ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
01.03.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001413
Камышанова Андрея Евгеньевича

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор,
Васильев В.Б.

Белгород - 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Давид Гильберт (Hilbert, 1862-1943), немецкий математик. Окончил Кенигсбергский университет. В 1895-1930 годах профессор Геттингенского университета. Исследования Гильберта оказали большое влияние на развитие многих разделов математики, а его деятельность в Гёттингенском университете содействовала тому, что Геттинген являлся одним из основных мировых центров математической мысли. В данной работе рассмотрены основные вычислительные методы, позволяющие разобраться в преобразовании Гильберта, а так же применение преобразования Гильберта и особые интегральные уравнения.

В самых разнообразных областях современной науки и техники часто приходится встречаться с математическими задачами, для которых невозможно получить точное решение классическими методами или же решение может быть получено в таком сложном виде, которое не приемлемо для практического использования.

В этой работе мы рассмотрим вторую основную краевую задачу теории аналитических функций, так называемую задачу Гильберта, а так же тесно связанные с ней особые интегральные уравнения с ядром Гильберта.

Эта работа представляет собой краткий обзор математической теории преобразований Гильберта.

Исторически изучение этих преобразований, названных в честь немецких математик Дэвид Гильберт, возник в первый раз в начале 20-го века в рамках изучения функций, аналитических на единичном диске.

С тех пор теория широко расширилась и нашла много приложений как в математике, так и в физике.

Хотя темы, обсуждаемые в этой работе, не следуют каким-либо конкретным источник, основное влияние многих из них - первый том великого произведения Гильберта Преобразования, написанного Фредериком У. Кингом. Начнем с определения преобразования Гильберта и рассмотрим понятие главного значения Коши, необходимого в определении. После этого мы перейдем к рассмотрению некоторых основных свойств преобразования Гильберта, большая часть которых будет доказана в деталях. Последний раздел этой главы, это эссе посвященное вычислению преобразования Гильберта некоторых функций которые знакомят нас с их использованием.

На протяжении всей этой работы наша конвенция для преобразования Фурье функция f будет

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi} dx$$

Соответственно обратное преобразование Фурье будет дано формулой

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi$$

Нам также понадобится свертка двух вещественных функций f и g

$$(f * \mathrm{g})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Тема исследования: Преобразование Гильберта и его применения.

Цель: изучить преобразования Гильберта и научиться их применять.

Объект: процесс преобразования Гильберта и его применения.

Задачи:

- основные свойства интегрального преобразования Гильберта;
- Преобразование Фурье ядра Гильберта;
- Преобразование Гильберта и аналитические функции.
- Формулы Сохоцкого
- Преобразование Гильберта и сингулярные интегральные уравнения
- Сингулярные интегральные уравнения и их решение
- Применение сингулярных интегральных уравнений в плоской задаче теории упругости.

Для реализации поставленных задач применялся комплекс методов:

- обобщение изученных ранее данных;
- анализ научно-методической литературы;
- систематизация информации.

1.1. Определение и основные свойства интегрального преобразования Гильберта

Определение: преобразование Гильберта вещественнозначной функции f определяется как

$$H(f)(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau,$$

при условии, что указанное выше выражение существует . Сразу видно, что существует возможная расходимость при $t = \tau$, поэтому интеграл рассматривается как главное значение Коши, обозначаемое $P.V.$ Это также легко заметить что можно рассматривать преобразование Гильберта как свертку f с функция $(\pi t)^{-1}$, Прежде чем рассматривать свойства преобразования Гильберта, давайте кратко рассмотрим понятие главного значения Коши.

Основное значение Коши

Рассмотрим вещественнозначную функцию f и ее интеграл по интервалу $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Предположим, что для некоторого $x_0 \in [a, b]$:] f неограничен, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \sup|f(x)| = \infty$$

В таком случае обычно рассматривается интеграл как

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{x_0 - \varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{x_0 + \varepsilon_2}^b f(x)dx$$

где пределы берутся независимо друг от друга. Эти ограничения могут однако не существовать. Другая возможность - смотреть на симметричный предел, называемым главным значением Коши интеграла,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x)dx \right] = P.V. \int_a^b f(x)dx$$

которые могут существовать, даже если индивидуальные ограничения не существуют. Это связано с тем, что факт использования одного параметра в пределе допускает отмену интеграла. Главное значение Коши несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ определяется аналогично:

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{C \to \infty} \int_{-C}^{C} f(x)dx$$

Следует отметить, что даже если и главное значение Коши, и несимметричный предел интеграла существует, им не нужен такой же результат.

Главное значение Коши - полезный инструмент, который позволяет извлекать конечных и значимые величины из других необоснованных выражений. Рассмотрим, например, интеграл

$$\int_0^4 \frac{1}{3-x}\,dx$$

где подынтегральное выражение имеет полюс в точке $x = 3$. Стандартная несимметричная предельная процедура приводит к

$$\int_0^4 \frac{1}{3-x}\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{3-\varepsilon_1} \frac{1}{3-x}\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{3-\varepsilon_2}^{4} \frac{1}{3-x}\,dx$$
$$= -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{3}\right)\right] - \lim_{\varepsilon_{2\to 0}}\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right]$$

выражение формальной формы $\infty - \infty$ и, следовательно, не определено. Главное значение интеграла Коши дает, с другой стороны, опрятный результат

$$P.V.\int_0^4 \frac{1}{3-x}\,dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{3-\varepsilon} \frac{1}{3-x}\,dx + \int_{3-\varepsilon}^{4} \frac{1}{3-x}\,dx\right)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \ln 3$$

Симметрия предела действительно важна для согласованности.

Результаты; если верхний предел первого интеграла в приведенном выше расчете было бы $3 - 2\varepsilon$, в то время как у другого интеграла все еще было $3 + \varepsilon$ в качестве его нижнего предела, результат был бы $\ln\frac{2}{3}$, что действительно не имеет никакого значения.

Свойства

В этой главе мы изучим некоторые из основных свойств преобразования Гильберта. Многие результаты можно обобщить на распределения, но для простоты сформулируем свойства для функций на $\mathbb{R}$. Предполагается также, что что функции ведут себя красиво, таким образом, что результат Фурье, анализ которого может быть использован, когда это необходимо. Начнем с простого результата, касающегося характера преобразования Гильберта как оператора.

Теорема 1. Преобразование Гильберта линейно.

Доказательство. Пусть f и g- вещественнозначные функции и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Прямо из определения, которое мы получаем

$$H(af+\beta g)(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{af(\tau)+\beta g(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$= \frac{a}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau + \frac{\beta}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$\alpha H(f)(t) + \beta H(g)(t).$$

Очевидно, было бы хорошо знать, как связано преобразование Гильберта H к преобразованию Фурье F. Эта информация изображена в следующей важной теореме.

Теорема 2. Преобразования Гильберта и Фурье связаны между собой соотношением

$$F\big(H(f)\big)(\xi) = -isgn(\xi)F(f)(\xi)$$

где sgn - функция $signum$

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & if\ x < 0 \\ 0 & if\ x = 0 \\ 1 & if\ x > 0 \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что преобразование Гильберта можно записать в виде свертки:

$$H(f)(t) = (f * g)(t) \tag{1}$$

где $g\,(x) = (\pi x)^{-1}$. Следует иметь в виду, что интегралы все еще считаются главными значениями Коши. Преобразование Фурье с обеих сторон (1) используя тот факт, что преобразование Фурье свертки

равен произведению преобразованных Фурье функций дает

$$\begin{aligned} F\big(H(f)\big)(\xi) &= F(f * g)(\xi 0 = [F(f)(\xi)][F(g)(\xi)] \\ &= \frac{1}{\pi} F\left(\frac{1}{x}\right)(\xi) F(f)(\xi) \end{aligned} \tag{2}$$

Нам остается вычислить преобразование Фурье $\frac{1}{x}$. Это можно записать как

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}\right)(\xi) &= P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-2\pi i x \xi} dx = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x \xi) - i \sin(2\pi x \xi)}{x} dx \\ &= P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x \xi)}{x} dx - i\, P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi x \xi)}{x} dx \end{aligned}$$

Первый интеграл обращается в нуль как главное значение, так как подынтегральное выражение нечетная функция. Последнее не имеет расходимостей, так как подынтегральное выражение приближается к значению 1 вблизи начала координат, и поэтому главное значение не играет никакой роли. Вместо этого его нужно рассматривать отдельно для разных значений из ξ. При $\xi = 0$ интеграл обращается в нуль тривиально.

Предполагая, что $\xi < 0$ и делая замену переменных $z = 2\pi x\xi$, интеграл становится

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{x} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(z)}{z} dz = -\int_{-\infty}^{\infty} sinc(z) dz = -\pi$$

где мы использовали известное значение для интеграла от функции $sinc$. При $\xi > 0$ тот же расчет дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi x\xi)}{x} dx = \pi$$

Объединив все эти результаты, можно сделать вывод, что

$$F\left(\frac{1}{x}\right)(\xi) = -i\pi sgn(\xi) \tag{3}$$

Подставляя это в уравнение (2), получаем желаемый результат:

$$F\big(H(f)\big)(\xi) = \frac{1}{\pi}[-i\pi sgn(\xi)]F(f)(\xi) = -isgn(\xi)F(f)(\xi).$$

Теперь, когда мы знаем, как преобразования Фурье и Гильберта ведут себя вместе, мы можем легко доказать следующую теорему.

Теорема 3. Применяя преобразование Гильберта дважды к той же функции, получаем обратную функцую с отрицательным знаком, т. е.

$$H\big(H(f)\big)(t) = -F(t)$$

Доказательство. Взяв обратное преобразование Фурье от результата в теореме 2 получаем

$$H(f)(t) = -iF^{-1}(sgn(\xi)F(f)(\xi))(t)$$

Два последовательных преобразования Гильберта дают

$$H\big(H(f)\big)(t) = -iF^{-1}\left(sgn(\omega)F\left(-iF^{-1}\big(sgn(\xi)F(t)(\xi)\big)\right)(\omega)\right)(t)$$
$$= -F^{-1}\big(\underbrace{sgn(\omega)sgn(\omega)}_{=1\text{ когда }\omega \neq 0}F(f)(\omega)\big)(t) = -f(t)$$

Полученный результат может быть символически записан как $H^2 = -1$, где 1 обозначает оператор идентичности. Это подразумевает формально, что $H = -H^{-1}$, то есть $-H = H^3$ служит обратным преобразованием Гильберта. Функция $f\ (t)$ может быть записана как

$$f(t) = H^{-1}\big(H(f)\big)(t) = -H\big(H(f)\big)(t) = -\frac{1}{\pi}P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(f)(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

Мы закончим этот раздел результатом ограниченности Гильберта. Мы не будем приводить доказательства здесь, но обращаем читателя к исходному источнику.

Примеры

В этом пункте мы будем вычислять некоторые преобразования Гильберта чтобы продемонстрировать его использование.

3.1. Постоянная функция

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - постоянная функция, $f(x) = c \in \mathbb{R}$. Преобразование Гильберта f тогда получаем

$$H(f)(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{t-\tau} d\tau = \frac{c}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{t-\frac{1}{\varepsilon}}^{t-\varepsilon} \frac{1}{t-\tau} d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{t+\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t-\tau} d\tau \right)$$

$$= -\frac{c}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\cancel{\ln(\varepsilon)} - \cancel{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} + \cancel{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} - \cancel{\ln(\varepsilon)} \right] = 0$$

Заметим, что здесь нам приходилось иметь дело с двумя типами особенностей: из-за полюса при $\tau = t$ и того, который исходит из интегрального расходящегося при $\pm\infty$. Поскольку этот расчет выполняется для любого $t \in \mathbb{R}$, заключаем, что преобразование Гильберта постоянной функции обращается в нуль.

3.2. Дельта-функция Дирака

В этом параграфе мы рассмотрим преобразование Гильберта дельта-функции Дирака δ (x). Это немного тонкая проблема, поскольку дельта-функция Дирака на самом деле не функция в традиционном смысле; его следует рассмотреть как распределение. Поэтому сначала не очевидно что наши ранее представленные методы совместимы вообще с этим существенно. Вот почему следует рассмотреть презентацию, приведенную ниже. Как схема более строгой процедуры, которая остается вне объема этой работы.

Начнем с того, что согласно теореме 2 преобразование Гильберта δ (если предположить, что оно существует), заданной формулой

$$H(\delta)(t) = -iF^{-1}(sgn(\xi)F(\delta)(\xi))(t) \tag{4}$$

Поэтому единственное, что нам нужно знать о дельта-функции Дирака, является его преобразованием Фурье, которое нам хорошо известно

$$F(\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 1$$

Подставляя это в уравнение (4), получаем

$$H(\delta)(t) = -iF^{-1}(sgn(\xi))(t) \qquad (5)$$

поэтому мы закончили, если мы просто можем найти обратное преобразование Фурье для функции $signum$.

Мы могли бы просто рассчитать это явно; существуют стандартные методы для сделать это. Однако мы можем использовать результат, полученный при доказательстве теоремы №2, а именно уравнение (3), в котором утверждается, что преобразование Фурье $\frac{1}{x}$ является $-i\pi\ sgn\ (\xi)$. Принимая обратное преобразование Фурье и используя его линейность в уравнении (3) дает нам

$$F^{-1}\big(sgn(\xi)\big)(t) = -\frac{1}{i\pi t}$$

Это вместе с уравнением (5) дает нам преобразование Гильберта Дирака дельта-функция:

$$H(\delta)(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Гауссова функция

Мы закончим этот раздел, вычислив преобразование Гильберта гауссовской функцией. Итак, пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f\ (x) = e^{-ax^2}$, где $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha >$ 0. Используя снова теорему 2 знаем, что преобразование Гильберта функции f задается формулой

$$H(f)(t) = -iF^{-1}\left(sgn(\xi)F\left(e^{-ax^2}\right)(\xi)\right)(t) \tag{6}$$

Преобразование Фурье гауссовской функцией является просто еще одним гауссовым решение в нашем примере

$$F\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}}$$

Следовательно, уравнение (6) становится

$$H(f)(t) = -i\sqrt{\frac{\pi}{a}}F^{-1}\left(sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\right)(t). \tag{7}$$

Обратное преобразование Фурье выше

$$F^{-1}\left(sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\ e^{2\pi i\xi t}d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}[\cos(2\pi\xi t) + i\sin(2\pi\xi t)\,d\xi]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\cos(2\pi\xi t)\,d\xi + i\int_{-\infty}^{\infty} sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\sin(2\pi\xi t)\,d\xi$$

Чтобы упростить приведенное выше выражение, отметим, что $signum$ и $sine$ являются нечетными функциями, а косинус четными. Таким образом, первый интеграл имеет нечетное подынтегральное выражение, и оно исчезает. Второе подынтегральное выражение четное, и мы можем выполнить интегрирование по положительным действительным числам и умножить результат на два, чтобы получить тот же результат. В целом мы получаем

$$F^{-1}\left(sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\right)(t) = 2i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\sin(2\pi\xi t)d\xi$$

где мы отказались от функции $signum$, поскольку она больше не играет важную роль. Если далее ввести изменение переменных $\eta = \frac{\pi\xi}{\sqrt{a}}$ наш результат становится

$$F^{-1}\left(sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\right)(t) = \frac{i2\sqrt{a}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\sin\left(2\sqrt{a}t\eta\right)d\eta$$

(8)

Для этого мы можем использовать отношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sin(2xu)du = D(x)$$

где $D\ (x)$ - так называемый интеграл Доусона, определенный b

$$D(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}du$$

Это позволяет записать обратное Преобразование Фурье (8)

$$F^{-1}\left(sgn(\xi)e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}\right)(t) = \frac{i2\sqrt{a}}{\pi}D(\sqrt{a}t)$$

которые вместе с уравнением (7) дает нам преобразование Гильберта нашей Гауссовой функции

$$H(f)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}D(\sqrt{a}t)$$

Этот конечный результат можно также быть дан в терминах функции erf определенный

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-s^2}ds$$

получая

$$H(f)(t) = -ie^{-ax^2}\operatorname{erf}(i\sqrt{a}t)$$

Еще одна форма может быть достигнута с использованием конфлюэнтной гипергеометрической системы Куммера

1.2. Преобразование Фурье ядра Гильберта

В этом разделе рассматривается оценка преобразования Гильберта некоторых общих функции ядра, которые часто встречаются в анализе Фурье, Пуассон, Дирихле, и ядра Фейера. Частичная сумма сопряженного ряда Фурье может быть связана с преобразованием Гильберта ядра Дирихле, а среднее Cesàro - среднее из первых n частных сумм сопряженного ряда Фурье - может быть связано с преобразованием Гильберта ядра Фейера. Исследуемое первое ядро

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}, \quad \text{для } 0 \leq r < 1 \tag{1}$$

которая называется ядром Пуассона (или иногда ядром Абеля-Пуассона) . В дальнейшем будет полезно выразить $P\,(r,\theta)$ как бесконечный ряд. Вспоминая расширение серии

$$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{для } |z| < 1 \tag{2}$$

что упрощает использование замены $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, чтобы получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} &= \frac{(1+z)}{2(1-z)} \\ &= \frac{1-r^2+2ir\sin\theta}{2(1-2r\cos\theta+r^2)} \end{aligned} \tag{3}$$

Взятие реальной и мнимой частей приводит к

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{4}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{5}$$

Преобразование Гильберта $P\,(r,\theta)$ можно найти при использовании следующих результатов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds=0 \tag{6}$$

и более общая формула

$$\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\cos ks\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds=\sin k\theta, \qquad \text{для целого } k\geq 0 \tag{7}$$

Эти результаты можно получить следующим образом. Использую следующие расширения (распределения):

$$\cot\frac{\theta}{2}=2\sum_{m=1}^{\infty}\sin m\theta \tag{8}$$

для целого n ≥ 0, дает

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}P\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\cot\left(\frac{x-s}{2}\right)ds&=\frac{1}{\pi}P\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\sum_{m=1}^{\infty}\sin(mx-ms)\,ds\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\, mx\int_{-\infty}^{\infty}\cos ns\cos ms\,ds\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\, mx\,\delta_{mn}\\&=\sin nx\end{aligned} \tag{9}$$

где δ_{nm} обозначает дельту Кронекера. Частный случай $n=0$ устанавливает уравнение (6). Таким образом, $HP\,(r,\theta)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}HP(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}P(r,s)\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds\\&=\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k\theta\right\}\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds\\&=\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}r^kP\int_{-\infty}^{\infty}\cos k\theta\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin k\theta,\end{aligned} \tag{10}$$

и используя уравнение (5) получаем

$$HP(r,\theta)=\frac{2r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{11}$$

Ядро Дирихле определяется формулой

$$D_n(\theta)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\{(2n+1)\theta/2\}}{\sin(\theta/2)} \tag{12}$$

Когда $\theta = 2\pi m$ с $m \in Z, Dn(\theta) = 2n + 1$. Для оценки преобразования Гильберта $Dn(\theta)$, сначала полезно оценить конечную сумму синусных членов вида $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$, и в этом процессе докажем уравнение (12). Использую стандартное преобразование

$$z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k \tag{13}$$

что упрощает с заменой $z = e^{i\theta}$ на

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-e^{-i\theta}+e^{in\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin\{(2n+1)\theta/2\}}{\sin(\theta/2)}\right] + \frac{i\left[\cos(\theta/2) - \cos\{(2n+1)\theta/2\}\right]}{2\sin(\theta/2)}. \tag{14}$$

Возьмем реальные и мнимые части, и получаем

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\{(2n+1)\theta/2\}}{\sin(\theta/2)} \tag{15}$$

это доказывает правую часть уравнения (12) и

$$2\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\cos\{(2n+1)\,\theta/2\}}{\sin(\theta/2)}$$

$$= \sin n\theta + (1-\cos n\theta)\cot(\theta/2) \tag{16}$$

Из уравнения (12) и используя уравнения (6) и (7), получаем

$$HD_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} P\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos ks\right\}\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\cos ks\cot\left(\frac{\theta-s}{2}\right)ds$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta \tag{17}$$

и поэтому

$$HD_n(\theta) = \sin n\theta + (1+\cos n\theta)\cot(\theta/2) \tag{18}$$

Если периодическая функция f выражается как ряд Фурье, то частичная сумма первых n членов ряда может быть записана через интеграл, включающая f и ядро Дирихле. Близкий результат можно получить для суммы первых n членов сопряженных рядов Фурье. В этом случае ядро Дирихле заменяется на сопряженное ядро Дирихле, приведенное в уравнении (18).

Ядро Fejér рассматривается следующим образом, и это определяется формулой

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(\theta). \tag{19}$$

Сумма, участвующая в этом определении, может быть упрощена следующим образом:

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n+1}\left[\frac{\sin\{(n+1)\theta/2\}}{\sin(\theta/2)}\right]^2 \tag{20}$$

Чтобы доказать это, начнем с

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \sin\left\{\frac{(2k+1)\theta}{2}\right\}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\cos k\theta \\ &= \frac{1}{2}\{1-\cos(n+1)\theta\} \\ &= sin^2\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

Деление на $sin^2\,(\theta\,/\,2)$ дает требуемый результат. Преобразование Гильберта из $Fn\ (\theta)$ может оценивать, используя результат, полученный для $HD_n\ (\theta)$, то есть

$$\begin{aligned}HF_n(\theta) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} HD_k(\theta) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\{\sin k\theta + (1-\cos k\theta)\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\},\end{aligned} \tag{22}$$

что упрощает, принимая во внимание уравнения (15) и (16),

$$HF_n(\theta) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)sin^2(\theta/2)} \tag{23}$$

Этот результат также можно записать следующим образом:

$$HF_n(\theta) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\cot\{(n+1)\theta/2\}}{n+1}\left[\frac{\sin\{(n+1)\theta/2\}}{\sin(\theta/2)}\right]^2 \tag{24}$$

из чего следует, что

$$HF_n(\theta) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cot\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) F_n(\theta) \tag{25}$$

Мотивация определения $HF_n\ (\theta)$ дается следующим развитием.

Рассмотрим серию

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{26}$$

и пусть частичные суммы даются выражением

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k. \tag{27}$$

Позволяет

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \tag{28}$$

то есть

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = S \tag{29}$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем Cesàro или $(C, 1)$ суммируема.

Пусть f представляет периодическую функцию с периодом 2π, интегрируемую на интервале $[0, 2\pi]$ и обозначим частичные суммы разложения в ряд Фурье функции f на

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \tag{30}$$

Используя уравнения (12) и (19), σ_n оцениваются как

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\{(2n+1)(x-t)/2\}}{\sin\{(x-t)/2\}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, F_n(x-t) dt \tag{31}$$

Важным результатом является то, что средства Cesàro ряда Фурье функции f сходятся к $(1/2)\ \{f\ (x_0 +)\ +\ f\ (x_0 -)\}$ для каждого x_0, где правый и левый пределы в точке x_0, существуют. Этот результат имеет последствия для приближения непрерывных функций на интервале $[0, 2\pi]$ тригонометрическими полиномами. Аналог предыдущего результата относится к сопряженным рядам Фурье функции f, причем f заменяется на $Hf, \sigma_n\ (x)$ на $\widetilde{\sigma_n}\ (x)$, и $F_n\ (x - t)$ через $HF_n\ (x - t)$.

1.3. Преобразование Гильберта и аналитические функции. Формулы Сохоцкого.

Преобразование Гильберта на вещественной прямой

Развитие преобразования Гильберта с точки зрения комплексного анализа рассматривается в этом пункте. Пусть f аналитична в верхней половине комплексной плоскости и пусть $f\ (z)\ \rightarrow\ 0$ при $z\ \rightarrow\ \infty$. Рассмотрим контур, показанный на рисунке 1. Из Интегральная теорема Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\ \frac{f(z)dz}{z-x_0} = 0 \tag{1}$$

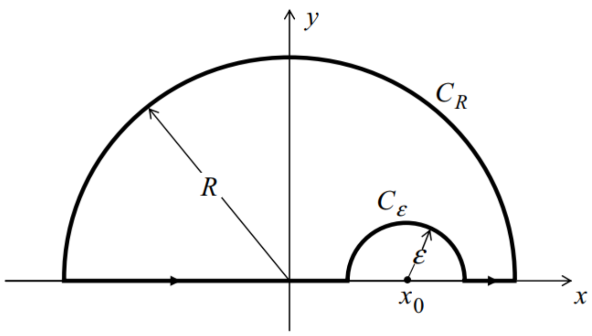

Рисунок 1. Полукруглый контур в верхней полуплоскости с отступом полукруг в точке x_0

Заметим, что сингулярность лежит вне замкнутого контура и что ядро везде аналитично в верхней полуплоскости. Контурный интеграл в (1) может быть упрощен следующим образом:

$$\oint_{C}\ \frac{f(z)dz}{z-x_0} = \int_{-R}^{x_0-\varepsilon}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)dz}{z-x_0}\int_{x_0-\varepsilon}^{R}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\int_{C_R}\frac{f(z)dz}{z-x_0} \tag{2}$$

Теперь внимание сосредоточено на оценке правой части уравнения (2) в пределах при $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Первый и третий интегралы в правой части уравнения (2) упрощают интеграл главных значений Коши:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-R}^{x_0-\varepsilon}\frac{f(x)dx}{x-x_0}+\int_{x_0+\varepsilon}^{R}\frac{f(x)dx}{x-x_0}\right\}=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-x_0} \tag{3}$$

Для решения второго интеграла в правой части уравнения (2) с участием интегрирование по контуру C_ε, множество $z - x_0 = \varepsilon e^{i\theta}$, что приводит к

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)dz}{x-x_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{f(x_0+\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon e^{i\theta}id\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}$$

$$=-i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\pi}f(x_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

$$=-i\pi f(x_0) \tag{4}$$

Обратите внимание, что контур перемещается против часовой стрелки. Последний интеграл в (2), взятый по контуру C_R, упрощается, полагая $z = Re^{i\theta}$; следовательно

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{f(z)dz}{z-x_0}=\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)iRe^{i\theta}{}_{d\theta}}{Re^{i\theta}-x_0}=0 \tag{5}$$

если $f\,(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Поэтому уравнение (1) упрощается

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{z-x_0}=P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-x_0}-i\pi f(x_0)=0 \tag{6}$$

Теперь положим $f\,(x) = u\,(x) + iv\,(x)$, где u и v - вещественнозначные функции; то уравнение (6) можно разбить на два сопряженных соотношения:

$$u(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)dx}{x_0 - x} \quad (7)$$

и

$$v(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)dx}{x_0 - x} \quad (8)$$

Эти два уравнения составляют пару преобразований Гильберта для вещественной прямой. Из уравнений (7) и (8), следует, что

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - x_0} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)ds}{x - s} \quad (9)$$

которая является интегральной формулой Гильберта. Харди (1928a) доказал истинность этой формулы когда u принадлежит L^2 ($\mathbb{R}$) и непрерывна при $x = x_0$. Он также доказал функции u, принадлежащие L^p при $p > 1$, и непрерывные в точке x_0. Аналог уравнения (9) на $\mathbb{R}^+$ положительная вещественная ось, то есть интервал $[0, \infty)$, хорошо известна сто лет (Schlömilch, 1848, стр. 158).

Формулы Сохоцкого

Понятие функции является исключительно важным в математике. Оно проделало длительную и нетривиальную эволюцию и в настоящее время используется в нескольких смыслах. Например, в курсе математического анализа, говоря о функции $\varphi : X \to Y$, вы подразумевали, что каждому элементу множества X с помощью некоторого правила φ сопоставлен единственный элемент множества Y . Однако при изучении теории функций комплексного переменного вы познакомились с многозначными функциями, когда одному элементу из X может соответствовать несколько элементов из Y .

Мы приступаем к изучению совершенно новой для вас точки зрения на понятие функциональной зависимости — теории обобщенных функций. С прагматической точки зрения можно считать, что нашей целью является освоение тех многочисленных симпатичных формул, в которых участвует -

функция Дирака и которые играют столь важную роль, например в электродинамике, или нахождение наиболее общего класса функций, для которых справедливы свойства преобразования Фурье, установленные нами для быстро убывающих функций.

Начнем с определений.

Пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\varphi : G \to C$. Носителем функции φ называется замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех точек x ∈ G, в которых $\varphi(x) \neq 0$. Другими словами, точка $x \in G$ принадлежит но- сителю функции φ, если найд¨ется последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ точек из G, сходящаяся к x и такая, что $\varphi(x) \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Носитель функции ϕ обозначается через $supp\, \varphi$ (от англ. *support*). Функция $\varphi: G \to C$ называется основной, или пробной, если φ бесконечно дифференцируема и $supp\, \varphi$ является ограниченным подмножеством в G. Другими словами, основными мы называем те бесконечно дифференцируемые функции, которые зануляются в некоторой окрестности границы области определения. Согласно теореме Лебега, известной вам из курса математического анализа, множество в $\mathbb{R}^n$ компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено. Поэтому можно сказать, что носитель основной функции является компактным подмножеством её области определения G. Отметим также, что носитель основной функции не пересекается с границей области G.

Контрпример. Пусть $G \subset R$ является открытым интервалом $(0, 1)$ и пусть $\varphi : G \to C$ тождественно равна единице: $\varphi(x) = 1$ для всех $0 < x < 1$. Конечно, так определенная функция φ бесконечно дифференцируема, но ее носитель, очевидно, совпадает с замкнутым отрезком $[0, 1]$ и, тем самым, не содержится в множестве G. Поэтому ϕ не является основной функцией.

Определим еще две сингулярные обобщенные функции, соответствующие выбору либо верхнего, либо нижнего знака, по формуле

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$$

Следующая теорема дает нам пример одного из тех симпатичных соотношений с участием функции, и показывает, как это соотношение может быть строго доказано в рамках изучаемого нами подхода к обобщенным функциям.

Теорема (формулы Сохоцкого). Справедливы соотношения

$$\frac{1}{x \pm i0} = \pm i\pi\delta + P\frac{1}{x}$$

Доказательство. Фиксируем основную функцию $\varphi \in D(R)$. Пусть она зануляется для всех $x \in R$ таких, что $|x| > R$. Тогда по определению обобщенной функции $1/(x + i0)$ имеем

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx =$$

В числителе прибавим и вычтем число $\varphi\,(0)$, а затем избавимся от мнимых значений в знаменателе, для чего умножим и разделим подынтегральное выражение на $x - i\varepsilon$. Получим

$$= \varphi(0) \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \qquad (1)$$

Подсчитаем порознь интегралы, фигурирующие в формуле (1). Поскольку интеграл от нечетной функции по промежутку, симметричному относительно нуля, равен нулю, то

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = 0$$

Следующий интеграл легко находится по формуле Ньютона—Лейбница. Это дает

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-R}^{R} \frac{-i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = -2i \lim_{\varepsilon\to 0+} arct\frac{R}{\varepsilon} = -i\pi$$

Наконец, в последнем интеграле в формуле (1) перейдем к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-R}^{R}\frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)]dx = \int_{-R}^{R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

$$= v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx = \left(P\frac{1}{x},\varphi\right).$$

Переход к пределу под знаком интеграла при $\varepsilon \to 0$ возможен, поскольку из неравенства $|x| \le |x + i\varepsilon|$, справедливого для всех вещественных x и ε, вытекает $|[\varphi(x) - \varphi(0)]/(x + i\varepsilon)| \le |[\varphi(x) - \varphi(0)]/x|$. Доопределив последнюю функцию в нуле как $|\varphi'(0)|$, мы получим непрерывную (а значит интегрируемую на конечном промежутке $[-R, R]$) функцию, мажорирующую подынтегральное выражение. Учитывая проделанные вычисления, можем продолжить равенство (1) следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x+i0},\varphi\right) = i\pi\varphi(0) + \left(P\frac{1}{x},\varphi\right) = \left(-i\pi\delta + P\frac{1}{x},\varphi\right)$$

Последнее равенство показывает, что обобщенные функции (т. е. линейные функционалы) $1/(x + i0)$ и $-i\pi\delta + P\frac{1}{x}$ одинаково действуют на любую основную функцию. Значит эти обобщенные функции равны между собой. Формула Сохоцкого, отвечающая выбору знака «минус», доказывается аналогично.

Глава 2.Сингулярные интегральные уравнения

2.1. Сингулярные интегральные уравнения в общем случае

Во всей данной главе, если противное не оговорено, L обозначает кусочно-гладкую линию. Гладкие дуги, составляющие L, обозначаются через $L_h, K = 1,2, \dots, p$, а узлы (в том числе и концы) линии L — через $c_k, k = 1, 2, .. n$. Через t_0, t, t_1 обозначаются точки линии L.

В этом разделе будут изучаться уравнения вида $K_\varphi = f$, где K— оператор, определяемый формулой

$$K_\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,t)\varphi(t)dt}{t-t_0} \quad \text{(I)}$$

в которой $A(t)$ и $K(t_0, t)$ обозначают функции, подчиненные определенным условиям, которые будут сейчас указаны.

А именно, для того чтобы иметь возможность применить без особых усложнений методы, мы будем считать, что оператор К представим в одном из следующих двух видов:

$$K_\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,t)\varphi(t)dt \quad \text{(a)}$$

или

$$K_\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k'(t_0,t)\varphi(t)dt \quad \text{(b)}$$

где $A(t), B(t), k(t_0, t), k'(t_0, t)$ — функции класса H_0 на L; условие, налагаемое на две последние функции, можно значительно ослабить, не изменяя результатов, но мы на этом останавливаться не будем.

От формы представления (I) оператора К можно перейти к формам (a) или (b), если положить

$$B(t) = K(t,t),$$

$$k(t_0,t) = \frac{K(t_0,t) - B(t_0)}{t - t_0}, \quad k'(t_0,t) = \frac{K(t_0,t) - B(t)}{t - t_0}$$

и если предположить, что функции $B(t)$, $k(t_0, t)$ или $k'(t_0, t)$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Если, в частности, *обе* функции $k(t_0, t)$ и $k'(t_0, t)$ принадлежат классу H_0(по обеим переменным), то уравнение (I) может быть приведено к любому из двух видов $(a), (b)$. Однако мы этого предположения вводить не будем, ибо оно никаких существенных упрощений не внесет, а только снизит общность.

Таким образом, при наших предположениях, операторы типов (a) и (b), вообще говоря, несводимы друг к другу. Если мы, например, попытаемся преобразовать оператор типа (b) к виду (a) тем же путем, каким мы преобразовали оператор типа (I) к виду (a), получим :

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k'(t_0, t)\varphi(t)dt =$$
$$= A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \left\{\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0} + k'(t_0, t)\right\}\varphi(t)dt$$

но, вообще говоря, отношение $\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0}$- имеет в окрестностях узлов c_k особенности вида $(t - t_0)^{-1}$ когда t_0 и t расположены на различных дугах L_j, сходящихся в c_k.

Всюду в дальнейшем под *сингулярными операторами* мы будем подразумевать операторы одного из видов $(a), (b)$, т. е. операторы K, K', определяемые формулами

$$K_\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)dt \qquad (1)$$

и

$$K'_\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_0)\psi(t)dt \qquad (2)$$

где $A(t), B(t), k(t_0, t)$ принадлежат классу H_0на L.

Мы записали второй оператор, т. е. оператор вида (b), несколько иначе, чем выше, по причине, которая будет сейчас указана.

Операторы (1) и (2) мы будем называть *союзными* друг с другом, сохраняя определение союзных операторов вида (I). Так же как в случае, союзные операторы и соответствующие им сингулярные интегральные уравнения тесно связаны друг с другом. Поэтому целесообразно (для того чтобы не умножать без надобности терминов и обозначении) изучать операторы вида (b) не самостоятельно, а в качестве операторов, союзных с оператором вида (a). Это, конечно, нисколько не ограничивает общности и тем более целесообразно, что одновременное рассмотрение союзных операторов неизбежно.

Мы будем говорить, что операторы К и К$'$ нормального типа, если

$$A(t)+b(t)\neq 0, \qquad A(t)\rightarrow b(t)\neq 0 \tag{3}$$

всюду на L; при $t=c_j$ под этим подразумевается, как всегда, что отличны от нуля пределы соответствующих выражений при $t\rightarrow c_j$ по любой из дугL_k, имеющих концом c_j.

Во всем дальнейшем мы будем считать, что рассматриваемые операторы нормального типа.

Оператор K^0, определяемый формулой

$$K^0{}_{\varphi}\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \tag{4}$$

мы будем называть *характеристической частью* оператора K, а функции $A(t_0)$, $B(t_0)$— коэффициентами характеристической части.

Если через k мы обозначим Фредгольмов оператор первого рода

$$k\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,t)\varphi(t)dt, \tag{5}$$

то оператор К можно представить в виде суммы операторов K^0 и k, т. е.

$$K\varphi=K^0\varphi+k\varphi \tag{6}$$

Оператором, союзных с K^0, будет оператор $K^{0\prime}$, определяемый формулой

$$K^{0\prime}\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0} \tag{7}$$

В соответствии с этим

$$K'\varphi=K^{0\prime}\varphi+k'\varphi \tag{8}$$

где k' — фредгольмов оператор первого рода, союзный с оператором k, т. е.

$$K'\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L \; k(t,t_0)\,\psi(t)dt \tag{9}$$

Мы будем применять операторы K и K' к функциям φ, ψ класса H^*на L. Легко видеть на основании результатов, что эти операторы переводят функции класса H^* в функции того же класса. В частности, функции класса H_0 переводятся этими операторами в функции класса H_ε^* , а функции класса H_ε^* — в функции того же класса.

Мы познакомились с важной формулой

$$\int_L \; \psi K\varphi dt = \int_L \; \varphi K'\psi dt \tag{10}$$

где L представляет собой совокупность гладких замкнутых контуров, а φ, ψ— произвольные функции класса H.

Легко видеть, что эта формула сохраняет силу и в случае, когда L — произвольная кусочно-гладкая линия. Однако нам придется применять эту формулу к более широкому классу функций φ, ψ, чем функции класса H, а именно, к функциям класса H^*. Если φ и ψ — произвольные функции класса H^*, то интегралы в формуле (10) могут оказаться расходящимися. Но в дальнейшем мы будем применять формулу (10) лишь в случаях, когда в окрестности каждого узла одна из функций φ, ψ принадлежит классу H_ε^*. Легко проверить, что в этом случае формула (10) сохраняет силу.

Уравнения следующих двух видов:

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \; \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \; k(t_0,t)\varphi(t)dt = f(t_0) \tag{11}$$

и

$$K'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \; \frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \; k(t,t_0)\psi(t)dt = g(t_0) \tag{12}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — заданные функции класса H^* на L, мы будем называть *сингулярными интегральными уравнениями*; решения этих уравнений мы всегда будем разыскивать в классе H^*.

В дальнейшем мы не будем требовать, чтобы уравнение (11) или (12) удовлетворялось в точках, совпадающих с узлами линии L.

Мы будем всегда предполагать, что эти уравнения нормального типа, т. е. что операторы K и K' нормального типа.

Уравнения $K\varphi = f$ и $K'\psi = g$, каковы бы ни были правые их части f и g, мы будем называть *союзными*.

Обычно мы будем рассматривать уравнение типа $K'\psi = \mathrm{g}$ не самостоятельно, а как союзное с уравнением $K\varphi = f$; это делается с единственной целью не умножать терминов и обозначений и нисколько нас не ограничивает.

Уравнение простейшего вида

$$K^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0) \tag{13}$$

мы будем называть *характеристическим уравнением*, а функции $A(t_0), B(t_0)$ — его коэффициентами.

Уравнение же

$$K^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0} = g(t_0) \tag{14}$$

мы будем называть *союзным с характеристическим*.

Замечание. Под узлами линии L мы подразумеваем не только узлы в геометрическом смысле, но и другие точки этой линии, в которых допускаются разрывы рассматриваемых функций.

Мы увидим, что главную роль играют разрывы функций A (t), B (t), а не геометрические свойства линии L (т. е. наличие угловых точек и пр.).

2.2. Сингулярные интегральные уравнения и их решение

Начнем с решении характеристического уравнения

$$K^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0) \tag{1}$$

Мы будем считать, как было уже сказано, что

$$A^2(t) - B^2(t) \neq 0 \ \text{ всюду на } L. \tag{2}$$

Кроме того, мы будем считать пока, что $f(t)$ принадлежит классу H_0; решение же $\varphi(t)$ уравнения (1) мы будем, как было условлено, искать в классе H^*.

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{\varphi(t)dt}}{\boldsymbol{t-z}}, \tag{3}$$

исчезающую на бесконечности. Тогда

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \quad \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) \tag{4}$$

откуда следует, что функции $\Phi(z)$ должна быть исчезающим на бесконечности решением задачи сопряжения

$$(A+B)\Phi^+ - (A-B)\Phi^- = f \tag{5}$$

или

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0)\Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)} \tag{6}$$

где

$$G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)} \tag{7}$$

Задача эта была подробно изучена в предыдущем пункте.

Особенные и неособенные узлы, соответствующие этой задаче, мы будем теперь называть особенными и неособенными узлами, соответствующим и оператору K^0 или уравнению $K^0\varphi = f$.

Неособенные узлы мы будем по-прежнему обозначать через $c_1, c_2, \dots, c_m$ $(m \le n)$.

Самое общее решение (класса H^*) задачи (6), имеющее конечный порядок на бесконечности, можно представить, например, в виде

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{[A(t)+B(t)]X^+(t)(t-z)}X_0(z)Q(z) \tag{8}$$

где $X(z)$ — каноническая функция какого либо класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, соответствующая задаче (6), $X_0(z)$ — каноническая функция для той же задачи класса h_0. а $Q(\mathrm{z})$ — некоторый полином.

Решение $\Phi(z)$ должно быть подчинено еще условию, что $\Phi(\infty) = 0$; этим условием мы займемся ниже, а теперь выведем некоторые заключения из того факта, что если существуют решения уравнения (1), то все они необходимо даются формулой $\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$, в которой $\Phi(z)$ имеет вид (8).

Вычислим $\varphi(t_0)$. Введем с этой целью обозначение

$$Z(t_0) = [A(t_0) + B(t_0)]X^+(t_0) = [A(t_0) - B(t_0)]X^-(t_0) \qquad (9)$$

Функцию $Z(t)$ мы будем называть *канонической функцией данного класса* $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, соответствующей уравнению $\mathrm{K}^0\varphi = \mathrm{f}$ или оператору K^0.

В частности, каноническая функция $Z_0(t)$ класса $h_0 = h(0)$соответствующая случаю $\mathrm{q} = 0$, определяется формулами

$$Z_0(t_0) = [A(t_0) + B(t_0)]X_0^+(t_0) = [A(t_0) - B(t_0)]X_0^-(t_0) \qquad (9а)$$

Введем обозначения

$$A^*(t_0) = \frac{A(t_0)}{A^2(t_0) - \boldsymbol{B}^2(t_0)}, \qquad B^*(t_0) = \frac{B(t_0)}{A^2(t_0) - \boldsymbol{B}^2(t_0)}. \qquad (10)$$

Тогда, пользуясь формулами Сохоцкого—Племеля, легко получим

$$\varphi(t_0) = K^*(t_0) + B^*(t_0)Z_0(t_0)P(t_0) \qquad (11)$$

где

$$K^*f \equiv A^*(t_0)f(t_0) - \frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{Z(t)(t-t_0)}, \qquad (12)$$

а $P(t_0)$ обозначает полином.

На основании определения (9) функции $Z(t_0)$ и на основании других формул, очевидно, что

$$Z(t_0) = \omega_0(t_0)\prod_{h=1}^{n}(t_0 - c_k)^{v_k} \qquad (13)$$

где $\omega_0(t_0)$ – функция класса H_0 , не обращающаяся в нуль, а

$$0 < Re\ v_k < 1 (k = 1,2, \dots, q); -1 < Re\ v_k < 0\ (k = q + q, \dots, m);$$

$$Re\ v_k = 0 \quad (k = m + 1, \dots, n). \qquad (14)$$

Такие же формулы имеют место для $Z_0(t_0)$; следует только в последнем случае считать $q = 0$.

Исходя из сказанного, приходим к следующим выводам:

В окрестностях всех особенных узлов $c_k(k = m + 1, \dots, n)$ решение $\varphi(t)$ принадлежит классу H_ε^*. Кроме того, оно ограничено вблизи тех из особенней узлов c_k, для которых $v_k \neq 0$; вблизи же тех узлов c_k, для которых $v_k = 0$, оно может быть неограниченным как $\ln(t - c_k)$.

Если в окрестности какого-либо неособенного узла решение $\varphi(t)$ ограничено, то оно принадлежит в этой окрестности классу H_0.

В самом деле, пусть c_k — неособенный узел, вблизи которого функция $\varphi(t_0)$ ограничена. Возьмем в формулах (11), (12) в качестве канонической функции $Z(t)$ такую, которая исчезает на c_k. Тогда первое слагаемое правой части (11) принадлежит в окрестности c_k классу H_0. Поэтому для того, чтобы функция $\varphi(t_0)$ была ограниченной, необходимо, чтобы полином $P(t_0)$ имел корень c_k и наше утверждение становится очевидным.

Разобьем теперь все возможные решения рассматриваемого интегрального уравнения $K^0\varphi = f$ на классы, относя к классу $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, $0 \leq q \leq m$, все решения $\varphi(t)$, которые остаются ограниченными в окрестностях неособенных узлов $c_1, c_2, \dots, c_q$. Мы видели, что такие решения будут принадлежать в окрестностях узлов $c_1, c_2, \dots, c_q$ классу H_0; поэтому данное здесь определение класса решений согласуется с определением класса функций $\varphi(t)$.

Легко видеть, что решению класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ интегрального уравнения (1) будет, по формуле (3), соответствовать решение одноименного класса задачи сопряжения (6)[1]). Поэтому для нахождения всех решении этого класса уравнения (1) достаточно найти все решения одноименного класса задачи сопряжения (6), *исчезающие на бесконечности*.

Исходя из того, что мы знаем о решении этой последней задачи, легко приходим к следующим заключениям.

Будем называть индексом χ данного класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ уравнения $K^0\varphi = f$ или оператора K^0 индекс одноименного класса задачи сопряжения

(6). Тогда, если подразумевать под $Z(t)$ каноническую функцию класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, будем иметь:

При $\chi \geq 0$ все решения класса $\mathrm{h} = h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ уравнения $K^0\varphi = f$ даются формулой

$$\varphi(t_0) = K^* f + B^*(t_0) Z(t_0) P_{\chi-1}(t_0), \tag{15}$$

где $P_{\chi-1}(t_0)$ обозначает произвольный полином степени не выше $\chi - 1[P_{\chi-1}(t_0) = 0 \text{ при } \chi = 0]$.

При $\chi < 0$ решение (единственное) существует при соблюдении (необходимых и достаточных) условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{t^k f(t) dt}}{\mathrm{Z(t)}} = 0, \quad \mathrm{k} = 0,1, \dots, -\chi - 1, \tag{16}$$

и дается той же формулой (15), в которой $P_{\chi-1}(t_0) = 0$.

Из предыдущего следует так же, что при $\chi \leq 0$ однородное уравнение $K^0\varphi = 0$ не имеет решений класса h, отличных от нуля; при $\chi > 0$ оно имеет ровно χ линейно независимых решений класса h, совокупность которых дается формулой

$$\mathrm{\varphi(t) = B^*(t) Z(t)} P_{\chi-1}(t) \tag{17}$$

где $P_{\chi-1}(t)$ – произвольный полином степени не выше $\chi - 1$.

Легко видеть, что предыдущие результаты останутся в силе, если функция $f(t)$, вместо того чтобы принадлежать классу H_0, принадлежит классу $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$. Только в этом случае решения могут быть неограниченными так же близи тех особенных узлов, для которых $\nu_k \neq 0$, если функция $f(t)$ не ограничена вблизи этих узлов.

Замечание . Рассмотрим уравнение

$$K_1\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0) \tag{18}$$

получающееся из (1) заменой $B(t_0)$ на $-B(t_0)$. Это уравнение не будет союзным с уравнением (1), кроме случая $B(t_0) = const$ (союзное уравнение будет рассмотрено в следующем параграфе). Соответствующая уравнению

(18) задача сопряжения получается из задачи (6) заменой $B(t_0)$ на $-B(t_0)$, т.е. имеет вид

$$\Psi^+(t_0) = [\Pi(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \qquad (19)$$

ибо при замене B на $-B$ функция G заменяется на G^{-1}. Однородные задачи сопряжения, соответствующие задачам (6) и (19), являются, таким образом, союзными. Поэтому на основе сказанного если $X(z)$ и χ – каноническая функция и индекс класса h, соответствующие задачи (6), то $[X(z)]^{-1}$ и $-\chi$ являются канонической функцией и индексом класса h', союзного с h, соответствующими задаче (18).

Принимая теперь во внимание формулы (9), определяющие каноническую функцию $Z(t)$, соответствующую уравнению (1), и такие же формулы, составленные применительно к уравнению (19), приходим к следующему выводу.

Все формулы и результаты данного пункта останутся в силе, если заменить соответственно

$$B(t), \qquad Z(t) \qquad \chi, h$$

на

$$-B(t), \quad \frac{A^2(t)-B^2(t)}{Z(t)}, \quad -\chi, h'$$

где h' обозначает класс, союзный с h.

2.3. Применение сингулярных интегральных уравнений в плоской задаче теории упругости

Напомним для удобства, некоторые основные формулы и предложения плоской статической теории упругости, ограничиваясь для простоты случаем, когда упругое тело занимает на плоскости $z = x + iy$ конечную область S, ограниченную простым замкнутым гладким контуром L.

Основные уравнения плоской теории упругости при отсутствии объемных сил, что мы и будем предполагать, сводятся к следующим:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0, \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0,$$

$$X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

$$X_{y=}Y_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

где $X_x, Y_y, X_{y=}Y_x$ – компоненты напряжения, u, v – компоненты смещения, $\lambda>0, \mu>0$ – постоянные Ламе и где для кратности положено

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Общее (регулярное) решение основных уравнений (1) может быть выражено через две произвольные голоморфные в S функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ следующим образом:

$$X_x+Y_y=4Re\varphi'(z), Y_y-X_x+2iX_y=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)], \tag{3}$$

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-\overline{z\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \tag{4}$$

где

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=3-4\sigma>1; \tag{4a}$$

через

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

обозначение коэффициент Пуассона $\left(0<\sigma<\frac{1}{2}\right)$.

Укажем еще одну важную формулу, которой можно заменить фор–мулы (3)

$$\varphi(z)+z\,\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_{x_0}^{x}(X_n+iY_n)\,ds+const, \tag{5}$$

где интеграл взят по любой гладкой дуге l, не выходящей из S, соединяющей произвольно фиксированную точку z_0 с переменной точкой z области S; X_n и Y_n обозначают компоненты напряжения, действующего на дугу l со стороны положительной нормали, т.е. нормали, направленной вправо, если смотреть вдоль положительного направления l (ведущего от z_0 к z).

Как известно,

$$X_n = X_x cos(n,x) + X_y \cos(n,y),$$
$$Y_n = Y_x cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) \tag{6}$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования, соединяющего точку z с точкой z. Это легко проверить непосредственно и очевидно с механической точки зрения.

Добавим к предыдущему еще следующие замечания, важные для дальнейшего.

При *заданных напряжениях* функция $\varphi(z)$определяется с точностью до выражения $Ciz + \gamma$, где C – действительная, а γ – комплексная произвольные постоянные; функция же $\psi(z)$ определяется с точностью до произвольной комплексной постоянной γ', так что, не изменяя напряжений, можно заметить

$$\varphi(z) \text{ на } \varphi(z) + Ciz + \gamma, \qquad \psi(z) \text{ на } \psi(z) + \gamma'$$

и только такая замена не изменяет напряжений. В частности, если напряжения равны нулю, то $\varphi(z) = Ciz + \gamma$, $\psi(z) = \gamma'$. Эти последние формулы выражают жесткое (бесконечно малое) смещение тела, как целого, что не отражается на напряжениях, как это показывают формулы (3).

При *заданных смещениях* (тогда заданы и напряжения)

$$C = 0, \quad \gamma\varkappa - \overline{\gamma'} = 0.$$

Если заданы напряжения и, кроме того, фиксирована постоянная в правой части формулы (5), то действительная постоянная C остается произвольной, но γ и γ' связаны соотношением $\gamma - \overline{\gamma'} = 0$.

Наконец, если заданы смещения и фиксирована постоянная в правой части (5), то

$$C = \gamma = \gamma' = 0.$$

В статистической теории упругости (в нашем случае плоской) под основными граничными задачами подразумевают задачи определения упругого равновесия тела по следующим граничным условиям.

В первой основной задаче задаются внешние напряжения, приложенные к границе. Во второй основной задаче задаются смещения точек границы. Наконец, в основной смешанной задаче на одной части границы задаются напряжения, а на другой – смещения.

Единственность решения каждой из этих задач вытекает из известной формулы, которая легко выводится при помощи формулы Остроградского – Грина,

$$\int_L (X_n u + Y_n v)\, ds = \iint_B \left[\lambda(e_{xx} + e_{yy})^2 + 2\mu\left(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + 2e_{xy}^2\right)\right] dxdy, \quad (7)$$

где

$$e_{xx} = \frac{du}{dx}, \qquad e_{yy} = \frac{dv}{dy}, \qquad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)$$

– компоненты деформации.

При обычном элементарном выводе этой формулы предполагается, что компоненты смещения и напряжения непрерывно продолжимы на все точки границы L области. О применимости формулы при более общих условиях, с которыми нам придется иметь дело.

Во всех трех основных задачах для разности двух возможных решений имеем на границе

$$X_n u + Y_n v = 0.$$

Поэтому вследствие того, что квадратичная форма переменных e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} под знаком двойного интеграла в правой части положительная, мы должны для разности двух решений иметь $e_{xx} = e_{yy} = e_{xy} = 0$, откуда легко следует, что

$$u = -\varepsilon y + \alpha\,, \qquad\qquad v = \varepsilon x + \beta,$$

где $\varepsilon, \alpha, \beta$ – (действительные) постоянные; последние формулы выражают жесткое (бесконечно малое) смещение тела, как целого.

В первой основной задаче эти постоянные остаются произвольными, так как решения, отличающиеся жестким смещением, не считаются различными. Во второй и смешанной основных задач $\varepsilon = \alpha = \beta = 0$; это показывает непосредственная подстановка в граничные условия и очевидно с механической точки зрения, так как если хотя бы на части границы смещения равны нулю, жесткое смещение исключается.

Замечание 1. Принимая во внимание формулы (4) и (5) мы можем переписать формулу (7) еще так:

$$-2\mu \operatorname{Im} \int_L \left[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}\,\right] d\left[\,\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)\right] =$$

$$= -2\mu \operatorname{Im} \int_L \left[\,\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)\right] d\left[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}\,\right] =$$

$$= \iint_B \left[(\lambda + 2\mu)e_{xx}^2 + 2\lambda e_{xx}e_{yy} + (\lambda + 2\mu)e_{yy}^2 + 4\mu e_{xy}^2\right] dxdy \qquad (8)$$

(второй интеграл получается из первого интегрирования по частям), где, напоминаем, u, v обозначают действительную функцию, связанные с $\varphi(z), \psi(z)$ соотношением.

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)},$$

и где

$$e_{xx} = \frac{du}{dx}, \qquad e_{yy} = \frac{dv}{dy}, \qquad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)$$

Легко видеть на основании рассуждений, приведших нас к этой формуле, что она справедлива на всяких двух голоморфных в S функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, если они достаточно регулярны вблизи границы, лишь бы постоянные $\lambda, \mu, \varkappa$ были связаны соотношением

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 1 + \frac{2}{\lambda + \mu};$$

справедливость формулы (8) легко проверить и непосредственно, без привлечения формул теории упругости.

Легко, далее, видеть, что формула (8) справедлива и для многосвязной, конечной или бесконечной области S, ограниченной гладкими замкнутыми, контурами, лишь бы функция $\varphi(z), \psi(z)$ были голоморфны в ней, включая бесконечную удаленную точку, если область бесконечна. Справедливость формулы (8) для бесконечной области легко проверить, если применить ее сначала к конечной части области S, заключенной внутри окружности $|z| = R$ при достаточно большом R, и перейти к пределу при $R \to \infty$. Интеграл в левой части, взятый по этой окружности, будет при этом, как легко видеть, стремиться к 0.

Заметим $\lambda < 0$ физически невозможен, если рассматривать λ как постоянную Ламе в теории упругости.

Замечание 2.На теоремы единственности, вытекающие из формул (7) или (8), нам придется ссылаться и в тех случаях, когда достаточные для элементарного вывода этих формул условия, указанные вслед за формулой (7), не соблюдены. Но во всех тех случаях, с которыми нам придется встретиться, дело будет обстоять так. Упомянутые условия будут соблюдены для области S', получаемой из S удалением бесконечно малых частей, вырезаемых окружностями бесконечно малых радиусов с центрами в конченом числе точек границы L. Мы поэтому сможем применить формулу (7) или (8) к области S' и затем перейти к пределу, когда радиусы упомянутых окружностей, стремятся к нулю. При этом во всех случаях, с которыми нам придется иметь дело, интегралы в левой части, распространенные на дуги этих окружностей, заключенные в S, будут стремиться к нулю, и наши формулы окажутся справедливыми для области S.

Здесь мы укажем решение основной смешанной задачи в общем случае, ограничиваясь, впрочем, для простоты рассмотрением конечной односвязной области. Для многосвязной (конечной или бесконечной) области ход решения тот же, но в этом случае требуется некоторые дополнительные рассмотрения.

Итак, пусть тело занимает конечную область S, ограниченную простым замкнутым контуром L. Мы будем теперь предполагать, что контур L не только гладкий, но обладает кривизной, удовлетворяющей условию Липшица.

Пусть на L взяты дуги $L_j' = a_j, b_j$, $j = 1,2, \dots, p$, не имеющих общих концов, положительные направления которых совпадают с положительным направлением L, оставляющим область S слева, и которые следуют друг за другом в этом направлении. Дуги $b_j a_{j+1}$, $j = 1,2,\ldots,p$ (под a_{p+1} подразумевается a_I) мы обозначим через L''_j. Совокупность дуг L'_j мы обозначим через L', а совокупность дуг L''_j – через L''.

Основная смешанная задача, к решению которой мы приступаем, заключается в следующем: требуется определить упругое равновесие тела, если на части L' границы заданы внешние напряжения, а на остальной части L'' – смещения.

На основании формул (4), (5) эта задача сводится, очевидно, к задаче определения двух голоморфных в S функций $\varphi(z), \psi(z)$ по граничным условиям

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(t) + t\varphi(t) + \psi(t) = f(t) + C(t) & \text{при } t \in L' \\ -\varkappa\varphi(t) + t\varphi(t) + \psi(t) = f(t) & \text{при } t \in L'' \end{array}\right\} \qquad (9)$$

этих формулах $f(t)$ – заданная на L функция, а именно,

$$f(t) = i\int_{a_j}^{t} (X_n + iY_n)\, ds \quad \text{при } t \in L'_j$$

$$f(t) = -2\mu(g_1 + ig_2) \;\; \text{при } t \in L'', \qquad (10)$$

где X_n, Y_n – заданные на L' компоненты внешнего напряжения, а g_1, g_2 – заданные на L'' компоненты смещения; интегралы берутся вдоль дуг $L' = a_j b_j$; s обозначает дуговую абсциссу. Наконец, $C(t)$ обозначает кусочно-постоянную функцию на L', т.е. $C(t) = C_j$ при $t \in L'_j$, где C_j обозначают постоянные, не задаваемые заранее.

Мы будем считать, что $f(t)$ принадлежит классуH_0, а $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ – классу H^*, при узлах a_j, b_j, $j = 1,2,\ldots,p$.

Здесь и в дальнейшем, если это не может вызвать недоразумения, мы пишем $\varphi(t), \varphi'(t), \psi(t)$ вместо $\varphi^+(t), \varphi'^+(t), \psi^+(t)$.

Решение, следуя Д.И. Шерман, мы будем искать в следующем виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)dt}{t-z}, \qquad (11)$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\overline{dt}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)dt}{t-z},$$

где $\omega(t)$ – функция точки t границы, подлежащая определению.

Если считать, что функция $\omega(t)$непрерывна и имеет интегрируемую производную $\omega'(t)$, то при помощи интегрирования по частям последнюю формулу можно переписать еще так:

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega'(t)dt}{t-z}, \qquad (11a)$$

Аналогично мы можем представить производную $\varphi'(z)$ следующим образом:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(t)dt}{t-z}. \qquad (11b)$$

Вычислим теперь граничные значения $\varphi^+(t), \varphi'^+(t), \psi^+(t)$, считая, что формулы Сохоцкого – Племеля применимы к правым частям первой формулы (11) и формул (11a), (11b), и подставим полученные выражения в граничные условия (9), имея в виду, что в этих последних под $\varphi(t), \varphi'(t), \psi(t)$ подразумевается соответственно $\varphi^+(t), \varphi'^+(t), \psi^+(t)$. Это легко приводит к следующему интегральному уравнению для определения $\omega(t)$:

$$K\omega \equiv A(t_0)\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)dt}{t-t_0} + \int_L k_1(t_0,t)\,\omega(t)dt +$$
$$+ \int_L \overline{k_2(t_0,t)}\,\overline{\omega(t)dt} = f(t_0) + C(t_0), \qquad (12)$$

где

$$A(t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\varkappa) & \text{на } L', \\ -\varkappa & \text{на } L'', \end{cases} \qquad B(t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\varkappa) & \text{на } L', \\ 0 & \text{на } L'', \end{cases} \qquad (13)$$

$$k_1(t_0,t) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}, \qquad k_1(t_0,t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar{t}-\overline{t_0}}{t-t_0} \qquad (14)$$

и, наконец,

$$C(t) = \begin{cases} C_j & \text{на } L'_j, \qquad j = 1,2,\dots,p, \\ 0 & \text{на } L''. \end{cases} \qquad (15)$$

Постоянный C_j, как было уже сказано, не задаются заранее и определяются при решении задачи; это будет показано ниже. Пока же мы не будем рассматривать функцию $C(t)$ как заданную.

Под частной производной по t, в формулах (14) следует подразумевать производную по t, вычисленную в предположении, что точка t_0 постоянная; величина же $\bar{t}$ рассматривается как функция от t, так что

$$\frac{\overline{\partial t}}{\partial t} = \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{d\bar{t}}{ds} : \frac{dt}{ds},$$

где s – дуговая абсцисса.

Характеристическим однородным уравнением, соответствующим уравнению (12), будет

$$A(t_0)\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)dt}{t-t_0} = 0 \tag{16}$$

Соответствующая этому уравнению однородная задача сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),$$

где

$$G(t) = \frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)} = \begin{cases} -\varkappa \text{ при } t \text{ на } L', \\ \ \ 1 \text{ при } t \text{ на } L'', \end{cases} \tag{17}$$

решается чрезвычайно просто. А именно, как легко проверить непосредственно или на основании общих формул, все узлы a_k , b_k неособенные и каноническое решение $X(z)$, например, наиболее узкого класса h_{2p}, дается формулой (с точностью до постоянного отличного от нуля множителя)

$$X(z) = \prod_{j=1}^{p}(z-a_j)^{\frac{1}{2}+iB}(z-b_j)^{\frac{1}{2}+iB}, \tag{18}$$

где

$$\beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi} \tag{19}$$

Под множителями

$$(z-a_j)^{\frac{1}{2}+iB}(z-b_j)^{\frac{1}{2}+iB} = \sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}\left[\frac{z-a_j}{z-b_j}\right]^{i\beta}$$

следует подразумевать ветви, голоморфные на разрезанной соответственно вдоль дуг $a_j\, b_j$ плоскости, например те, разложения которых в окрестности бесконечно удаленной точки по убывающим степеням z имеют первым членом z.

Канонические решения всех других классов можно получить умножением $X(z)$ на множители вида $(z - a_k)^{-1}$ и $(z - b_k)^{-1}$. Но нам придется иметь дело лишь с функцией $X(z)$.

Из (18) следует что индекс класса h_{2p} нашей задачи сопряжения равен $(-p)$, ибо порядок $X(z)$ на бесконечности равен p. Следовательно, согласно определению, $-p$ является индексом оператором K.

Мы будем искать решение $\omega(t)$ уравнения (12) в классе h_{2p}.

Можно показать, что тогда $\omega(t)$ будет принадлежать классу H, а производная $\omega'(t)$ – классу H^*.

Так как индекс класса h_{2p} оператора K равен $(-p)$, то имеем

$$\nu - \nu' = -2p, \tag{20}$$

где ν – число линейно независимых(в узком смысле) решений класса h_{2p} , однородного уравнения $K\omega = 0$, а ν' – число линейно независимых решений класса $h_0 = h'_{2p}$ союзного однородного уравнения $K'\sigma = 0$.

Докажем, что $\nu = 0$ и, следовательно, $\nu' = -2p$. В самом деле, пусть $\omega_0(t)$ – какое-либо решение класса h_{2p} уравнений $K\omega = 0$, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – функции, определяемые формулами (11), если вместо $\omega(t)$ взять в них $\omega_0(t)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0 \ \text{ на } \ L' \\ -\varkappa\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0 \ \text{ на } \ L'' \end{aligned} \tag{21}$$

В силу теоремы единственности которая звучала ранее легко заключаем, что

$$\varphi_0(z) = 0, \qquad \psi_0(z) = 0$$

во всей области S. Но тогда на основании формул (11) а так же (11а) мы должны иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_0(t)dt}{t-z}=0, \qquad \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\omega_0(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{t}\omega'_0(t)dt}{t-z}=0$$

для всех $z \in S$. Отсюда заключаем на основании доказанного предложения, что функции $\varphi^*(t),\ \psi^*(t)$, определяемые равенствами

$$i\varphi^*(t)=\omega_0(t),\ -i\psi^*(t)=\varkappa\overline{\omega_0(t)}+\bar{t}\omega'_0(t), \tag{22}$$

являются граничными значениями функций $\varphi^*(t),\ \psi^*(t)$, голоморфных в области S^-, дополняющей $S+L$ до всей плоскости, причем $\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0$. Исключая $\omega_0(t)$ из равенства (22), получим:

$$\varkappa\overline{\varphi^*(t)}-\bar{t}\omega^{*\prime}_0(t)-\psi^*(t)=0 \ \text{ на } L \tag{23}$$

Это граничное условие соответствует второй основной задаче для тела, занимающего бесконечную область S^-, когда смещения на границе равны нулю. Отсюда на основании соответствующей теоремы единственности и условию $\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0$ заключается, что $\varphi^*(z)=\psi^*(z)=0$. Но тогда на основании (22) $\omega_0(t)=0$.

Таким образом, наше утверждение о том, что $v=0$ и, следовательно, $v'=2p$, доказано.

В силу теоремы условию разрешимости (в классе h_{2p}) уравнения (12) имеют вид

$$Re\int_L [f(t)+C(t)]\sigma_j(t)dt=0, \qquad j=1,2,\ldots,2p, \tag{24}$$

где $\sigma_j(t), j=1,2,\ldots,2p,$ – полная система линейно независимых решений класса $h_0=h'_{2p}$ уравнения $K'\sigma=0$.

Полагая $C_k=\gamma_k+iy_{k+p},\ k=1,2,\ldots,p,$ где γ_j – действительные постоянные, мы получим(действительную) систему линейных уравнений для определения постоянных $\gamma_k,\ \ k=1,2,\ldots,p$, вида

$$\sum_{h=1}^{2p}A_{jk}\gamma_k=B_j, \qquad j=1,2,\ldots,2p, \tag{25}$$

где A_{jk} – определенные постоянные, не зависящие от $f(t)$, а B_j – также постоянные, но зависящие от $f(t)$:

$$B_j = Re \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma_j(t)dt.$$

Докажем, что определитель системы (25) отличен от нуля. В самом деле, пусть $f(t) = 0$. Тогда в системе (25) все $B_j = 0$, и она обратиться в однородную. Если определитель этой системы равен нулю, то она допускает отличные от нуля решения. Пусть γ_k^0, $k = 1,2, \dots ,2p$, – одно из них. Тогда уравнение (12) будет разрешимо (в классе h_{2p}) при $f(t) = 0$, $C_k = C_k^0 = \gamma_k^0 + \gamma_{k+p}^0$. Пусть $\omega_0(t)$ – его решение, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – соответствующие ему функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Тогда

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = C_k^0 \quad \text{на} \quad L_k', \quad k = 1,2, \dots, p,$$
$$-\varkappa\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0 \quad \text{на} \quad L''$$

Отсюда в силу теоремы единственности для смешанной задачи легко заключаем, что $\varphi_0(z) = \delta$, $\psi_0 = \varkappa\overline{\delta}$, где δ – некоторая постоянная.

Поэтому будем иметь

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0(t)dt}{t-z} = \delta,$$
$$\psi_0(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\omega_0(t)}dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{t}\omega_0'(t)dt}{t-z} = \varkappa\delta \tag{26}$$

для всех $z \in S$. Вводя теперь снова обозначения (22), приходим на основании предложения, доказанного ранее, к заключению, что функции $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$ являются граничными значениями некоторых функций $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$, голоморфных в бесконечной области S^-, причем эти граничные значения связаны соотношением (23); на этот раз $\varphi^*(\infty) = -i\delta$, $\psi^*(\infty) = -i\varkappa\overline{\delta}$. Подставляя эти значения в (23), получаем, что $\delta = 0$б откуда в силу (22)

$\omega_0(t) = 0.$ Но тогда $\varphi_0(z) = \psi_0(z) = 0$ в S и, следовательно, $C_k^0 = \gamma_k^0 + \gamma_{k+p}^0 = 0$, $k = 1,2,\dots,p$, что противоречит предположению.

Таким образом, определитель системы (25) отличен от нуля, и, значит, она всегда однозначно разрешима относительно постоянных γ_k, $k = 1,2,\dots,2p$. Следовательно, постоянные C_j, $j = 1,2,\dots,p$, вполне определяются; при этих значениях постоянных уравнение (12) однозначно разрешимо (в классе h_{2p}), и его решение $\omega(t)$ приводит к решению исходной задачи.

Уравнение (12) приобретает чрезвычайно простой вид в случае, когда L– окружность. В этом случае оно, по существу, сводится к характеристическому уравнению с коэффициентами $A(t), B(t)$, определяемыми формулами (13), а это, в конечном счете, приводит к задаче сопряжения, в которой коэффициент $G(t)$ определяется формулой (17), а свободный член содержит некоторое число незаданных заранее постоянных, которые однозначно определяются в ходе решения задачи из систем линейных алгебраических уравнений. Однако в нашем случае решение можно гораздо проще получить путем непосредственного приведения к задаче сопряжения, минуя интегральные уравнения.

Заключение

Изучая научную литературу, исследуя и анализируя данную тему можно сделать вывод, что интегральные преобразования являются мощным средством решения различных задач не только в математике, но и в других областях науки .

Применение методов, использующих преобразования Фурье и Лапласа позволяет минимизировать и упростить вычисления сложных задач математики. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, не применяющие технику интегральных преобразований, не всегда делают возможным проведение численного анализа необходимого для практического использования полученных результатов. Интегральные преобразования позволяют найти решения целого ряда сложных задач математики.

Применение интегрального преобразования во многих случаях позволяет свести решение дифференциального уравнения в частных производных с n независимыми переменными к решению уравнения с n-1 независимыми переменными, что облегчает решение рассматриваемой задачи. Последовательное применение интегральных преобразований может иногда свести задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения, теория которого хорошо разработана.

Достоинство операционного метода решения по сравнению с классическим методом решения неоднородных дифференциальных уравнений состоит в том, что начальные условия автоматически (естественным образом в процессе преобразований) входят в изображающее уравнение. Поэтому после выполнения обратного преобразования Лапласа сразу получается частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Следовательно, при операционном методе не надо искать произвольные постоянные.

Недостаток метода – трудность обращения преобразования Лапласа, особенно в случае сложной правой части или уравнений высокого порядка.

Существенным преимуществом метода интегральных преобразований является возможность подготовки таблиц прямых и обратных преобразований различных функций, часто встречающихся в приложениях.

Список использованной литературы

1. E. Carneiro and F. Littmann, Bandlimited Approximations to the Truncated Gaussian and Applications, Constructive Approximation 38 (2013) 19-57, doi: 10.1007/s00365-012-9177-8.

2. F. W. King, Hilbert Transforms, Volume 1, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 124, Cambridge University Press, New York, 2009.

3. G. B. Arfken and H. J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, 4 th Edition, Academic Press, San Diego, 1995.

4. M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, Mathematische Zeitschrift 27 (1928) 218-244, doi: 10.1007/BF01171098.

5. P. Szekeres, A Course In Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry, Cambridge University Press, New York, 2012.

6. Боярский, Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта/ Б.В. Боярский. – М.: Альфа, 1960. – 589 с.

7. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов/ И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник. – К.:ШТИИНЦА, 1973. – 163 с.

8. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения/ Ф.Д. Гахов. – Изв. Казанск.физ-матем., 1949. – 258 с.

9. Гахов, Ф.Д. О краевой задаче Гильберта для многосвязной области/Ф.Д. Гахов, Э.Г. Хасабов // Математика. – 1958. – №1. – С. 45-69.

10. Гахов, Ф.Д. Уравнения типа свертки/ Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 269 с.

11. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Физматгиз, 1961. – 145 с.

12. Иванов, В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений/ В.В. Иванов. – Киев: «Наукова думка», 1968. – 256 с.

13. Князев, П.Н. Интегральные преобразования. Под редакцией Ф.Д. Гахова: Учебное пособие для студентов математических факультетов университетов и пединститутов. – Издательство «Вышейшая школа», Минск, 1969. – 185 с.

14. Математическая Энциклопедия/ Под ред. И. М. Виноградова. – М.: «Советская Энциклопедия», 1977. – 1152 с.

15. Моисеев, Н.Д. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи преобразований Лапласа/ Н.Д. Моисеев. – М.: Просвещение, 1969. – 178 с.

16. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов/ Н.С. Пискунов.– М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.

17. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / Под ред. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.; Отв. ред. Панасюк В. В.; АН УССР. Физ.-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко. – Киев : Наук. думка, 1989. – 278 с.