистике – функции распределения. Чтобы в дальнейшем упростить изучение специальных функций, необходимо научиться определять и свободно оперировать

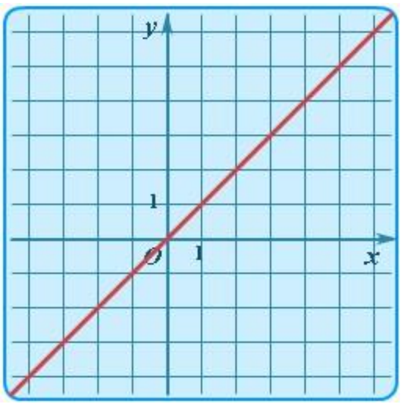

Рис. 1.4

графиками элементарных функций:

1. **Линейная $y = kx$.** Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. Частный случай линейной зависимости – прямая пропорциональность $y = kx$, где $k \neq 0$ – коэффициент пропорциональности.

   На рисунке 1.4 пример для $k = 1$, т.е. фактически приведенный график иллюстрирует функциональную зависимость, которая задаёт равенство значения функции значению аргумента.

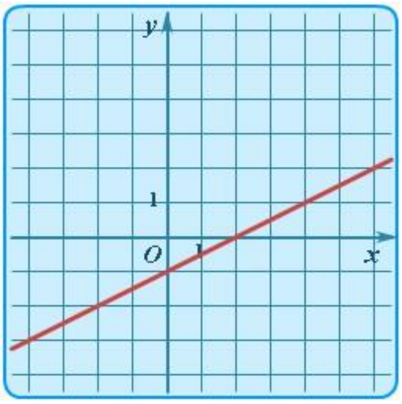

Рис. 1.5

2. **Линейная $y = kx + b$.**

   Графиком функции является прямая. Общий случай линейной зависимости: коэффициенты k и b – любые действительные числа. На рисунке 1.5 пример для $k = 0.5$, $b = -1$.

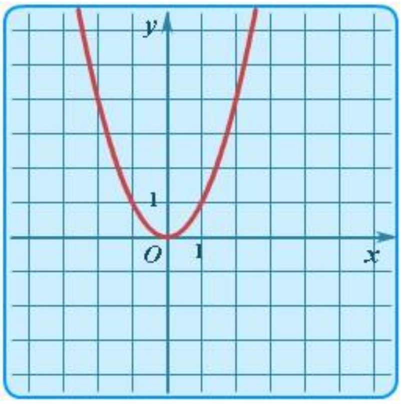

Рис. 1.6

3. **Квадратичная $y = x^2$.**

   Графиком функции является парабола. Частный случай квадратичной зависимости – симметричная парабола с вершиной в начале координат (рис. 1.6).

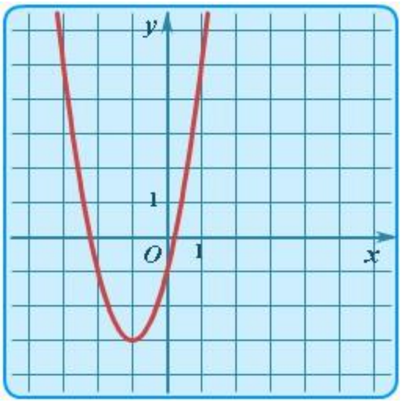

Рис. 1.7

4. **Квадратичная $y = ax^2 + bx + c$.**

   Графиком функции является парабола. Общий случай квадратичной зависимости: коэффициент a – произвольное действительное число не равное нулю ($a \in R$, $a \neq 0$), b, c – любые действительные числа (рис. 1.7).

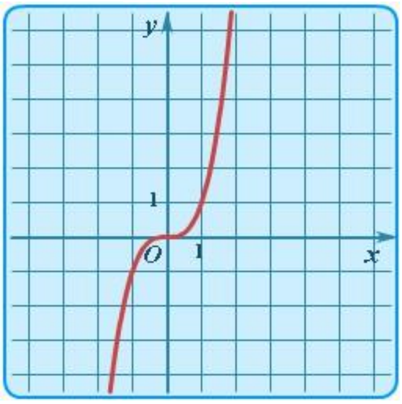

Рис. 1.8

5. **Степенная $y = x^3$.**

   Графиком функции является кубическая парабола. Самый простой случай для целой нечетной степени (рис. 1.8).

6. **Степенная $y = x^{1/2}$.**

График функции $y=\sqrt{x}$. Самый простой случай для дробной степени ($x^{1/2} = \sqrt{x}$) (рис. 1.9).

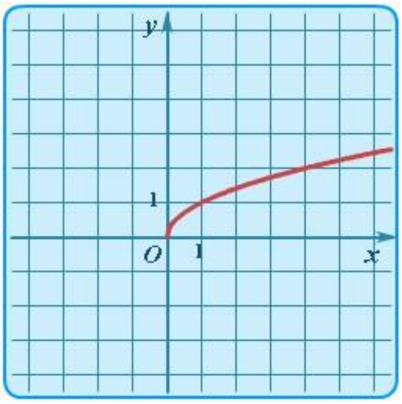

Рис. 1.9

7. **Функция $y = k/x$.**

Графиком функции является гипербола. Самый простой случай для целой отрицательной степени ($1/x = x^{-1}$) – обратно-пропорциональная зависимость. На рисунке 1.10 $k = 1$ [21].

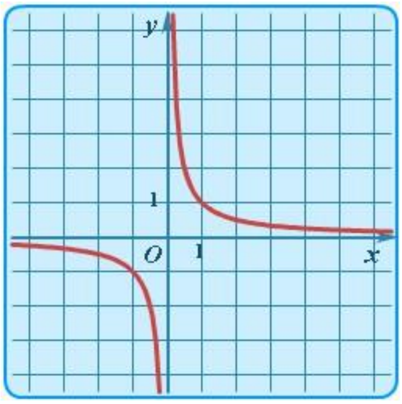

Рис. 1.10

Рассмотрим подробнее общие случаи линейной, квадратичной и степенной функций.

Линейной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = kx + b,$$

где k и b – любые действительные числа. Графиком линейной функции является прямая.

Если $k = 0$, то функция $y = b$ называется постоянной. Её графиком, является прямая, параллельная оси Ox.

Если $b = 0$, то формула $y = kx$ задает прямо пропорциональную зависимость. Графиком такой функции является прямая, проходящая через начало координат.

Верно и обратное – любая прямая, не параллельная оси Oy, является графиком некоторой линейной функции.

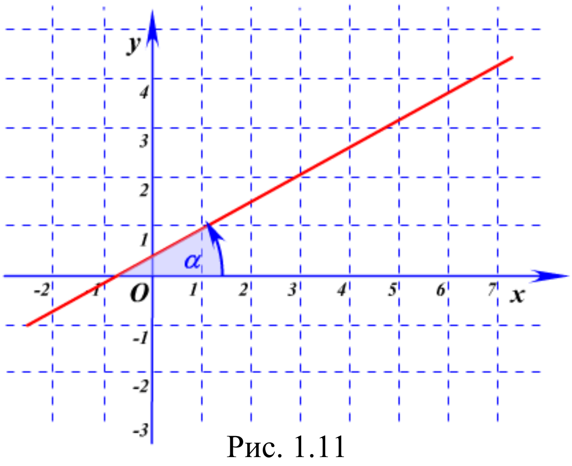

Рис. 1.11

Число k называется *угловым коэффициентом прямой*, оно равно тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси Ox. На рисунке 1.11 – угол α [21].

Построить график линейной функции легко. Так как графиком является прямая, то ее положение однозначно определяется заданием двух её точек. Например, построим график функции

$$y = 2x - 5 \text{ (рис. 1.12).}$$

Построим таблицу, состоящую из двух значений аргумента и соответствующих им значений функции:

x	0	1
y	– 5	– 3

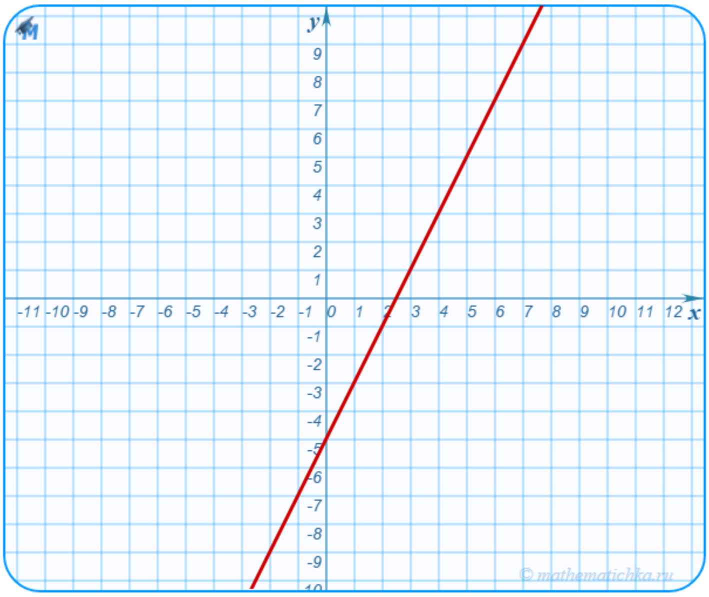

Рис. 1.12

Свойства линейной функции при $k \neq 0$, $b \neq 0$.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел: R или $(-\infty; \infty)$.

2) Функция $y = kx + b$ ни четна, ни нечетна.

3) При $k > 0$ функция монотонно возрастает, а при $k < 0$ монотонно убывает на всей области определения.

Квадратным трёхчленом называется многочлен 2-ой степени, то есть выражение вида

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c},$$

где $a \neq 0$, b, c – (обычно заданные) действительные числа, называемые его коэффициентами, x – переменная величина.

Коэффициент a может быть любым действительным числом, кроме нуля. Действительно, если $a = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = 0x^2 + bx + c = 0 + bx + c = bx + c.$$

В этом случае в выражении не остаётся квадрата, поэтому его нельзя считать квадратным трёхчленом. Однако, такие выражения-двучлены как, например, $3x^2 - 2x$ или $x^2 + 5$ можно рассматривать как квадратные трёхчлены, если дополнить их недостающими одночленами с нулевыми коэффициентами: $3x^2 - 2x = 3x^2 - 2x + 0$ и $x^2 + 5 = x^2 + 0x + 5$.

Если стоит задача определить значения переменной x, при которых квадратный трёхчлен принимает нулевые значения, т.е. $ax^2 + bx + c = 0$, то получаем квадратное уравнение.

Если существуют действительные корни x_1 и x_2 некоторого квадратного уравнения, то соответствующий трёхчлен можно разложить на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Замечание: если квадратный трёхчлен рассматривать на множестве комплексных чисел C, то на линейные множители его можно разложить всегда.

Когда стоит другая задача, определить все значения, которые может принимать результат вычисления квадратного трёхчлена при различных значениях переменной x, т.е. определить y из выражения $y = ax^2 + bx + c$, то имеем дело с квадратичной функцией.

При этом корни квадратного уравнения являются нулями квадратичной функции.

Квадратный трёхчлен также можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Это представление удобно использовать при построении графика и изучении свойств квадратичной функции действительного переменного [21].

Квадратичной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ – квадратный трёхчлен. Т.е. формулой вида

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где $a \neq 0$, b, c – любые действительные числа.

Вне школьного курса в курсе математики парабола рассматривается как линия, заданная преобразованной формулой вида

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Графиком квадратичной функции является ***парабола,*** вершина которой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Назвали его так потому, что такую кривую математики открыли и назвали параболой раньше (от греч. παραβολή – сравнение, сопоставление, подобие), до этапа подробного изучения свойств и графика квадратичной функции.

Парабола представляет собой множество точек плоскости, расстояние от которых до определенной точки плоскости, называемой фокусом параболы, равно расстоянию до определенной прямой, называемой директрисой параболы (рис. 1.14).

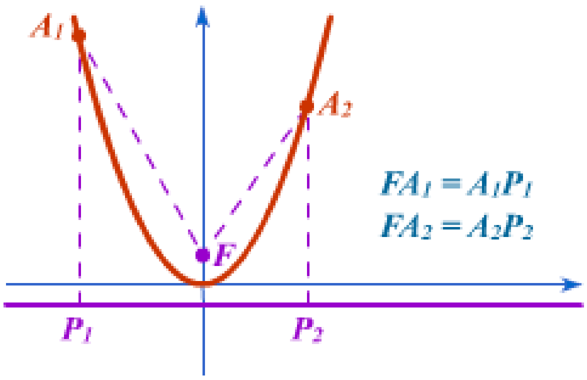

Рис. 1.13

Построить график квадратичной функции можно по характерным точкам (координаты её вершины, нули функции (корни уравнения), если они есть, точку пересечения с осью ординат (при $x = 0$, $y = c$) и симметричную ей относительно оси параболы точку $(-b/a; c)$).

Например, для функции $y = 2x^2+4x - 5$:

1. Найдем вершину параболы

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$

$y_0 = y(x_0) = -7$

2. Построить ось симметрии $x = -1$
3. Найти нули функции

   $(x_1;0)$, $(x_2;0)$

   $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 = -2{,}9$ $x_1 = 0{,}9$
4. Дополнительные точки (–4; 11); (3;11)
5. Построить параболу по точкам.

Свойства функции $y = x^2$

1. Область определения функции – вся числовая прямая: $D(f) = R = (-\infty; \infty)$.
2. Область значений функции – положительная полупрямая: $E(f) = [0; \infty)$.
3. Функция $y = x^2$ четная: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Ось ординат является осью симметрии параболы.
4. На промежутке $(-\infty; 0)$ функция монотонно убывает.

   На промежутке $(0; +\infty)$ функция монотонно возрастает.
5. В точке $x = 0$ достигает минимального значения.

   Точка с координатами (0;0) является вершиной параболы.
6. Функция непрерывна на всей области определения.
7. Асимптот не имеет.
8. Нули функции: $y = 0$ при $x = 0$.

Свойства квадратичной функции общего вида**.**

1. Область определения функции - вся числовая прямая: $D(f) = R = (-\infty; \infty)$.
2. Область значений функции зависит от знака коэффициента a. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, функция имеет наименьшее ($y_{\min}$), но не имеет наибольшего значения: $E(f) = [y_{\min}; \infty)$; при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, функция имеет наибольшее ($y_{\max}$), но не имеет наименьшего значения:$E(f) = (-\infty; y_{\max}]$.
3. В общем случае функция $y = ax^2 + bx + c$ не является ни четной, ни нечетной.

Осью симметрии параболы является прямая $x = -b/2a$.

Функция будет четной только в случае, когда эта прямая совпадает с осью Oy, т.е. при $b = 0$.

4. При $a > 0$ функция монотонно убывает на промежутке $(-\infty;\ -b/2a)$ и монотонно возрастает на промежутке $(-b/2a;\ \infty)$. При $a < 0$ функция монотонно возрастает на промежутке $(-\infty;\ -b/2a)$ и монотонно убывает на промежутке $(-b/2a;\ \infty)$.
5. В точке $x = -b/2a$ при $a < 0$ достигается максимум, а при $a > 0$ – минимум функции. Оба значения определяются по формуле
$$y = \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$
6. Точка с координатами $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ является вершиной параболы.
7. Функция непрерывна на всей области определения.
8. Асимптот не имеет.
9. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0;c)$.

   Если квадратный трёхчлен имеет действительные корни $x_1 \neq x_2$, то парабола пересекает ось абсцисс в точках $(x_1;0)$ и $(x_2;0)$.

   При $x_1 = x_2$ парабола касается оси абсцисс в точке $(x_1;0)$.

В дальнейшем понятие о квадратичной функции расширяется при изучении производных. Производная квадратичной функции вычисляется по формуле
$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

1.3. Преобразование графиков функций

Для того, чтобы построить графики более сложных функций, необходимо знать, как выглядят графики простейших элементарных функций того же класса или уметь строить их по характерным точкам. Для этого существуют правила преобразования графиков функций. Они являются общими для всех функций, а не только для тех, которые изучают в школе.

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Чтобы построить график функции:

1. $y = mf(x)$, где $m > 0$ и $m \neq 1$, нужно ординаты точек заданного графика умножить на m. Такое преобразование называется растяжением от оси x с коэффициентом m, если $m > 1$, и сжатием к оси x, если $0 < m < 1$.
2. $y = -f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием_симметрии относительно оси x. (Преобразование симметрии – зеркальное отражение относительно прямой.)
3. $y = f(x) + n$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси ординат на n единиц вверх, если $n > 0$ и, соответственно на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.
4. $y = f(kx)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$. Искомый график функции получается из заданного сжатием с коэффициентом k к оси y (если $0 < k < 1$ указанное «сжатие» фактически является растяжением с коэффициентом $1/k$).
5. $y = f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием_симметрии относительно оси y
6. $y = f(x + l)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным_переносом последнего на l единиц влево, если $l > 0$ и, соответственно на $|l|$ единиц вправо, если $m < 0$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Построить график функции $y = 2x^2$

Известно, что графиком функции $y = x^2$ является парабола. Точки, принадлежащие графику функции $y = 2x^2$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на 2 (рис. 1.15) [12, с. 38].

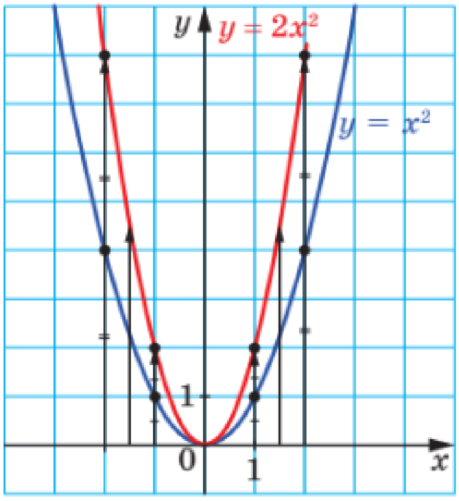

Рис 1.14

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2$

Так же, как и в предыдущем примере, необходимо рассмотреть график функции $y = x^2$. Точки, принадлежащие графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = x^2$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на ½ (рис. 1.16) [12, с. 39].

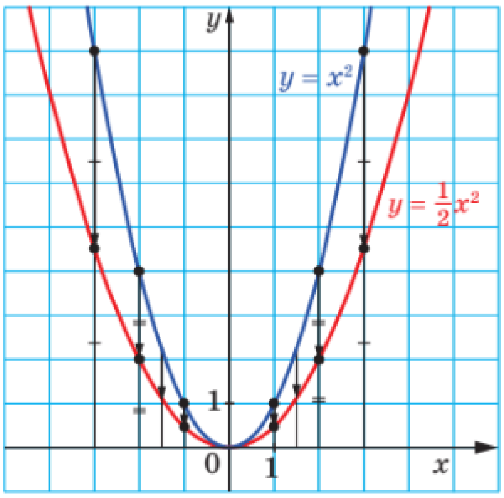

Рис. 1.15

Чтобы построить график квадратичной функции, заданной общей формулой, пользуясь правилами преобразования графиков функций, нужно сначала перейти от формулы $y = ax^2 + bx + c$ к виду, удобному для преобразований, $y = m(kx + l)^2 + n$, где k, l, m, n – числа, зависящие от a, b, c, т.е. к виду: $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Затем взять за основу параболу $y = x^2$ и применить к ней следующие преобразования:

- Параллельный перенос (сдвиг) исходной параболы на $l = b/2a$ единиц влево (если $l < 0$, то вправо).
- Растяжение от оси Ox вдоль оси Oy в $m = a$ раз (при $m < 1$, получится сжатие к оси Ox).
- При $m = a < 0$ симметричное отображение полученного графика относительно оси Ox – разворот ветвей параболы вниз.
- Параллельный перенос (сдвиг) графика на $n = -(b^2 - 4ac)/4a$ единиц вверх или вниз в зависимости от знака n (при $n > 0$ вверх).

Рассмотрим пример. Пусть $y = 3x^2 - 5x + 2$

1. Объединяем в скобки первые два слагаемых и выносим за скобки коэффициент при x^2.
2. В скобках умножим и одновременно разделим на 2 коэффициент при x.
3. Сравним с формулой возведения двучлена в квадрат: имеем внутри скобок квадрат числа x, удвоенное произведение x на дробь 5/6. Чтобы применить эту формулу не хватает второго квадрата, поэтому добавим недостающее слагаемое $5^2/6^2$ и одновременно вычтем его, чтобы сохранилось исходное значение выражения.
4. Сворачиваем квадрат по формуле и раскрываем большую скобку.
5. Оставшиеся числовые дроби приводим к общему знаменателю и складываем.

$$3x^2 - 5x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 2 = 3\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{3\cdot 2}x\right) + 2 =$$

$$= 3\left(x^2 - 2\cdot\frac{5}{6}x + \frac{5^2}{6^2} - \frac{5^2}{6^2}\right) + 2 = 3\left(\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) + 2 =$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{3\cdot 25}{36} + 2 = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} + 2 =$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25+24}{12} = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}.$$

Итак, чтобы построить график функции $y = 3x^2 - 5x + 2$ из графика $y = x^2$ нужно последний сдвинуть по оси Ox вправо на $5/6 \approx 0{,}83$ единицы. Затем растянуть вдоль оси Oy в 3 раза и, наконец, опустить по оси Oy на $1/12 \approx 0{,}08$ единицы (рис. 1.17).

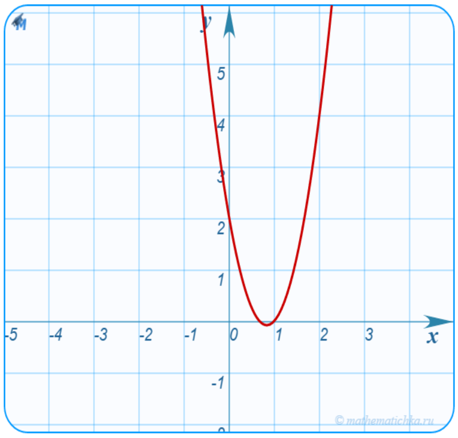

Рис. 1.16

1.4. Анализ программ и учебников по изучаемой теме

Существуют различные учебные пособия по алгебре для учащихся общеобразовательных школ. В федеральном перечне учебников, рекомендуемых к использованию при реализации образовательных программ основного общего и среднего общего образования, на 2017/18 учебный год Министерством образования Российской Федерации были утверждены следующие учебники по алгебре:

- Дорофеев Г.В. и др. «Алгебра 7, 8, 9» – Просвещение;
- Колягин Ю.М. и др. «Алгебра 7, 8, 9» – Просвещение;
- Макарычев Ю.Н. и др. «Алгебра 7, 8, 9» – Просвещение;
- Мерзляк А.Г. и др. «Алгебра 7, 8, 9» – Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ;
- Никольский С.М. и др. «Алгебра 7, 8, 9» – Просвещение.

В каждом учебнике имеются свои достоинства и недостатки, они отличаются стилем изложения учебного материала, содержанием. Структуру изложения функциональной зависимости в действующих учебниках алгебры 7–9-х классов можно представить на схеме (рис. 1.18) [16, с. 12-13].

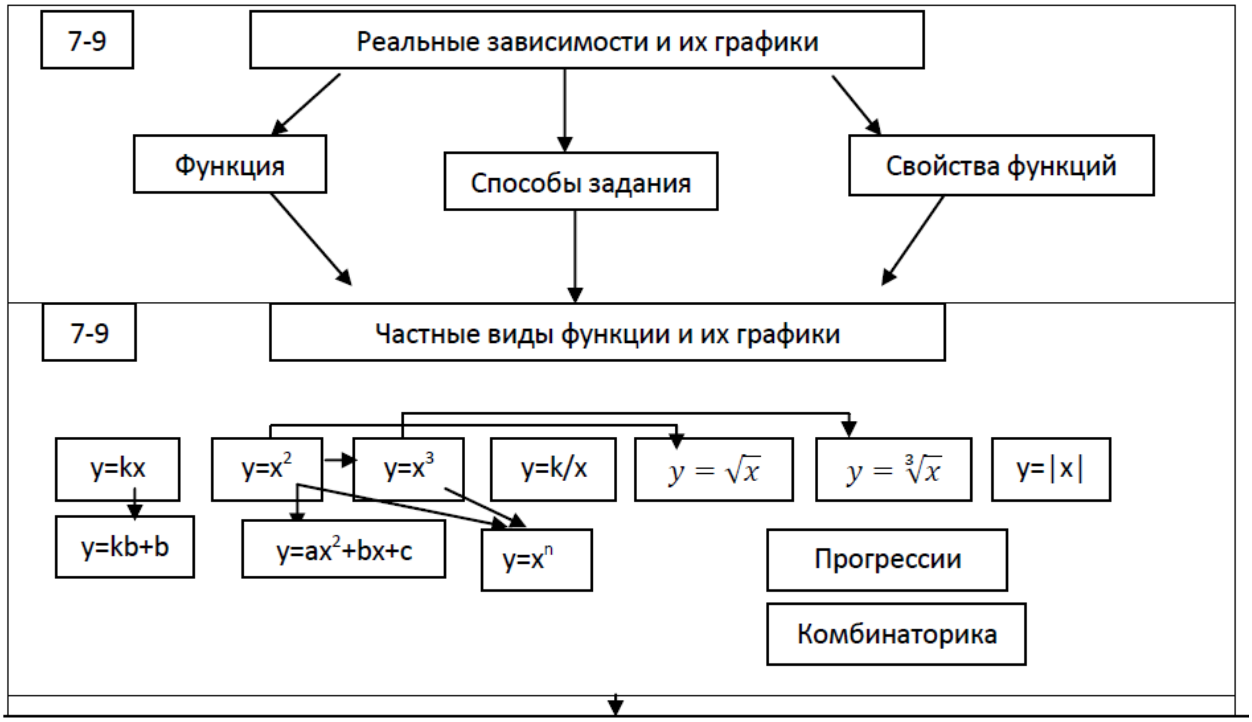

Рис. 1.17

Рассмотрим содержание некоторых учебников.

Теоретический материал учебников «Алгебра» авт. Макарычев Ю.Н. и др. изложен доступно и интересно, с учётом психологических особенностей школьников. Книга разделена на главы, имеет приложения и снабжены большим количеством задач разного уровня сложности. В учебниках много оригинальных приёмов изложения, которые используются авторами для того, чтобы сделать материал учебников доступным учащимся и одновременно строгим. Система задач позволяет развить учащихся к математике с учётом их математической подготовки.

Впервые с понятием функции школьники знакомятся в 7 классе. Данная тема является начальным этапом в обеспечении систематической функциональной подготовки учащихся. В учебнике это глава 2, в ней рассматриваются понятия «функция», «аргумент», «область определения функции», «график функции». Функция трактуется как зависимость одной переменной от другой. Учащиеся узнают о способах задания функции, начинается работа по формированию у учащихся умения находить по формуле значение функции по известному значению аргумента, выполнять то же задание по графику и решать по графику обратную задачу.

Первая зависимость, с которой знакомятся учащиеся – это прямая пропорциональность и ее график. Затем переход к общему виду – линейной функции. Учащиеся должны понимать, как влияет знак коэффициента k на расположение графика функций $y=kx$ на координатной плоскости, где $k \neq 0$, как зависит от значений k и b взаимное расположение графиков двух функций вида $y=kx+b$. Основная цель – формирование всех функциональных понятий и выработка соответствующих навыков, а также изучение конкретных функций сопровождаются рассмотрением примеров реальных зависимостей между величинами, что способствует усилению прикладной направленности курса алгебры.

Так же в 7 классе происходит знакомство с функциями $y = x^2$, $y = x^3$ и их графиками. Основная цель – выработать умение выполнять действия над степенями с натуральными показателями. Здесь рассматривается определение степени с натуральным показателем, порядок действий при вычислении значений выражений, содержащих степени. При изучении свойств функций $y = x^2$ и $y = x^3$ важно рассмотреть особенности расположения их графиков в координатной плоскости.

В 8 классе при изучении произведения и частного рациональных дробей учащиеся знакомятся с функцией $y=k/x$ и ее графиком. Учащиеся узнают, что такая функция называется обратной пропорциональностью, а ее график – гиперболой. При изучении свойств функции $y=k/x$, важно рассмотреть с учащимися расположение в координатной плоскости графика этой функции при $k<0$ и $k>0$.

С графиком функции $y=\sqrt{x}$ знакомятся при изучении арифметического квадратного корня. Необходимо обратить внимание на связь с функцией $y=x^2$, где $x \geq 0$.

Изучение функций в 9 классе начинается с введения понятия «область значений функции» и знакомства со свойствами функций. Далее изучение квадратичной функции начинается с рассмотрения функции $y=ax^2$, её свойств и особенностей графика. Важно, чтобы учащиеся понимали, что график функции $y=ax^2+bx+c$ может быть получен из графика функции $y=ax^2$ с помощью двух параллельных переносов вдоль осей. Приёмы построения графика функции $y=ax^2+bx+c$ отрабатываются на конкретных примерах. При этом следует обратить внимание на формирование умения указывать координаты параболы, её ось симметрии, направление ветвей параболы.

Изучению темы «Функции» в школьной программе по учебнику Макарычева Ю.Н. в 7 классе отводится 11 часов, в 8 классе – 4 часа, в 9 классе – 24 часа.

Учебник «Алгебра», авторы которого Мерзляк А.Г. и др., хоть и отличается изложением материала, но соответствует учебной программе. Понятия вводятся постепенно по мере необходимости. Помимо классических разделов алгебры в учебник включён научно-популярный материал, содержащий жизненные задачи и задачи исторического характера. Внимание уделяется не только прохождению нового материала, но и повторению пройденного ранее. На форзаце учебника указаны основные формулы и графики изучаемых тем. Особенность изложения материала в том, что в 7 классе изучается только линейная функции, а $y = x^2$, $y=\sqrt{x}$ и $y=k/x$ не изучается и полностью оставляется на восьмой класс.

На начальном этапе водится понятие график функции, начинается работа по формированию у учащихся умений находить значение функции, заданной графиком, по известному значению аргумента, а также определять по графику функции значение аргумента, если значение функции задано. Изучение линейной функции предшествует изучению функции $y=kx$ и ее графика. Рассматривается зависимость расположения графика функции от значения коэффициента k. Учащиеся должны понимать, как влияет знак k на расположение графика.

Первая функция, с которой учащиеся знакомятся в 8 классе, называется обратной пропорциональностью, учатся строить ее график. При изучении квадратных корней учатся строить график функции $y = x^2$ и функции $y=\sqrt{x}$. Затем знакомятся с графиками и свойствами этих функций. Построение этих графиков на конкретных примерах осуществляется по точкам. Основное внимание уделяется построению графика с использованием координат вершины параболы, нулей функции (если они имеются) и нескольких дополнительных точек.

В 9 классе повторяются и расширяются знания о функциях и их свойствах. Рассматриваются преобразования графиков: растяжение, сжатие, симметрия. Формируются умения определять по графику промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, нули функции, четность и нечетность, умение устанавливать основные свойства (читать график), знакомятся с графиком квадратичной функции и учатся применять ее свойства. В учебнике авторы приводят общую схему для построения графиков квадратичных функций.

В 7 классе на изучение данной темы отводится 12 часов, в 8 классе – 10 часов, в 9 классе – 38 часов.

Учебники «Математика 7: Арифметика. Алгебра. Анализ данных», «Математика 8: Алгебра функции. Анализ данных», «Математика 9: Алгебра функции. Анализ данных», авторы Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. также отличаются порядком изложения материала.

1. Графики зависимостей $y=x$, $y=-x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=|x|$. Графики реальных зависимостей.

Учащиеся знакомятся с графиками зависимостей $y=x$, $y=-x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=|x|$, у них формируются первоначальные навыки интерпретации графиков реальных зависимостей. Учащиеся должны уметь достаточно быстро строить графики, указывая несколько характерных точек, изображать эти графики схематически. Рассматривается график $y=|x|$. Специальное внимание уделяется работе с графиками реальных зависимостей температуры, движения и др. Акцент ставится на умение считывать с графика нужную информацию.

2. Графики функций $y=kx$, $y=kx+l$, $y=k/x$. Графики реальных зависимостей.

При построении графиков формулируется представление об общих свойствах функции (нули, промежутки, монотонности, сохранение знака).

3. График функции $y=ax^2+bx+c$.

Учащиеся учатся строить график квадратичной функции, по графику читать её свойства; учащимся сообщается, что графиком квадратичной функции является парабола, рассматриваются готовые графики квадратичной функции и анализируются их особенности (наличие оси симметрии, вершины направление ветвей, расположение по направлению к оси). Сначала рассматриваются свойства и график функции $y=ax^2$, затем показывается, как при сдвигах параболы $y=ax^2$ вдоль осей координат получаются графики новых квадратичных функций. Здесь формируется умение находить вершину и ось симметрии графиков квадратичных функций, заданных формулами $y=ax^2+q$, $y=a(x+p)^2$, $y=a(x+p)^2+q$. Рассматриваются некоторые примеры, связанные с переносом вдоль осей координат произвольных графиков. Центральным моментом является доказательство того, что график любой квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ может быть получен с помощью сдвигов вдоль координатных осей параболы $y=ax^2$, после чего учащиеся могут находить абсциссу вершины параболы по известной формуле. Значительное место отводится задачам прикладного характера, которые решаются с опорой на графические представления.

Рассмотренные учебники и программы реализуют обучение на базовом уровне. Но для более серьезной подготовки разработаны программы для углубленного изучения математики. На тему «Функции» отводится еще несколько часов с рассмотрением более сложных функций и их графиков.

Выводы по первой главе:

1. Функция и функциональная зависимость являются неотъемлемой частью математического образования школьников.

2. В общем виде функцию можно определить как зависимость, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. График функции — это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.
3. График сложной функции можно построить путем преобразований графиков элементарных функций (симметрия, параллельный перенос, растяжение или сжатие).
4. Впервые обучающиеся встречаются с понятием «функция» в 7 классе. Для лучшего усвоения данного понятия необходима подготовка в 5 и 6 классах с помощью различных упражнений, указывающих на зависимость между некоторыми величинами.
5. Существует несколько учебных пособий по математике, рекомендуемых Министерством образования Российской Федерации к использованию при реализации образовательных программ основного общего и среднего общего образования.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ»

2.1. Задачи на построение графика функции, заданной формулой

Задача № 1. Построить график функции, заданной формулой

$y = x(6 - x)$, где $-1 \le x \le 5$.

Решение:

Составим таблицу соответствующих значений аргумента и функции:

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−7	0	5	8	9	8	5

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице, и соединим их плавной линией (рис. 2.1). Получим график функции, заданной формулой $y = x(6 - x)$, где $-1 \le x \le 5$ [7, с. 63].

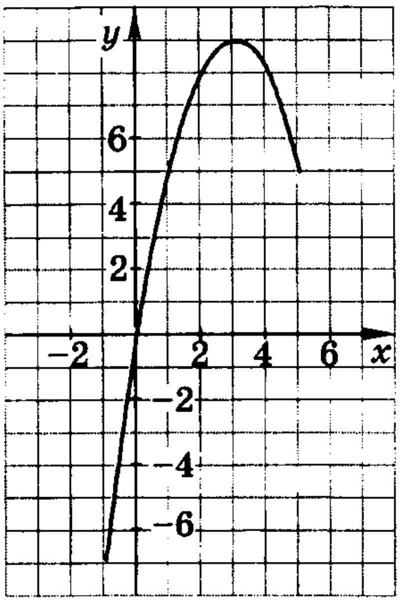

Рис. 2.1.

Задача № 2. По графику функции, изображенному на рисунке 2.2 найти:

1) Значение функции при $x = 3$;
2) Значения x, при которых значение функции равно 7.

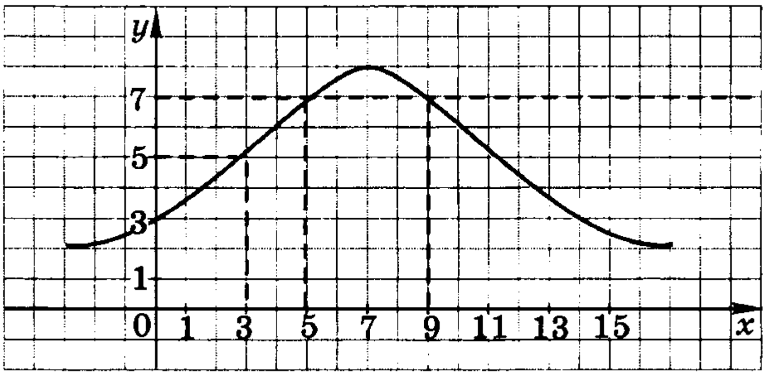

Рис 2.2

Решение:

а) Через точку оси x с абсциссой 3 проведем перпендикуляр к оси x. Точка пересечения этого перпендикуляра графиком функции имеет координаты (3; 5). Значит, при $x = 3$, значение функции равно 5.

б) Проведем через точку оси y с ординатой 7 прямую, параллельную оси x. Эта прямая пересекает график в двух точках: с координатами (5; 7) и (9; 7). Значит, функция принимает значение, равное 7, при $x = 5$ и $x = 9$ [7, с. 64].

Задача № 3. Построить график функции $y = 2x + 3$.

Решение:

Функция $y = 2x + 3$ линейная, поэтому ее графиком является прямая. Используя формулу $y = 2x + 3$, найдем координаты двух точек графика:

Если x = – 2, то y = –1.

Если x = – 1, то y = 5.

Отметив точки А(–2; –1) и В (–1; 5), проведем через них прямую (рис. 2.3) [7, с. 77].

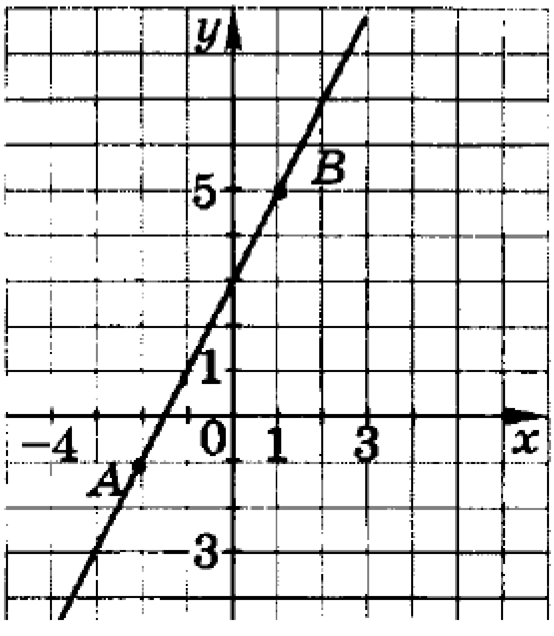

Рис. 2.3

Задача № 4. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение: рассмотрим по отдельности две функции $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$. В одной системе координат построим графики этих функций. Найдем точку пересечения этих графиков, ее абсцисса равна 4 (рис. 2.4).

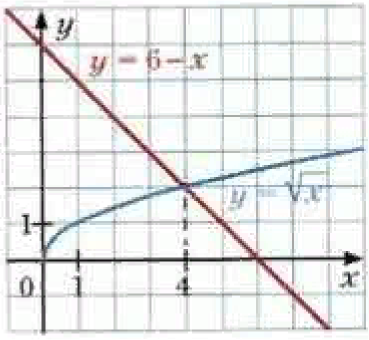

Рис. 2.4

Подстановка в уравнение вместо x числа 4 подтверждает, что оно является корнем данного уравнения.

Ответ: 4 [11, с. 146].

Задача №5. Решите графически уравнение $\frac{4}{x} = x + 3$.

Решение: рассмотрим две функции $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 3$. Построим графики этих функций в одной системе координат (рис. 2.5). На рисунке видно, что точек пересечения графиков две. Абсциссы этих точек равны 1 и –4. Значит, что в каждой из этих точек значение функции $y = \frac{4}{x}$ равно значению функции $y = x + 3$. Если при найденных абсциссах значения данных функций равны, следовательно числа 1 и –4 являются корнями исходного уравнения. Проверка это подтверждает.

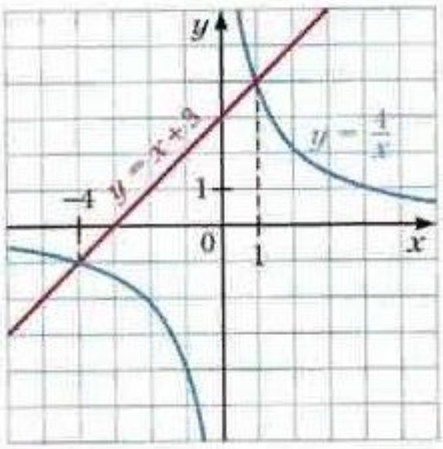

Рис. 2.5

Ответ: –4; 1 [11, с. 78].

Задача № 6. Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2 + x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение:

При $x \neq -0{,}5$ имеем: $y = \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2+1)} = \frac{1}{x}$

Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой (-0,5; -2). Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдёт через выколотую точку. Тогда $k = \frac{-2}{-0{,}5} = 4$ и уравнение прямой примет вид: $y = 4x$ (рис. 2.6) [18].

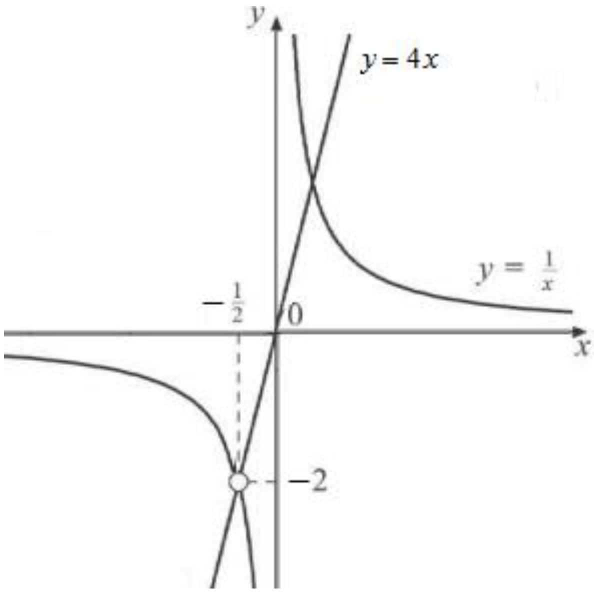

Рис. 2.6

Задача № 7. Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях *m* прямая *y* = *m* не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение: Преобразуем выражение: $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 3 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq -5$. Построим график (рис. 2.7).

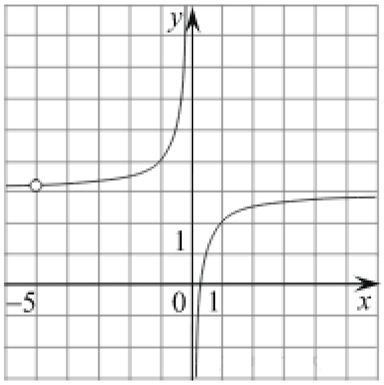

Рис. 2.7

Прямая *y* = *m* не имеет с графиком ни одной общей точки при m = 3 и $m = \frac{16}{5}$.

Ответ: 3; $\frac{16}{5}$ [18].

Задача №8. Постройте график функции $y = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$. Определите, при каких значениях *k* прямая *y* = *kx* не имеет с графиком общих точек.

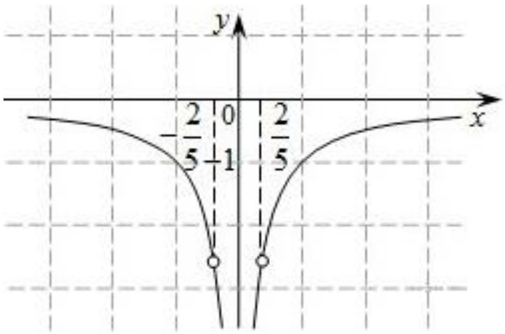

Рис. 2.8

Решение: Преобразуем выражение: $\frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2} = \frac{2,5|x|-1}{|x|(1-2,5|x|)} = -\frac{1}{|x|}$, при условии, что $x \neq \frac{2}{5}$ и $x \neq -\frac{2}{5}$.

Построим график (рис. 2.8).

Прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки, если она совпадает с осью Ox или если она проходит через точку $\left(-\frac{2}{5};-\frac{5}{2}\right)$ или через точку $\left(\frac{2}{5};-\frac{5}{2}\right)$.

Получаем, что $k = -6{,}25$, $k = 0$ и $k = 6{,}25$.

Ответ: $-6{,}25$; 0; 6,25.

Задача №9. Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2, если\ |x| \le 1, \\ -\frac{1}{x}, если\ |x| > 1 \end{cases}$. Определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком одну общую точку.

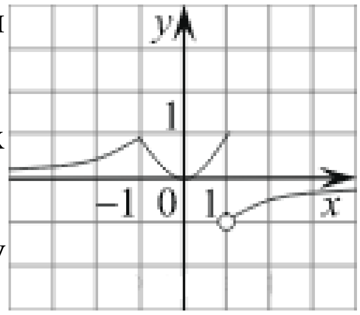

Рис. 2.9

Решение:

Построим график (рис. 2.9). Прямая $y = c$ имеет с графиком одну общую точку при $-1 < c \le 0$.

Ответ: (–1; 0].

Задача №10. Постройте график функции $y = \frac{(\sqrt{x^2-5x+6})^2}{x-3}$. Найдите все значения a, при которых прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек.

Решение:

Найдем область определения данной функции: $x^2-5x+6 \ge 0;\ x \in (-\infty;2] \cup [3;+\infty)$.

Так как $\frac{(\sqrt{x^2-5x+6})^2}{x-3} = \frac{x^2-5x+6}{x-3} = x-2$, получаем, что на области определения функция принимает вид $y = x - 2$. Построим график функции (рис. 2.10) [18].

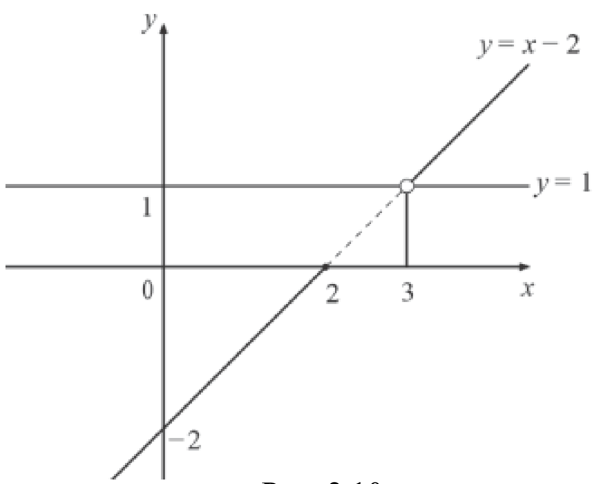

Рис. 2.10

Прямая $y = a$ не имеет с графиком данной функции общих точек при $a \in (0;1]$

Ответ: (0; 1].

Задача №11. Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$. Определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком одну общую точку.

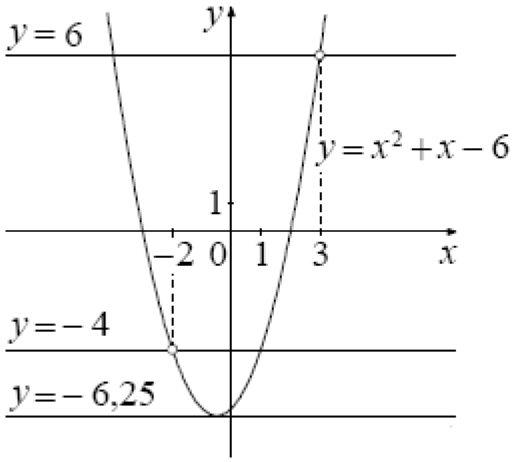

Рис. 2.11

Решение:

Разложим числитель дроби на множители:

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$

При $x \neq -2$ и $x \neq -3$ функция принимает вид $y = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$, графиком является парабола (рис. 2.11) с выколотыми точками (–2; –4) и (3; 6).

Прямая имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых – выколотая. Вершина параболы имеет координаты (–0,5; –6,25). Поэтому c = –6,25, c = 4 или c = 6 [18].

2.2. Исследование функций

Прежде чем исследовать ту или иную функцию, необходимо разобраться с самим понятием. Исследование функции – задача, заключающаяся в определении основных параметров заданной функции. Основной целью исследования является построение графика. Конечно, в настоящее время это легко выполнить, введя формулу функции в поисковый запрос, или воспользовавшись многообразием программ и устройств-графопостроителей, а также более мощными – системами аналитических вычислений. Однако, умение исследовать функцию самостоятельно и построить ее график от руки на бумаге по-прежнему является необходимым элементом математического образования, как, например, умение считать и знание таблицы умножения.

В 9 классе учащиеся расширяют свои знания о функции, вводятся новые понятия – область значений, возрастание и убывание функции. Эти и другие понятия, которые были изучены ранее, позволяют произвести полное исследование функции. Существует несколько способов исследовать функцию:

I. Исследование функции без производной.

1. Нахождение области определения функции (ООФ) функции.
2. Исследование функции на симметричность (четность и нечетность).
3. Определение периодичности (в старших классах при изучении периодических функций).
4. Нахождение точек пересечения с осями и определение интервалов знакопостоянства функции.
5. Исследование на непрерывность. Классификация точек разрыва.
6. Определение асимптот функции. Вычисление вертикальных и наклонных асимптот.

II. Исследование с помощью первой производной (в старших классах).

1. Вычисление первой производной.
2. Нахождение критических точек первого рода.
3. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
4. Нахождение точек экстремума.

III. Исследование с помощью второй производной (в старших классах).

1. Вычисление второй производной.
2. Нахождение критических точек второго рода.
3. Определение интервалов выпуклости и вогнутости функции.
4. Нахождение точек перегиба.

IV. Построение графика функции по исследованию и характерным точкам [4, с. 4].

Рассмотрим подробнее схему исследования функции без производной. Она применяется при выполнении заданий в 9 классе.

Исследование квадратичной функции без производной

1. Находим область определения функции (ООФ).

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x, для которых существуют соответствующие значения y.

Для нахождения области определения элементарной функции необходимо рассмотреть условие существования каждой основной элементарной функции, входящей в данную функцию. Общим ООФ будет пересечение всех частных ООФ.

Если функция составная (т.е. состоит из нескольких элементарных функций, каждая из которых определена на своем интервале), то нужно на каждом интервале определить ООФ для соответствующей функции, а после взять объединение полученных частных ООФ. В других случаях необходимо исходить из определения функции.

2. Исследование функции на симметричность (четность и нечетность).

Функция называется четной, если для любого x, принадлежащего ООФ, $f(-x) = f(x)$. Функция называется нечетной, если для любого x принадлежащего ООФ $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Ox, нечетной – относительно начала координат. Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида. Для симметричных функций область определения должна быть симметричной относительно начала отсчета.

3. Определение периодичности.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число S, что для любого x, принадлежащего ООФ, $f(x + S) = f(x)$.

Наименьшее из чисел S называется периодом функции, т.е. $T = \min S$. Отметим, что из основных элементарных функций периодическими являются только тригонометрические, и в случае периодичности достаточно исследовать функцию на периоде, а после дублировать ее.

4. Нахождение точек пересечения с осями и определение интервалов знакопостоянства функции.

Точка $H(0;\ y(0))$ является точкой пересечения с осью Oy. А для нахождения точек пересечения с осью Ox нужно решить уравнение $y(x) = 0$ (т.е. найти нули функции). Нули функции делят ООФ на интервалы знакопостоянства функции, а знак определяется путем подстановки любого числа из рассматриваемого интервала.

5. Исследование на непрерывность. Классификация точек разрыва

6. Определение асимптот функции. Вычисление вертикальных и наклонных асимптот

Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка на графике функции при ее удалении в бесконечность. По способу вычисления и форме представления асимптоты подразделяются на вертикальные и наклонные. Частным случаем наклонных асимптот являются горизонтальные [4, с. 5 – 10].

2.3. Преобразования графиков функций

Задача №1. Построить графики функций:

а) $y = x^2 + 1$;

б) $y = \sqrt{x - 1}$;

в) $y = (x - 1)^2 + 2$;

г) $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$;

д) $y = -|2x + 1|$.

Решение. Когда сложная функция получена из простейшей путем нескольких преобразований, то преобразования графиков выполняются в порядке арифметических действий с аргументом, например, умножение идет до сложения и т.п.

а) $y = x^2 + 1$

Преобразование в одно действие типа $f(x)+a$. Строим график функции $y=x^2$, а затем сдвигаем график вверх на 1, получаем график функции $y=x^2+1$ (рис. 2.14).

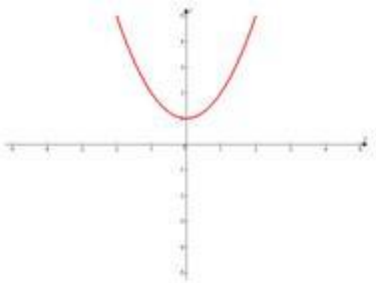

Рис. 2.14

б) $y=\sqrt{x-1}$

Преобразование в одно действие типа $f(x-a)$. Строим график функции $y=\sqrt{x}$, а затем сдвигаем график вправо на 1, получаем график функции $y=\sqrt{x-1}$ (рис. 2.15).

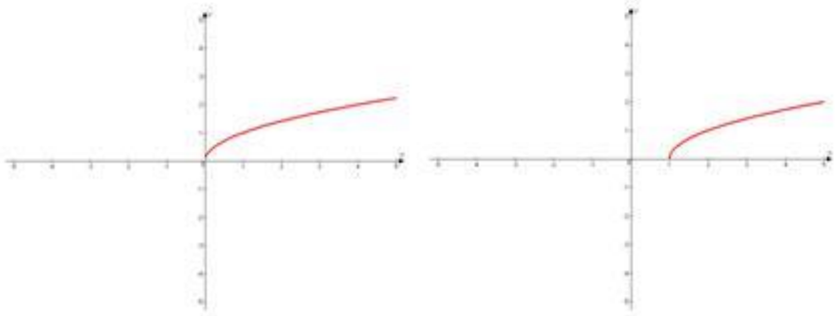

Рис. 2.15

в) $y=(x-1)^2+2$

В этом примере два преобразования, выполним их в порядке действий: сначала действия в скобках $f(x-a)$, затем сложение $f(x)+a$. Строим график функции $y=x^2$, затем сдвигаем график вправо на 1 и вверх на 2. Получаем график функции $y=(x-1)^2+2$(рис. 2.16) [22].

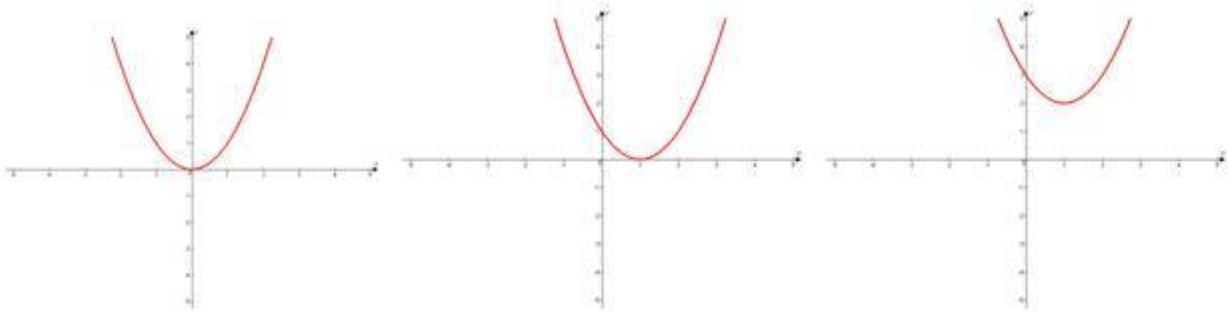

Рис. 2.16

Так же можно построить эту функцию как квадратичную после раскрывания скобок.

г) $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Преобразование в одно действие типа $f\left(\frac{x}{a}\right)$. Строим график функции $y = cos\,(x)$. Растягиваем график в 2 раза от оси ординат вдоль оси абсцисс (рис. 2.17):

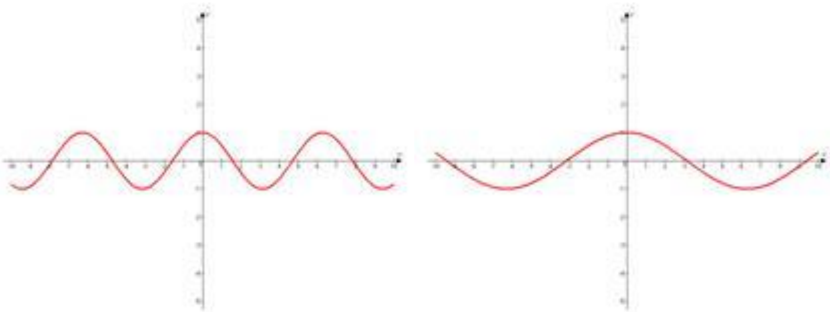

Рис. 2.17

Задача №2. Построить график функции $y = -|2x + 1|$.

Решение: имеем три преобразования вида $f(a \cdot x)$, $f(x + a)$ и $-f(x)$. Для выполнения преобразований в порядке действий обратим внимание, что сначала будет выполняться умножение, затем сложение, а затем смена знака. Чтобы умножение применялось ко всему аргументу модуля в целом, вынесем двойку за скобки в модуле [22].

$$y = -|2x + 1| = -\left|2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right|$$

Строим график функции $y = |x|$ (рис. 2.18):

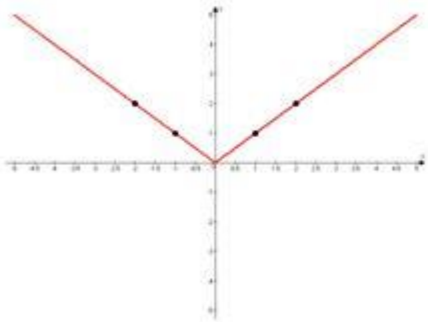

Рис. 2.18

Сжимаем график в два раза вдоль оси абсцисс, получаем график функции $y = |2x|$ (рис. 2.19):

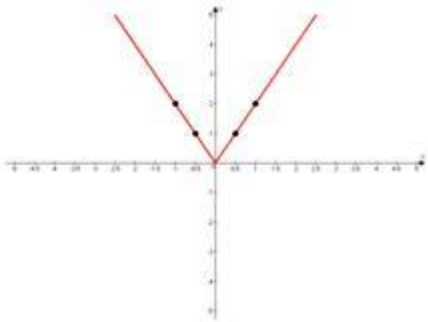

Рис. 2.19

Сдвигаем график влево на $\frac{1}{2}$ вдоль оси абсцисс, получаем график функции $y = \left|2(x + \frac{1}{2})\right|$ (рис. 2.20):

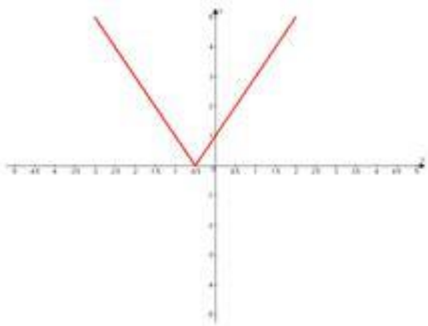

Рис. 2.20

Отражаем график симметрично относительно оси абсцисс, получаем график данной функции $y = -\left|2(x + \frac{1}{2})\right|$ (рис. 2.21) [22].

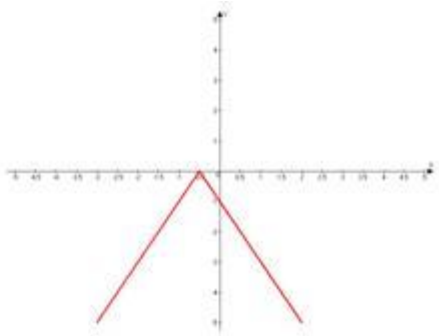

Рис. 2.21

Выводы по второй главе:

1. График функции можно построить по точкам, составив таблицу соответствующих значений аргумента и функции.
2. Исследование функции помогает более точно построить график.
3. Знание графиков элементарных функций и умение применять преобразования графиков функций позволяют строить графики сложных функций.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ УРОКОВ

3.1. Разработка урока в 7 классе по теме «Линейная функция и ее график»

При разработке современного урока важно учитывать и соблюдать ФГОС второго поколения, который основан на системно-деятельностном подходе, который обеспечивает:

- формирование готовности к саморазвитию и непрерывному образованию;
- проектирование и конструирование социальной среды развития обучающихся в системе образования;
- активную учебно-познавательную деятельность обучающихся;
- построение образовательной деятельности с учетом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей обучающихся [21].

Поэтому необходимо разобраться, что он собой представляет. При системно-деятельностный подходе обучающийся является активным субъектом педагогического процесса. Учитель выступает в роли наставника, направляющего ученика в процессе обучения. Главная цель системно-деятельностного подхода в обучении состоит в том, чтобы пробудить у ребенка интерес к предмету и процессу обучения, а также развить у него навыки самообразования, самопознания и самооценки. Результатом этой деятельности должно стать воспитание человека с активной жизненной позицией как в обучении, так и в жизни. Этот человек может ставить перед собой цели, решать учебные и жизненные задачи и отвечать за результат своих действий. Чтобы достичь этой цели, современный учитель должен понимать, что педагогический процесс является совместной деятельностью учащегося и педагога, межу ними должно быть сотрудничество и взаимопонимание. Важно замотивировать школьников к плодотворной работе на уроке и к изучению той или иной темы.

В математике необходимо постоянно доказывать связь изучаемых вопросов с другими дисциплинами и реальной жизнью. При изучении некоторых понятий для их лучшего усвоения учащимися желательна дополнительная подготовка. В частности, в методике обучения теме «Функции» важная роль отводится подготовке функциональной базы в начальной и основной школе до начала систематического изучения (определения функции, способов задания, общих свойств и др.). Подготовительная работа должна проводиться с помощью ряда всевозможных упражнений и обобщений, в основе которых лежит идея функциональной зависимости. Эта работа будет способствовать накоплению знаний о существовании зависимости между величинами, а так же приобретению учащимися опыта соответствующих учебных действий, которые позволят сформировать у них правильные представления, ведущие затем к образованию функциональных понятий, развитию функционального мышления. На данном этапе не нужно сообщать учащимся какие-либо дополнительные сведения, а только там, где возможно, подчеркнуть функциональный момент. При рассмотрении следующих вопросов целесообразно осуществлять функциональную подготовку:

1. Решение текстовых задач, которое предполагает рассмотрение зависимостей между величинами. Учащиеся постепенно приучаются к тому, что есть величины, которые могут менять свои числовые значения, причем в зависимости от изменения одной величины (например, скорости) другая величина (путь) принимает определенное значение.

2. Зависимость между результатами арифметических действий и значениями их компонентов. Зависимость понимается здесь в том смысле, что изменение одного или нескольких компонентов (например, увеличение каждого из множителей в 2 раза) приводит к изменению результата (увеличению произведения в 4 раза). Вывод может быть оформлен в виде таблицы, которая наглядно устанавливает характер изменения.

3. Буквенные выражения, простейшие тождественные преобразования и числовые значения. Полезно обращать внимание учащихся на то, что значения выражений (например, 4m; 5+a) меняются от изменения значений букв (m; a). Использование таблиц с одним или несколькими выражениями способствует усвоению понятия «соответствующие значения выражений», подчеркивается функциональная природа выражений. Необходимо показать учащимся, что выражение в некоторых частных случаях не имеет смысла, т. е. числового значения (например, на нуль делить нельзя). Важно научить их под буквой видеть неизвестное число.

4. Формулы. Учащиеся знакомятся со смыслом понятия «формула» как равенства, содержащего буквы; различными часто встречающимися формулами из геометрии, физики; учатся сами составлять формулы и производить вычисления по ним. Работая с формулой, они выясняют, от скольких и каких именно других величин зависит обозначенная величина (стоящая в равенстве слева).

5. Уравнения, которые решаются на основе связи между компонентами и результатами арифметических действий.

6. Координатная плоскость, которая позволяет наглядно представлять зависимости между двумя величинами. Учащиеся знакомятся с терминологией; учатся определять координаты точек и строить точки по координатам, строить геометрические фигуры и простейшие графики (последнее сейчас не во всех учебниках математики). Учащиеся осваивают учебные действия по работе с системой координат, которые будут необходимы при изучении конкретных функций.

7. Диаграммы (круговая, столбчатая), которые наглядно представляют зависимости между дискретными величинами [17, с. 19].

Так как функция является одним из главных понятий школьного курса математики, крайне важно, чтобы каждый учащийся хорошо его усвоил. Ведь дальнейшее изучение курса алгебры фактически связано с введением новых функций и исследованием их свойств.

Первый урок по этой теме можно начать с опроса учащихся о примерах постоянных и переменных величин. Затем, можно обратить внимание, что многие переменные величины связаны между собой, и эта связь выражается в том, что изменение одной величины влечёт за собой изменение другой [2, с. 104].

Очень важно разобрать с учащимися примеры, приведенные в параграфах учебника. Автором рассматриваются не только примеры, демонстрирующие связь между величинами, но и вводится ряд терминов и понятий, связанных с функцией. Каждый пример завершён важным выводом о свойстве установленного правила связи между величинами. Следует обратить внимание учащихся, что не любая связь между величинами является функциональной и рассмотреть соответствующие примеры для закрепления этой мысли.

При изучении темы «График функции» желательно использовать возможности компьютера, продемонстрировав построение графиков с помощью табличного процессора *Excel* или пакетов типа *MathCad*. Следует обсудить порядок построения графика при его построении по точкам вручную (с помощью графического редактора), по точкам на основании таблицы значений (с помощью табличного редактора *Excel*) и с помощью математических пакетов и подчеркнуть, какую часть технической работы берёт на себя компьютер. [2, с. 110].

Также следует продемонстрировать преимущества графического способа представления функции. Например, для получения метапредметных результатов, можно подготовить демонстрационные материалы графических изображений реальных процессов (изменение высоты самолёта на протяжении одного полёта, кардиограмму и т. д.), представив их одновременно в табличной и графической форме. А учащимся предложить сформулировать вопросы о происходящем процессе, на которые легко ответить на основании графика и гораздо сложнее — на основании анализа таблицы.

В результате изучения этой темы учащиеся должны усвоить, что график функции – это один из способов задания функции. Также при изучении этой темы следует заложить основы умения читать график функции, т. е. определять свойства функции по её графику. В качестве актуализации темы можно предложить найти в различной литературе (учебной, научно-популярной), средствах массовой информации информацию, представленную в виде графиков. [2, с. 111].

При подготовке к уроку в 7 классе по теме «Линейная функция и ее график» важно учитывать, что понятие функции еще не всеми учащимися усвоено полностью и правильно. Нецелесообразно начинать изучение этой темы с определения, вводя линейную функцию как некий абстрактный объект. Желательно предварительно рассмотреть несколько реальных ситуаций, которые описываются с помощью линейной функции. С такого рода примеров начинается текст параграфа. Затем выводим вместе с учащимися формулы, которыми заданы обе функции в примерах, и формулируем определение линейной функции.

Далее при рассмотрении следующих задач выясняем, чем является график данной функции. В курсе алгебры 7 класса строго доказать, что графиком линейной функции является прямая, нельзя. Поэтому достаточно продемонстрировать этот факт на примерах. Замечание о том, что вертикальная прямая не может служить графиком функции, закрепит у учащихся правильное понимание определения функции, так как одному значению аргумента соответствует бесконечно много значений функции.

Следует уделить внимание рассмотрению частных случаев линейной функции $y = kx + b$, а именно случаев, когда $k = 0$ или $b = 0$. Поэтому нужно продумать ряд вопросов и заданий для лучшего усвоения и понимания данного понятия. Для этого в учебнике «Алгебра 7 класс» автора А.Г.Мерзляка предлагаются задания различной тематики и уровня сложности. А с помощью заданий из раздела «Готовимся к изучению новой темы» можно мотивировать учащихся к дальнейшей учебной деятельности [2, с. 114].

3.2. Разработка урока в 8 классе по теме «Функция $y = x^2$ и ее график»

Удачным примером при знакомстве с данной функцией является изучение зависимости площади квадрата от длины его стороны. Затем переходим к рассмотрению самой функции и ее графика. В тексте параграфа использован процесс построения графика по точкам, с которым учащиеся уже знакомы. Можно напомнить учащимся о том, что этот способ не дает полного представления о поведении графика на всей плоскости, поэтому на данном этапе учащиеся должны воспринять свойства полученного графика не по построенной фигуре, а исходя из рассмотренных свойств функции. Такой подход является пропедевтическим для формирования аппарата у учащихся исследования свойств функции и построения графиков на их основании.

В параграфе исследуются свойства функции, исходя из ее аналитического задания. В частности, делается вывод об области определения и области значений функции.

До построения самого графика исследуются некоторые его свойства. Например, доказывается, что искомый график – фигура, которая имеет ось симметрии – ось ординат. Для лучшей организации работы при выполнении заданий этого параграфа можно рекомендовать учащимся использовать шаблон параболы $y = x^2$.

Поскольку материал параграфа познакомил учащихся с графиком новой функции, то целесообразно расширить класс уравнений, которые можно решить графическим способом. Это показано на примере в конце параграфа.

3.3. Разработка урока в 9 классе по теме «Квадратичная функция, ее свойства и график»

Текст параграфа начинается с определения квадратичной функции, хотя с частными случаями ($y = x^2$ и $y = ax^2$) обучающиеся уже знакомы. Поэтому целесообразно вспомнить график и свойства этих функций. Затем необходимо рассмотреть предложенные автором учебника примеры, чтобы перейти к общему виду квадратичной функции и ее свойствам.

Так как обучающиеся уже умеют решать квадратные уравнения, то при изучении свойств данной функции, они должны найти нули, решив соответствующее квадратное уравнение.

Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке (x_0; y_0), где $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Общее представление о графике квадратичной функции дают координаты вершины параболы и направление ее ветвей. Поэтому график можно строить без использования параллельных переносов, действуя по схеме, приведенной в тексте параграфа.

При решении задач, не требующих построения графика, можно обойтись его схематическим изображением: ось абсцисс, нули функции, направление ветвей параболы.

Желательно рассмотреть материал рассказа «Когда сделаны уроки». Преобразования графиков, описанные в нем, основаны на преобразовании «осевая симметрия», с которым учащиеся познакомились еще в 6 классе.

Выводы по третьей главе:

Перед подготовкой к урокам необходимо учесть методические особенности изучаемой темы:

1. Необходимость пропедевтической подготовки в 5 и 6 классах с помощью упражнений, основанных на функциональной зависимости величин.
2. Использование ИКТ средств для наглядного представления графиков функций.
3. Рассмотрение дополнительного материала по данной теме как из учебника, так и из других источников.
4. Дифференцирование заданий в соответствии со способностями обучающихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Функция имеет общекультурное, мировоззренческое значение. Ее изучение позволяет познакомить обучающихся с идеей всеобщей связи, идеей непрерывности, бесконечности, интерполяции (приближения). Понимание функции как математической модели реальных процессов определяет общекультурный аспект изучения математики. В связи с этим учащиеся должны научиться видеть функциональную зависимость не только в алгебраических формулах, но и в других школьных предметах и в жизни.

В данной работе мы изучили теоретические основы темы «Построение графиков функций в средней школе», проанализировали учебно-методическую литературу, программы и учебники, рекомендуемые Министерством образования к реализации в 2017-2018 учебном году. Так же были рассмотрены примеры задач на построение графиков различных функций, включая преобразования графиков функций и исследование функции.

Цель, поставленная в выпускной квалификационной работе, была достигнута. Была разработана система учебных занятий в 7, 8 и 9 классах. Так как изучение функций, в первую очередь, способствует развитию функционального мышления, отвечающего за видение зависимостей между изменениями разных объектов, а также целям, которые ставятся при изучении алгебраического материала (развитие умения работать с абстрактным материалом, умения анализировать и др.), были подобраны соответствующие примеры и задания для закрепления материала. При разработке технологических карт были учтены методические особенности данной темы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башмаков, М. И. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / М. И. Башмаков. М. : Просвещение, 2007. – 207 с. : ил.
2. Буцко Е.В. Алгебра : 7 класс : методическое пособие / Буцко Е.В., А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский и пр. – 2-е изд., дораб. – М. : Вентана-Граф, 2015. – 192 с. : ил.
3. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе : сб. ст. / сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов. М. : Просвещение, 1980. – 256 с.
4. Иванов В.И. Методические указания к изучению темы «Исследование функций» (для студентов всех специальностей) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://kvm.gubkin.ru/pub/fan/Functions%202013.pdf
5. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 2004. – 287 с.
6. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе / учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1977. — 480 с.
7. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений / Ю.Н Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 256 с.: ил.
8. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений / Ю.Н Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2013. – 287 с.: ил.
9. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений / Ю.Н Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 4-е изд. – М. : Просвещение, 2017. – 287 с.: ил.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра : 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – 2-е изд., дораб. – М. : Вентана-Граф, 2016. – 272 с. : ил.
11. Мерзляк А.Г. Алгебра : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М. : Вентана-Граф, 2017. – 256 с. : ил.
12. Мерзляк А.Г. Алгебра : 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. – М. : Вентана-Граф, 2015. – 368 с. : ил.
13. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 – 9 класс : метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. М. : Мнемозина, 2000. – 246 с. : ил.
14. Мордкович А. Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе. – 1996. — № 6. – С. 28—33.
15. Ожегов С.И., Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка: 80 000 слов и фразеологических выражений. – 4-е изд., М.: Высшая школа, 1993. — 944 с.
16. Полное исследование функции и построение графика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cleverstudents.ru/functions/function_researching.html
17. Покровский, В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учеб.-метод. пособие / В. П. Покровский ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с.
18. Решу ОГЭ: математика [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru/test?theme=88
19. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учеб. пособие / Т. А. Иванова [и др.] ; под ред. проф. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород : НГПУ, 2003. – 320 с.

20. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. М. : Просвещение, 2011. 59 с. (Стандарты второго поколения).
21. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/336
22. Функции и графики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathematichka.ru/school/functions/Function_Graph_Table.html

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Технологическая карта урока математики в 7 классе

«Линейная функция и ее график»

Учебник: Алгебра – 7, авторы А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир, издательский центр «Вентана - Граф», 2016г.
Тип урока: совершенствование умений и навыков.
Педагогические технологии: проблемное обучение, обучение в сотрудничестве, личностно-ориентированное обучение, коммуникативные и здоровьесберегающие технологии.
Методы работы: словесные, наглядные, постановки учебной проблемы, практические (самостоятельная работа).
Формы обучения: фронтальная, индивидуальная, работа в парах.
Формируемые результаты:

Предметные: закрепить знания о линейной функции и её свойствах, закрепить навык построения графика линейной функции.
Личностные: формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью.
Метапредметные: формировать умение определять понятия, сравнивать, анализировать, делать выводы.

Планируемые результаты: учащийся научится строить график линейной функции и описывать её свойства.
Основные понятия: линейная функция, график линейной функции, прямая пропорциональность.
Структура урока:

- Организационный момент, мотивация к учебной деятельности.
- Актуализация знаний и умений.
- Выявление места и причины затруднения.
- Построение проекта выхода из затруднения и его реализация.
- Применение новой информации (в знакомой и новой ситуации)
- Проверка уровня усвоения учебного материала
- Информация о домашнем задании
- Рефлексия учебной деятельности

Ход урока

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Планируемые результаты
Организационный момент, мотивация к учебной деятельности.	Приветствие обучающихся, проверка готовности к уроку учащихся, оборудования, классного помещения, выявление отсутствующих, излагается перечень умений, которыми должен овладеть каждый на уроке.	Включаются в деловой ритм урока. Определяют, чему могут научиться на уроке.	Коммуникативные: уметь участвовать в коллективном обсуждении вопроса. Познавательные: уметь видеть цель урока Регулятивные: уметь ставить учебную задачу на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что ещё неизвестно. Уметь концентр внимание, организовать рабочее место. Личностные: уметь устанавливать связи между целью учебной деятельности и её мотивом.
Актуализация знаний и умений	Предлагается текст с пропусками слов: 1. Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой	Работа в парах: вставляют пропущенные слова в тексте.	Предметные: Уметь структурировать свои знания. Личностные: Уметь осознавать проблемы, вести диалог на основе равноправных отношений и взаимного уважения,

	вида_________, где *х* _______ переменная, *к* _____________ число. 2. График прямой пропорциональности представляет собой_____, проходящую через ______. 3. Чтобы построить график функции *у=кх* достаточно найти координаты ___________ точки графика этой функции, отличной от____. 4. При *к*> 0 график прямой пропорциональности расположен в __________ координатных четвертях. 5. При *к*< 0 график прямой пропорциональности расположен в __________ координатных четвертях.		конструктивно разрешать конфликты. Коммуникативные: уметь учитывать разные мнения, стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве, формулировать собственное мнение, аргументировать и координировать её с позициями партнеров. Познавательные Уметь восстанавливать понятия, работать с текстом.
Выявление места и причины затруднения.	Разъясняет базовые знания: 1. Что такое линейная функция? 2. Общий вид формулы линейной функции и их график. 3. Частные виды линейных функций. 4. Взаимное расположение графиков линейных функций. Предлагает задания для творческой работыв парах: задать формулой графики линейных функций так, чтобы они описали квадрат. Предлагает задание для самостоятельной работы в парах: найти отличительные черты графиков прямой пропорциональности и линейной функции.	Определяют, какого знания или умения недостает, фиксируют в тетради основные понятия, строят графики. Работа в парах: выполняют задание, отвечают на вопросы.	Познавательные: уметь аналитически мыслить, искать необходимую информацию, устанавливать причинно-следственные связи. Личностные: уметь точно и грамотно излагать свои мысли в устной и письменной математической речи. Регулятивные: уметь преодолевать трудности и препятствия на пути достижения цели. Предметные: знать понятие линейной функции, условия пересечения и параллельности графиков линейных функций. Коммуникативные: уметь слушать учителя и других учащихся, уметь с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации; владеть монологической и диалогической формами речи.
Построение проекта выхода из затруднения и его реализация	• Предлагает сформулировать тему урока, прочитать в учебнике и ответить друг другу на вопросы: 1. Какую функцию называем линейной? 2. Общий вид формулы, с помощью которой, задается линейная функция. 3. Частные случаи линейной функции. 4. Что обозначают коэффициенты к и в? 5. Условия параллельности прямых.	Формулируют тему урока, работают с учебником, читают, анализируют, выделяют главное, дают ответы на вопросы друг другу.	Познавательные: уметь работать с книгой, отбирать необходимый материал из текста, делать выводы, структурировать информацию в виде схемы. Уметь вести самостоятельный поиск, отбор информации, ее преобразование, выделять главное, сравнивать, обобщать, анализировать, проводить аналогию, устанавливать причинно-следственные связи. Уметь искать и выделять необходимую информацию; применять методы информационного поиска. Уметь структурировать знания,

	• Предлагает закодировать учебную информацию в виде схемы: линейная функция и её частные случаи, запомнить главные формулы в схеме. • Предлагает задание на распознание линейной функции и определение ее коэффициентов. На столах у вас имеется математическое лото, где дается аналитическое и графическое задание функций. Задача соединить эти данные.	Кодируют информацию в виде схемы. Заполняют математическое лото.	осознано и произвольно строить речевые высказывания в устной и письменной форме, давать определение понятиям. Предметные: Уметь формировать интерес к теме, давать определение понятиям, устанавливать причинно-следственные связи, выделять главное. Коммуникативные: Уметь работать в паре, уважительно относиться к точке зрения других, нести ответственность за успехи коллектива и свои лично. уметь слушать, учитывать мнение партнера, вести диалог, оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь. Регулятивные: уметь отвечать на вопросы по плану, анализировать свои достижения, самостоятельно контролировать свое время и управлять им.
Примене-ние новой информа-ции (в знакомой и новой ситуации)	Предлагается выполнить следующие задания: 1.Определите, являются ли прямые параллельными? У = 5х+7 и у = - 5х+7 У = 3,6х+8 и у = 3,6х+18 У = - 6х-32 и у = - 6х 2.Представить формулу 4х + 6у = 0 линейной функции в стандартном виде. 3. № 317, 327.	Выполняют предложенные задания.	Предметные: Уметь записывать формулу линейной функции, строить график, характеризовать отличительные черты, задавать линейную функцию различными способами, распознавать линейную функцию по формуле. Познавательные: уметь переносить новые знания в новые условия, выбирать наиболее эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий, осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий. Личностные: уметь развивать интеллектуальные способности, логическое мышление в процессе решения задач, сравнивать, выявлять закономерности, обобщать.
Проверка уровня усвоения учебного материала	Предлагает выполнить самостоятельную работу (приложение).	Выполняют самостоятельную работу.	Личностные: Уметь работать самостоятельно. Регулятивные: уметь выполнять задания в соответствии с заданными правилами, контролировать и оценивать процесс и результаты своей деятельности, выделять и осознавать того, что уже усвоено и что ещё нужно усвоить, осознавать качество и уровень усвоения; оценивать результат работы, уметь самостоятельно контролировать своё время и управлять им.
Информа-ция о домашнем задании	Информирует о домашнем задании. Читать п 16 выучить определения, Письменно №314,	Записывают в дневники домашнее задание.	Регулятивная: уметь записывать Д/з в дневник.

	316, 319		
Рефлексия учебной деятельности	Подводятся итоги урока. Что каждый из вас сегодня узнал, понял, открыл? Что понравилось особенно, что не понравилось? Учитель оценивает ответы учащихся учитывает правильность, уровень полноты ответа, качество выполненных заданий, самостоятельность, оригинальность.	Дают оценку своей работы и работы пары.	Регулятивная: уметь оценивать результаты своей и чужой деятельности, контролировать оценку процесса и результат деятельности.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1) Постройте график функции y = 2x – 1
2) Не выполняя построений, найдите координаты точек пересечения графика функции y = -x + 4 с осями координат.
3) Постройте график функции y = 2x; принадлежит ли этому графику точка A(400;200)?
4) Постройте график функции y = -4; в какой точке этот график пересекается с осью y?

Вариант 2

1) Постройте график функции y = -4x + 6
2) Не выполняя построений, найдите координаты точек пересечения графика функции y = 6x – 11 с осями координат.
3) Постройте график функции y = -0,5x; найдите координаты точки пересечения этого графика с прямой y = -1.
4) График прямой пропорциональности проходит через точку A. Проходит ли он через B, если, A(1,5; -3); B(-11;22)?

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Технологическая карта урока алгебры в 8 классе

«Функция $y = x^2$ и ее график»

Учебник: Алгебра – 8, авторы А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир, издательский центр «Вентана - Граф», 2017г.
Тип урока: урок открытия нового знания.
Педагогические технологии: проблемное обучение, обучение в сотрудничестве, личностно-ориентированное обучение, коммуникативные и здоровьесберегающие технологии.
Методы работы: словесные, наглядные, постановки учебной проблемы, практические (самостоятельная работа).
Формы обучения: фронтальная, индивидуальная, работа в парах.
Формируемые результаты:

Предметные: формировать умение формулировать свойства функции y = x2 и строить её график.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности.

Планируемые результаты: обучающийся научится формулировать свойства функции $y = x^2$ и строить её график.
Основные понятия: функция $y = x^2$, парабола, ветвь параболы, вершина параболы.
Структура урока:

- Организационный момент, мотивация к учебной деятельности.
- Актуализация знаний и умений.
- Выявление места и причины затруднения.
- Построение проекта выхода из затруднения и его реализация.
- Первичное закрепление
- Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.
- Информация о домашнем задании.
- Рефлексия учебной деятельности.

– Ход урока

Этапы урока	**Деятельность учителя**	**Деятельность обучающихся**	**Планируемые результаты**
Организа-ционный момент. Мотивация к учебной деятельности	Приветствие обучающихся, проверка готовности к уроку учащихся, оборудования, классного помещения, выявление отсутствующих, создание благоприятных условий для учебной деятельности.	Включаются в деловой ритм урока. Определяют, чему могут научиться на уроке.	<u>Коммуникативные:</u> уметь участвовать в коллективном обсуждении вопроса. <u>Познавательные:</u> уметь видеть цель урока <u>Регулятивные:</u> уметь ставить учебную задачу на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что ещё неизвестно. <u>Личностные:</u> уметь устанавливать связи между целью учебной деятельности и её мотивом.

Актуализация знаний и умений	Организовать учащихся на работу в группах для построения графика по заданным координатам.	Выполняют задание, работая в группах	Познавательные: строить логическое рассуждение, включающее установление причинно- следственных связей; Коммуникативные: устанавливать и сравнивать разные точки зрения; Регулятивные: анализировать условия достижения цели на основе учёта выделенных учителем ориентиров действия. Личностные: желание приобретать новые знания, умения, совершенствовать имеющиеся.
Выявление места и причины затруднения	Например, чтобы научиться строить параболу по заданным точкам, нам необходимо знать всё о функции $y = x^2$	Учащиеся соотносят свои действия на этом шаге с изученными способами и фиксируют, какого знания или умения недостает для решения исходной задачи и задач такого класса. Причина затруднения – не знакомая для них функция $y = x^2$.	Познавательные: строить логическое рассуждение, включающее установление причинно- следственных связей; Коммуникативные: Формулировать собственное мнение, аргументировать и координировать её с позициями партнёров в сотрудничестве. Регулятивные: уметь самостоятельно контролировать своё время и управлять им.
Построение проекта выхода из затруднения и его реализация	Предлагает определиться с темой урока, рассмотреть значимость данной функции. На доске совместно с учащимися записывает цели урока. Совместно делают вывод. Вводит понятие график, парабола. Анализ функции $y = x^2$.	В коммуникативной форме формулируют какие знания им нужно построить и чему научиться; предлагают тему урока, которую учитель может уточнить.	Познавательные: Осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий Коммуникативные: Задавать вопросы, необходимые для организации собственной деятельности и сотрудничества с партнёром; адекватно использовать речевые средства для решения различных задач. Регулятивные: планировать пути достижения целей. Личностные: Самостоятельное применение знаний, способов действий, поиск нестандартных решений.
Первичное закрепление	Предлагает обучающимся в группах выполнить следующее задание: найти точки пересечения графиков 1) $y = x^2$ и $y = x + 2$ 2) $y = x^2$ и $y = -2x - 1$.	1) решают (фронтально, в группах, в парах) несколько типовых заданий на новый способ действия; 2) проговаривают вслух выполненные шаги и их обоснование – определения, алгоритмы, свойства и т.д.	Познавательные: Осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий Коммуникативные: формулировать собственное мнение и позицию, координировать её с позициями партнёров Регулятивные: адекватно оценивать правильность выполнения

			действия и вносить необходимые коррективы Личностные: Осваивать новые виды деятельности; участвовать в творческом, созидательном процессе.
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону	Предлагает самостоятельно в тетрадях построить и исследовать функцию $y = -x^2$.	Индивидуально, самостоятельно каждый строит функцию $y = -x^2$ в тетрадях, проводят соответствующий анализ.	Познавательные: Самостоятельно проводить исследование на основе применения методов наблюдения и эксперимента; Коммуникативные: Осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь Регулятивные: Планировать пути достижения целей Личностные: Осознавать трудности и стремиться к их преодолению, осваивать новые виды деятельности.
Информация о домашнем задании	Информирует о домашнем задании. Читать п 11 выучить определения, Письменно №351, 354	Записывают в дневники домашнее задание.	Регулятивная*:* уметь записывать Д/з в дневник.
Рефлексия учебной деятельности	Предлагает на листе обвести свою руку. Каждый палец – это какая – то позиция, по которой необходимо высказать своё мнение.	Обучающиеся соотносят цель и результаты своей учебной деятельности и фиксируют степень их соответствия.	Познавательные: Делать умозаключения Коммуникативные: Осуществлять коммуникативную рефлексию как осознание оснований собственных действий и действий партнёра. Регулятивные: адекватно оценивать правильность выполнения действия. Личностные: оценивание усваиваемого содержания, исходя из социальных и личностных ценностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Технологическая карта урока алгебры в 9 классе

«Квадратичная функция, ее свойства и график»

Учебник: Алгебра – 9, авторы А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков, издательский центр «Вентана - Граф», 2015г.
Тип урока: обобщение и систематизация учебного материала.
Педагогические технологии: проблемное обучение, обучение в сотрудничестве, личностно-ориентированное обучение, коммуникативные и здоровьесберегающие технологии.
Методы работы: словесные, наглядные, постановки учебной проблемы, практические (самостоятельная работа).
Формы обучения: фронтальная, индивидуальная, работа в парах.
Формируемые результаты:

Предметные: формировать умение использовать свойства квадратичной функции при решении задач.

Личностные: развивать готовность к самообразованию и решению творческих задач.

Метапредметные: формировать умение выдвигать гипотезы при решении задач и понимание необходимости их проверки.

Планируемые результаты: обучающийся научится использовать свойства квадратичной функции при решении задач.
Основные понятия: квадратичная функция, схема построения графика квадратичной функции.
Структура урока:

- Организационный момент, мотивация к учебной деятельности.
- Актуализация знаний и умений.
- Выявление места и причины затруднения.
- Построение проекта выхода из затруднения и его реализация.
- Первичное закрепление
- Разбор задачи повышенной сложности из ОГЭ по математике
- Информация о домашнем задании.
- Рефлексия учебной деятельности.

– Ход урока

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Планируемые результаты
Организа-ционный момент. Мотивация к учебной деятельности	Приветствие обучающихся, проверка готовности к уроку учащихся, оборудования, классного помещения, выявление отсутствующих, создание благоприятных условий для учебной деятельности.	Включаются в деловой ритм урока. Определяют, чему могут научиться на уроке.	Коммуникативные: уметь участвовать в коллективном обсуждении вопроса. Познавательные: уметь видеть цель урока Регулятивные: уметь ставить учебную задачу на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что ещё неизвестно. Личностные: уметь устанавливать связи между целью учебной деятельности и её мотивом.

Актуализация знаний и умений и фиксация затруднений в деятельности.	1.Направляет деятельность учащихся на поиск выхода из ситуации. «Перед вами карточка с теоретическими вопросами по теме «Функция» Проведите опрос своего соседа по парте, чередуя вопросы. Оцените себя, поставив оценку в лист контроля». 2. Демонстрация слайдов (№ 3,4) «А теперь я хотела бы услышать правила, которые вы сейчас повторили».	1. Работают в соответствии с деятельностью учителя – опрашивают друг друга. 2. Просматривают слайды, отвечают на вопросы.	Познавательные: уметь ориентироваться в своей системе знаний. Коммуникативные: аргументировать свою точку зрения. Регулятивные: анализировать условия достижения цели на основе учёта выделенных учителем ориентиров действия. Личностные: желание приобретать новые знания, умения, совершенствовать имеющиеся.
Построение проекта выхода из затруднения и его реализация	1. Организует коммуникацию для деятельности учащихся по выполнению задания на соответствие между квадратичной функцией и координатами вершины параболы. 2. Демонстрация слайда (№ 5) Управление деятельностью учащихся в ходе выполнения задания, постановка вопросов.	1. Работают в соответствии инструкции, проведенной учителем. 2. Индивидуальные ответы.	Познавательные: Осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий Коммуникативные: Задавать вопросы, необходимые для организации собственной деятельности и сотрудничества с партнёром. Регулятивные: планировать пути достижения целей; устанавливать целевые приоритеты. Личностные: Самостоятельное применение знаний, способов действий, поиск нестандартных решений.
Первичное закрепление	1. Предлагает выполнить задания на определение зависимости расположения графика функции квадратичной функции от коэффициентов a, c, и D, взаимоконтроль. 2. Задания из учебника № 7.39, 7.41	1. Организует коммуникацию для деятельности учащихся по выполнению задания на соответствие между графическим и аналитическим заданием квадратичной функции. 2.Демонстрация слайда (№ 7) Управление деятельностью учащихся в ходе выполнения задания, постановка вопросов.	Познавательные: Осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий Коммуникативные: формулировать собственное мнение и позицию, аргументировать и координировать её с позициями партнёров Регулятивные: самостоятельно оценивать правильность выполнения действия и вносить необходимые коррективы Личностные: Осваивать новые виды деятельности; участвовать в творческом процессе.
Разбор задачи повышенной сложности из ОГЭ по математике	1.Демонстрация слайда (№ 10) 2. Управление деятельностью учащихся в ходе выполнения задания, постановка вопросов.	1.Сообщение уч-ся по решению данного задания	Познавательные: Самостоятельно проводить исследование на основе применения методов наблюдения и эксперимента; Коммуникативные: Осуществлять взаимный

			контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь Регулятивные: Планировать пути достижения целей Личностные: Осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению, осваивать новые виды деятельности.
Информация о домашнем задании	Информирует о домашнем задании. Читать п. 7, выучить схему, письменно № 7.40, 7.42 Дополнительно: Сборник по подготовке к ОГЭ - стр.88, №4.1.87	Записывают в дневники домашнее задание.	Регулятивная*:* уметь записывать Д/з в дневник.
Рефлексия учебной деятельности	1. Организует рефлексивную деятельность учащихся (слайд №11) «Итак, мы повторили квадратичную функцию и ее свойства. Все ли намеченные цели достигнуты? Я предлагаю вам высказаться. - я научился… - я расширил представление о … - мне было трудно … - мне было легко… - я остался доволен…»	1. Дают самооценку своей деятельности и её результатов. 2. Определяют объем полученных знаний.	Познавательные: Делать умозаключения Коммуникативные: Осуществлять коммуникативную рефлексию как осознание оснований собственных действий и действий партнёра. Регулятивные: адекватно самостоятельно оценивать правильность выполнения действия. Личностные: Действие нравственно-этического оценивания усваиваемого содержания, исходя из социальных и личностных ценностей.