ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Выпускная квалификационная работа
обучающегося по направлению подготовки
01.03.01 Математика
очной формы обучения, группы 07001413
Морозовой Элеоноры Андреевны

Научный руководитель
д. ф. - м. н., профессор,
Васильев В.Б.

Белгород 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Спектральная теорема – наименование утверждений из класса теорем о линейных операторах или о матрицах в линейной алгебре и функциональном анализе, дающих условия, при которых оператор или матрица может быть диагонализирован, то есть представлен диагональной матрицей в некотором базисе (в бесконечномерных пространствах эта концепция о диагонализации требует некоторых уточнений). Вообще говоря, спектральная теорема выделяет класс линейных операторов, которые могут моделироваться операторами умножения – простейшими операторами, какие только могут быть.

Примерами операторов, к которым может быть применена спектральная теорема являются самосопряжённые операторы или, более общо, – нормальные операторы в гильбертовых пространствах.

Спектральная теорема также даёт каноническое разложение объемлющего векторного пространства, называемое спектральным разложением или разложением по собственным значениям.

Данная дипломная работа посвящена спектральной теореме для самосопряженного оператора.

Актуальность данной темы заключается в том, что спектральная теорема используется в различных разделах математики.

Объект исследования: понятие спектральная теорема, используемое для самосопряженных операторов.

Предмет исследования: процесс изучения спектральной теоремы.

Задачи:

1. Изучить литературу по математике, которая касается исследуемой темы.
2. Вывести спектральную теорему для различных классов операторов.

Цель данной дипломной работы – исследование и изучение самосопряженных операторов и их представление.

Данная дипломная работа состоит из двух глав:

1) Элементы теории линейных операторов;

2) Спектральные разложения.

В первой главе рассматривается понятия конечномерного, компактного и ограниченного операторов. Так же рассматриваются их свойства и некоторые примеры.

Во второй главе рассматривается приведение матрицы к жордановой нормальной форме, спектр компактного оператора и спектральная теорема для самосопряженного оператора.

Данная работа состоит из введения, двух глав, которые включают в себя пять параграфов, заключения и списка использованных источников. Объем дипломной 44 страницы. Библиографический список содержит 27 литературных источников.

Глава 1. Элементы теории линейных операторов

1.1. Компактные операторы

Конечномерный оператор — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве, множество значений которого конечномерно.

Конечномерные операторы являются исключительно, удобными, поскольку к уравнениям в конечномерных пространствах можно эффективно применять численные методы с использованием вычислительной техники. Таким образом, конечномерные операторы образуют важный подкласс в множестве компактных операторов.

Примеры:

- Любой линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, является конечномерным.
- Интегральный оператор Фредгольма $(Af)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$, действующий в пространстве $L_2[a,b]$, с вырожденным ядром $K(x,t) = \sum_{i=1}^{N} fi(x)gi(x)$ является конечномерным. Действительно, его множество значений состоит из функций вида $(Af)(x) = \sum_{i=1}^{N} cifi(x)$, где $c_i = \int_a^b f(t)g_i(t)dt$. Это конечномерное пространство с базисом $\{fi\}_{i=1}^{N}$, если системы функций$\{f_i\}_{i=1}^{N}$и $\{g_i\}_{i=1}^{N}$линейно независимы.

Частичные суммы ряда Фурье $P_n f = \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i$ по ортогональной системе $\{\varphi i\}_{i=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве являются конечномерными операторами.

В конечномерном нормированном пространстве всякий линейный оператор компактен, поскольку он автоматически непрерывен, а следовательно ограничен, т.е. переводит любое ограниченное множество в ограниченное, а в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество предкомпактно.

Изучение произвольных линейных операторов в бесконечномерных пространствах представляет собой весьма сложную и необозримую задачу.

Однако некоторые важные классы таких операторов могут быть описаны полностью. Среди них один из важнейших образуют так называемые *компактные* операторы. Эти операторы, с одной стороны, близки по своим свойствам к *конечномерным* и допускают достаточно детальное описание, а с другой, играют важную роль в различных приложениях.

Определение 1. Оператор A, отображающий банахово пространство E в себя, называется *компактным*, если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

В конечномерном нормированном пространстве всякий линейный оператор компактен, поскольку он переводит любое ограниченное множество в ограниченное, а в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество предкомпактно.

В бесконечномерном пространстве компактность оператора есть требование существенно более сильное, чем просто его непрерывность. Например, единичный оператор в гильбертовом пространстве непрерывен, но отнюдь не компактен.

Лемма 1. *Пусть* $x_1, x_2, \dots$ *линейно независимые векторы в нормированном пространстве* E *и пусть*E_n*- подпространство, порожденное векторами* $x_1, \dots, x_n$*. Тогда существует последовательность векторов* $y_1, y_2, \dots$ *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) 1) $\|y_n\| = 1$; 2) $y_n \in E_n$; 3) $\rho(y_n, E_{n-1}) > 1/2$,

где $\rho(y_n, E_{n-1})$-расстояние вектора y_n от E_{n-1} , т.е.

$$\max_{x \in E_n} \|y_n - x\|.$$

Доказательство. Действительно, так как векторы $x_1, x_2, \dots$ линейно независимы, то x_n не содержащийся в E_{n-1} И $\rho(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$. Пусть x^*-такой вектор из E_{n-1}, что $\|x_n - x^*\| < 2\alpha$тогда, поскольку $\alpha = \rho(x_n, E_{n-1}) = \rho(x_n - x^*, E_{n-1})$, вектор

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$$

удовлетворяет всем условиям 1)-3). За y_1 При этом можно взять $x_1/\|x_1\|$.

Лемма доказана.

Рассмотрим пример.

В пространстве непрерывных функций $C[a,b]$ важный класс компактных операторов образуют операторы, представимые в виде

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt. \qquad (1)$$

Покажем справедливость следующего утверждения: если функция $K(s,t)$ограничена на квадрате $a \le s \le b, a \le t \le b$и все ее точки разрыва лежат на конечном числе кривых

$$t = \varphi_k(s), \;\; k = 1, 2, \dots, n,$$

где φ_k-непрерывные функции, то формула (1) определяет в пространстве $C[a,b]$компактный оператор.

Заметим, что в указанных условиях интеграл (1) существует для любого s из отрезка $[a,b]$, т.е. функция *y(s)* определена. Далее, пусть

$$M = \max_{a \le s,t \le b} |K(s,t)|$$

и пусть *G*-множество тех точек *(s, t)*, для которых хотя бы при одном *k =1,2,…,n* выполняется непрерывно

$$|t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}.$$

Следом *G(s)* этого множества на каждой прямой *s=const* служит объединение интервалов

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{t: |t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}\right\}.$$

Пусть *F*-дополнение множества *G* до квадрата $a \le s, t \le b$. Так как *F* компактно, а функция *K(s, t)* непрерывна на *F*, то существует такое $\delta > 0$, что

$$|K(s',t') - K(s'',t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

для любых точек *(s’, t’), (s’’,t’’)* из *F*, удовлетворяющих условию

$$|s' - s''| + |t' - t''| < \delta. \qquad (2)$$

Оценим теперь разность *y(s')-y(s'')* в предположении, что $|s' - s''| < \delta.$ Имеем

$$|y(s') - y(s'')| \leq \int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)||x(t)|dt;$$

для оценки стоящего справа интеграла разобьем промежуток интегрирования $[a,b]$на объединение интервалов $G(s') \cup G(s'')$, которое обозначим P, и остальную часть отрезка $[a,b]$, которую обозначим Q. Заметив, что P есть объединение интервалов, суммарная длина которых не превосходит $\varepsilon/_{3\text{M}}$, получаем

$$\int_P |K(s',t) - K(s'',t)||x(t)|dt < \frac{2\varepsilon}{3}\|x\|.$$

Интеграл по Q допускает оценку

$$\int_Q |K(s',t) - K(s'',t)||x(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}\|x\|.$$

Таким образом,

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon\|x\|. \qquad (3)$$

Неравенство (3) показывает, что функция *y(s)* непрерывна, т.е. формула (1) действительно определяет оператор, переводящий пространство $C[a,b]$ в себя. Далее, из того же неравенства видно, что если $\{x(t)\}$-ограниченное множество в *C[a,b]*, то соответствующее множество $\{y(s)\}$ равностепенно непрерывно. Наконец, если $\|x\| \leq C$, то

$$\|y\| = \sup|y(s)| \leq \sup\int_a^b |K(s,t)||x(t)|dt \leq M(b-a)\|x\|.$$

Таким образом, оператор (1) переводит всякое ограниченное множество из *C[a,b]* в множество функций, равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное, т.е. предкомпактно.

Основные свойства компактных операторов

Теорема 1. *Если* $\{A_n\}$*-последовательность компактных операторов в банаховом пространстве E, сходящаяся по норме к некоторому оператору A, то оператор A тоже компактен.*

Доказательство. Для установления компактности оператора *A* достаточно показать, что, какова бы ни была ограниченная последовательность $x_{1,}x_2, \dots, x_n, \dots$ элементов из *E*, из последовательности $\{A_n\}$ можно выделить сходящуюся последовательность.

Так как оператор A_1 компактен, то из последовательности $\{A_1 x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots \tag{4}$$

-такая последовательность, что $\left\{A_1 x_n^{(1)}\right\}$ сходится. Рассмотрим теперь последовательность $\left\{A_1 x_n^{(1)}\right\}$. Из нее опять-таки можно выбрать сходящуюся последовательность. Пусть

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$$

-такая последовательность, выбранная из (4), что $\left\{A_1 x_n^{(2)}\right\}$ сходится. При этом, очевидно, $\left\{A_1 x_n^{(2)}\right\}$ тоже сходится, и т.д. возьмем затем диагональную последовательность

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

Каждый из операторов $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ переводит ее в сходящуюся. Покажем, что и оператор *A* тоже переводит ее в сходящуюся. Тем самым компактность *A* будет установлена. Так как пространство *E* полно, то достаточно показать, что $\left\{A_1 x_n^{(n)}\right\}$ –фундаментальная последовательность. Имеем

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \leq \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\right\| + \left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| + \left\|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\| \quad (5)$$

Пусть $\|x_n\| \leq C$; выберем сначала k так, что $\|A - A_k\| < \varepsilon/(3C)$, а потом выберем такое N, чтобы при всех $n > N$ и $m > N$ выполнялось неравенство

$$\left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| < \varepsilon/3$$

При этих условиях из (7) получаем, что

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \varepsilon$$

для всех достаточно больших n и m.

Теорема доказана.

Легко проверить, что линейная комбинация компактных операторов компактна. Следовательно, в пространстве *L(E, E)* всех ограниченных линейных операторов, определенных на *E*, компактные операторы образуют замкнутое линейное подпространство.

Посмотрим теперь, будет ли совокупность компактных операторов замкнута относительно операции перемножения операторов. На самом деле здесь справедливо даже существенно более сильное утверждение.

Теорема 2. *Если A-компактный оператор, а B-ограниченный оператор, то операторы AB и BA компактны.*

Доказательство. Если множество $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}$ ограничено, то *BM* тоже ограниченно. Следовательно, *ABM* предкомпактно, а это и означает, что оператор *AB* компактен. Далее, если *M* ограничено, то *AM* предкомпактно, а тогда, в силу непрерывности *B*, множество *BAM* тоже предкомпактно, т.е. оператор *BA* компактен.

Следствие. *В бесконечномерном пространстве E компактный оператор не может иметь ограниченного обратного.*

Теорема 3. Оператор, сопряженный компактному, компактен.

Доказательство. Пусть A-компактный оператор в банаховом пространстве E. Покажем, что сопряженный оператор А*, действующий в Е*, переводит каждое ограниченное подмножество из Е* в предкомпактное. Поскольку всякое ограниченное подмножество нормированного пространства содержится в некотором шаре, достаточно показать, что А* переводит каждый шар в предкомпактное множество. В силу линейности оператора А* достаточно показать, что образ А$^*S^*$ замкнутого единичного шара $S^* \subset$ Е* предкомпактен.

Будем рассматривать элементы из Е* как функции не на всем пространстве E, а лишь на компакте $\overline{AS}$-замыкании образа единичного шара при отображении A. При этом множество Φ функций, отвечающих функционалам из S^*, будет равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Действительно, если $\|\varphi\| \leq 1$, то

$$\sup|\varphi(x)| = \sup|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \sup\|Ax\| \leq \|A\|$$

и

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq \|\varphi\| \|x' - x''\| \leq \|x' - x''\|.$$

Следовательно, это множество Φ предкомпактно в пространстве $C[\overline{AS}]$. Но множество Φ с метрикой, индуцированной обычной метрикой пространства непрерывных функций $C[\overline{AS}]$, изометрично множеству A^*S^*. Действительно, если $g_1, g_2 \in S^*$, то

$$\begin{aligned}\|A^*g_1 - A^*g_2\| &= \sup|(A^*g_1 - A^*g_2, x)| \\ &= \sup|(g_1 - g_2, Ax)| = \sup|(g_1 - g_2, z)| \\ &= \sup|(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).\end{aligned}$$

Поскольку Φ предкомпактно, то оно вполне ограничено; следовательно, вполне ограничено и изометричное ему множество A^*S^*. Поэтому A^*S^* предкомпактно вE^*.

Замечание. Нетрудно проверить, что множество Φ замкнуто в $C[\overline{AS}]$, так что оно компактно, поэтому компактно и множество A^*S^*, хотя образ замкнутого единичного шара при произвольном вполне непрерывном отображении может не быть компактом. Ситуация в только что доказанной теореме отличается от общей тем, что замкнутый единичный шар S^*в E* компактен в *-слабом топологии пространства E*. отсюда и следует компактность образа множества S^* для любого компактного оператора.

Собственные значения компактного оператора

Теорема 4. *Всякий компактный оператор A в банаховом пространстве E имеет при любом δ>0 лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным значениям, по модулю превосходящим δ.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ какая-либо последовательность собственных значений оператора *A* таких, что $|\lambda_n| > \delta$; $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots -$ отвечающая им последовательность собственных векторов, и пусть эти векторы линейно независимы.

Воспользуемся леммой 1 и построим такую последовательность векторов$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ что

$$1)\ y_n \in E_n;\ 2)\ \|y_n\| = 1; 3)\ \rho(y_n, E_{n-1}) = \inf\|y_n - x\| > 1/2,$$

где $E_n -$ подпространство, порожденное $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Последовательность $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ ограничена в силу неравенства $|\lambda_n| > \delta$. Мы утверждаем, что из последовательности образов $\left\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}$ нельзя выбрать сходящуюся. Действительно, пусть $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$; тогда

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in E_{n-1}.$$

Поэтому при любых $p>q$

$$\left\|A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right\| = \|y_p + z_p - (y_q + z_q)\| = \|y_p - (y_q + z_q - z_p)\| > {}^1/_2.$$

поскольку $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$.

Это противоречит компактности оператора *A*.

Из этой теоремы следует, что число собственных значений λ_n компактного оператора *A* во внешности круга $|\lambda| > \delta > 0$ всегда конечно, и что все собственные значения оператора *A* можно перенумеровать в порядке не возрастания модулей: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$

Самосопряженные компактные операторы в Н

Установим некоторые свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженных операторов в Н, вполне аналогичные, соответствующим свойствам конечномерных самосопряженных операторов.

I. *Все собственные значения самосопряженного оператора A в H действительны.*

В самом деле, пусть $Ax = \lambda x, \|x\| \neq 0$ тогда

$$\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x,Ax) = (x,\lambda x) = \bar{\lambda}(x,x),$$

откуда $\lambda = \bar{\lambda}$.

II. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.*

Действительно, если $Ax = \lambda x$ и $Ay = \mu y$, причем $\lambda \neq \mu$ то

$$\lambda(x,y) = (Ax,y) = (x,Ay) = (x,\mu y) = \mu(x,y),$$

откуда *(x,y)=0*

докажем теперь следующую фундаментальную теорему.

Теорема 5. *Для любого компактного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом пространстве H существует ортогональная нормированная система* $\{\varphi_n\}$ *собственных векторов, отвечающих собственным значениям* $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n \neq 0)$ *такая, что каждый элемент* $\xi \in H$ *записывается единственным образом в виде*

$$\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi',$$

где вектор$\xi' \in KerA$, *т.е. удовлетворяет условию*$A\xi' = 0$; *при этом*

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$$

и если система$\{\varphi_n\}$ *бесконечна, то* $\lim \lambda_n = 0\ (n \to \infty)$.

Для доказательства этой основной теоремы понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Если* $\{\xi_n\}$ *слабо сходится к* ξ *и линейный оператор* A *компактен, то*

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n, \xi_n) \to (A\xi, \xi) = Q(\xi).$$

Доказательство. Для всякого n

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \leq |(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| + |(A\xi, \xi_n) - (A\xi, \xi)|.$$

Но

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi_n)| \leq \|\xi_n\| \|A(\xi_n - \xi)\|$$

и

$$|(A\xi_n, \xi) - (A\xi, \xi)| = \left|\left(\xi, A(\xi_n - \xi)\right)\right| \leq \|\xi\| \|A(\xi_n - \xi)\|,$$

и так как числа $\|\xi_n\|$ ограничены, а $\|A(\xi_n - \xi)\| \to 0$ то

$$|(A\xi_n, \xi_n) - (A\xi, \xi)| \to 0$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если функционал*

$$|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|,$$

где A*-ограниченный самосопряженный линейный оператор, достигает на единичном шаре максимума в точке* ξ_0*, то из* $(\xi_0, \eta) = 0$ *вытекает, что*

$$(A\xi_0, \eta) = (\xi_0, A\eta) = 0.$$

Доказательство. Очевидно, $\|\xi_0\| = 1$. Положим

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\eta}{\sqrt{1 + |a|^2 \|\eta\|^2}},$$

где a-произвольное комплексное число. Из $\|\xi_0\| = 1$ следует, что

$$\|\xi\| = 1.$$

Далее

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + |a|^2\|\eta\|^2}\left[Q(\xi_0) + \bar{a}(A\xi_0, \eta) + a\left(\overline{A\xi_0, \eta}\right) + |a|^2 Q(\eta)\right].$$

Число a можно взять сколь угодно малым по модулю и таким, что $\bar{a}\left(A\xi_{0,}, u\right)$ – действительная величина. Тогда $a\left(\overline{A\xi_0, \eta}\right) = \bar{a}(A\xi_0, \eta)$ и

$$Q(\xi) = Q(\xi_0) + 2\bar{a}(A\xi_0, \eta) + O(a^2).$$

Из последнего неравенства видно, что если $(A\xi_0, \eta) \neq 0$, то a можно выбрать так, что $|Q(\xi)| > |(Q\xi_0)|$, а это противоречит условию леммы.

Из леммы 3 вытекает, что если $|Q(\xi)|$ достигает максимума при $\xi = \xi_0$, то ξ_0 есть собственный вектор оператора.

Доказательство теоремы 5. Будем строить элементы $\varphi(k)$ по индукции, в порядке убывания абсолютных величин соответствующих им собственных значений:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots$$

Для построения элемента φ_1 рассмотрим выражение $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ и докажем, что оно на единичном шаре достигает максимума. Пусть

$$S = \sup|(A\xi, \xi)|$$

и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – такая последовательность, что $\|\xi_n\| = 1$ и

$$|(A\xi_n, \xi_n)| \to S \text{ при } n \to \infty.$$

Так как единичный шар в H слабо компактен, то из $\{\xi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу η. При этом $\|\eta\| \leq 1$ в силу леммы 2

$$|(A\eta, \eta)| = S$$

Элемент η мы и примем за φ_1. Ясно, что $\|\eta\| = 1.$ При этом

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1,$$

откуда

$$|\lambda_1| = \frac{|A\varphi_1, \varphi_1|}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \left|(A\varphi_1, \varphi_{1)}\right| = S.$$

Пусть теперь собственные векторы

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

отвечающие собственным значениям

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

Уже построены. Пусть $M(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n,)$ − подпространство, натянутое на $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n,$. рассмотрим функционал $|(A\xi, \xi)|$ на совокупности элементов, принадлежащих

$$M_n^{\perp} = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n,)$$

и удовлетворяющих условию $\|\xi\| \leq 1$ множество $M_n^{\perp}$ есть подпространство инвариантное относительно A. Применяя к $M_n^{\perp}$ проведенные выше рассуждения, получим, что в $M_n^{\perp}$ найдется вектор, собственный для оператора A.

Возможны два случая: 1) после конечного числа шагов мы получим подпространство $M_{n_0}^{\perp}$ в котором $(A\xi, \xi) = 0$; 2) $(A\xi, \xi) \neq 0$ на $M_n^{\perp}$ при всех n.

В первом случае из леммы 3 вытекает, что $M_{n_0}^{\perp}$ переводится оператором A в нуль, т.е. целиком состоит из собственных векторов, отвечающим $\lambda = 0$. Система построенных элементов $\{\varphi_n\}$ состоит из конечного числа элементов.

Во втором случае получаем последовательность $\{\varphi_n\}$ собственных векторов, для каждого из которых $\lambda \neq 0$. Покажем, что $\lambda_n \to 0$ Последовательность $\{\varphi_n\}$ слабо сходится к нулю, поэтому элементы $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ должны сходится к нулю по норме, откуда $|\lambda_n| = \|A\varphi_n\| \to 0$.

Пусть

$$M^{\perp} = H \ominus M(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots) = \bigcap_n M_n^{\perp} \neq 0.$$

Если $\xi \in M^{\perp}$ и $\xi \neq 0$, то $(A\xi, \xi) \leq \lambda_n \|\xi\|^2$ для всех n, т.е. $(A\xi, \xi) = 0$ отсюда в силу леммы 3, примененной к $M^{\perp}$ получаем $A\xi = 0$, т.е. подпространство $M_n^{\perp}$ переводится оператором A в нуль.

Из построения системы $\{\varphi_n\}$ ясно, что всякий вектор можно представить в виде

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi', \text{где } A\xi' = 0$$

откуда вытекает, что

$$A\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k.$$

Замечание. Доказанная теорема означает, что для всякого компактного самосопряженного оператора A в H существует ортогональный базис пространства H, состоящий из собственных векторов этого оператора. Действительно, для получения такого базиса достаточно дополнить построенную в доказательстве систему собственных векторов $\{\varphi_n\}$ произвольным ортогональным базисом подпространства $M^{\perp}$ переводимого оператором A в нуль. Иными словами, здесь получается результат, вполне аналогичный теореме о приведении матрицы конечномерного самосопряженного оператора к диагональному виду в ортогональном базисе.

Для несамосопряженных операторов в n–мерном пространстве такое поведение невозможно, однако верна следующая теорема: *всякое линейное преобразование в n–мерном пространстве имеет хотя бы один собственный вектор.*

1.2. Ограниченные операторы

Оператор A называется ограниченным, если существует такая постоянная M, что $\|Ax\| \leq M\|x\|$ для любого $x \in E_x$.

Согласно этому определению ограниченный оператор преобразует ограниченное множество элементов $|x| \subset E_x$ в ограниченное же множество элементов $|Ax| \subset E_y$.

Теорема 6. *Для того чтобы аддитивный и однородный оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Необходимость. Пусть A-непрерывный оператор. Допустим, что он не ограничен. Тогда найдется последовательность элементов $|x_n|$ такая, что

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\|.$$

Построим элементы

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|};$$

$\xi_n \to 0$, так как

$$\|\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

С другой стороны,

$$\|A\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > 1.$$

Значит,

$$A\xi_n A0 = 0.$$

Поэтому оператор A не непрерывен в нулевой точке, что противоречит предположению.

Достаточность. Пусть аддитивный оператор A ограничен, т.е.

$$\|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Пусть $x_n \to x$, т.е. $\|x_n - x\| \to 0$; тогда и

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0.$$

т.е. $Ax_n \to Ax$; следовательно, A непрерывен.

Пусть в линейном нормированном пространстве E_x задано линейное многообразие L. Это линейное многообразие можно рассматривать как самостоятельное линейное пространство, может быть неполное. Предположим, что на L определен аддитивный оператор A со значениями в некотором линейном нормированном пространстве E_y. Оператор A называется *ограниченным на* L, если существует постоянная M такая, что

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

для всех$x \in L$. Наименьшая из таких постоянных называется *нормой* оператора A на линейном многообразии L и обозначается $\|A\|_L$.

Теорема 7. *Линейный ограниченный оператор* A_0*, заданный на линейном многообразии* L*, всюду плотном в линейном нормированном пространстве* E_x*, со значениями в полном линейном нормированном пространстве* E_y*, может быть продолжен на все пространство без увеличения нормы.*

Иными словами, на пространстве E_x можно определить оператор A такой, что

$$Ax = A_0 x \quad \text{для } x \in L.$$

и

$$\|A\|_{E_x} = \|A_0\|_L.$$

Пусть x-элемент пространства E_x, не принадлежащий L. Так как L всюду плотно в E_x, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset L$ такая, что$\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$, и, значит,

$$\|x_n - x_m\| \to 0$$

при $n, m \to \infty$. Но тогда

$$\|A_0 x_n - A_0 x_m\| = \|A_0(x_n - x_m)\| \leq \|A_0\|_L \|x_n - x_m\| \to 0$$

при $n, m \to \infty$, т.е. последовательность $\{A_0 x_n\}$ сходится в себе, а следовательно, в силу полноты E_y, и к некоторому пределу. Этот предел обозначим через Ax. Пусть $(\xi_n) \subset$-другая последовательность, сходящаяся к x. Имеем, очевидно,

$$\|x_n - \xi_n\| \to 0.$$

откуда $\|A_0 x_n - A_0 \xi_n\| \to 0$. Следовательно, $A_0 \xi_n \to Ax$. Это означает, что оператор A определен на элементах E_x однозначно. Если $x \in L$, берем $x_n = x$ для всех n, и тогда

$$Ax = \lim_n A_0 x_n = A_0 x.$$

Построенный оператор A аддитивен, так как

$$A(x_1 + x_2) = \lim_n A_0 \left(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}\right) = \lim_n A_0 x_n^{(1)} + \lim_n A_0 x_n^{(2)} = Ax_1 + Ax_2$$

и ограничен, так как из неравенства

$$\|A_0 x_n\| \leq \|A_0\|_L \|x_n\|$$

переходом к пределу получаем

$$\|Ax\| \leq \|A_0\|_L \|x\|.$$

Из этого же неравенства следует, что

$$\|A\|_{E_x} \leq \|A_0\|_L.$$

Так как при продолжении оператора норма, очевидно, не может уменьшится, то

$$\|A\|_{E_x} = \|A_0\|_L$$

и теорема полностью доказана.

Пространство линейных ограниченных операторов

Пространство линейных ограниченных операторов есть линейное нормированное пространство.

В частном случае, когда E_y =-множеству вещественных чисел, т.е. когда рассматривается пространство линейных функционалов, определенных на E_x, это пространство линейных функционалов называется пространством, сопряженным с E_x, и обозначается E_x^*.

Теорема 8. *Если E_y полно, то пространство линейных ограниченных операторов будет так же полным пространством, следовательно, пространством типа (B).*

Пусть дана последовательность линейных операторов $\{A_n\}$, сходящаяся в себе по норме в пространстве линейных операторов, т.е. такая, что $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Тогда для любого x

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0$$

при $n, m \to \infty$.

Поэтому для каждого фиксированного x последовательность $\{A_n x\}$ элементов пространства E_y сходится в себе. В силу полноты пространства E_y последовательность $\{A_n x\}$ имеет некоторый предел y.

Итак, каждому $x \in E_x$ ставится в соответствие $y \in E_y$, и мы получаем некоторый оператор A, оперделяемый равенством y=Ax. Этот оператор аддитивен:

$$A(x_1 + x_2) = \lim_n A_n(x_1 + x_2) = \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 = Ax_1 + Ax_2.$$

Покажем, что A-ограниченный оператор. По условию

$$\|A_n - A_m\| \to 0$$

при $n, m \to \infty$. Отсюда

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \to 0$$

при $n, m \to \infty$, т.е. числовая последовательность $(\|A_n\|)$ сходится в себе и, следовательно, ограничена. Поэтому существует такая постоянная K, что $\|A_n\| \leq K$ для всех n. Отсюда

$$\|A_n x\| \leq K\|x\|$$

для всех n. Следовательно,

$$\|Ax\| \lim_n \|A_n x\| \leq K\|x\|.$$

и ограниченность оператора A доказана. Так как A, кроме того, аддитивен и однороден, то A-линейный ограниченный оператор.

Докажем, что A есть предел последовательности $\{A_n\}$ в смысле сходимости по норме в пространстве линейных операторов. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon \tag{6}$$

для $n \geq n_0, p > 0$ и всех x с нормой $\|x\| \leq 1$. Переходя в неравенстве (6) к пределу при $p \to \infty$, получим, что

$$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$$

для $n \geq n_0$ и всех x с нормой, не превосходящей единицы. Поэтому для $n \geq n_0$

$$\|A_n - A\| = sup\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$A = \lim_n A_n$$

в смысле сходимости по норме в пространстве линейных ограниченных операторов, и полнота этого пространства доказана.

Следствие. Пространство E*, сопряженное с линейным нормированным пространством *E*, есть банахово пространство.

Равномерная и точечная сходимость операторов.

Сходимость последовательности линейных ограниченных операторов в смысле сходимости по норме в пространстве линейных операторов будем называть *равномерной сходимостью.* Это оправдывается тем, что если $A_n \to A$ в смысле сходимости по норме, то $A_n x \to Ax$ равномерно во всяком шаре

$\|x\| \le r$. В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем n_0 так, чтобы при $n \ge n_0$

$$\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Тогда

$$\|A_n - Ax\| \le \|A_n - A\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon$$

для всех $x \in \bar{S}(\theta, r)$, и требуемое доказано. Обратно, если $A_n x \to Ax$ равномерно на некотором шаре $\|x\| \le r$, то $A_n x \to Ax$ равномерно и в единичном шаре, а отсюда, как только что было показано, следует

$$\|A_n - A\| \to 0.$$

Последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}$ называется точечно сходящейся к линейному оператору A, если для каждого фиксированного x последовательность $\{A_n x\}$ сходится к Ax. Очевидно, что из равномерной сходимости последовательности $\{A_n\}$ следует точечная сходимость этой последовательности.

Обратное неверно, как показывает следующий пример. Пусть E-гильбертово пространство H с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Пусть A_n есть оператор проектирования на подпространство H_n ,порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_n$. Для любого $x \in H$

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \to \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i = x$$

и, следовательно,$A_n \to I$ в смысле точечной сходимости.

С другой стороны, для $\varepsilon_0 <$, любого n и $p > 0$ имеем

$$\|A_n e_{n+1} - A_{n+1} e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1 > \varepsilon_0,$$

и, следовательно, равномерная сходимость $\{A_n\}$ последовательности в единичном шаре $\|x\| \le 1$ пространства H не имеет места.

Теорема 9. *Если пространства E_x и E_y полные, то пространство линейных ограниченных операторов также полно в смысле точечной сходимости.*

Так как для каждого *x* последовательность $\{An_x\}$ сходится в себе, то для каждого *x* существует

$$y = \lim_n A_n x$$

И получаем оператор *y*=*Ax*, определенный на E_x, с областью значений в E_y. Убеждаемся, что *A*-линейный оператор. Доказательство ограниченности оператора *A* вытекает из следующей теоремы:

Теорема 10 (Банаха-Штейнхауса). *Если последовательность линейных ограниченных операторов сходится в себе в каждой точке x банахова пространства* E_x, *то последовательность норм* $\{\|A_n\|\}$ *этих операторов ограничена.*

Предположим противное. Тогда множество $\{\|A_n\|\}$ не ограничено на любом замкнутом шаре $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$. В самом деле, если

$$\|A_n x\| \leq c$$

для всех n и всех *x* из некоторого шара $\overline{S(x_0, \varepsilon)}$, то для любого $\xi \in E_x$ элемент

$$x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\xi + x_0$$

принадлежит этому шару и, следовательно,

$$\|A_n x\| \leq c, \quad n = 1,2, \dots$$

или

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\|A_n \xi\| - \|A_n x_0\| \leq \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n \xi + A_n x_0\right\| \leq c.$$

Отсюда

$$\|A_n \xi\| \leq \frac{c + \|A_n x_0\|}{\varepsilon}\|\xi\|$$

Так в силу сходимости последовательности $\{A_n x_0\}$ последовательность норм $\{\|A_n x_0\|\}$ ограничена, то

$$\|A_n \xi\| \leq c_1\|\xi\|, \quad n = 1,2, \dots$$

и, следовательно, $\|A_n\| \leq c_1, n = 1,2, \dots$ что противоречит сделанному предположению.

Пусть теперь $\bar{S}(x_0, \varepsilon_0)$ –любой замкнутый шар в E_x:на нем последовательность $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена и потому существуют номер n_1 и элемент $x_1 \in \overline{S_0}$ такие, что

$$\|A_{n_1} x_1\| > 1.$$

В сил непрерывности оператора A_{n_1} , это неравенство выполняется в некотором замкнутом шаре $\overline{S_1(x_1, e_1) \subset \overline{S_0}}$. На $\overline{S_1}$ последовательность $\{\|A_n x\|\}$ снова не ограничена и снова найдутся номер $n_2, n_2 > n_1$, и элемент $x_2 \in \overline{S_1}$ такие, что

$$\|A_{n_2} x_2\| > 2.$$

В силу непрерывности оператора A_{n_2} это неравенство сохраняется в некотором замкнутом шаре $\overline{S_2(x_2, \varepsilon_2) \subset \overline{S_1}}$ и т.д.

Можно считать, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда будет существовать точка $\bar{x}$, принадлежащая всем шарам $\overline{S_n(x_n, \varepsilon_n)}$. В этой точке

$$\|A_{n_k} \bar{x}\| \geq k,$$

что противоречит условию, что последовательность $\{A_n x\}$ сходится для всякого $x \in E_x$. Теорема, таким образом, доказана.

Возвращаясь к оператору

$$A_x = \lim_n A_n x,$$

из неравенства

$$\|A_n x\| \leq M\|x\|, \ \ n = 1,2, \dots$$

вытекающего из теоремы Банаха-Штейнхауса, в пределе при $n \to \infty$ получаем $\|Ax\| \geq M\|x\|$, т.е. ограниченность оператора A.

Замечание. В формулировке теоремы Банаха-Штейнхауса вместо сходимости в себе последовательности операторов $\{A_n\}$ в каждой точке $x \in E_x$ можно потребовать ограниченности этой последовательности в каждой точке пространства. При этом доказательство теоремы не изменится.

Итак, существует предел любой точечно сходящейся в себе последовательности линейных ограниченных операторов, который также является линейным ограниченным оператором, т.е. пространство операторов полно в смысле точечной сходимости.

Часто оказывается полезной следующая теорема.

Теорема 11. Для того чтобы последовательность $\{A_n\}$ операторов точечно сходилась к оператору A_0, необходимо и достаточно, чтобы

1)последовательность $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;

2) $A_n x \to A_0 x$для любого x из некоторого множества X, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в E_x.

Необходимость первого условия есть не что иное, как доказанная выше теорема Банаха-Штейнхауса, необходимость второго условия очевидна. Требуется доказать лишь достаточность этих условий.

Пусть

$$M = sup\|A_n\|.$$

и пусть $L(X)$-линейная оболочка множества X. В силу линейности операторов A_n и A_0 и второго условия $A_n x \to A_0 x$ для любого $x \in L(X)$.

Возьмем теперь элемент ξ пространства E_x, не принадлежащий $L(X)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x \epsilon L(X)$ такой, что $\|\xi - x\| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Имеем

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| \leq \|A_n\xi - A_n x\| + \|A_n x - A_0 x\| + \|A_0 x - A_0\xi\| \leq$$

$$\leq \|A_n x - A_0 x\| + (\|A_n\| + \|A_0\|)\|x - \xi\| < \|A_n x - A_0 x\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу того, что $A_x x \to A_o x$, найдется номер n_0 такой, что

$$\|A_n x - A_0 x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $n \geq n_0$. Поэтому для $n \geq n_0$ имеем

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| < \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Глава 2. Спектральные разложения

2.1. Приведение матрицы к жордановой нормальной форме

Определение: жордановой клеткой порядка k, относящейся к числу λ_0, называется матрица порядка $k, 1 \leq k \leq n$, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

На ее главной диагонали стоит одно и то же число λ_0, а на параллельной ей сверху диагонали стоят единицы, все же остальные элементы равны нулю.

Например, (λ_0), $\begin{matrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{matrix}$ -жордановы клетки 1, 2 и 3 порядков.

Жордановой матрицей порядка n называется матрица порядка n, имеющая вид:J= $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_s \end{pmatrix}$. В ней вдоль главной диагонали идут жордановы клетки $J_1, J_2, \ldots J_s$ некоторых порядков, не обязательно различных, и относящиеся к некоторым числам, тоже не обязательно различным. Все места вне этих клеток заняты нулями. При этом $s \geq 1$, т.е. одна жорданова клетка порядка n так же считается жордановой матрицей и $s \leq n$.

Замечание. Говорят, что матрица J имеет нормальную жорданову форму. Диагональная матрица является частным случаем жордановой матрицы, у нее все клетки имеют порядок 1.

Свойства:

Количество жордановых клеток порядка n с собственным значением λ в жордановой форме матрицы A можно вычислить по формуле

$$c_n(\lambda) = rank(A - \lambda I)^{n-1} - 2rank(A - \lambda I)^n + rank(A - \lambda I)^{n+1},$$

где I-единичная матрица того же порядка что и A, символ $rank$ означает ранг матрицы, а $rank(A - \lambda I)^0$, по определению, равен порядку A. вышеприведенная формула следует из равенства

$$rank(A - \lambda I) = rank(J - \lambda I).$$

В случае если поле K не является алгебраически замкнутым, для того чтобы матрица A была подобна над K некоторой жордановой матрице, необходимо и достаточно, чтобы поле K содержало все корни характеристического многочлена матрицы A.

У эрмитовой матрицы все жордановы клетки имеют размер 1.

Является матрицей линейного оператора в каноническом базисе.

Жордановы формы двух подобных матриц совпадают с точностью до порядка клеток.

Теорема 12. жорданова нормальная форма определяется для матрицы однозначно с точностью до порядка расположения жордановых клеток на главной диагонали.

Приведем матрицу $\mathrm{A}(\lambda) = \mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}$ к каноническому виду с помощью элементарных преобразований.

$$\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e_{n-j+1}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_{n-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Отличные от единицы многочлены $e_{n-i+1}(\lambda), \dots, e_{n-1}(\lambda), e_n(\lambda)$ называют *инвариантными* множителями матрицы $\mathrm{A}(\lambda)$ среди них нет многочленов равных нулю, сумма степеней всех этих многочленов равна n и все они раскладываются на линейные множители над множеством комплексных чисел. Пусть $e_{n-i+1}(\lambda)$ раскладывается в произведение следующих множителей: $(\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}}, (\lambda-\lambda_2)^{k_{2j}}, \dots, (\lambda-\lambda_t)^{k_{tj}}$. Назовем эти множители *элементарными делителями* многочлена $e_{n-j+1}(\lambda)$.

Теорема жордановой нормальной форме является частным случаем теоремы о структуре конечнопорожденных модулей над областями главных идеалов. Действительно, классификация матриц соответствует классификации линейных операторов, а векторные пространства

Элементарными делителями матрицы $A(\lambda)$ называются элементарные делители всех многочленов $e_{n-i+1}(\lambda), \dots, e_{n-1}(\lambda), e_n(\lambda)$.

Выпишем жорданову матрицу J порядка n, составленную из жордановых клеток определяемых следующим образом: каждому элементарному делителю $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ матрицы $A(\lambda)$ ставим в соответствие жорданову клетку порядка k_{ij} относящуюся к числу λ_i.

Пусть для некоторой матрицы порядка 9 характеристическая матрица $A-\lambda E$ приведена к каноническому виду.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda-2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&(\lambda-2)(\lambda-5)^2&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&(\lambda-2)^3(\lambda-5)^2\end{pmatrix}$$

$e_1=e_2=e_3=e_4=e_5=e_6=1, e_7=\lambda-2, e_8=(\lambda-2)(\lambda-5)^2, e_9=(\lambda-2)^3(\lambda-5)^2$-инвариантные множители матрицы A-λE, $(\lambda-2), (\lambda-5)^2, (\lambda-2)^3, (\lambda-5)^2$-элементарные делители матрицы $A-\lambda E$.

Получаем: две клетки порядка 1, относящиеся к числу 2; две клетки порядка 2, относящиеся к числу 5; одну клетку порядка 3, относящуюся к числу 2. Выпишем жорданову форму матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&5&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&5&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&5&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

Алгоритм приведения матрицы А к жордановой форме

1. Составить характеристическую матрицу $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}$.
2. Привести эту матрицу к канонической форме с помощью элементарных преобразований.
3. Разложить двигательные многочлены на линейные множители.
4. Найти элементарные делители и по ним выписать жорданову форму матрицы A.

Для того чтобы заданная матрица была подобна диагональной матрице, необходимо и достаточно, чтобы все элементарные делители ее характеристической матрицы были первой степени.

Пример. Привести к жордановой форме матрицу А= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Решение. С помощью элементарных преобразований приводим матрицу $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}$ к следующему виду: $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}$= $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ -7 & -2-\lambda & 9 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$~

~…~ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}$. Инвариантные множители этой матрицы:$\mathrm{e}_1 = 1, \mathrm{e}_2 = 1, \mathrm{e}_3 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$; элементарные делители будут $(\lambda - 1)$, $(\lambda - 2)^2$.

По найденным элементарным делителям выписываем жорданову форму исходной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2. Спектр компактного оператора

Если T-линейное преобразование на, то собственные значения T-это комплексные числа λ, для которых детерминант λI-T равен нулю. Множество таких λ называется спектром T. Оно может состоять не более чем из n точек, поскольку $det(\lambda I$-$T)$ есть полином степени n. Если λ не есть собственное значение, то оператор λI-T имеет обратный, поскольку $det(\lambda I$-$T)\neq 0$.

Пусть $T \in L(X)$. Комплексное число λ лежит в резольвентном множестве $\rho(T)$ оператора T, если λI-T есть биекция с ограниченным обратным. Резольвентой T в точке λ называют оператор $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Если λ не принадлежит $\rho(T)$, то говорят, что λ лежит в спектре $\sigma(T)$ оператора T.

По теореме об обратном отображении оператор $\lambda(I$-$T)$ автоматически обладает обратным, если он биективен. Различаем 2 подмножества в спектре.

Пусть $T \in L(X)$.

(a) Вектор $x \in X$, удовлетворяющий условию $Tx=\lambda x$ при некотором $\lambda \in C$, называется собственным вектором T; число λ называется соответствующим собственным значением. Если λ–собственное значение, то λI-T не инъективен, так что λ лежит в спектре T. Множество всех собственных значений называется точечным спектром оператора T.

(b) Если λ не есть собственное значение и если $Ran(\lambda I$-$T)$ не плотно в X, то говорят, что λ лежит в остаточном спектре.

Остаточный спектр выделяют по той причине, что у широкого класса операторов, например у самосопряженных операторов, он отсутствует.

Спектральный анализ операторов очень важен для математической физики. Например, в квантовой механике гамильтониан-это неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Точечный спектр гамильтониана соответствует уровням энергии связанных состояний системы. Остальной спектр играет огромную роль в теории рассеяния в системе.

Лемма 4. Пусть *X*-банахово пространство. Тогда $\{x_n\}$– последовательность Коши в том и только том случае, когда $\{l(x_n)\}$– последовательность Коши равномерно по $l \in X^*, \|l\| \leq 1$..

Доказательство. Если $\{x_n\}$–последовательность Коши, то $|l(x_n) - l(x_m)| \leq \|x_n - x_m\|$ для всех l с $\|l\| \leq 1$, так что $\{l(x_n)\}$–последовательность Коши равномерно по всем *l* с $\|l\| \leq 1$. Обратно,

$$\|x_n - x_m\| = \sup|l(x_n - x_m)|.$$

Следовательно, если $\{l(x_n)\}$–последовательность Коши равномерно по всем *l* с $\|l\| \leq 1$, то $\{x_n\}$–последовательность Коши.

Теорема 13. Каждая слабо аналитическая функция сильно аналитична.

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$ слабо аналитична на D со значениями в *X*. Пусть $z_0 \in D$ и пусть *Г*-окружность в *D*, содержащая z_0 и окружающая область, лежащую в *D*. Если $l \in X$, то *l(x(z))* аналитична и

$$l\left(\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}\right) - \frac{d}{dz}l\big(x(z_0)\big) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] l\big(x(z)\big)dz.$$

Поскольку *l(x(z))* непрерывна на компактной *Г*, $|l(x(z))| \leq C_l$ для всех $z \in$ Г. Рассматривая *x(z)* как семейство отображений $x(z)\colon X^* \to C,$ легко понять, что *x(z)* поточечно ограничены на каждом *l* и потому, в силу теоремы о равномерной ограниченности,$\sup\|x(z)\| \leq C < \infty$. Таким образом,

$$\left|l\left(\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}\right) - \frac{d}{dz}l\big(x(z_0)\big)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\|l\|(\sup\|x(z)\|)\oint\limits_{.\Gamma}\left|\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right|dz.$$

Эта оценка показывает, что $[x(z_0+h)-x(z_0)]/h$ есть последовательность Коши равномерно для всех l с $\|l\| \leq 1$. В силу леммы, $[x(z_0+h)-x(z_0)]/h$ сходится в *X,* что и доказывает сильную аналитичность $x(\cdot)$.

Теорема 14. Пусть *X*-банахово пространство и $T \in L(X)$. Тогда $\rho(T)$– открытое подмножество в C и $R_\lambda(T)$–аналитическая *L(X)*–значная функция на каждом компоненте $\rho(T)$. Для любых 2 точек $\lambda, \mu \in \rho(T)$, операторы $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют и

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T) \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$. Имеем

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + (\lambda_0 - T)} = \frac{1}{\lambda_0 - T} \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0 - T}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}\right)^n\right].$$

Это наталкивает на мысль определить

$$\bar{R}_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n \left[R_{\lambda_0}(T)\right]^n\right\}.$$

поскольку

$$\left\|\left[R_{\lambda_0}(T)\right]^n\right\| \leq \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^n,$$

ряд в правой части сходится в равномерной операторной топологии, если

$$|\lambda - \lambda_0| < \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^{-1}.$$

Для таких λ отображение $\bar{R}_\lambda(T)$ корректно определено, и легко проверить, что

$$(\lambda I - T)\bar{R}_\lambda(T) = I = \bar{R}_\lambda(T)(\lambda I - T).$$

Это доказывает, что $\lambda \in \rho(T)$, если $|\lambda - \lambda_0| < \left\|R_{\lambda_0}(T)\right\|^{-1}$, и что $\bar{R}_\lambda(T) = R_\lambda(T)$. Таким образом, $\rho(T)$ открыто. Поскольку $R_\lambda(T)$ разлагается в степенной ряд, она аналитична.

Соотношение

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu I - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda I - T)R_\mu(T)$$

доказывает (7). Перестановка μ и λ показывает, что $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют.

Уравнение (7) называют первой резольвентной формулой.

Следствие. Пусть X-банахово пространство, $T \in L(X)$. Тогда спектр T не пуст.

Доказательство. Формально

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right),$$

откуда для больших $|\lambda|$ получаем

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right). \qquad (8)$$

Если $|\lambda| > \|T\|$, то ряд в правой части сходится по норме, и для таких λ его сумма, на самом деле, обратна λI-T. Таким образом, $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если бы $\sigma(T)$ было пустым, $R_\lambda(T)$ была бы целой ограниченной аналитической функцией. По теореме Лиувилля $R_\lambda(T)$ тогда была бы нулем, что приводит к противоречию. Итак, $\sigma(T)$ не пусто.

Ряд (8) называется рядом Неймана для $R_\lambda(T)$. Доказательство следствия показывает, что $\sigma(T)$ содержится в замкнутом круге радиуса. В действительности о $\sigma(T)$ можно сказать больше.

Величина

$$r(T) = \sup|\lambda|$$

называется спектральным радиусом оператора T.

Теорема 15. Пусть X-банахово пространство,$T \in L(X$. Тогда $\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$ существует и равен $r(T)$. Если X-гильбертово пространство и A-самосопряженный оператор, то $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Решающее место доказательства этой теоремы-установить, что радиус сходимости разложения Лорана для $R_\lambda(T)$ около∞ есть как раз $r(T)^{-1}$. Прежде всего, этот радиус сходимости не может быть меньше $r(T)^{-1}$поскольку $R_\lambda(T)$ аналитична на $\rho(T)$ и $\{\lambda \mid |\lambda| > r(T)\} \subset \rho(T)$. С другой стороны, ряд (8) представляет собой разложение Лорана около ∞ и там, где он сходится абсолютно, $R_\lambda(T)$ существует. Но так как ряд Лорана абсолютно сходится внутри своего круга сходимости, можно заключить, что радиус сходимости не может быть больше $r(T)^{-1}$Равенство $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$следует из векторного варианта теоремы Адамара, которая утверждает, что радиус сходимости ряда (8) есть величина, обратная

$$\overline{\overline{\lim_{n}}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Наконец, если X-гильбертово пространство и оператор A самосопряжен, то $\|A\|^2 = \|A^2\|$. Это дает $\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$, так что

$$r(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \left\|A^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|A\|.$$

При определении спектра иногда полезна следующая теорема.

Теорема 16. Пусть X-банахово пространство, $T \in L(X)$. Тогда $\sigma(T) = \sigma(T')$ и $R_\lambda(T) = R_\lambda(T)'$. если H–гильбертово пространство, то $\sigma(T^*) = \left\{\lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T)\right\}$ и $R_{\bar{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

Предложение 1. Пусть X-банахово пространство и $T \in L(X)$. Тогда

(a) T не имеет остаточного спектра;

(b) $\sigma(T)$-подмножество в R;

(c) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям T, ортогональны.

Доказательство. (a) следует из последнего предложения и того, что точечный и остаточный спектры не пересекаются по определению. Если λ и μ вещественны, то

$$\|[A - (\lambda + i\mu)]x\|^2 = (x, (A - \lambda + i\mu)(A - \lambda - i\mu)x) = \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2\|x\|^2.$$

Таким образом, если $\mu \neq 0$, то$\|(A-(\lambda+i\mu))x\| \geq |\mu|\|x\|$. это означает, что $A-(\lambda+i\mu)$-инъекция, обладающая ограниченным обратным, заданным на области значений, которая замкнута. Поскольку A не имеет остаточного спектра, $Ran\ A = H$. Следовательно, $(\lambda+i\mu) \in \rho(T)$, если $\mu \neq 0$, так что $\sigma(T) \subset R$ и (b) доказано.

2.3. Спектральная теорема для самосопряженного оператора

Спектральная теорема-наименование утверждений из класса теорем о линейных операторах или о матрицах в линейной алгебре и функциональном анализе, дающих условия, при которых оператор или матрица может быть диагонализирован, т.е. представлен диагональной матрицей в некотором базисе.

Примерами операторов, к которым может быть применена спектральная теорема, являются самосопряженные операторы или, нормальные операторы в гильбертовых пространствах.

Спектральная теорема так же дает каноническое разложение объемлющего векторного пространства, называемое *разложением по собственным значениям* или *спектральным разложением*.

Обозначим через $B(H_C)$ банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в H_C. Аналогично определим $B(H_R)$. Оператор $P \in B(H_C)$ называют *проектом*, если $P^2 = P$. Оператор $P \in B(H_C)$ называют *самосопряженным*, если$\langle P\varphi, \psi\rangle_C = \langle \varphi, P\psi\rangle_C$, $\varphi, \psi \in H_C$. Аналогично определяют самосопряженный оператор в $B(H_R)$. Отметим, что последнее определение можно рассматривать как частный случай определения неограниченного самосопряженного оператора.

(Комплексным) разложением единицы на σ–алгебре всех $\sum$ борелевским множеств действительной оси называют отображение

$$E^C: \sum \to B(H_C),$$

обладающее свойствами:

1. $E^C(\emptyset) = 0_C,\ E^C(R) = 1_C;$

2. для любого $\omega \in \sum$ оператор $E^C(\omega)$ является самосопряженным проектом;
3. для всех $\omega', \omega'' \in \sum$ справедливо равенство
$$E^C(\omega' \cap \omega'') = E^C(\omega')E^C(\omega'');$$
4. для всех$\omega', \omega'' \in \sum$, $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$, выполняется равенство
$$E^C(\omega' \cap \omega'') = E^C(\omega') + E^C(\omega'');$$
5. для любых $\varphi, \psi \in H_C$ функция $E^C_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^C(\omega)\varphi, \varphi\rangle_C$ является комплексной регулярной борелевской мерой на $\sum$.

Из свойства 2 следует, что для всех $\varphi \in H_C$ мера $E^C_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^C(\omega)\varphi, \varphi\rangle_C$ является положительной.

Теорема 17. Пусть $T_C: D(T_C) \subset H_C \to H_C$-самосопряженный оператор. Тогда существует единственное разложение единицы E^C, определенное на σ-алгебре $\sum$ всех борелевских подмножеств действительной оси и такое, что

$$\langle T_C\varphi, \psi\rangle_C = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi dE^C_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_C), \qquad \psi \in H_C. \tag{5}$$

Кроме того, разложение единицы E^C сосредоточено на $\sigma(T_C) \subset R$ в том смысле, что $E^C\big(\sigma(T_C)\big) = 1_C$.

Разложение единицы E^C, связанное с оператором T_C так, как описано в теореме 17, называют *(комплексным) спектральным разложением оператора* T_C.

Предложение 2. Пусть E^C- спектральное разложение оператора T_C, являющегося комплексификацией самосопряженного оператора T_R. Тогда проекторы $E^C(\omega)$, порожденные T_C переводят H_R в H_R.

Доказательство. Для спектрального разложения E^C самосопряженного оператора T_C на любом открытом интервале $\omega = (a, b)$ и при любом $\varphi \in H_C$ справедлива формула

$$E^C(\omega)\varphi = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi I}\int_{a+\delta}^{b-\delta}[((\mu - i\varepsilon)1_C - T_C)^{-1} - ((\mu + i\varepsilon)1_C - T_C)^{-1}]\varphi d\mu.$$

Используя тождество Гильберта, получаем

$$((\mu - i\varepsilon)1_C - T_C)^{-1} - \left((\mu + i\varepsilon)1_C - T_C\right)^{-1}$$
$$= 2i\varepsilon((\mu - i\varepsilon)1_C - T_C)^{-1}\left((\mu + i\varepsilon)1_C - T_C\right)^{-1}$$
$$= 2i\varepsilon((\mu 1_C - T_C)^2 + \varepsilon^2 1_C)^{-1}.$$

Отметим, что $\sigma(T_C) \subset (-\infty, +\infty)$ из следует $\mu \pm i\varepsilon \in \rho(T_C)$, где $\varepsilon > 0$ поэтому, оператор $(\mu 1_C - T_C)^2 + \varepsilon^2 1_C$ обратим. В силу предложения 2 комплексификация оператора $((\mu 1_R - T_R)^2 + \varepsilon^2 1_R)^{-1}$ совпадает с оператором $((\mu 1_C - T_C)^2 + \varepsilon^2 1_C)$. Поэтому для всех $\varphi \in H_R$

$$E^C(\omega)\varphi = \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{a+\delta}^{b-\delta}((\mu 1_R - T_R)^2 + \varepsilon^2 1_R)^{-1}\varphi d\mu \in H_R.$$

Из предложения 2 следует, что для спектрального разложения оператора T_C, являющегося комплексификацией самосопряженного оператора T_R, выполняется свойство

5'. для всех $\varphi, \psi > \in H_R$ регулярная борелевская мера

$$E^C_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^C(\omega)\varphi, \psi\rangle_C = \langle E^C(\omega)\varphi, \psi\rangle_R$$

является действительной.

Действительны разложением единицы на σ–алгебре $\sum$ всех борелевских подмножеств действительной оси будем называть отображение

$$E^R: \sum \quad \to B(H_R),$$

обладающее свойствами:

1. $E^R(\emptyset) = 0_R,\ E^R(R) = 1_R;$
2. для любого $\omega \in \sum$ оператор $E^R(\omega)$ является самосопряженным проектом;
3. для всех $\omega', \omega'' \in \sum$ справедливо равенство
$$E^R(\omega' \cap \omega'') = E^R(\omega')E^R(\omega'');$$
4. для всех$\omega', \omega'' \in \sum$, $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$, выполняется равенство
$$E^R(\omega' \cap \omega'') = E^R(\omega') + E^R(\omega'');$$
5. для любых $\varphi, \psi \in H_R$ функция $E^R_{\varphi\psi}(\omega) = \langle E^R(\omega)\varphi, \varphi\rangle_R$ является комплексной регулярной борелевской мерой на $\sum$.

Очевидно, для всех $\varphi, \psi \in H_R$ мера $E^R_{\varphi\varphi}(\omega) = \langle E^R(\omega)\varphi, \varphi\rangle_R$ является положительной.

Приведем теперь аналог теоремы 4 для самосопряженного оператора T_R, действующего в действительном гильбертовом пространстве H_R.

Теорема 18. Пусть $T_R: D(T_R) \subset H_R \to H_R$- самосопряженный оператор. Тогда существует единственное действительное разложение единицы E^R определенное на σ–алгебре $\sum$ всех борелевских подмножеств действительной оси и такое, что

$$\langle T_R\varphi, \psi\rangle_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi dE^R_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_R), \qquad \psi \in H_R. \tag{10}$$

Кроме того, разложение единицы E^R сосредоточено на $\sigma(T_R) \subset R$ в том смысле, что $E^R\big(\sigma(T_R)\big) = 1_R$.

Доказательство. Рассмотрим комплексификацию T_C оператора T_R. Теорема 17 сопоставляет оператору T_C единственное разложение единицы$E^C: \sum \to B(H_C)$ для которого справедливо представление (9). Учитывая, что на $D(T_R)$ оператор T_C совпадает с T_R, получаем

$$\langle T_R\varphi, \psi\rangle_R = \langle T_C\varphi, \psi\rangle_C = \int_{-\infty}^{+\infty\infty} \xi dE^C_{\varphi\psi}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_R), \qquad \psi \in H_R.$$

А так как для всех $\omega \in \sum$ проекторы $E^C(\omega)$ переводят H_R в H_R, то в качестве $E^R(\omega)$ достаточно взять суждение $E^C(\omega)$ на H_R.

Покажем теперь, что разложение единицы E^R соответствующее оператору T_R единственно. Предположим противное. Пусть существует еще одно разложение единицы $\widetilde{E^R}$, определенно на σ–алгебре $\sum$ всех борелевских подмножеств оси и такое, что

$$\langle T_R\varphi, \psi\rangle_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi D\widetilde{E^R_{\varphi\psi}}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_R), \qquad \psi \in H_R.$$

Рассмотрим комплексификацию $\widetilde{E^C(\omega)}$ операторов $\widetilde{E^R(\omega)}$. Несложно проверить, что $\widetilde{E^C}$ является разложением единицы и удовлетворяет соотношению

$$\langle T_C\varphi, \psi\rangle_C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi D\widetilde{E^C_{\varphi\psi}}(\xi), \qquad \varphi \in D(T_C), \qquad \psi \in H_C.$$

В силу теоремы 17 (комплексное) спектральное разложение оператора T_C единственно, поэтому $\widetilde{E^C}$ совпадает с E^C. Очевидно, отсюда следует, что $\widetilde{E^R}$ совпадает с E^R.

Разложение единицы $\widetilde{E^R}$, связанное с оператором T_R так, как описано в теореме 18, будем называть (действительным) спектральным разложением оператора T_R.

Замечание. Из доказательства теоремы 6 видно, что комплексификация E^R совпадает с E^C.

Спектральная теорема для компактных самосопряженных операторов.

В бесконечномерных гильбертовых пространствах утверждение спектральной теоремы для компактных самосопряженных операторов выглядит также как в конечномерном случае.

Теорема 19: Пусть *A* является компактным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве *V*. Существует ортонормированный базис пространства *V*, состоящий из собственных векторов оператора *A*. При этом все собственные значения вещественны.

Ключевым моментом является доказательство существования хоть одного собственного вектора. В бесконечномерном случае невозможно использовать определитель для доказательства существования собственных векторов, но можно использовать соображения максимизации, аналогичные вариационной характеризации собственных значений. Эта спектральная теорема справедлива как для вещественных, так и для комплексных гильбертовых пространств.

Без предположения о компактности становится неверным утверждение о том, что всякий самосопряженный оператор имеет собственный вектор.

Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов

Это обобщение касается ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах. Такие операторы могут не иметь собственных значений.

Теорема 20: Пусть A является ограниченным самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H. Тогда существует пространство с мерой $(X, \sum, \mu)$, вещественнозначная измеримая функция f на X и унитарный оператор $U: H \to L^2_\mu(X)$ такие, что U*TU=A, где T является оператором умножения, то есть $[T\text{ф}](x) = f(x)\text{ф}(x)$.

С этой теоремы начинается обширная область исследований по функциональному анализу, называемая теорией операторов.

Аналогичная спектральная теорема справедлива для ограниченных нормальных операторов в гильбертовых пространствах. Единственная разница состоит в том, что f может быть комплекснозначной.

Альтернативная формулировка спектральной теоремы позволяет записать оператор А как интеграл, взятый по спектру оператора, от координатной функции по проекционной мере. В случае когда рассматриваемый нормальный оператор является компактным, эта версия спектральной теоремы сходится к приведенной выше конечномерной спектральной теореме.

Спектральная теорема для общих самосопряженных операторов

Многие важные линейные операторы, возникающие в математическом анализе, не являются ограниченными. Таковы дифференциальные операторы. Имеется спектральная теорема для неограниченных операторов. Например, любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами унитарно эквивалентен оператору умножения (соответствующим унитарным оператором является преобразование Фурье, а соответствующий оператор умножения называют мультипликатором Фурье).

Заключение

В данной дипломной работе были рассмотрены линейные оператор, спектральная теорема для самосопряженного операторов и показано решение некоторых задач.

Наиболее изученным классом теории операторов является теория компактных операторов, но, несмотря на это, остаётся пространство для исследования и изучения более глубокого.

Решение ряда важных задач спектральной теории связано с теорией аналитических функций. Дело в том, что основные объекты, характеризующие спектральную задачу для оператора, такие как резольвента, собственные значения оператора и другие, являются аналитическими функциями спектрального параметра в определённых областях.

В математике, в частности в линейной алгебре и функциональном анализе, термином спектральная теорема обозначают любой из целого класса результатов о линейных операторах или о матрицах. Не вдаваясь в детали можно сказать, что спектральная теорема даёт условия, при которых оператор (или матрица) может быть диагонализирован (т.е. представлен диагональной матрицей в некотором базисе; в бесконечномерных пространствах эта концепция о диагонализации требует некоторых уточнений). Вообще говоря, спектральная теорема выделяет класс линейных операторов, которые могут моделироваться операторами умножения — простейшими операторами, какие только могут быть.

На мой взгляд данная дипломная работа будет интересна всем, кто интересуется математикой.

Список использованных источников

1. Антоневич А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. — М.: КомКнига, 2006.

2. Ахнезер, М.Н., Глазман И.Н. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве/ М.Н. Ахнезер, И.Н. Глазман. – Киев: Выша школа, 1977. – 336 с.

3. Баскаков А.Г. Лекции по алгебре: учебное пособие / А.Г. Баскаков. — Воронеж: ВГУ, 2013. — 159 с.

4. Бородин П. А. Задачи по функциональному анализу: в 2 ч. / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — М.: Изд-во ЦПИ, 2009.

5. Глазман И.М. Конечномерный линейный анализ / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. — М.: Наука, 1969. — 476 с.

6. Голуб Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М.: Мир, 1999. — 548 с.

7. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Мир, 1966. — 1065 с.

8. Данфорд, Н. Линейные операторы/ Н. Данфорд, Дж. Шварц.– М.: Наука, 1966.– 386 с.

9. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. — М.: Мир, 2001. — 430 с.

10. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.

11. Канторович, Л.В. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Акилов Г.П. – М.: Наука, 1977.– 231 с.

12. Кириллов А.А, А. Д. Гвишиани, Теоремы и задачи функционального анализа, М.: Наука, 1979

13. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.

14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.. — М., 1976.

15. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

16. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — Изд. 2-е, переработанное. — М.: Наука. — 520 с.

17. Люстерник, Л.А. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом/. Л.А. Люстерник, В. И. – М.: Наука, 1961. – 442 с.

18. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа/. Л.А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 496 с.

19. Морен К. Методы гильбертова пространства / К. Морен. — М.: Мир, 1965. — 572 с.

20. Наймарк М.А. Нормированные кольца / М.А. Наймарк. — М.: Наука, 1968. — 664 с.

21. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу / В. С. Пугачев. — М.: Изд-во МАИ, 1996.

22. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 592 с.

23. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М.: Мир, 1975. — 444 с.

24. Садовничий, В. А. Теория операторов/ В. А. Садовничий. – М.: Издательский дом «Дрофа», 2004. – 816 с.

25. Халмош П. Теория меры / П. Халмош. — М.: Иностранная литература, 1953. — 292 с.

26. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: Иностранная литература, 1962. — 830 с.