ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НИУ «БелГУ»)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ПСЕВДОВЕКТОРНОГО СОЛЕНОИДАЛЬНОГО УНИМОДАЛЬНОГО ПОЛЯ

Магистерская диссертация

обучающейся по направлению подготовки 03.04.02. Физика,
Программа физика конденсированного состояния
очной формы обучения,
группы 07001637
Понамарева Алина Эдуардовна

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, Вирченко Ю.П.

Рецензент:
кандидат физико-математических
наук, доцент Москаленко Н.И.

Белгород 2018

Аннотация

Найдены все возможные эволюционные во времени t пространственно однородные по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ уравнения для псевдовекторного соленоидального поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, имеющие дивергентный тип, ковариантные относительно вращений пространства $\mathbb{R}^3$ и такие, что «генератор» эволюции представляет собой дифференциальный оператор не выше второго порядка. Весь класс таких уравнений описывается двумя феноменологическими постоянными γ и γ', на относительную величину которых, накладывается одно условие. Вычислен символ линейного дифференциального оператора (дисперсионное уравнение), полученного линеаризацией каждого уравнения из описанного в работе класса, около равновесных состояний. Соотношения между частотой и волновым вектором распространяющихся плоских волн поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ – решения дисперсионного уравнения показывают, что все уравнения найденного в работе класса не обладают диссипацией. Решение задачи основано на перечислении всех возможных алгебраически независимых тензоров второго порядка, которые представляют собой ковариантные относительно вращений мономы тензорной алгебры с одним порождающим элементом – псевдотензором первого ранга M_j, $j = 1, 2, 3$. На основе этих мономов найден общий вид потока плотности поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, который содержит пространственные производные не более чем первого порядка. Эти дифференциальные выражения плотностей потоков поля определяют линейно независимый набор термодинамических сил. Из всего набора допустимых термодинамических сил выбрано 7 таких, которые гарантируют наличие инварианта $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$ движения. Наконец, на заключительном этапе, из этих семи термодинамических сил отобраны две таких, которые сохраняют соленоидальность поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t)$ в процессе эволюции.

Ключевые слова

алгебраическая независимость	псевдотензор
дифференциальный оператор	символ Леви-Чивита
инвариант	соленоидальность
линейная независимость	тензор
плотность потока поля	тензорная алгебра
плотность магнитного момента	уравнение Ландау-Лифшица
псевдовектор	унимодальность
псевдоскаляр	эволюционное уравнение

Оглавление

Список обозначений

В работе мы придерживаемся следующих правил при употреблении шрифтов для обозначения математических объектов и операций над ними.

• Для обозначения математических операторов (функционалов), для которых в математике имеются устоявшиеся аббревиатуры на основе букв латинского алфавита, мы употребляем шрифт «roman» – A, B, C, ...; a, b, c, ... Например, Re и Im – реальная и мнимая части комплексного числа. Если таковых устоявшихся аббревиатур не имеется, то мы используем для обозначения математических объектов различные шрифты, в зависимости от природы объекта, перечисленные ниже.

• Для обозначения стандартных математических структур используется ажурный шрифт – $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, ...$, например, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

• Операторы, отображения, функционалы обозначаются прописными буквами шрифта «sanserif» – $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, ...$

• Для обозначения числовых величин (параметров, функций и их аргументов) используются буквы латинского в шрифте «italic» – $a, b, c, ...$ и греческого алфавитов. При этом латинские буквы i, j, k, l – обозначают целые числа.

• Для обозначения векторов жирные буквы латинского алфавита. Их компоненты нумеруются индексами i, j, k, l, m, n. При этом принимается тензорное соглашение о суммировании по повторяющимся парным индексам.

• Для обозначения множеств различных математических объектов используется готический шрифт $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, , ...$

• Для обозначения классов множеств различных математических объектов используется шрифт «calligraphic» – $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, , ...$

Предметный указатель

δ_{ij} – символ Кронекера

ε_{ijk} – символ Леви-Чивита

$\mathbf{M}$, либо M_j – псевдовекторное поле плотности магнитного момента

$\mathbf{H}$, либо H_j – вектор внешнего магнитного поля

$\mathbf{x}$ – радиус-вектор пространственной точки в $\mathbb{R}^3$

t – временной параметр

$\mathbf{F}$, либо F_j – векторное поле термодинамических сил

S_{ij} – псевдотензорное поле плотности потока магнитного момента

T_{ijkl} – тензор коэффициентов плотности потока магнитного момента

$\mathbf{q}$ – волновой вектор плоской волны

$\mathbf{A}$ – вектор-амплитуда плоской волны

$\mathbf{n}$ – единичный вектор

Введение

Фундаментальной проблемой механики сплошных сред является формулировка для каждого типа среды адекватного теоретически обоснованного эволюционного уравнения (см., например, [1]). Эта проблема тесно связана с основной проблемой неравновесной термодинамики – описанием имеющихся внутри каждой физической среды процессов передачи тепла, которые возникают вследствие протекающих в ней диссипативных процессов. Действительно, развитие механики и электродинамики сплошных сред, в последние десятилетия, оказалось сосредоточенным на проблеме конструирования адекватных эволюционных уравнений для описания динамики сред со сложной структурой. Решение этой проблемы стало очень востребованным в связи с тем, что развитие физики конденсированного состояния, естественным образом, привело к изучению сред, претерпевающих многочисленных фазовые превращения, в результате которых среды изменяют свои качественные свойства. При этом для характеризации локального термодинамического состояния каждой такой среды приходится использовать дополнительные интенсивные термодинамические параметры, которые называются параметрами порядка изучаемой среды и которые связаны, как правило, со спонтанным нарушением какой-либо симметрии. Кроме того, естественным следствием указанной линии развития механики и электродинамики сплошных сред, а также следствием изучения термодинамики сред, характеризуемых, наряду с традиционными интенсивными термодинамическими параметрами такими как плотность, температура, концентрации различных химических компонентов и т.д., различными дополнительными параметрами порядка различной математической природы явилось то, что появилась необходимость построения неравновесной термодинамики таких сред.

Одним из путей решения указанной проблемы является так называемый гамильтонов подход построения эволюционных уравнений сред со спонтанно нарушенной симметрией (см., например, [2, [3]). Этот подход оказался очень плодотворным при решении многих задач из указанного выше круга, а, с другой стороны, оказалось, что он обладает рядом недостатков и, по видимому, его основные положения являются слишком стеснительными при построении таких динамических уравнений, предсказания которых полностью согласовывались бы с экспериментальными данными. По этой причине, оказалось желательным создание альтернативного подхода при построении эволюционных уравнений для твердотельных сред с нарушенной симметрией. Причем такой подход должен быть более общим, чем указанный гамильтонов формализм для того, чтобы иметь возможность конструировать на его основе эволюционные уравнения для описания всех известных в настоящее время типов конденсированных сред. Ясно, что такую наиболее общую теоретическую схему такого подхода можно создать положив в ее основу только наиболее общие физические теоретические принципы, нерушимость которых не вызывает сомнений в любых мыслимых в настоящее время физических ситуациях.

По нашему мнению, решение общей проблемы конструирования эволюционных уравнений должно состоять из нижеследующих положений.

Пусть макроскопическое термодинамически равновесное состояние изучаемой сплошной среды, с физической точки зрения, вполне характеризуется фиксированным набором интенсивных термодинамических параметров $\{\xi_l; l = 1 \div N\}$. Согласно определению интенсивных термодинамических параметров, они являются плотностями соответствующих экстенсивных термодинамических функций изменяющихся пропорционально объему области пространства, занимаемой средой. Полнота набора $\{\xi_l; l = 1 \div N\}$ означает, что любая измеряемая физическая характеристика среды может быть определена на основе известных значений термодинамических параметров из указанного списка. Более того, подразумевается, что этот полный набор термодинамических характеристик состояния среды является *минимальным*, то есть удаление из него какого-либо из параметров приведет к тому, что получаемый таким образом более узкий список параметров уже не описывает состояние среды однозначным образом.

Одним из основных положений механики сплошных сред является предположение о том, что локально в каждой пространственной точке, характеризуемой радиус-вектором $\mathbf{x}$, состояние среды вполне описывается набором полей $\{\xi_l(\mathbf{x}); l = 1 \div N\}$ – функций, зависящих от пространственной точки $\mathbf{x}$. Значения этих полей в каждой точке $\mathbf{x}$ представляют наборы значений плотностей $\{\xi_l; l = 1 \div N\}$ в том случае, если бы весь объем среды находился в том же термодинамическом состоянии, что и ее объем расположенный в физически малой окрестности точки $\mathbf{x}$.

В пространственно неравновесном состоянии значения полей $\{\xi_l(\mathbf{x}); l =$

$1 \div N\}$ в каждой точке $\mathbf{x}$ изменяются со временем, то есть в рамках механики сплошных сред необходимо рассматривать эти поля зависящими от времени t.

Предполагается, что список полей $\xi_l(\mathbf{x}, t)$, $l = 1 \div N$ допускает разбиение на группы таким образом, что набор полей в каждой из них преобразуется посредством тензорных (спин-тензорных) представлений группы вращений $\mathbb{O}_3$ евклидового пространства. Это положение является тезисом А.Эйнштейна о тензорном характере фундаментальных физических законов.

Таким образом, объектом изучения механики фиксированной сплошной среды являются наборы зависящих от времени полей $\{\xi_l(\mathbf{x}, t); l = 1 \div N\}$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ плотностей полного набора термодинамических характеристик среды, которые представляются наборами тензорных плотностей. Тогда возникает проблема формулировки тех эволюционных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_m(\mathbf{x}, t) = \Big(\mathsf{L}[\boldsymbol{\xi}]\Big)_m(\mathbf{x}, t)\,, \quad m = 1 \div N\,, \tag{0.1}$$

определяемых операторами $\mathsf{L}_m[\cdot]$, $m = 1 \div N$ – «генераторами» эволюции, где здесь и далее $\boldsymbol{\xi} = \langle \xi_1, ..., \xi_N \rangle$. Решения такой системы уравнений должны описывать динамику рассматриваемой пространственно распределенной термодинамической системы в представлении ее в виде сплошной среды.

Можно сформулировать набор естественных с общетеоретической точки зрения требований, предъявляемых к конструированию этих уравнений, как «фундаментальных уравнений» механики сплошных сред. Таковыми являются следующие.

1. Операторы $\mathsf{L}_m[\cdot]$, $m = 1 \div N$ не должны явно зависеть от времени t, что является следствием *однородности времени* – независимости динамики системы от выбора начала отсчета времени.

2. Операторы $\mathsf{L}_m[\cdot]$, $m = 1 \div N$ не должны явно зависеть от от пространственной точки $\mathbf{x}$, что является следствием *пространственной однородности* (трансляционной инвариантности) – независимости динамики системы от выбора начала отсчета пространственных координат.

3. Совокупность эволюционных уравнений (1) преобразуется ковариантным образом при преобразованиях вращений группы $\mathbb{O}_3$, что является следствием *изотропии пространства* – независимости динамики системы от выбора направления координатных осей для ее описания.

К этой совокупностей требований, следующих из общих принципов теоретической физики, добавим еще требование *локальности* эволюционных уравнений. Математическая формулировка этого требования состоит в следующем.

4. Операторы $\mathsf{L}_l[\xi]$, $l = 1 \div N$ (вообще говоря, нелинейные), действующие на $\boldsymbol{\xi}$, являются дифференциальными и, более того, мы будем считать, что они имеют не выше второго.

Физическим источником этого требования является то, что динамика сплошных сред основана на описании эволюции физических полей, обладающих малыми градиентами, а каждая частная производная по пространственным переменным, неявным образом, пропорциональна с малым параметром – отношением пространственного масштаба r_0 порядка линейных размеров области, физическое состояние которой уже с большой точностью можно считать термодинамическим, к пространственному масштабу L, характеризующему неоднородности в системе. Здесь r_0 – линейный размер пространственной области, начиная с которого можно говорить, что в ее объеме содержится достаточно много частиц так, что для состояния этой системы частиц уже применимо локальное термодинамическое описание. В естественных окружающих нас физических средах в земных условиях r_0 имеет порядок $\sim 10^{-6}$ см. В то же время масштаб $L \sim 10^{-4} \div 1$ см и более.

В связи с требованием 4, предъявляемым к эволюционным операторам $\mathsf{L}_l[\xi]$, $l = 1 \div N$, заметим, что их всегда можно представить в следующем каноническом виде

$$(\mathsf{L}[\boldsymbol{\xi}])_l = \nabla_m \Big(\mathsf{S}[\boldsymbol{\xi}]\Big)_{lm} + f_l(\boldsymbol{\xi})\,, \tag{0.2}$$

где f_l, $l = 1 \div N$ – функции от переменных набора $\boldsymbol{\xi}$, которые называем *источниками*, и каждый дифференциальный оператор $\mathsf{S}_{lm}[\boldsymbol{\xi}]$ при фиксированном значении $l = 1 \div N$ представляет вектор с компонентами, нумеруемыми индексом $m = 1, 2, 3$. Каждый такой оператор представляет плотность потока физического поля $\xi_l(\mathbf{x}, t)$ в пространственно временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$.

В частном случае, если при некотором значении l источник $f_l(\boldsymbol{\xi}) = 0$, то уравнение (2) с соответствующим номером является с математической точки зрения уравнением дивергентного типа. В этом случае мы говорим, что это уравнение представляет собой *локальный закон сохранения.*

Перечисленные положения представляют собой совокупность довольно общих положений, сформулированных на основе общих физических принципов, которые имеют универсальных характер для всех физических сред. Однако, они определяют только лишь общую математическую структуру эволюционных уравнений. Они совершенно недостаточны для формулировки окончательного вида совокупности динамических уравнений, описывающих эволюцию состояний фиксированной изучаемой среды. Для получения окончательного вида системы уравнений требуются еще какие-то физические требования, связанные с соотношением между величинами тех или иных физических параметров – локальных характеристик среды. Однако, по нашему мнению, очень важной задачей является описание классов систем уравнений, характеризуемых определенным типом поведения наборов полей $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ локальных термодинамических характеристик по отношению к преобразованиям вращения пространства. В настоящей роботе такая задача решается в том случае, когда набор $\boldsymbol{\xi}$ состоит из одного псевдовектора, и при этом в описании термодинамического состояния среды нет никаких дополнительных (выделенных) векторных и тензорных величин, которые не являются пространственно распределенными характеристиками системы. На базе полученного описания класса эволюционных уравнений для указанного типа полей описаны все типы эволюционных уравнений, обладающие специальными свойствами их решений: унимодальностью и соленоидальностью. Решение этих задач может иметь непосредственное отношение к построению адекватных уравнений ферродинамики сферически симметричных ферромагнетиков в отсутствие внешнего магнитного поля.

Глава 1. Описание класса эволюционных уравнений псевдовекторного поля

В этой главе мы кратко проанализируем современное состояние основ ферродинамики и поставим задачу о нахождении допустимого расширения класса уравнений для описания эволюции ферромагнитным образом упорядоченных сплошных сред.

1.1. Уравнение Ландау-Лифшица

Рассмотрим описание динамики ферромагнитным образом магнитоупорядоченной среды. При этом мы будем пренебрегать изменениями других ее локальных термодинамических характеристик. Мгновенное локальное состояние такой среды описывается зависящем от времени полем $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ плотности магнитного момента (плотностью намагниченности) ферромагнитной среды в пространственной точке, описываемой радиус-вектором $\mathbf{x}$, в момент времени t. Поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ принимает псевдовекторые значения, то есть оно преобразуется как векторное поле при непрерывных преобразованиях группы $\mathbb{O}_3$ поворотов пространства $\mathbb{R}^3$, но, в отличие от векторного поля, оно не изменяется при отражениях пространства $\mathbb{R}^3$ (см., например, [4], [5]).

В настоящее время является общепринятым, что эволюция магнитной структуры в магнитоупорядоченной твердотельной среде описывается так называемым *уравнение Ландау-Лифшица* (см., например, [6], [7]). В том случае, когда среда является ферромагнитным образом магнитоупорядоченной, это уравнение записывается в следующем общем виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \left[\mathbf{M}, \frac{\delta\, \mathsf{W}\,[\mathbf{M}]}{\delta\, \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)}\right] , \tag{1.1.1}$$

Здесь и далее точкой мы обозначаем частную производную по времени t. В правой части уравнения стоит *вариационная производная* $\delta\mathsf{W}[\mathbf{M}]/\delta\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ функционала $\mathsf{W}[\mathbf{M}]$ по полю $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в пространственно-временной точке $(\mathbf{x}, t)$. Этот функционал представляет собой плотность энергии поля намагниченности в среде, описываемой полем $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. Сама производная представляет эффективное «среднее» магнитное поле в пространственной точке

$\mathbf{x}$ среды. Энергия, которой обладает магнитная структура, связана с имеющимися в ней внутренними напряжениями, возникающими в том случае, если в среде реализуется неоднородное распределение намагниченности.

В простейшем случае сферически симметричного ферромагнетика в присутствии внешнего магнитного поля вектором его напряженности $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$, в общем случае зависящей от пространственной точки с радиус-вектором $\mathbf{x}$ и времени t, функционал $W[\mathbf{M}]$ имеет следующий вид

$$W[\,\mathbf{M}\,] = \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big[\Big(\nabla_j M_k(\mathbf{x}, t)\Big)\Big(\nabla_j M_k(\mathbf{x}, t)\Big) - H_j(\mathbf{x}, t) M_j(\mathbf{x}, t) \Big]\, d\mathbf{x}\,, \quad (1.1.2)$$

$\gamma > 0$ – постоянная, которая называется гиромагнитным отношением. В этой формуле ∇ – векторный оператор дифференцирования (градиент). Кроме того, здесь и далее, использованы принятые в тензорной алгебре индексные обозначения векторов и тензоров. По повторяющимся индексам подразумевается, как это принято, суммирование по их значениям $1, 2, 3$ (см. [4], [5]).

Для ферромагнетика с плотностью энергии $W[\mathbf{M}]$ вида (2) уравнение (1) принимает следующий вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma [\mathbf{M}, \Delta \mathbf{M} - \mathbf{H}]\,. \quad (1.1.3)$$

где Δ – дифференциальный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

Используя тензорные обозначения уравнение (3) представляется в виде

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \gamma \varepsilon_{jkl} M_k(\mathbf{x}, t) \Big(\Delta M_l(\mathbf{x}, t) - H_l(\mathbf{x}, t) \Big)\,, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.1.4)$$

В частности, при $H_j = 0$, имеем

$$\dot{M}_j(\mathbf{x}, t) = \gamma \varepsilon_{jkl} M_k(\mathbf{x}, t) \Delta M_l(\mathbf{x}, t)\,, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.1.5)$$

Здесь $M_j(\mathbf{x}, t)$ и $H_j(\mathbf{x}, t)$ – декартовы компоненты, соответственно, полей $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \langle M_1(\mathbf{x}, t), M_2(\mathbf{x}, t), M_3(\mathbf{x}, t)\rangle$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \langle H_1(\mathbf{x}, t), H_2(\mathbf{x}, t), H_3(\mathbf{x}, t)\rangle$, ε_{jkl} – универсальный антисимметричный псевдотензор третьего ранга (символ Леви-Чивита). Его значения остаются неизменными при поворотах пространства $\mathbb{R}^3$ и равными ± 1 Кроме того, здесь и далее принимается, что, во всех формулах, свободные («говорящие») нижние индексы i, j, k, l, m, n принимают значения $\{1, 2, 3\}$. Тот факт, что описывается динамика именно сферически симметричного ферромагнетика, отражается в том, что уравнение (3) инвариантно относительно пространственных вращений вектора $\mathbf{M}$ в том случае, когда $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0$.

Обычно, этот факт в теоретической физике выражают утверждением о том, что в уравнении (3) с $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)=0$ не используются никакие иные векторные (тензорные) физические поля, кроме самого поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$.

Уравнение (3) обладает тем замечательным свойством, что оно сохраняет во времени унимодальность поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ (постоянство $\mathbf{M}^2(\mathbf{x},t)$), в чем мы немедленно убеждаемся скалярно умножив обе части уравнения (3) на $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$,

$$M_j(\mathbf{x},t)\dot{M}_j(\mathbf{x},t)=\gamma\varepsilon_{jkl}M_j(\mathbf{x},t)M_k(\mathbf{x},t)\Big(\Delta M_l(\mathbf{x},t)-H_l(\mathbf{x},t)\Big)=0\,,$$

где учтено тензорное тождество $\varepsilon_{jkl}M_lM_k=0$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\,M_j^2=2M_j\dot{M}_j=0$$

и $M_l^2(\mathbf{x},t)=M^2$ является инвариантом движения.

Свойство уравнения сохранять абсолютную величину намагниченности в каждом физически малом объеме среды важно с физической точки зрения, так как в реальных (относительно медленных) эволюционных процессах, происходящих в магнитной структуре, практически не происходит изменения температуры и, как следствие, не происходит изменения зависящей только от локальной температуры $T(\mathbf{x},t)$ величины $|\mathbf{M}(\mathbf{x},t)|$.

Заметим, что уравнение (4) представимо в виде (0.2). В самом деле, положив $N=3$ и выбрав в качестве набора параметров $\boldsymbol{\xi}$ три компоненты псевдовектора M_j, уравнение (4) представим в виде (0.2)

$$\dot{M}_j(\mathbf{x},t)=\nabla_kS_{jk}(\mathbf{x},t)+f_j\,, \tag{1.1.6}$$

где

$$S_{jk}(\mathbf{x},t)=\gamma\varepsilon_{jml}M_m(\mathbf{x},t)\nabla_kM_l(\mathbf{x},t)\,, \tag{1.1.7}$$

так как

$$\nabla_kS_{jk}(\mathbf{x},t)=\gamma\varepsilon_{jml}\nabla_kM_m(\mathbf{x},t)\nabla_kM_l(\mathbf{x},t)=$$
$$=\gamma\varepsilon_{jml}\Big(\nabla_kM_m(\mathbf{x},t)\Big)\Big(\nabla_kM_l(\mathbf{x},t)\Big)+\gamma\varepsilon_{jml}M_m(\mathbf{x},t)\Delta M_l(\mathbf{x},t)\,,$$

где первое слагаемое тождественно равно нулю, как свертка по индексам m,l антисимметричного псевдотензора ε_{jml} и симметричного тензора $[\nabla_kM_m(\mathbf{x},t)][\nabla_kM_l(\mathbf{x},t)]$, и, кроме того,

$$f_j(\mathbf{x},t)=-\gamma\varepsilon_{jml}M_m(\mathbf{x},t)H_l(\mathbf{x},t)\,. \tag{1.1.8}$$

В частности, уравнение (5) имеет дивергентную форму, если внешнее магнитное поле равно нулю. Таким образом, уравнение Ландау-Лифшица в рассматриваемом случае вкладывается в класс эволюционных уравнений, описанный пп.1-4 во Введении.

Заметим, что значения тензорного поля $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$ в каждой пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$ с радиус вектором $\mathbf{x}$ составляют псевдотензор второго ранга, то есть он, в отличие от тензора второго ранга, изменяет знак при отражениях пространства. Это связано с тем, что символ Леви-Чивита ε_{jkl} – алгебраический третьего ранга (см. [7]), который является пседотензором, то есть он не изменяет знак при преобразованиях отражения $\mathbb{R}^3$. Точно также значения поля $M_j(\mathbf{x}, t)$ в каждой пространственно-временной точке представляют псевдовектор, то есть они при отражении пространства $\mathbb{R}^3$ не изменяются. Наконец, векторный дифференциальный оператор ∇_j, то есть он преобразуется как вектор при ортогональных преобразованиях пространства $\mathbb{R}^3$, он изменяет знак на обратный при отражении. Тогда, так как поле $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$, которое можно назвать плотностью потока магнитного момента, представляет собой тензорное произведение с последующей сверткой по одному из индексов тензора второго ранга $\gamma\varepsilon_{jml}M_m(\mathbf{x}, t)$ и псевдотензора $\nabla_k M_l(\mathbf{x}, t)$, при непрерывных преобразованиях пространства преобразуется как тензор второго ранга, а при отражениях изменяет знак.

1.2. Стационарные решения уравнения Ландау-Лифшица

Проанализируем кратко равновесные унимодальные $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}) = M^2$ решения уравнения Ландау-Лифшица в отсутствии внешнего магнитного поля. При этом мы ограничимся рассмотрением только одномерных соленоидальных решений с целью сравнения их со стационарными решениями получаемыми в этой работе более общих эволюционных уравнений для псевдовекторного поля. В общем случае стационарные решения уравнения Ландау-Лифшица, согласно (5), определяются уравнением

$$[\mathbf{M}, \Delta\mathbf{M}] = 0\,. \tag{1.2.1}$$

Тогда

$$\Delta\mathbf{M} = \lambda\mathbf{M}\,, \tag{1.2.2}$$

где $\lambda = \lambda[\mathbf{M}]$ – локальный функционал [1)] от $\mathbf{M}$. Рассмотрим одномерные

[1)] То есть его значения зависят только от значений поля $\mathbf{M}$ и его производных в точке $\mathbf{x}$.

решения $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, которые зависят только от $\mathbf{x}_1$, т.е.

$$\mathbf{M}''(x_1) = \lambda(x_1)\mathbf{M}(x_1)\,. \tag{1.2.3}$$

Условие соленоидальности поля $\mathbf{M}(x_1)$, то есть условие $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$ в этом случае сводится к $M_1' = 0$, где здесь и далее штрихом обозначена частная производная по x_1. Таким образом, $M_1(x_1)=$ const. Подставляя такого типа решение в дифференциальное уравнение (3) для компоненты $M_1(x_1)$, находим $0 = M_1''(x_1) = \lambda M_1(x_1)$, то есть $M_1\lambda = 0$. Тогда либо $\lambda = 0$, либо $M_1 = 0$.

В первом случае $\mathbf{M}''(x_1) = 0$. Тогда $\mathbf{M}'(x_1) = \text{const}$. Для соблюдения условия унимодальности $\mathbf{M}^2(x_1) = M^2$ необходимо, чтобы эта постоянная интегрирования была равна нулю. Следовательно, в рассматриваемом случае имеется только один тип равновесных решений $\mathbf{M}(x_1) = \mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ –произвольный постоянный вектор.

Рассмотрим второй случай $M_1 = 0$. Условие унимодальности поля $\mathbf{M}(x_1)$ требует, чтобы $\mathbf{M}^2(x_1) = M^2$. Достаточно рассмотреть случай, когда $M = 1$. Это приводит к условию

$$(\mathbf{M}''(x_1))^2 = \lambda^2(x_1)\,. \tag{1.2.4}$$

Таким образом имеем следующую систему уравнений для компонент $M_2(x_1)$ и $M_3(x_1)$,

$$M_2''(x_1) = \pm\lambda(x_1)M_2(x_1)\,, \qquad M_3''(x_1) = \pm\lambda(x_1)M_3(x_1)\,, \tag{1.2.5}$$

$$\lambda(x_1) = \pm|(M_2''(x_1))^2 + (M_3''(x_1))^2|^{1/2} \tag{1.2.6}$$

Ввиду $M_1 = 0$ и условия $M = 1$, положим теперь

$$M_2(x_1) = \cos\varphi(x_1)\,, \qquad M_3(x_1) = \sin\varphi(x_1)\,.$$

Продифференцировав по x_1, получаем

$$M_2'(x_1) = -\varphi'(x_1)\,\sin\varphi(x_1)\,, \qquad M_3(x_1) = \varphi'(x_1)\,\cos\varphi(x_1)\,.$$

$$M_2''(x_1) = -(\varphi'(x_1))^2\,\cos\varphi(x_1) + \varphi''(x_1)\,\sin\varphi(x_1)\,, \tag{1.2.7}$$

$$M_3''(x_1) = -(\varphi'(x_1))^2\,\sin\varphi(x_1) + \varphi''(x_1)\,\cos\varphi(x_1)\,. \tag{1.2.8}$$

Тогда

$$(M_2''(x_1))^2 + (M_3''(x_1))^2 =$$
$$= [(\varphi'(x_1))^2\,\cos\varphi(x_1) + \varphi''(x_1)\,\sin\varphi(x_1)]^2 +$$

$$= [(\varphi'(x_1))^2 \sin\varphi(x_1) - \varphi''(x_1) \cos\varphi(x_1)]^2 =$$

$$= \Big((\varphi'(x_1))^4 + (\varphi''(x_1))^2\Big) . \qquad (1.2.9)$$

Подстановка выражений (7) - (9) в систему уравнений (5), (6) дает

$$-[(\varphi'(x_1))^2 \cos\varphi(x_1) + \varphi''(x_1) \sin\varphi(x_1)] =$$

$$= \pm\Big((\varphi'(x_1))^4 + (\varphi''(x_1))^2\Big)^{1/2} \cos\varphi(x_1) , \quad (1.2.10)$$

$$-[(\varphi'(x_1))^2 \sin\varphi(x_1) - \varphi''(x_1) \cos\varphi(x_1)] =$$

$$= \pm\Big((\varphi'(x_1))^4 + (\varphi''(x_1))^2\Big)^{1/2} \sin\varphi(x_1) . \quad (1.2.11)$$

Умножением уравнения (10) на $\sin\varphi(x_1)$ и уравнения (11) – на $\sin\varphi(x_1)$ и вычитанием одного из другого получаем

$$\varphi''(x_1) = 0 . \qquad (1.2.12)$$

Тогда из (10) и (11) получаются два уравнения

$$-(\varphi'(x_1))^2 \cos\varphi(x_1) = \pm(\varphi'(x_1))^2 \cos\varphi(x_1) ,$$

$$-(\varphi'(x_1))^2 \sin\varphi(x_1) = \pm(\varphi'(x_1))^2 \sin\varphi(x_1) ,$$

из которых, ввиду того, что $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не могут обратиться в нуль, следует,

$$(\varphi'(x_1))^2 = \mp(\varphi'(x_1))^2 .$$

Здесь знак $+$ в правой части не может реализоваться, а в случае знака $-$ получается тождество [2)].

Условие (12) приводит к решениям в виде $\varphi(x_1) = kx_1 + \varphi_0$, $k = \mathrm{const}$ и, соответственно, получаются решения исходной системы уравнений (5) в виде «поперечной» спирали с осью вдоль x_1,

$$\mathbf{M} = \langle 0, \cos\varphi, \sin\varphi\rangle , \quad \varphi = \varphi_0 + kx_1 . \qquad (1.2.13)$$

Следует заметить, что такие равновесные решения реализуются и до перехода к пределу сплошной среды, в случае «микроскопической» т.н. векторной модели на кристаллической решетке (см., например, [8],[9]).

[2)] Либо $\varphi(x_1) = \mathrm{const}$, что дает уже полученные нами ранее решения в виде постоянного вектора $\mathbf{M}$.

1.3. Проблема диссипации

Эволюционные уравнения вида (1.2) являются основой ферродинамики и широко используются для описания процессов, происходящих в магнитных структурах, протекающих вследствие имеющихся внутри них неравновесных пространственных распределений плотности магнитного момента, возникших, например, в результате каких-либо технологических процессов. Однако, несмотря на признанную в теории магнетизма адекватность динамического уравнения (1.2) и его общеупотребительность при решении различных практических задач ферродинамики, оно, как известно, обладает плохим, с физической точки зрения, свойством, которое не соответствуют физическим представлениям. Это уравнение не описывает диссипативных процессов внутри магнитной структуры, то есть оно не описывает наличие «магнитного трения», действие которого, в конце концов, приводит магнитоупорядоченную среду к состоянию равновесия. На это обстоятельство неоднократно обращалось внимание и предпринимались попытки как-то «исправить» это уравнение, чтобы учесть диссипацию (см., например, [8]). Наличие магнитного трения устанавливается на уровне микроскопической квантовой теории магнетизма [7], в рамках которой вычисляется декремент затухания спиновых волн как мнимая часть массового оператора магнонов. Так как ясно, что магнитное трение нельзя рассматривать как квантовый эффект, то оказывается, что между макроскопической теорией эволюции неравновесных магнитных структур и их микроскопической теорией имеется противоречие, которое желательно преодолеть.

Продемонстрируем указанное противоречие на примере возмущения стационарного решения уравнения (1.3) –пространственно однородного распределения поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}$. С этой целью Рассмотрим возмущение

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M} + \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \tag{1.3.1}$$

стационарного решения в виде плоской монохроматической волны $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \exp(i(\mathbf{k}, \mathbf{x}) - i\omega t)$, где $\mathbf{m}$ – комплекснозначный вектор. Подстановка этого решения в уравнение (1.3) приводит к следующему уравнению для векторной амплитуды $\mathbf{m}$:

$$i\omega\mathbf{m} = \gamma\mathbf{k}^2[\mathbf{M}, \mathbf{m}] \equiv \mathsf{A}\mathbf{m}\,, \tag{1.3.2}$$

где матрица A, определяемая правой частью этого уравнения дается следующими равенствами

$$(\mathsf{A}\mathbf{m})_j = \gamma\mathbf{k}^2\varepsilon_{jkl}M_k m_l\,,$$

то есть
$$(\mathsf{A})_{jk} = \gamma \mathbf{k}^2 \varepsilon_{jkl} M_k \,. \tag{1.3.3}$$

Согласно (2), для того чтобы имелось решение указанного типа (1) нужно, чтобы вектор $\mathbf{m}$ был собственным для матрицы A. Заметим, что матрица A антисимметрична. Тогда она обладает только чисто мнимыми собственными числами. Поэтому частота ω в (2) Должна быть вещественной, что означает отсутствие затухания возмущений рассматриваемого типа. Так как матрица A вещественна, то каждому ее собственному числу λ соответствует собственное число λ^*. Для матрицы 3-го порядка это означает, что она обязательно имеет нулевое собственное число.

В самом деле, матрица A, очевидно, обладает нулевым собственным значением с собственным вектором $\mathbf{M}$. Следовательно, $\det \mathsf{A} = 0$. Однако, этот собственный вектор нефизический, так как необходимо учесть условие унимодальности для возмущенного решения (1),
$$(\mathbf{M} + \mathbf{m}(\mathbf{x}, t), \mathbf{M} + \mathbf{m}(\mathbf{x}, t)) = M^2 \,. \tag{1.3.4}$$
Отсюда, удерживая члены первого порядка по $\mathbf{m}$, находим
$$(\mathbf{m}, \mathbf{M}) = 0 \,. \tag{1.3.5}$$
Сужение действия матрицы A в плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{M}$, дает 2×2-матрицу
$$(\mathsf{A})_{jk} = -\gamma \mathbf{k}^2 M \varepsilon_{jk3} \,.$$
Так как собственные числа 2×2-матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
равны $\pm i$, собственные частоты возмущения $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t)$ равны $\omega = \pm \gamma \mathbf{k}^2 M$. Соответствующими собственными векторами в ортобазисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}$ для этих частот являются $\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$.

В связи с описанной ситуацией относительно бездиссипативности уравнения (1.2), его нельзя рассматривать как определяющее, в полной мере, динамику пространственного распределения плотности намагниченности в ферромагнитной среде на больших интервалах времени, когда диссипативные процессы начинают играть существенную роль и, вследствие неравновесного распределения плотности магнитного момента в среде, происходит перекачка части энергии взаимодействия между различным образом намагниченных малых пространственных областей среды в тепловую энергию.

Таким образом, возникает вопрос, каким образом нужно изменить уравнение (1.2), в частности, уравнение (1.3), чтобы устранить указанный дефект макроскопической теории. Трудность решения этой задачи состоит в том, что простая модификация уравнения (1.2), как это делается в других разделах механики сплошных сред, невозможна. Обычно это осуществляется посредством добавления в правую его часть слагаемого в виде дифференциального оператора второго порядка с отрицательным символом, которое бы описывало, на феноменологическом уровне, процессы взаимного «трения магнитных моментов» среды, находящихся в различных пространственных точках среды. Такому примитивному преобразованию основного уравнения ферродинамики (1.2) препятствует важное с физической точки зрения требование, которому должны удовлетворять любые слагаемые, добавляемые в правую часть уравнения. Любое видоизменение уравнения (1.2) должно быть такими, чтобы, в течение эволюции системы, сохранялась величина $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2 = \mathrm{const}$. В настоящей работе предлагается подход к решению указанной проблемы в рамках общего подхода к составлению макроскопических уравнений, описывающих эволюцию состояния сплошной среды, которые сформулированы в пп. 1-4 введения.

Заметим также, что уравнение (1.2), в частности (1.3), не сохраняет дивергенцию поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. Это обстоятельство приводит к тому, что не сохраняется соленоидальность поля суммарной магнитной индукции $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в ферромагнитной среде, то есть невозможно удовлетворить равенству $(\nabla, \mathbf{B})(\mathbf{x}, t) = 0$, выполнение которого требуется системой уравнений Максвелла, так как даже при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$, которое является соленоидальным $(\nabla, \mathbf{H})(\mathbf{x}, t) = 0$. В связи со сделанным замечанием, по-видимому, нужно также потребовать, чтобы искомое «правильное» уравнение для плотности магнитного момента должно обладать, наряду с указанным выше инвариантом $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$, также и инвариантом $(\nabla, \mathbf{M})(\mathbf{x}, t)$.

Продемонстрируем указанный факт несохранения соленоидальности поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. С этой целью, как и выше, рассмотрим возмущение $\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(t)\exp(i(\mathbf{k}, \mathbf{x}))$ постоянного поля $\mathbf{M}$ – стационарного решения уравнения (1.3). Подстановка этой функции в (1.3) приводит к уравнению для ампли-

туды $\mathbf{m}(t)$
$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma \mathbf{k}^2 [\mathbf{M}, \mathbf{m}]\,. \tag{1.3.6}$$
Подстановка же этой функции в условие соленоидальности $(\nabla, \mathbf{m}(\mathbf{x}, t)) = 0$ приводит к условию поперечности
$$(\mathbf{k}, \mathbf{m}(t)) = 0\,. \tag{1.3.7}$$
Из этого условия в сочетании с (6) получаем
$$(\mathbf{k}, [, \mathbf{M}, \mathbf{m}(t)] = 0\,. \qquad (1.3.8$$
Так как, кроме того, ввиду сохранения унимодальности суммарного поля должно, аналогично (5), быть удовлетворено условие $(\mathbf{m}(t), \mathbf{M}) = 0$, то отсюда и из (8) следует, что совместимость всех условий, налагаемых на возмущение, возможна только при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{M}$.

В свете сформулированных нами общих проблем ферродинамики, в следующих главах настоящей работы мы частично ответим на поставленные выше вопросы. Нами полностью будет описан класс сферически симметричных эволюционных уравнений для псевдовекторого поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, которые обладают инвариантом $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$ движения, в том случае, когда эти уравнения содержат пространственные производные не выше второго порядка. Далее, из этого класса уравнений выделен класс уравнений, которые, в дополнение к указанному инварианту, обладают также инвариантом $(\nabla, \mathbf{M})(\mathbf{x}, t)$. Оказалось, что этот подкласс довольно узок он описывается двумя вещественными параметрами (физическими константами). Показано, однако, все уравнения в этом подклассе не описывают диссипативную динамику псевдовекторного поля.

Глава 2. Класс эволюционных уравнений псевдовекторного поля

В этой главе мы поставим и решим задачу об описании класса всех эволюционных уравнений дивергентного типа для псевдовекторного поля, удовлетворяющих сформулированным во введении положениям 1-4, в предположении об отсутствии у них дополнительных выделенных векторных (тензорных) характеристик.

2.1. Постановка задачи об описании класса плотностей потоков псевдовекторного поля

В этом разделе будет сформулирована постановка задачи об описании класса всех сферически симметричных эволюционных уравнений дивергентного типа для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. Такая постановка задачи основана на простой идеологической схеме о том, что эволюционные уравнения, описывающие динамику термодинамического состояния среды, должны формулироваться в виде в локальных законах сохранения. Именно, на такой схеме, в частности, основан вывод уравнений гидродинамики (см. [11]), где в основу кладутся локальные законы сохранения плотностей энергии, импульса и массы вещества.

Поставим задачу об описании класса всех дифференциальных уравнений, которые имеют вид

$$\dot{M}_j = \nabla_k S_{jk}\,, \tag{2.1.1}$$

в которых плотность потока $S_{jk}(\mathbf{x}, t)$ не зависит явно от $\mathbf{x}$ и t, а является локальным функционалом поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, то есть S_{jk} является функцией значений поля $M_j(\mathbf{x}, t)$ и его производных не выше первого порядка в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x}, t \rangle$. Причем будем требовать, чтобы зависимость от производных была линейной. Эти ограничения являются следствием требования 4. Таким образом, мы будем нужно описать класс всех уравнений (1), в которых плотность потока поля M_j имеет вид

$$S_{jk} = T_{jkln} \nabla_l M_n\,, \tag{2.1.2}$$

где $S_{j,k}$ является псевдотензором второго ранга и $T_{j,k,l,n}$ является функцией от значений поля $\mathbf{M}$ в $\langle \mathbf{x}, t \rangle$. Следовательно, необходимо описать класс всех выражений вида (2), который является линейным многообраз ием.

Здесь и далее, так как значения функционалов всех тензорных величин вычисляются в фиксированной пространственно-временной точке, то, если это не вызывает недоразумений, мы будем опускать пространственно временные аргументы.

Заметим, что, в общем положении в пространстве дифференцируемых полей, функции $M_j(\mathbf{x}, t)$ и их частные производные $\nabla_l M_n$ функционально независимы. В противном случае, если существует какая-то функциональная зависимость $f(M_j, \nabla_k M_l) = 0$, то она представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных для поля M_j. Следовательно, допустимые поля $M_j(\mathbf{x}, t)$,которые удовлетворяют этому дифференциальному уравнению. Многообразие решений этого уравнения имеет коразмерность, не меньшую 1, что означает, что такая ситуация невозможна в общем положении.

Ввиду функциональной независимости поля M_j и его производных, на основании (2), можно записать

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial(\nabla_l M_n)} = T_{jkln}\,. \tag{2.1.2}$$

Левая часть этого равенства представляет собой тензор четвертого ранга. Следовательно, совокупность коэффициентов T_{jkln} в представлении (2) образует тензор четвертого ранга. Тогда задача описания класса всех уравнений вида (1) сводится к задаче описания всех функций $T_{jkln}[\mathbf{M}]$, которые принимают значения в виде тензоров четвертого ранга. Каждый тензор четвертого ранга представим в виде разложения

$$T_{jkln} = \sum_{a=1}^{81} f^{(a)} T^{(a)}_{jkln}\,. \tag{2.1.3}$$

по базису каких-то стандартных линейно независимых тензоров четвертого ранга $T^{(a)}_{jkln}$ со скалярными коэффициентами (всего имеется $3^4 = 81$ элементов базиса). В тензорной алгебре в трехмерном пространстве имеется два исключительных *универсальных* тензорных объектов: тензор второго ранга δ_{ij} и псевдотензор ε_{jkl}. Таким образом в тензорной алгебре всегда имеется 2 образующих. Тензоры четвертого ранга можно строить только из первой из них, так как вторая является антисимметричным псевдотензором тензором. Получающийся на его основе тензор четвертого ранга $\varepsilon_{jkm}\varepsilon_{lnm}$ алгебраически выражается через δ_{ij}, в виде $\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}$. Таким образом, всего на основе тензора δ_{ij} можно построить 3 алгебраически независимых тензора четвертого ранга:

$$T^{(1)}_{jkln} = \delta_{jk}\delta_{ln}\,, \quad T^{(2)}_{jkln} = \delta_{jl}\delta_{kn}\,, \quad T^{(3)}_{jkln} = \delta_{jn}\delta_{kl}$$

и взять их в качестве элементов базиса. Если тензор четвертого ранга можно разложить имеет в своем разложении только эти элементы базиса (в (3) имеется три слагаемых), а скалярные функции зависят только от $\mathbf{M}^2$, то в этом случае мы будем говорить, что T_{jkln} является сферически симметричным в пространстве векторов $\mathbf{M}$.

Мы в настоящей работе при описании класса уравнений вида (1) для псевдовекторного поля будем использовать только такие элементы базиса – тензоры четвертого ранга $T^{(a)}_{jkln}$, которые являются мономами (при их конструировании используется только операция тензорного умножения и оператор свертки) в тензорной алгебре с образующими δ_{ij}, ε_{jkl}, M_j, а скалярные функции $f^{(a)}$ зависят только от $\mathbf{M}^2$. В связи с этим мономы $T^{(a)}_{jkln}$ рассматриваются мы рассматриваем как эквивалентные, если они отличаются на множитель, возможно зависящий от $\mathbf{M}^2$. [3]

Опишем кратко план дальнейшего изложения в этой главе.

1). На первом этапе строится наиболее широкое множество $\mathfrak{T}$ линейно независимых тензоров $T^{(a)}_{ijkl}$, $a = 1 \div N$ четвертого ранга в тензорной алгебре с порождающими элементами δ_{ij}, ε_{ijk} и M_j. Эти тензоры составляют базис разложения тензора T_{ijkl} общего вида. Такое построение решает задачу об описании класса всех допустимых тензоров T_{ijkl} в виде

$$T_{ijkl} = \sum_{a=1}^{N} f^{(a)} T^{(a)}_{ijkl}\,. \tag{2.1.4}$$

Заметим при этом, что перестановка любой пары свободных индексов в фиксированном элементе $T^{(a)}_{ijkl}$ приводит к другому ее элементу, если только оба индекса не принадлежат тензору δ, либо псевдотензору ε.

2). После этого, из множества $\mathfrak{S}$ всех псевдотензоров второго ранга $S^{(a)}_{ij} = T^{(a)}_{ijkl}\nabla_k M_l$, $T^{(a)}_{ijkl} \in \mathfrak{T}$, полученных посредством свертки по паре индексов выбирается базис линейно независимых пседотензоров второго ранга. Число элементов этого базиса будем обозначать посредством $\bar{N}$. Построение базиса $\mathfrak{S}$ решает задачу об описании класса всех плотностей потоков

[3] В физике такое положение часто формулируется на интуитивном уровне в виде требования, чтобы в физической системе не было никаких других выделенных векторов, кроме вектора M_j.

поля M_j на основе формулы

$$S_{ij} = \sum_{a=1}^{\bar{N}} f^{(a)} S_{ij}^{(a)} \,. \tag{2.1.5}$$

3) К каждому псевдотензору S_{ij} вида (5) применяется операция свертки с вектором ∇_j. При этом оператор ∇_j записывается слева от S_{ij}. В результате, получается описание класса всех псевдовекторов $F_i = \nabla_j S_{ij}$, которые представляют поля $F_i(\mathbf{x}, t)$ «термодинамических» сил. Они получаются в виде суммы

$$F_i = \sum_{a=1}^{\bar{\bar{N}}} f^{(a)} F_i^{(a)} \,. \tag{2.1.6}$$

Так как множество векторов $F_i^{(a)}$, которое получается посредством применения операции свертки к каждому элементу совокупности линейно независимых тензоров может приводить к совокупности линейно зависимых векторов, то необходимо выделить из множества $\nabla_j S_{ij}^{(a)}$ линейно независимый набор $\mathfrak{F}$ всех возможных термодинамических сил.

Описание класса всех термодинамических сил завершает описание класса всех эволюционных уравнений для псевдовекторного поля M_j, которые имеют вид

$$\dot{M}_i = F_i \,. \tag{2.1.7}$$

2.2. Построение множества линейно независимых тензоров T_{ijkl}

Необходимо решить следующую задачу (см. [12]). Построить базис линейно независимых тензоров четвертого ранга в тензорной алгебре с образующими M_j, δ_{ij}, ε_{ijk}. Очевидно, что все элементы такого базиса могут быть получены применением операций тензорного умножения и свертки. Иными словами они являются элементами полугруппы с указанными порождающими элементами.

Прежде чем дать решение этой задачи, необходимо отметить следующее.

Символ Кронекера δ не должен использоваться в операции свертки, так как, после такой операции по одному из индексов, он исчезает из конструируемого монома. По этой причине, множество всех тензоров T_{ijkl} четвертого ранга распадается на три класса: $\mathcal{K}_0$ состоит из мономов T_{jkkl}, в составе которых символ Кронекера δ отсутствует, $\mathcal{K}_1$ состоит из тензоров, имеющих вид тензорного произведения символа Кронекера на тензор второго ранга T_{ij}, в состав которого этот символ не входит и класс $\mathcal{K}_2$, который состоит из тензоров четвертого ранга, которые представляются тензорным произведением двух символов Кронекера.

Второе замечание заключается в том, что символ Леви-Чивита ε при конструировании линейно независимых мономов не может быть использован в составе монома T_{ijkl} более одного раза и как сомножитель в тензорном произведении и как сомножитель в составе свертки. Это связано с тем, что для тензорного произведения символов ε справедлива формула (см., например, [4])

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix},$$

которая сводит их к линейным комбинациям из символов δ. Следовательно, множество всех искомых мономов разбивается на два класса: $\mathcal{L}_0$ состоит из мономов, при построении которых отсутствует символ ε и мономов класса $\mathcal{L}_1$, которые содержат в своем составе символ ε.

Третье замечание касается того, что степень вхождения образующей M_j в состав мономов класса $\mathcal{L}_0$ должна быть четной, а в состав мономов класса $\mathcal{L}_1$ – нечетной, так как M_j является псевдовектором, а ε_{klm} – псевдотензором и только при четности суммарной степени их вхождения результирующий моном T_{ijkl} тензором.

Наконец, укажем, что имеется только один линейно независимый скаляр M_jM_j в рассматриваемой нами полугруппе, а псевдоскаляры в ней отсутствуют. Это означает, что свертки M_jM_j учитываются при построении базиса. При появлении таких скаляров в результате проведения операций свертки онимогут быть включены в состав коэффициентов $f^{(a)}$.

Прежде чем строить линейно независимые тензоры T_{ijkl} сделаем еще одно замечание. При описании программы решения задачи в пп.1-3. мы совсем не уделили исключили из рассмотрения возможные типы плотностей потоков S_{ij}, которые не содержат пространственных производных от M_j.

Это связано с тем, что имеется только два линейно независимых элемента, с точностью до принятого нами понятия эквивалентности, которые являются результатами тензорного умножения и свертки из образующих M_j и ε_{ijk}, а именно, M_iM_j и $\varepsilon_{ijk}M_k$. Но эти элементы тензорной алгебры являются тензорами, а не псевдотензорами. Поэтому они не могут входить в состав множества $\mathfrak{S}$ линейно независимых плотностей потоков S_{ij}.

Перейдем к построению линейно независимых тензоров T_{ijkl}. Для того чтобы полным образом перечислить все такие тензоры, необходимо их убдобным образом проклассифицировать. Так как символ Леви-Чивитта может входить в состав тензора T_{ijkl}, то есть быть использован в операциях умноженяи и свертки, не более одного раза, то распределим, прежде всего, все тензоры на два класса $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$. К классу $\mathcal{L}_0$ отнесем тензоры в которых символ Леви-Чивитта ε_{ijk} не используется, а к классу $\mathcal{L}_1$ – те тензоры, в которых он используется один раз. Определим также классы тензоров, которые классифицируют все перечисляемые тензоры согласно признаку, сколько раз в них входит символ Кронекера. Число вхождений k символа δ_{ij} может принимать значения $k = 0, 1, 2$. Соответственно, согласно каждому из этих значений, введем классы $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$. Тогда легко видеть, что класс всех всех тензоров представляется объединением

$$\bigcup_{j=0,1} \bigcup_{l=0,1,2} \mathcal{L}_j \cap \mathcal{K}_l \,. \tag{2.2.1}$$

Таким образом, для перечисления класса всех тензоров, обладающих нужными свойствами нужно, описать каждый из классов, входящих в это объединение.

Очевидно, что $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \varnothing$, как как при тензорном умножении двух символов Кронекера уже не остается индексов для сомножитель ε.

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_2 \cap \mathcal{L}_0$. Как и выше, при тензорном умножении двух символов Кронекера уже нет возможности для тензорного умножения на псевдовектор M_j. Поэтому имеется 3 линейно независимых тензора этого класса:

$$\delta_{ij}\delta_{kl}\,, \quad \delta_{ik}\delta_{jl}\,, \quad \delta_{il}\delta_{jk}\,. \tag{2.2.2}$$

Имеется только два линейно независимых тензора второго ранга, построенных на основе образующих M и ε, а именно, M_iM_j и $\varepsilon_{ijk}M_k$, которые пригодны для построения тензоров классов $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_0$ и $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_1$.

Рассмотрим тензоры класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_0$. Эти тензоры перечисляются по признаку: какая пара из четырех индексов $\{i, j, k, l\}$ связывается с символом δ. После выбора такой пары остальные два индекса относятся к тензору, который является тензорным произведением MM. Так как символ ε имеет ранг 3, то он не может участвовать в построении тензоров этого класса, так как для этого необходимо три индекса. В результате, класс $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_0$

состоит из шести элементов,

$$\delta_{ij}M_kM_l\,,\quad \delta_{ik}M_jM_l\,,\quad \delta_{il}M_kM_j\,,\quad \delta_{jk}M_iM_l\,,\quad \delta_{jl}M_iM_k\,,\quad \delta_{kl}M_iM_j\,. \tag{2.2.3}$$

Точно также перечисляются шесть линейно независимых тензоров класса $\mathcal{K}_1\cap\mathcal{L}_1$:

$$\delta_{ij}\varepsilon_{klm}M_m\,,\quad \delta_{ik}\varepsilon_{jlm}M_m\,,\quad \delta_{il}\varepsilon_{jkm}M_m\,,$$
$$\delta_{jk}\varepsilon_{ilm}M_m\,,\quad \delta_{jl}\varepsilon_{ikm}M_m\,,\quad \delta_{kl}\varepsilon_{ijm}M_m\,. \tag{2.2.4}$$

Рассмотрим теперь тензоры классов $\mathcal{K}_0\cap\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{K}_0\cap\mathcal{L}_1$.

При построении тензоров четвертого ранга класса $\mathcal{K}_0\cap\mathcal{L}_0$ нельзя использовать символы δ и ε. Поэтому имеется один тензор четвертого ранга в этом классе, который порождается образующей M и он имеет вид тензорного произведения $MMMM$, т.е.

$$M_iM_jM_kM_l\,. \tag{2.2.5}$$

Тензоры класса $\mathcal{K}_0\cap\mathcal{L}_1$ распадаются на две группы. К одной из них мы отнесем все тензоры, у которых все индексы символа ε являются свободными, и поэтому имеется только один индекс, который присваивается псевдовектору $\mathbf{M}$. В этой группе имеется следующие четыре тензора, согласно тому, что имеется только четыре возможности выбрать этот исключительный индекс:

$$M_i\varepsilon_{jkl}\,,\quad M_j\varepsilon_{ikl}\,,\quad M_k\varepsilon_{ijl}\,,\quad M_l\varepsilon_{ijk}\,. \tag{2.2.6}$$

Ко второй группе отнесем те тензоры, у которых один из индексов у символа ε является связанным сверткой с псевдовектором $\mathbf{M}$. Заметим, что символ ε не может иметь два связанных индекса, так как $\varepsilon_{ijk}M_jm_k\equiv 0$ (другой образующей первого ранга кромеM не имеется). В результате, имеется шесть линейно независимых тензоров этой группы, согласно тому, что имеется шесть возможностей выбора двух индексов из групы четырех индексов $\{i,j,k,l\}$ тех, по которым производится свертка с символом ε:

$$M_iM_j\varepsilon_{klm}M_m\,,\quad M_iM_k\varepsilon_{jlm}M_m\,,\quad M_iM_l\varepsilon_{jkm}M_m\,,$$
$$M_jM_k\varepsilon_{ilm}M_m\,,\quad M_jM_l\varepsilon_{ikm}M_m\,,\quad M_kM_l\varepsilon_{ijm}M_m\,. \tag{2.2.7}$$

Суммируем результаты проведенного в этом разделе анализа в виде отдельного утверждения.

Теорема 1. *Множество* $\mathfrak{T}$ *линейно независимых тензоров* T_{ijkl} *четвертого ранга в тензорной алгебре с образующими* M, ε, δ *состоит из 26 тензоров, которые перечисляются списками* (2)-(7).

Согласно формуле (1.4), из этой теоремы следует что общий вид тензора T_{ijkl}:

$$T_{ijkl} = \sum_{a=1}^{26} f^{(a)} T^{(a)}_{ijkl}\,, \tag{2.2.8}$$

где тензоры $T^{(a)}_{ijkl}$, $a = 1 \div 26$ даются списками (2)-(7).

2.3. Общий вид эволюционного уравнения дивергентного типа для псевдовекторного поля

В этом разделе реализуется п. 2) программы исследования, описанной в разд.2.1. Мы выделим из всего набора плотностей потоков $S^{(a)}_{ij}$, $a = 1 \div 26$ максимально широкий набор линейно независимых плотностей. Необходимость решения такой задачи возникает в связи с тем, что при сворачивании тензоров $T^{(a)}_{ijkl} \nabla_k M_l$ с линейно независимыми коэффициентами $T^{(a)}_{ijkl}$, $a = 1 \div 26$ могут возникать линейно зависимые комбинации. Наличие таких линейных комбинаций приводит к тому, что слагаемые в сумме

$$\sum_{a=1}^{26} f^{(a)}(\mathbf{M}^2) T^{(a)}_{ijkl} \nabla_k M_l$$

становятся линейно зависимыми, несмотря на произвольные скалярные функции $f^{(a)}(\mathbf{M}^2)$. Решение задачи о выделении максимально широкого набора линейно независиымх плотностей потоков решает задачу о выделении максимально широкого набора термодинамических сил в общем случае, когда коэффициенты $f^{(a)}(\mathbf{M}^2)$, $a = 1 \div 26$ зависят от $\mathbf{M}^2$.

Заметим, что из тензоров класса $\mathcal{K}_2$, сверткой с тензором $\nabla_k M_l$, получаются плотности потоков

$$\delta_{ij}(\nabla, \mathbf{M})\,, \quad \nabla_i M_j\,, \quad \nabla_j M_i\,.$$

Заменим этот набор следующим эквивалентным ему набором, в котором тензоры второго ранга либо симметричны, либо антисимметричны (процедура симметризации) и которые мы обозначим $S_{ij}^{(a)}, a = 1, 2, 3$, соответственно с (2.2), в порядке их представления в приведенном списке:

$$\delta_{ij}(\nabla, \mathbf{M})\,, \quad \nabla_i M_j + \nabla_j M_i\,, \quad \nabla_i M_j - \nabla_j M_i\,. \tag{2.3.1}$$

Соответственно, из тензоров класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_0$ получается набор плотностей потоков (см. (2.3))

$$\delta_{ij}(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2\,, \quad M_j \nabla_i \mathbf{M}^2\,, \quad M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i\,,$$
$$M_i \nabla_j \mathbf{M}^2\,, \quad M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j\,, \quad M_i M_j(\nabla, \mathbf{M})$$

или эквивалентный ему набор, получаемый процедурой симметризации

$$\begin{gathered}\delta_{ij}(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2\,, \quad M_j \nabla_i \mathbf{M}^2 + M_i \nabla_j \mathbf{M}^2\,, \quad M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j + M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i\,, \\ M_i \nabla_j \mathbf{M}^2 - M_j \nabla_i \mathbf{M}^2\,, \quad M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j - M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i\,, \quad M_i M_j(\nabla, \mathbf{M})\,,\end{gathered} \tag{2.3.2}$$

которые мы обозначим $S_{ij}^{(a)}, a = 4 \div 9$. Здесь и далее, как и приведенном выше случае, номера для плотностей потоков даются в порядке их представления в приведенном списке.

Из тензоров класса $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{L}_1$ получаются плотности потоков следующего вида (см. (2.4)):

$$\delta_{ij}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l\,, \quad [\mathbf{M}, \nabla]_j M_i\,,$$
$$\varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l\,, \quad [\mathbf{M}, \nabla]_i M_j\,, \quad \varepsilon_{ijm} M_m(\nabla, \mathbf{M})$$

или, после процедуры симметризации,

$$\begin{gathered}\delta_{ij}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad \varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l + \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l\,, \quad [\mathbf{M}, \nabla]_i M_j + [\mathbf{M}, \nabla]_j M_i\,, \\ \varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l - \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_i M_l\,, \quad [\mathbf{M}, \nabla]_i M_j - [\mathbf{M}, \nabla]_j M_i\,, \quad \varepsilon_{ijm} M_m(\nabla, \mathbf{M})\,,\end{gathered} \tag{2.3.3}$$

которые обозначаются $S_{ij}^{(a)}, a = 10 \div 15$

Тензору класса $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_0$ (см. (5)) соответствует симметричная плотность потока

$$S_{ij}^{(16)} = M_i M_j (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2\,. \tag{2.3.5}$$

Из тензоров класса $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{L}_1$ получаются следующие плотности потоков (см. (2.6), (2.7)) соответственно из первой и второй групп выражений для тензоров T_{ijkl}:

$$M_i[\nabla, \mathbf{M}]_j\,, \quad M_j[\nabla, \mathbf{M}]_i\,, \quad \varepsilon_{ijl}(\mathbf{M}, \nabla)M_l\,, \quad \varepsilon_{ijk}\nabla_k \mathbf{M}^2$$

$$M_iM_j(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j\,, \quad M_i[\mathbf{M}, \nabla]_j \mathbf{M}^2\,,$$
$$M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,, \quad M_j[\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M}^2\,, \quad \varepsilon_{ijm}M_m(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2$$

или, после процедуры симметризации, которые мы обозначаем согласно порядку следования $S_{ij}^{(a)}, a = 17 \div 26$,

$$M_i[\nabla, \mathbf{M}]_j + M_j[\nabla, \mathbf{M}]_i\,, \ M_i[\nabla, \mathbf{M}]_j - M_j[\nabla, \mathbf{M}]_i\,, \ \varepsilon_{ijl}(\mathbf{M}, \nabla)M_l\,, \ \varepsilon_{ijk}\nabla_k \mathbf{M}^2\,. \tag{2.3.6}$$

$$M_iM_j(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad \varepsilon_{ijm}M_m(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2\,,$$

$$M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j + M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,,$$
$$M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j - M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,,$$

$$M_i[\mathbf{M}, \nabla]_j \mathbf{M}^2 + M_j[\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M}^2\,, \quad M_i[\mathbf{M}, \nabla]_j \mathbf{M}^2 - M_j[\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M}^2\,. \tag{2.3.7}$$

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\frac{1}{2}\, S_{ij}^{(20)} = S_{ij}^{(18)} + S_{ij}^{(19)}\,. \tag{2.3.8}$$

□ Равенство (8) записывается в виде

$$\frac{1}{2}\, \varepsilon_{ijl}\nabla_l \mathbf{M}^2 = \varepsilon_{ijl}(\mathbf{M}, \nabla)M_l + \varepsilon_{ijl}[\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]]_l\,,$$

а это последнее равенство проверяется сверткой его с ε_{kij}, что является переходом к эквивалентному равенству ввиду антисимметрии по i, j обеих его частей. Так как $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$, то в результате свертки получаем

$$\nabla_k \mathbf{M}^2 = 2(\mathbf{M}, \nabla)M_k + 2[\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]]_k\,. \tag{2.3.9}$$

Последнее слагаемое преобразуется следующим образом

$$[\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]]_k=\varepsilon_{kij}M_i\varepsilon_{jlm}\nabla_l M_m=(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il})M_i\nabla_l M_m=$$

$$=M_m\nabla_k M_m-(\mathbf{M},\nabla)M_k\,.$$

Подстановкой этого выражения в (9) убеждаемся в его тождественном выполнении. ■

Лемма 2. *Справедливы тождества*

$$\frac{1}{2}\,S_{ij}^{(13)}=S_{ij}^{(19)}-S_{ij}^{(15)}\,. \tag{2.3.9}$$

$$S_{ij}^{(14)}=S_{ij}^{(18)}+S_{ij}^{(19)}-\frac{1}{2}S_{ij}^{(15)}\,. \tag{2.3.10}$$

□ Доказательство такое же как и доказательство Леммы 1. От равенства (9), ввиду антисимметрии тензоров, входящих в его состав, переходим к эквивалентному ему равенству сверткой ε_{nij},

$$\varepsilon_{nij}(\varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j M_l-\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i M_l)=2(\delta_{nl}\delta_{jk}-\delta_{jl}\delta_{nk})M_k\nabla_i M_l=$$

$$=2(\mathbf{M},\nabla)M_n-2M_n(\nabla,\mathbf{M})=\varepsilon_{nij}(\varepsilon_{ijl}(\mathbf{M},\nabla)M_l-\varepsilon_{ijl}M_l(\nabla,\mathbf{M}))=$$

$$=\varepsilon_{nij}(S_{ij}^{(19)}-S_{ij}^{(15)})\,.$$

Аналогично доказывается равенство (10),

$$\varepsilon_{nij}([\mathbf{M},\nabla]_i M_j-[\mathbf{M},\nabla]_j M_i)=2[[\mathbf{M},\nabla],\mathbf{M}]_n=$$

$$=\nabla_n\mathbf{M}^2-2M_n(\nabla,\mathbf{M})=\varepsilon_{nij}(\varepsilon_{ijl}\nabla_l\mathbf{M}^2/2-\varepsilon_{ijl}M_l(\nabla,\mathbf{M}))=$$

$$=\frac{1}{2}S_{ij}^{(20)}-S_{ij}^{(15)}\,.$$

Следовательно,

$$S_{ij}^{(14)}=\frac{1}{2}S_{ij}^{(20)}-S_{ij}^{(15)}\,.$$

Подставляя в правую часть равенства выражение (8) для $S_{ij}^{(20)}$ получаем (10). ■

Доказанные леммы 1 и 2 позволяют нам исключить из числа линейно независимых плотностей потоков, плотности $S_{ij}^{(13)}$, $S_{ij}^{(14)}$, $S_{ij}^{(20)}$. Проанализируем теперь плотности потоков, пропорциональные M^4. Имеет место

Лемма 3. *Справедливы тождества*

$$S_{ij}^{(24)} = \frac{1}{2}\, S_{ij}^{(22)} - \mathbf{M}^2 S_{ij}^{(19)}\,. \tag{2.3.11}$$

$$S_{ij}^{(26)} = S_{ij}^{(22)} - \mathbf{M}^2 S_{ij}^{(20)}\,. \tag{2.3.12}$$

□ Рассмотрим плотность $S_{ij}^{(24)}$ и вычислим $\varepsilon_{nij} S_{ij}^{(24)}$,

$$\varepsilon_{nij}\Big(M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_j - M_j[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\Big) =$$

$$= \varepsilon_{nij}\Big(M_i \varepsilon_{jkl} M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_l - M_j \varepsilon_{ikl} M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_l\Big) =$$

$$= (\delta_{nk}\delta_{il} - \delta_{nl}\delta_{ik}) M_i M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_l + (\delta_{nk}\delta_{jl} - \delta_{nl}\delta_{jk}) M_j M_k (\mathbf{M}, \nabla) M_l =$$

$$= M_n (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2 - 2\mathbf{M}^2 (\mathbf{M}, \nabla) M_n\,.$$

Сворачивая теперь

$$\varepsilon_{ijn}\varepsilon_{nkl} S_{kl}^{(24)} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) S_{kl}^{(24)} = 2 S_{ij}^{(24)} =$$

$$= \varepsilon_{ijn} M_n (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2 - 2\varepsilon_{ijn} \mathbf{M}^2 (\mathbf{M}, \nabla) M_n\,,$$

Откуда следует тождество (11).

Точно также доказывается тождество (12). Вычисляя свертку

$$\varepsilon_{nij} S_{ij}^{(26)} = \varepsilon_{nij}\Big(M_i[\mathbf{M}, \nabla]_j \mathbf{M}^2 - M_j [\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M}^2\Big) =$$

$$= \varepsilon_{nij}\Big(M_i \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l \mathbf{M}^2 - M_j \varepsilon_{ikl} M_k \nabla_l \mathbf{M}^2\Big) =$$

$$= (\delta_{nk}\delta_{il} - \delta_{nl}\delta_{ik}) M_i M_k \nabla_l \mathbf{M}^2 + (\delta_{nk}\delta_{jl} - \delta_{nl}\delta_{jk}) M_j M_k \nabla_l \mathbf{M}^2 =$$

$$= 2 M_n (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2 - 2\mathbf{M}^2 \nabla_n \mathbf{M}^2\,.$$

Тогда

$$S_{ij}^{(26)} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijn}\varepsilon_{nkl} S_{kl}^{(26)} = \varepsilon_{ijn} M_n (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2 - \varepsilon_{ijn}\mathbf{M}^2 \nabla_n \mathbf{M}^2 =$$

$$= S_{ij}^{(22)} - \mathbf{M}^2 S_{ij}^{(20)}\,. \;\; \blacksquare$$

Принимая во внимание доказанную лемму и Лемму 2, можно исключить из линейно независимых плотностей потоков плотности $S_{ij}^{(24)}$ и $S_{ij}^{(26)}$.

Таким образом, нам остается проверить, что имеет место линейная независимость плотностей потоков $S_{ij}^{(a)}$ с номерами $a = 1 \div 12,\ 15 \div 19,\ 21 \div 23$, 25. Обозначим это множество номеров посредством $\mathfrak{S}$.

Покажем, теперь, что все перечисленные псевдотензорные поля $S_{ij}^{(a)}(\mathbf{x})$, $a \in \mathfrak{S}$ линейно независимы. Для этого нужно проанализировать равенство

$$\sum_{a\in\mathfrak{S}} c_a(\mathbf{M}^2) S_{ij}^{(a)} = 0 \tag{2.3.13}$$

при любых значениях индексов $i, j = 1, 2, 3$ и для любой пространственной точки с радиус-вектором $\mathbf{x}$, от которой зависят значения полей $S_{ij}^{(a)}$, и показать, что оно возможно только при равенстве нулю всех коэффициентов c_a, $a \in \mathfrak{S}$, которые понимаются как функции от $\mathbf{M}^2$. Допустим, что (13) имеет место. Тогда, заменив все векторное поле $\mathbf{M}$, которое определяет значения каждой из плотностей $S_{ij}^{(a)}$, на $\lambda\mathbf{M}$, где λ – произвольный вещественный множитель, из равенства (13), ввиду произвольности поля $\mathbf{M}$, получаем

$$\lambda \sum_{a=1\div 3} c_a(\lambda^2\mathbf{M}^2) S_{ij}^{(a)} + \lambda^2 \sum_{a=10\div 19,\ \neq 13,14,16} c_a(\lambda^2\mathbf{M}^2) S_{ij}^{(a)} +$$

$$+\lambda^3 \sum_{a=4\div 9} c_a(\lambda^2\mathbf{M}^2) S_{ij}^{(a)} + \lambda^4 \sum_{a=16,21\div 23,25} c_a(\lambda^2\mathbf{M}^2) S_{ij}^{(a)} = 0\,. \tag{2.3.14}$$

Ввиду линейной независимости функций λ^s с различными показателями $s \in \mathbb{N}$, из (14) следуют четыре равенства

$$\sum_{a=1\div 3} c_a(0) S_{ij}^{(a)} = 0\,, \tag{2.3.15}$$

$$\sum_{a=10\div 19,\ \neq 13,14,16} c_a(0) S_{ij}^{(a)} = 0\,, \tag{2.3.16}$$

$$\sum_{a=1\div 3} c'_a\, \mathbf{M}^2\, S_{ij}^{(a)} + \sum_{a=4\div 9} c_a(0) S_{ij}^{(a)} = 0\,, \tag{2.3.17}$$

$$\sum_{a=10\div 19,\ \neq 13,14,16} c'_a\, \mathbf{M}^2\, S_{ij}^{(a)} + \sum_{a=16,21\div 23,25} c_a(0) S_{ij}^{(a)} = 0\,. \tag{2.3.18}$$

Проанализируем каждое из полученных равенств.

Лемма 4. *Единственным решением уравнения (15) является* $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = 0$.

□ Ввиду произвольности полей $S_{jk}^{(a)}$, подставим в равенство (15) их выражения в том случае, когда их значения вычисляются на основе фиксированного псевдовекторного поля $M_j = A_j \exp((\mathbf{n}, \mathbf{x}))$, где A_j – произвольный постоянный псевдовектор, а $\mathbf{n}$ – произвольный вектор. После элементарных преобразований получаем равенство

$$c_1(0)\delta_{ij}(\mathbf{n},\mathbf{A}) + c_2(0)A_j n_i + c_3(0)A_i n_j = 0\,. \tag{2.3.19}$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{A}$, положим, что $\mathbf{n} \perp \mathbf{A}$. Тогда $(\mathbf{n},\mathbf{A}) = 0$ и из (19) получаем

$$c_2(0)A_j n_i + c_3(0)A_i n_j = 0\,.$$

Сворачивая обе части этого равенства с n_i, находим, что $c_2(0)A_j\mathbf{n}^2$, что возможно только при $c_2(0)$. Поэтому получаем, что имеет место $c_3(0)A_i n_j = 0$, что возможно только при $c_3(0) = 0$. Следовательно, равенство (19) возможно только при $c_1(0)\delta_{ij}(\mathbf{n},\mathbf{A}) = 0$. Полагая, ввиду произвольности векторов, $(\mathbf{n},\mathbf{A}) \neq 0$, находим, что $c_1(0) = 0$. Таким образом, равенство (15) возможно при всех направлениях только при $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = 0$. ■

Рассмотрим равенство (16), которое в подробной записи выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}
c_{10}(0)\delta_{ij}(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c_{11}(0)(\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i M_l + \varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j M_l) + \\
+ c_{12}(0)([\mathbf{M},\nabla]_j M_i + [\mathbf{M},\nabla]_i M_j) + c_{15}(0)\varepsilon_{ijm}M_m(\nabla,\mathbf{M}) + \\
+ c_{17}(0)(M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j + M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i) + c_{18}(0)(M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j - M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i) + \\
+ c_{19}(0)\varepsilon_{ijl}(\mathbf{M},\nabla)M_l = 0\,.
\end{gathered} \tag{2.3.20}$$

Это уравнение генерирует два независимых уравнения для симметричной и антисимметричной части тензора, стоящего в его левой части. Запишем симметризованное уравнение

$$\begin{gathered}
c_{10}(0)\delta_{ij}(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c_{11}(0)(\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i M_l + \varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j M_l) + \\
+ c_{12}(0)([\mathbf{M},\nabla]_j M_i + [\mathbf{M},\nabla]_i M_j) + c_{17}(0)(M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j + M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i) = 0\,.
\end{gathered} \tag{2.3.21}$$

Подстановка, аналогичная той, которая указана выше, приводит к равенству

$$(c_{12}(0) - c_{17}(0))(A_i[\mathbf{A},\mathbf{n}]_j + A_j[\mathbf{A},\mathbf{n}]_i) = 0\,, \tag{2.3.22}$$

так как первые два слагаемых при такой подстановке тождественно обращаются в нуль.

Лемма 5. *Имеют место равенства*

$$c_{12}(0) = c_{17}(0)\,. \tag{2.3.23}$$

$\square$ При условии $[\mathbf{A},\mathbf{n}] \neq 0$ равенства (23) получаются последовательными свертками сначала с A_j, а затем – с $[\mathbf{A},\mathbf{n}]_i$. $\blacksquare$

Следствием этой леммы является вытекающее из (21) равенство

$$c_{10}(0)\delta_{ij}(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c_{11}(0)(\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i M_l + \varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j M_l) +$$
$$+ c_{12}(0)([\mathbf{M},\nabla]_j M_i + [\mathbf{M},\nabla]_i M_j + M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j + M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i) = 0\,. \tag{2.3.24}$$

Лемма 6. *Имеют место равенства*

$$c_{10}(0) = c_{12}(0) = c_{17}(0)\,. \tag{25}$$

$\square$ Вычислим след тензора в обеих частях равенства (24). В результате, так как

$$\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_j M_l + \varepsilon_{jkl}M_k\nabla_j M_l = \varepsilon_j\nabla_j M_k M_l = 0\,,$$

и $(\mathbf{M}[\nabla,\mathbf{M}]) = ([\mathbf{M},\nabla]\mathbf{M})$, получим

$$\Big(3c_{10}(0) + 4c_{12}(0)\Big)(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) = 0\,. \tag{2.3.26}$$

В общем положении $(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) \neq 0$. Следовательно,

$$3c_{10}(0) + 4c_{12}(0) = 0\,. \tag{2.3.27}$$

Свернем теперь обе части (24) с M_iM_j. Тогда, так как оператор $(\mathbf{M},[\mathbf{M},\nabla]) \equiv 0$, то получаем равенство

$$\Big(c_{10}(0) + 2c_{12}(0)\Big)\mathbf{M}^2(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) = 0\,. \tag{2.3.28}$$

Следовательно, при тех же условиях $([\mathbf{M},\nabla],\mathbf{M}) \neq 0$, имеем

$$c_{10}(0) + 2c_{12}(0) = 0\,. \tag{2.3.29}$$

Из уравнений (27), (29) следует, что $c_{10}(0) = c_{12}(0) = 0$. Принимая во внимание (23), получаем (25). $\blacksquare$

Следствие. $c_{11}(0) = 0$.

□ Используя равенства (25), уравнение (24) запишем в виде

$$c_{11}(0)(\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_iM_l+\varepsilon_{ikl}M_k\nabla_jM_l)=0\,. \tag{2.3.30}$$

Выражение в скобках не равно тождественно нулю. В этом можно убедиться подстановкой суммы $\mathbf{A}^{(1)}\exp((\mathbf{n}^{(1)},\mathbf{x}))+\mathbf{A}^{(2)}\exp((\mathbf{n}^{(2)},\mathbf{x}))$. ■

Рассмотрим, теперь, антисимметричную часть уравнения (20)

$$c_{15}(0)\varepsilon_{ijm}M_m(\nabla,\mathbf{M})+c_{18}(0)(M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j-M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i)+$$
$$+c_{19}(0)\varepsilon_{ijl}(\mathbf{M},\nabla)M_l=0\,. \tag{2.3.31}$$

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$c_{15}(0)+c_{19}(0)=0\,,\qquad c_{18}=0\,. \tag{2.3.32}$$

□ Свернем обе части равенства (31) с ε_{kij}. Воспользовавшись тождеством $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{ijl}=2\delta_{kl}$, находим

$$c_{15}(0)M_k(\nabla,\mathbf{M})+c_{18}(0)\varepsilon_{kij}M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j+c_{19}(0)(\mathbf{M},\nabla)M_k=0\,. \tag{2.3.33}$$

Заметим, что $\varepsilon_{kij}M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j=\nabla_k\mathbf{M}^2/2-(\mathbf{M},\nabla)M_k$. Тогда

$$c_{15}(0)M_k(\nabla,\mathbf{M})+c_{18}(0)\nabla_k\mathbf{M}^2/2+(c_{19}(0)-c_{18}(0))(\mathbf{M},\nabla)M_k=0\,. \tag{2.3.34}$$

Подставляя в это равенство $\mathbf{M}=\mathbf{A}\exp((\mathbf{n},\mathbf{x}))$ находим

$$c_{15}(0)A_k(\mathbf{n},\mathbf{A})+c_{18}(0)n_k\mathbf{A}^2+(c_{19}(0)-c_{18}(0))A_k(\mathbf{n},\mathbf{A})=0\,. \tag{2.3.35}$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, положим $(\mathbf{A},\mathbf{n})=0$. Тогда

$$c_{18}(0)n_k\mathbf{A}^2=0 \tag{2.3.36}$$

и, следовательно, $c_{18}(0)=0$. Поэтому из (34), в условиях $(\mathbf{A},\mathbf{n})\neq 0$, получаем $c_{15}(0)+c_{19}(0)=0$. ■

Подстановка равенств (32) в (34) получаем уравнение

$$c_{15}(0)(M_k(\nabla,\mathbf{M})-(\mathbf{M},\nabla)M_k)=0\,. \tag{2.3.37}$$

Из него следует

Лемма 8. $c_{15}(0)=c_{19}(0)=0$.

□ Существует поле $\mathbf{M}$ такое, что $M_k(\nabla, \mathbf{M}) \neq (\mathbf{M}, \nabla)M_k$. Для этого достаточно положить $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{(1)} \exp((\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{x})) + \mathbf{A}^{(2)} \exp((\mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{x}))$. Тогда из (37) следует $c_{15}(0) = 0$. ■

Теорема 2. *Единственным решением уравнения (16) является*

$$c_a(0) = 0\,, \qquad a = 10 \div 19,\ \neq 13, 14, 16\,.$$

□ Доказательство следует из Лемм 5-8. ■

Проанализируем равенство (21)

$$\begin{gathered}\delta_{ij}(c_1'\mathbf{M}^2(\nabla, \mathbf{M}) + c_4(0)(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2)+\\ +c_2'\mathbf{M}^2(\nabla_i M_j + \nabla_j M_i) + c_3'\mathbf{M}^2(\nabla_i M_j - \nabla_j M_i)+\\ +c_5(0)(M_j\nabla_i\mathbf{M}^2 + M_i\nabla_j\mathbf{M}^2) + c_6(0)(M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j + M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i)+\\ +c_7(0)(M_i\nabla_j\mathbf{M}^2 - M_j\nabla_i\mathbf{M}^2) + c_8(0)(M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j - M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i)+\\ +c_9(0)M_iM_j(\nabla, \mathbf{M}) = 0\,.\end{gathered} \tag{2.3.38}$$

Рассмотрим его симметричную часть

$$\begin{gathered}\delta_{ij}(c_1'\mathbf{M}^2(\nabla, \mathbf{M}) + c_4(0)(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2) + c_2'\mathbf{M}^2(\nabla_i M_j + \nabla_j M_i)+\\ +c_5(0)(M_j\nabla_i\mathbf{M}^2 + M_i\nabla_j\mathbf{M}^2) + c_6(0)(M_i(\mathbf{M}, \nabla)M_j + M_j(\mathbf{M}, \nabla)M_i)+\\ +c_9(0)M_iM_j(\nabla, \mathbf{M}) = 0\,.\end{gathered} \tag{2.3.39}$$

Подставим в нее поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$. В результате, получим

$$\begin{gathered}(c_1' + 2c_4(0))\delta_{ij}\mathbf{A}^2(\mathbf{A}, \mathbf{n}) + (c_2' + 2c_5(0))\mathbf{A}^2(A_jn_i + A_in_j)+\\ +(c_6(0) + c_9(0))(\mathbf{A}, \mathbf{n})A_iA_j = 0\,.\end{gathered} \tag{2.3.40}$$

Лемма 9. *Справедливы равенства*

$$c_2' + 2c_5(0) = 0\,, \qquad c_1' + 2c_4(0) = 0\,, \qquad c_6(0) + c_9(0) = 0\,. \tag{2.3.41}$$

□ Ввиду произвольности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, положим $(\mathbf{A}, \mathbf{n}) = 0$. Откуда получаем первое равенство.

Далее, из (41) при $(\mathbf{A}, \mathbf{n}) \neq 0$ следует равенство

$$(c_1' + 2c_4(0))\delta_{ij}\mathbf{A}^2 + (c_6(0) + c_9(0))A_iA_j = 0\,, \tag{2.3.42}$$

которое возможно только при выполнении других равенств (41). ■

Таким образом, равенство (39) превращается в следующее

$$
\begin{gathered}
c_1'\delta_{ij}\Big(\mathbf{M}^2(\nabla,\mathbf{M})-(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}^2/2\Big)+\\
+c_2'\Big(\mathbf{M}^2(\nabla_i M_j+\nabla_j M_i)-(M_j\nabla_i\mathbf{M}^2+M_i\nabla_j\mathbf{M}^2)/2\Big)+\\
+c_6(0)\Big(M_i(\mathbf{M},\nabla)M_j+M_j(\mathbf{M},\nabla)M_i)-M_iM_j(\nabla,\mathbf{M})\Big)=0\,. \quad (2.3.43)
\end{gathered}
$$

Допустим, что тождество имеет место при каких-то значениях постоянных c_1', c_2' и $c_6(0)$. Зафиксируем поле $\mathbf{M}$ в какой-либо пространственной точке и добавим к этому значению малое поле

$$
\mathbf{m}=\mathbf{A}\exp((\mathbf{n},\mathbf{x}))\,. \quad (2.3.44)
$$

Подставим в поле $\mathbf{M}+\mathbf{m}$ в равенство (43). Тогда удерживая слагаемые линейные по $\mathbf{m}$ имеем

$$
\begin{gathered}
c_1'\delta_{ij}\Big(\mathbf{M}^2(\nabla,\mathbf{m})-(\mathbf{M},\nabla)(\mathbf{M},\mathbf{m})\Big)+\\
+c_2'\Big(\mathbf{M}^2(\nabla_i m_j+\nabla_j m_i)-(M_j\nabla_i(\mathbf{M},\mathbf{m})+M_i\nabla_j(\mathbf{M},\mathbf{m})\Big)+\\
+\,c_6(0)\Big(M_i(\mathbf{M},\nabla)m_j+M_j(\mathbf{M},\nabla)m_i)-M_iM_j(\nabla,\mathbf{m})\Big)=0\,,
\end{gathered}
$$

или, после подстановки (44)

$$
\begin{gathered}
c_1'\delta_{ij}\Big(\mathbf{M}^2(\mathbf{A},\mathbf{n})-(\mathbf{M},\mathbf{n})(\mathbf{M},\mathbf{A})\Big)+\\
+c_2'\Big(\mathbf{M}^2(A_jn_i+A_in_i)-(\mathbf{M},\mathbf{A})(M_jn_i+M_in_j)\Big)+\\
+\,c_6(0)\Big((M_iA_j+M_jA_i)(\mathbf{M},\mathbf{n})-M_iM_j(\mathbf{n},\mathbf{A})\Big)=0\,. \quad (2.3.45)
\end{gathered}
$$

Полагая в этом равенстве $(\mathbf{M},\mathbf{n})=(\mathbf{A},\mathbf{n})=(\mathbf{M},\mathbf{A})=0$, находим

$$
c_2'\mathbf{M}^2(A_jn_i+A_in_i)=0\,.
$$

Откуда имеем $c_2'=0$. Полагая в полученном, таким образом, равенстве

$$
\begin{gathered}
c_1'\delta_{ij}\Big(\mathbf{M}^2(\mathbf{A},\mathbf{n})-(\mathbf{M},\mathbf{n})(\mathbf{M},\mathbf{A})\Big)+\\
+\,c_6(0)\Big((M_iA_j+M_jA_i)(\mathbf{M},\mathbf{n})-M_iM_j(\mathbf{n},\mathbf{A})\Big)=0\,. \quad (2.3.46)
\end{gathered}
$$

$(\mathbf{M},\mathbf{n})=0$, $(\mathbf{A},\mathbf{n})\neq 0$, получим

$$c_1'\delta_{ij}\mathbf{M}^2 - c_6(0)M_iM_j = 0\,. \tag{2.3.46}$$

Ввиду произвольности вектора $\mathbf{M}$, получаем $c_1' = c_6(0) = 0$.

Принимая во внимание Лемму 9, находим, что нами доказана следующая

Лемма 10. *Единственным решением уравнения (39) является*

$$c_1' = c_2' = c_3' = 0\,, \qquad c_a = 0\,, \qquad a = 4 \div 9\,.$$

Рассмотрим антисимметричную часть уравнения (38),

$$c_3'\mathbf{M}^2(\nabla_i M_j - \nabla_j M_i) + c_7(0)(M_i\nabla_j\mathbf{M}^2 - M_j\nabla_i\mathbf{M}^2) +$$
$$+ c_8(0)(M_i(\mathbf{M},\nabla)M_j - M_j(\mathbf{M},\nabla)M_i) = 0\,. \tag{2.3.47}$$

Подставим в этом уравнение $\mathbf{M} = \mathbf{A}\exp((\mathbf{n},\mathbf{x}))$.

$$c_3'(n_iA_j - n_jA_i) + 2c_7(0)(A_in_j - A_jn_i) = 0\,. \tag{2.3.48}$$

Ввиду произвольности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, получаем $c_3' + 2c_7 = 0$. Тогда (47) представимо в виде

$$c_3'\Big(\mathbf{M}^2(\nabla_i M_j - \nabla_j M_i) + (M_i\nabla_j\mathbf{M}^2 - M_j\nabla_i\mathbf{M}^2)/2\Big) +$$
$$+ c_8(0)(M_i(\mathbf{M},\nabla)M_j - M_j(\mathbf{M},\nabla)M_i) = 0\,. \tag{2.3.49}$$

Применим тот же прием, который нами был использован при доказательстве Леммы 9. Зафиксировав вектор $\mathbf{M}$, линеаризуем около него это уравнение.

$$c_3'\Big(\mathbf{M}^2(n_iA_j - n_jA_i) + (\mathbf{M},\mathbf{A})(M_in_j - M_jn_i)\Big) +$$
$$+ c_8(0)(\mathbf{M},\mathbf{n})(M_iA_j - M_jA_i) = 0\,. \tag{2.3.50}$$

Полагая, сначала, что $(\mathbf{M},\mathbf{A}) = (\mathbf{M},\mathbf{n}) = 0$, получим, что $c_3' = 0$. Затем при условии, что $(\mathbf{M},\mathbf{n}) \neq 0$, получаем $c_8(0) = 0$. Таким образом доказана

Лемма 11. *Единственным решением уравнения (47) является*

$$c_3' = c_7(0) = c_8(0) = 0\,.$$

Из Лемм 10 и 11 следует следующая

Теорема 3. *Единственным решением уравнения (17) является*

$$c'_1 = c'_2 = c'_3 = 0\,, \qquad c_a = 0\,, \qquad a = 4 \div 9\,.$$

Наконец, проанализируем уравнение (18). Выделим из него симметричную и антисимметричную части

$$c'_{10}\delta_{ij}\mathbf{M}^2(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) + c'_{11}\mathbf{M}^2(\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i M_l + \varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j M_l) +$$
$$+ c'_{12}\mathbf{M}^2([\mathbf{M},\nabla]_j M_i + [\mathbf{M},\nabla]_i M_j) + c'_{17}\mathbf{M}^2(M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j + M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i) +$$
$$+ c_{16}(0)M_iM_j(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}^2 + c_{21}(0)M_iM_j(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{M}]) +$$
$$+ c_{23}(0)\Big(M_i[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_j + M_j[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}]_i\Big) +$$
$$+ c_{25}(0)\Big(M_i[\mathbf{M},\nabla]_j\mathbf{M}^2 + M_j[\mathbf{M},\nabla]_i\mathbf{M}^2\Big) = 0\,. \quad (2.3.51)$$

$$c'_{15}\varepsilon_{ijm}M_m(\nabla,\mathbf{M}) + c'_{18}(M_i[\nabla,\mathbf{M}]_j - M_j[\nabla,\mathbf{M}]_i) +$$
$$+ c'_{19}\varepsilon_{ijl}(\mathbf{M},\nabla)M_l + c_{22}(0)\varepsilon_{ijm}M_m(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{M}^2 = 0\,. \qquad (2.3.52)$$

Проанализируем симметричную часть (51) уравнения, снова применяя метод линаризации этого уравнения около постоянного поля $\mathbf{M}$. В результате линеаризации (51) получаем

$$c'_{10}\delta_{ij}\mathbf{M}^2(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{m}]) + c'_{11}\mathbf{M}^2(\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_i m_l + \varepsilon_{ikl}M_k\nabla_j m_l) +$$
$$+ c'_{12}\mathbf{M}^2([\mathbf{M},\nabla]_j m_i + [\mathbf{M},\nabla]_i m_j) + c'_{17}\mathbf{M}^2(M_i[\nabla,\mathbf{m}]_j + M_j[\nabla,\mathbf{m}]_i) +$$
$$+ 2c_{16}(0)M_iM_j(\mathbf{M},\nabla)(\mathbf{M},\mathbf{m}) + c_{21}(0)M_iM_j(\mathbf{M},[\nabla,\mathbf{m}]) +$$
$$+ c_{23}(0)\Big(M_i[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{m}]_j + M_j[\mathbf{M},(\mathbf{M},\nabla)\mathbf{m}]_i\Big) +$$
$$+ 2c_{25}(0)\Big(M_i[\mathbf{M},\nabla]_j(\mathbf{M},\mathbf{m}) + M_j[\mathbf{M},\nabla]_i(\mathbf{M},\mathbf{m})\Big) = 0\,, \quad (2.3.53)$$

а после подстановки $\mathbf{m} = \mathbf{A}\exp((\mathbf{n},\mathbf{x}))$ –

$$c'_{10}\delta_{ij}\mathbf{M}^2(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}]) + c'_{11}\mathbf{M}^2([\mathbf{M},\mathbf{A}]n_i + [\mathbf{M},\mathbf{A}]_i n_j) +$$
$$+ c'_{12}\mathbf{M}^2([\mathbf{M},\mathbf{n}]_j A_i + [\mathbf{M},\mathbf{n}]_i A_j) + c'_{17}\mathbf{M}^2(M_i[\mathbf{n},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{n},\mathbf{A}]_i) +$$
$$+ 2c_{16}(0)M_iM_j(\mathbf{M},\mathbf{n})(\mathbf{M},\mathbf{A}) + c_{21}(0)M_iM_j(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}]) +$$

$$+c_{23}(0)(\mathbf{M},\mathbf{n})\Big(M_i[\mathbf{M},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{M},\mathbf{A}]_i\Big) +$$

$$+\, 2c_{25}(0)(\mathbf{M},\mathbf{A})\Big(M_i[\mathbf{M},\mathbf{n}]_j + M_j[\mathbf{M},\mathbf{n}]_i\Big) = 0\,, \quad (2.3.54)$$

Пусть $(\mathbf{M},\mathbf{n}) = 0$, $\mathbf{A} \parallel \mathbf{n}$, то (53) превращается в уравнение

$$c'_{11} + c'_{12} = 0\,. \qquad (2.3.55)$$

Если же $(\mathbf{M},\mathbf{n}) = 0$, $\mathbf{A} \parallel \mathbf{M}$, то

$$c'_{12}\mathbf{M}^2 - c'_{17}\mathbf{M}^2 + 2c_{25}(0)(\mathbf{M},\mathbf{A}) = 0\,. \qquad (2.3.56)$$

Полагая здесь $\mathbf{M} = \pm\mathbf{A}$, найдем, что

$$c'_{12} = c'_{17}\,, \qquad c_{25}(0) = 0\,. \qquad (2.3.57)$$

Заметим также, что слагаемое с коэффициентом c_{16} имеет другой порядок по $|\mathbf{M}|$, по сравнению с другими слагаемыми. Поэтому нужно положить $c_{16} = 0$. После подстановки полученных равенств в (54) находим

$$c'_{10}\delta_{ij}\mathbf{M}^2(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}]) + c'_{11}\mathbf{M}^2\Big(([\mathbf{M},\mathbf{A}]n_i + [\mathbf{M},\mathbf{A}]_i n_j) -$$

$$-([\mathbf{M},\mathbf{n}]_j A_i + [\mathbf{M},\mathbf{n}]_i A_j) - (M_i[\mathbf{n},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{n},\mathbf{A}]_i)\Big) +$$

$$+c_{21}(0)M_iM_j(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}]) +$$

$$+c_{23}(0)(\mathbf{M},\mathbf{n})\Big(M_i[\mathbf{M},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{M},\mathbf{A}]_i\Big) = 0\,, \qquad (2.3.58)$$

Если теперь положить, что все три вектора лежат в одной плоскости и $(\mathbf{M},\mathbf{n}) = 0$, но вектор $\mathbf{A}$ расположен произвольно по отношению к этим векторам. Тогда получаем уравнение

$$c'_{11}\mathbf{M}^2\Big(([\mathbf{M},\mathbf{A}]n_i + [\mathbf{M},\mathbf{A}]_i n_j) -$$

$$-([\mathbf{M},\mathbf{n}]_j A_i + [\mathbf{M},\mathbf{n}]_i A_j) - (M_i[\mathbf{n},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{n},\mathbf{A}]_i)\Big) = 0\,. \qquad (2.3.59)$$

Полагая теперь в этом равенстве, что три вектора могут принимать произвольные значения, ввиду того, что векторное выражение в скобках не равно тождественно нулю при любых векторах $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{n}$, находим $c'_{11} = 0$.

Наконец, рассмотри остальные слагаемые в (58),

$$c'_{10}\delta_{ij}\mathbf{M}^2(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}]) + c_{21}(0)M_iM_j(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}]) +$$

$$+c_{23}(0)(\mathbf{M},\mathbf{n})\Big(M_i[\mathbf{M},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{M},\mathbf{A}]_i\Big) = 0\,. \qquad (2.3.60)$$

Полагая, что смешанное произведение $(\mathbf{M},[\mathbf{n},\mathbf{A}])$ не равно нулю, вычислим след от обеих частей уравнения (60). В результате, получим уравнение

$$3c'_{10} + c_{21}(0) = 0\,. \qquad (2.3.61)$$

Если же свернуть уравнение (60) с M_iM_j, то получим уравнение

$$c'_{10} + c_{21}(0) = 0\,. \qquad (2.3.62)$$

Из этих двух уравнений следует, что $c'_{10} = c_{21}(0) = 0$. Следовательно, на основании уравнения (60), получаем

$$c_{23}(0)(\mathbf{M},\mathbf{n})\Big(M_i[\mathbf{M},\mathbf{A}]_j + M_j[\mathbf{M},\mathbf{A}]_i\Big) = 0\,. \qquad (2.3.63)$$

Отсюда следует $c_{23}(0) = 0$.

Анализ уравнения антисимметричной части (52) уравнения (18) осуществляется точно таким же образом. В результате мы приходим к заключению, что справедлива следующая

Теорема 4. *Единственным решением уравнения (18) является*

$$c'_a = 0\,,\quad a' = 10 \div 19,\ \neq 13,14,16 \qquad c_a = 0\,,\quad a = 16, 21 \div 23, 25\,.$$

На основании Леммы 4 и Теорем 1-3, приходим к заключению о том, что общий вид плотности S_{ij} (см. (14)) потока магнитного момента состоит из 21 слагаемых и имеет вид

$$\sum_{a=1\div 25;\neq 13,14,20,24} f^{(a)}(\mathbf{M}^2)T^{(a)}_{ijkl}\nabla_k M_l\,. \qquad (2.3.64)$$

Все слагаемые являются в общем положении (при произвольных коэффициентных функциях $f^{(a)}(\mathbf{M}^2)$ являются линейно независимыми.

Следовательно, по этой же причине и на основании (2.1.1), справедливо

Следствие. *Общее эволюционное уравнение для псевдовекторного поля* $\mathbf{M}$ *имеет вид*

$$\dot{M}_i = \sum_{a=1\div 25;\neq 13,14,20,24} \nabla_j f^{(a)}(\mathbf{M}^2)T^{(a)}_{ijkl}\nabla_k M_l\,. \qquad (2.3.65)$$

Глава 3. Эволюционное уравнение для псевдовекторного унимодального поля

3.1. Построение множества линейно независимых термодинамических сил

В этой главе мы завершаем решение той задачи, которая была поставлена в Главе 1. В этом разделе мы отберем линейно независимые термодинамические силы $F_i^{(a)} = \partial S_{ij}^{(a)}/\partial x_j$ соответствуют отобранным плотностям $S_{ij}^{(a)}$, $a = 1 \div 25$, $a \neq 13, 14, 20, 24$ описанным в Главе 2. Такая процедура необходима в связи с тем, что вычисление сверток с каждым из линейно независимых тензорных полей, которые представляют термодинамические силы, может привести к тому, что список полученных таким образом полей $F^{(a)}(\mathbf{x})$ окажется линейно зависимым набором.

Вычисление дивергенций всех возможных линейно независимых плотностей потоков $S_{ij}^{(a)}$, $a = 1 \div 25$, $a \neq 13, 14, 20, 24$, которые перечислены формулами в разд. 2.3, приводит к следующим термодинамическим силам. При этом дивергенции, соответствующие псевдотензорам S_{ij} из формулы (13), приводят к двум совпадающим значениям.

Псевдотензорам, представленным в (2.3.1), соответствуют силы $\mathbf{F}[\mathbf{x}; \mathbf{M}]$ следующего вида:

$$\nabla_i(\nabla, \mathbf{M}), \quad \Delta M_i. \tag{3.1.1}$$

Псевдотензорам, представленным формулой (2.3.2), соответствуют силы

$$\begin{gathered}\nabla_i(\mathbf{M}, \nabla\mathbf{M}^2), \quad (\nabla, \mathbf{M}\nabla_i\mathbf{M}^2), \quad (\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)M_i), \\ (\nabla, M_i\nabla\mathbf{M}^2), \quad (\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}), \quad (\nabla, M_i\mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})).\end{gathered} \tag{3.1.2}$$

Псевдотензорам, представленным формулой (2.3.3), соответствуют силы

$$\begin{gathered}\nabla_i(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]), \quad ([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i\mathbf{M}), \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]M_i), \\ \varepsilon_{ikl}\nabla_j M_k \nabla_j M_l, \quad (\nabla,[\mathbf{M}, \nabla]_i\mathbf{M}), \quad [\nabla, \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})]_i.\end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Поле F_i, соответствующее псевдотензору $S_{ij}^{(16)}$ (2.3.5) имеет вид

$$(\nabla, M_i\mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}^2). \tag{3.1.4}$$

Псевдотензорам, представленным формулой (2.3.6), соответствуют силы

$$(\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad (\nabla, \mathbf{M}[\nabla, \mathbf{M}]_i)\,, \quad [\nabla, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,. \tag{3.1.5}$$

Наконец, псевдотензорам, представленным формулой (2.3.7), соответствуют силы

$$(\nabla, M_i\mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]))\,, \quad (\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}])\,, \quad (\nabla, M_i[\mathbf{M}, \nabla]\mathbf{M}^2)\,,$$

$$(\nabla, \mathbf{M}[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i)\,, \quad (\nabla, \mathbf{M}[\mathbf{M}, \nabla]_i\mathbf{M}^2)\,, \quad [\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla\mathbf{M}^2)]_i\,. \tag{3.1.6}$$

Таким образом в окончательном списке линейно независимых термодинамических сил имеется 21 поле $F_i^{(a)}[\mathbf{x}; \mathbf{M}]$, нумерация которых соответствует тому порядку, в котором они перечислены последовательно в формулах (1-6). В соответствии с этим общее эволюционное уравнение дивергентного типа для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, сферически симметричного, и у которого термодинамические силы представляют собой локальные функционалы от поля $\mathbf{M}$ и содержат пространственные производные не выше второго порядка, имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_{a=1\div 25;\neq 13,14,20,24} \mathbf{F}^{(a)}[\mathbf{x}; \mathbf{M}]\,. \tag{3.1.7}$$

3.2. Эволюционные уравнения с законом сохранения плотности магнитного момента

Как известно (см., например, [1]), локальное термодинамическое состояние диэлектрической ферромагнитной среды, в пренебрежении ее механическими деформациями, изменениями со временем t концентраций имеющихся в ней примесных атомов, а также при пренебрежении проявлением в ней магнитоэлектрических эффектов, полностью характеризуется локальной температурой $T(\mathbf{x}, t)$ и плотностью магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в каждой пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{x}$. Таким образом, изменение со временем локального термодинамического состояния описывается изменением физических полей $T(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. Нашей задачей является изучение эволюции поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в пренебрежении тепловыми эффектами.

Мы должны среди всех термодинамических сил – слагаемых в правой части эволюционного уравнения (1.7) отобрать только те, которые обеспечивают постоянство скалярного поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2 = \mathrm{const}$, когда поле если $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ является его решением.

Проанализируем последовательно каждое из слагаемых в правой части уравнения (37) и выделим из всего их списка те, которые удовлетворяют нужному требованию. Прежде всего заметим, что поставленному требованию – обеспечению сохранения квадрата псевдовекторного поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t)$ не отвечают силы с номерами $a = 3, 4, 6, 15, 21, 23$ из списка предыдущего раздела. Это связано с тем, что в выражения этих сил содержится дифференцирование поля $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$.

Заметим, что термодинамическая сила с номером $a = 12$ в формуле (33) соответствует уравнению (3) Главы 1. Она, заведомо обладает требуемым свойством, так как $M_i \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_k \nabla_j M_l \equiv 0$. Поэтому мы сразу же удалим из проводимого далее анализа.

Точно также удалим из списка термодинамическую силу с номером $a = 22$, так как она также обладает требуемым свойством при условии сохранения $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$. В самом деле, справедливы следующие тождественные преобразования

$$M_i(\nabla, \mathbf{M}[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i) =$$

$$= (\nabla, \mathbf{M})(\mathbf{M}, [\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]) + M_i(\mathbf{M}, \nabla)[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i =$$
$$= M_i[(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i + M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)^2\mathbf{M}]_i = 0$$

с обращением в нуль первого слагаемого во второй строке и обоих слагаемых в первой.

Таким образом, нам нужно проанализировать следующие термодинамические силы $\mathbf{F}$ на предмет существования таких универсальных линейных зависимостей между соответствующими им функциями от радиус-вектора $\mathbf{x}$, которые представляются скалярными произведениями $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$:

$$\nabla_i(\nabla, \mathbf{M}), \quad \Delta M_i,$$

$$\nabla_i(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}]), \quad ([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i \mathbf{M}), \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla] M_i), \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]_i \mathbf{M}),$$

$$[\nabla, \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})]_i, \quad (\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}]), \quad (\nabla, \mathbf{M}[\nabla, \mathbf{M}]_i), \quad [\nabla, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i.$$

$$(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla) M_i), \quad (\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}), \quad (\nabla, M_i \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})).$$

$$(\nabla, M_i \mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])), \quad (\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]). \tag{3.1.8}$$

Эти термодинамические силы разбиты на четыре группы согласно тому, в какой степени в каждую из них входит поле $\mathbf{M}$. Наличие линейной зависимости, точно также как и в разделе 2.2, нужно проверять внутри каждой из групп. В последующем анализе наличия линейной зависимости нумерацию выражений $(\mathbf{M}, \mathbf{F}^{(a)})$ и соответствующим из них коэффициентов c_a при принимаем согласно представленному здесь списку.

Итак, для квадратичных по полю $\mathbf{M}$ выражений проанализируем равенство

$$c_1(\mathbf{M}, \nabla(\nabla, \mathbf{M})) + c_2(\mathbf{M}, \Delta\mathbf{M}) = 0\,.$$

Подстановка в него поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$ дает равенство

$$c_1(\mathbf{A}, \mathbf{n})^2 + c_2\mathbf{n}^2\mathbf{A}^2 = 0\,,$$

которое возможно только при $c_1 = c_2 = 0$, что усматривается полагая, ввиду произвольности векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, сначала $\mathbf{n} \perp \mathbf{A}$, а затем $\mathbf{n} \parallel \mathbf{A}$.

Проанализируем теперь возможность линейной зависимости между выражениями третьего порядка по $\mathbf{M}$,

$$c_{11}M_i(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)M_i) + c_{12}M_i(\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}) +$$
$$+ c_{13}M_i(\nabla, M_i\mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})) = 0\,. \qquad (3.1.9)$$

Аналогично, подстановка выражения для поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ в виде плоской волны с произвольной амплитудой $\mathbf{A}$ и волновым вектором $\mathbf{n}$ приводит к равенству

$$c_{11} + c_{12} + c_{13} = 0\,. \qquad (3.1.10)$$

Подставим теперь в (9) поле $= [\mathbf{x}, \mathbf{n}]$. Тогда $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$ и

$$(\mathbf{M}, \nabla)M_i = n_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - x_i\mathbf{n}^2\,.$$

Тогда, ввиду $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$, $(\mathbf{M}, \mathbf{n}) = 0$

$$(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla)M_i) = (\nabla, \mathbf{M}(n_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - x_i\mathbf{n}^2)) =$$
$$= (\mathbf{M}, \nabla(n_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) - x_i\mathbf{n}^2)) = -M_i\mathbf{n}^2\,.$$

Наряду с этим, по той же причине,

$$(\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}) = (\nabla_k M_i) \cdot (\mathbf{M}, \nabla)M_k + M_i(\nabla_k\mathbf{M}, \nabla)M_k =$$
$$= \varepsilon_{ikl}n_l[\mathbf{M}, \mathbf{n}]_k + \Big(\varepsilon_{ikl}n_l\varepsilon_{kmn}M_m n_n\Big) =$$
$$= -M_i\mathbf{n}^2 + (\delta_{in}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{ln})n_l n_n M_m = -2M_i\mathbf{n}^2\,.$$

Подстановка этих соотношений дает

$$c_{11} + 2c_{12} = 0\,. \qquad (3.1.11)$$

Наконец, подставим в (39) поле $\mathbf{M} = \mathbf{x}$. Тогда

$$(\nabla, \mathbf{M}(\mathbf{M}, \nabla))M_i = (\nabla, M_i(\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}) = (\nabla, M_i\mathbf{M}) = 4x_i$$

и поэтому из (9) следует

$$c_{11} + c_{12} + 3c_{13} = 0\,.$$

Из этого равенства, вместе с (10) и (11) следует $c_{11} = c_{12} = c_{13} = 0$.

Проанализируем возможность линейной зависимости между двумя выражениями четвертого порядка порядка по $\mathbf{M}$,

$$c_{14}M_i(\nabla, M_i\mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])) + c_{15}M_i(\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]) = 0\,. \qquad (3.1.12)$$

Подставим в это равенство поле $M_j(\mathbf{x}) = A_j + \mathrm{Re}B_j \exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$ с произвольными вещественными векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{n}$, а также комплексным вектором $\mathbf{B}$, которого $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ и $|\mathrm{Re}\mathbf{B}| = |\mathrm{Im}\mathbf{B}|$, $(\mathrm{Re}\mathbf{B}, \mathrm{Im}\mathbf{B}) = 0$ так, что $\mathbf{B}^2 = 0$. Такой выбор поля $M_j(\mathbf{x})$ обеспечивает равенство $M_j(\mathbf{x})\mathbf{M_j}(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$. Так как в этом случае

$$M_i(\nabla, M_i\mathbf{M}(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])) = \varepsilon_{jkl}M_i\nabla_j M_i M_k M_m \nabla_m M_l =$$

$$= \varepsilon_{jkl}[M^2\nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l - (M_k M_m \nabla_m M_l)M_i\nabla_j M_i]\,,$$

где второе слагаемое обращается в нуль в предположении, что $\mathbf{M}^2 = \mathrm{const}$, и, кроме того,

$$M_i(\nabla, M_i[\mathbf{M}, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]) = \varepsilon_{klm}M_i\nabla_j M_i M_j M_k \nabla_l M_m =$$

$$= \varepsilon_{klm}[M^2\nabla_j M_j M_k \nabla_l M_m - (M_j M_k \nabla_l M_m)M_i\nabla_j M_i]\,,$$

где второе слагаемое также обращается в нуль в том же предположении. Тогда равенство (12) сводится к следующему

$$c_{14}\varepsilon_{jkl}\nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l + c_{15}\varepsilon_{klm}\nabla_j M_j M_k \nabla_l M_m = 0\,. \qquad (3.1.13)$$

Подстановка указанного явного выражения для поля в это равенство дает

$$c_{14}\varepsilon_{jkl}n_j n_m\Big([\mathrm{Im}B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}][\mathrm{Im}B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}]M_k +$$

$$+ (A_m + [\mathrm{Re}B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}])[\mathrm{Re}B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}]M_k\Big) +$$

$$+ c_{15}\varepsilon_{klm}n_j n_l\Big([\mathrm{Im}B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}][\mathrm{Im}B_j e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}]M_k +$$

$$+ (A_j + [\mathrm{Re} B_j e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}])[\mathrm{Re} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}]M_k\Big) = 0\,.$$

Меняя во втором слагаемом индексы суммирования $j \Leftrightarrow l$ во втором слагаемом и, сравнивая оба получившихся слагаемых, имеем

$$(c_{14} - c_{15})\varepsilon_{jkl} n_j n_m (A_m + [\mathrm{Re} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}])[\mathrm{Re} B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}]M_k +$$
$$+ (c_{14}\varepsilon_{jkl} n_m - c_{15}\varepsilon_{jkm} n_l) n_j [\mathrm{Im} B_m e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}][\mathrm{Im} B_l e^{i(\mathbf{n},\mathbf{x})}]M_k = 0\,. \tag{3.1.14}$$

Дифференцируя дважды по A_k и по A_m получим равенство

$$(c_{14} - c_{15})(\varepsilon_{jkl} n_j n_m + \varepsilon_{jml} n_j n_k) = 0\,.$$

Сверткой с n_m находим $(c_{14} - c_{15})\varepsilon_{jkl} n_j = 0$. В силу произвольности вектора n_j получаем $c_{14} = c_{15}$. В этом случае второе слагаемое в (14) также обращается в нуль, в силу равенства нулю свертки симметричного и антисимметричного тензоров.

Воспользуемся полученным равенством коэффициентов в уравнении (13) и покажем, что они должны быть равны нулю. Для этого нужно показать, что равенство

$$\varepsilon_{jkl} \nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l + \varepsilon_{klm} \nabla_j M_j M_k \nabla_l M_m = 0\,. \tag{3.1.15}$$

не может иметь место для любых гладких полей $M_j(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию $M_j M_j = M^2 = \mathrm{const}$.

Совершим во втором слагаемом замены индексов суммирования: сначала $m \Leftrightarrow j$, а затем $l \Rightarrow j$. В результате, получим

$$\varepsilon_{jkl}\Big[\nabla_j M_k M_m \nabla_m M_l - \nabla_m M_k M_m \nabla_j M_l\Big] = 0\,.$$

Подставим в это равенство поле M_j в виде $M_j = A_{jk} x_k$ с произвольной невырожденной матрицей $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A})_{jk} = A_{jk}$ $\det \mathcal{A} = 0$. Такое поле не удовлетворяет поставленному условию $M_j M_j = \mathrm{const}$, однако в случае, если приведенное равенство выполняется, то оно обязано выполняться и для линейных полей $M_j = A_{jk} x_k$, у которых матрица $\mathcal{A}$ является антисимметричной, так как в любой точке $\mathbf{x}$, например в нулевой, где оно выполняется, оно также должно выполняться и при малых отклонений от этой точки. При этом в силу сохранения $M_j M_j$ для матрицы должно иметь место $\mathcal{A} + \mathcal{A}^{\mathsf{T}} = 0$.

В результате указанной подстановки получаем

$$\varepsilon_{jkl}\Big[A_{kj}(\mathcal{A}\mathbf{M})_l + M_k(\mathcal{A}^2)_{lj} - (\mathcal{A}\mathbf{M})_k A_{lj} - M_k A_{lj} \mathrm{Sp}\mathcal{A}\Big] = 0\,.$$

Положим матрица $\mathcal{A}$ антисимметрична. Тогда $\mathcal{A}^2$ – симметричная матрица и $\mathrm{Sp}\mathcal{A} = 0$. Поэтому

$$\varepsilon_{jkl}\Big[A_{kj}(\mathcal{A}\mathbf{M})_l - (\mathcal{A}\mathbf{M})_k A_{lj}\Big] = 0$$

вследствие равенства нулю свертки симметричного и антисимметричного тензоров. Далее, ввиду того, что x_j – произвольный вектор и $\det\mathcal{A} \neq 0$, то M_j – произвольный вектор. Тогда, по той же причине, $\mathcal{A}\mathbf{M}$ – произвольный вектор, и потому дифференцированием по этому вектору, получаем равенство $\varepsilon_{jkn}A_{kj} = \varepsilon_{jnl}A_{lj} = 0$, которое должно быть верным для любой антисимметричной матрицы $\mathcal{A}$. Из него следует, что $\varepsilon_{jkn}A_{kj} = 0$. Откуда сверткой с ε_{nlm} получаем $A_{lm} = A_m l$, что противоречит антисимметрии матрицы $\mathcal{A}$. Полученное противоречие показывает, что равенство (15) невозможно для любых полей M_j, и поэтому $c_{14} = c_{15} = 0$.

Перейдем теперь к анализу возможности наличия тождеств в списке (8) выражений $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$, имеющих степень два по полю M_j. Прежде всего заметим, что в списке таких выражения имеются тождественно равные нулю при выполнении условия $\mathbf{M}^2 = \mathrm{const}$. А именно, таковыми являются выражения с номерами $a = 4, 5, 8$. В самом деле, для выражения с силой под номером $a = 4$ имеем

$$M_i([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i\mathbf{M}) = M_i\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l \nabla_j M_i =$$

$$= \varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l M_i \nabla_j M_i - M_l\varepsilon_{jkl}(\nabla_k M_i)(\nabla_j M_i) = 0\,,$$

где оба слагаемых, полученных последовательным применением оператора ∇_k равны нулю; первое вследствие предположения $M_iM_i = \mathrm{const}$, $M_i\nabla_j M_i = 0$, а второе – вследствие свертки симметричного тензора с антисимметричным.

Для выражения с силой под номером $a = 5$, последовательно применяя оператор ∇_j к каждому сомножителю, имеем

$$M_i(\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]\mathbf{M}_i) = M_i\nabla_j\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_l M_i =$$

$$= \varepsilon_{jkl}(\nabla_j M_k)M_i\nabla_l M_i + M_i\varepsilon_{jkl}M_k\nabla_j\nabla_l M_i = 0$$

где первое слагаемое равно нулю в силу $M_i\nabla_j M_i = 0$, а второе – ввиду свертки симметричного и антисимметричного тензоров. По тем же причинам, равно нулю выражение, соответствующее силе под номером $a = 8$,

$$M_i(\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}]) = M_i\nabla_j M_i\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l =$$

$$= M_i(\nabla_j M_i)\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l + M_i M_i \varepsilon_{jkl}\nabla_j\nabla_k M_l = 0\,.$$

Таким образом следующие термодинамические силы F_i из списка (8) обеспечивают сохранение квадрата поля $\mathbf{M}$:

$$([\nabla, \mathbf{M}], \nabla_i \mathbf{M})\,, \quad (\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]\mathbf{M}_i)\,, \quad (\nabla, M_i[\nabla, \mathbf{M}])\,. \tag{3.1.16}$$

Проанализируем, теперь, возможность существования линейной зависимости между скалярными функциями, представленными оставшимися выражениями $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$:

$$M_i\nabla_i(\mathbf{M}, [\nabla, \mathbf{M}])\,, \quad M_i(\nabla, [\mathbf{M}, \nabla]_i\mathbf{M})\,, M_i[\nabla, \mathbf{M}(\nabla, \mathbf{M})]_i\,,$$

$$M_i(\nabla, \mathbf{M}[\nabla, \mathbf{M}]_i)\,, \quad M_i[\nabla, (\mathbf{M}, \nabla)\mathbf{M}]_i\,. \tag{3.1.17}$$

Подставим в возможное соотношение линейной зависимости между ними

$$\alpha_1 M_i\nabla_i M_j\varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l + \alpha_2 M_i\nabla_j\varepsilon_{ikl}M_k\nabla_l M_j + \alpha_3 M_i\varepsilon_{ijk}\nabla_j M_k\nabla_l M_l +$$

$$+\alpha_4 M_i\nabla_j M_j\varepsilon_{ikl}\nabla_k M_l + \alpha_5 M_i\varepsilon_{ijk}\nabla_j M_l\nabla_l M_k = 0\,. \tag{3.1.18}$$

линейное выражение для поля $M_j = A_{jk}x_k$ с произвольной невырожденной матрицей $\mathcal{A}$. Тогда имеем равенство

$$\alpha_1(\mathcal{A}^2)_{jn}\varepsilon_{jkl}A_{lk} + \alpha_2 A_{in}\varepsilon_{ikl}(\mathcal{A}^2)_{kl} + \alpha_3 A_{in}\varepsilon_{ijk}A_{kj}\mathrm{Sp}\mathcal{A} +$$

$$+\alpha_4 A_{in}\varepsilon_{ikl}A_{lk}\mathrm{Sp}\mathcal{A} + \alpha_5 A_{in}\varepsilon_{ijk}(\mathcal{A}^2)_{kj} = 0\,.$$

Так как матрица $\mathcal{A}$ антисимметрична, то $\mathrm{Sp}\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A}^2$ симметрична. Тогда это равенство превращается в $\alpha_1(\mathcal{A}^2)_{jn}\varepsilon_{jkl}A_{lk} = 0$. Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Следовательно, так как матрица $\mathcal{A}$ невырождена (все ее собственные числа чисто мнимые), то у матрицы $\mathcal{A}^2$ также нет нулевых собственных чисел и поэтому $\varepsilon_{jkl}A_{kl}$ не может быть ее собственным вектором с нулевым собственным числом. Отсюда следует, что $\varepsilon_{jkl}A_{lk} = 0$ и сверткой обеих частей этого равенства с ε_{jmn} находим, что $A_{mn} = A_{nm}$. Полученное противоречие доказывает, что $\alpha_1 = 0$.

Учитывая равенство $\alpha_1 = 0$ подставим в (18) поле $M_j(\mathbf{x}) = A_j + M_j^{(1)}$, $M_j^{(1)} = \mathrm{Re}B_j\exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$ с теми же что и ранее использованными свойствами коэффициентов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Такая подстановка приводит к следующему

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big(\alpha_2 n_l\nabla_j M_k M_j^{(2)} - \alpha_3 n_j\nabla_l M_k M_j^{(2)} +$$

$$+ \alpha_4 n_k\nabla_j M_j M_l^{(2)} - \alpha_5 n_j\nabla_l M_j M_k^{(2)}\Big) = 0\,,$$

где $\nabla_k M_j^{(1)} = n_k M_j^{(2)}$, и далее,

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big((\alpha_2-\alpha_3)n_l n_j(M_k^{(2)}M_j^{(2)} - M_k M_j^{(1)}) +$$

$$+\alpha_4 n_k n_j(M_l^{(2)}M_j^{(2)} - M_j M_l^{(1)}) - \alpha_5 n_j n_l(M_l^{(2)}M_k^{(2)} - M_k M_l^{(1)})\Big) = 0\,. \quad (3.1.19)$$

Положим в полученном равенстве, сначала, $\mathbf{n} \perp \mathbf{M}^{(1)}$ при любом значении радиус-вектора $\mathbf{x}$, от которого зависит $\mathbf{M}^{(1)}$ и, следовательно, $\mathbf{n} \perp \mathbf{M}^{(2)}$. Тогда из него следует, что

$$\alpha_4 A_i\varepsilon_{ikl}n_k M_l^{(1)} n_j A_j = 0\,.$$

Выбрав вектор $\mathbf{n}$ так, чтобы $(\mathbf{n}, \mathbf{A}) \neq 0$ и при этом $\mathbf{n} \not\parallel \mathbf{A}$, получим, что $A_i\varepsilon_{ikl}n_k M_l^{(1)} \neq 0$, так как $\mathbf{A} \perp \mathbf{M}^{(1)}$. Отсюда следует, что $\alpha_4 = 0$. Учитывая это равенство в (19), подставим в него вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярный $\mathbf{A}$. Тогда слагаемое с α_5 исчезает, и поэтому из получившегося равенства следует, что

$$M_i\varepsilon_{ikl}(\alpha_2-\alpha_3)n_l n_j(M_k^{(2)}M_j^{(2)} - M_k M_j^{(1)}) = 0\,. \quad (3.1.20)$$

Выбрав теперь вектор $\mathbf{n}$, получим из этого равенства

$$(\alpha_2-\alpha_3)\varepsilon_{ikl}n_l n_j\Big[A_i(M_k^{(2)}M_j^{(2)} - M_k^{(1)}M_j^{(1)}) + M_i^{(1)}(M_k^{(2)}M_j^{(2)} - A_k M_j^{(1)})\Big] =$$

$$= (\alpha_2-\alpha_3)\varepsilon_{ikl}n_l n_j\Big[A_i(M_k^{(2)}M_j^{(2)} + M_i^{(1)}(M_k^{(2)}M_j^{(2)}\Big] =$$

$$= (\alpha_2-\alpha_3)(\mathbf{n}, \mathbf{M}^{(2)})\Big[(\mathbf{A}, [\mathbf{M}^{(2)}, \mathbf{n}]) + (\mathbf{M}^{(1)}, [\mathbf{M}^{(2)}, \mathbf{n}])\Big] = 0\,.$$

Это равенство должно выполняться при любом векторе $\mathbf{n}$, который мы выберем так, чтобы $(\mathbf{n}, \mathbf{M}^{(2)}) \neq 0$, более того, мы его выберем так, чтобы он был перпендикулярен ни $\mathrm{Re}\mathbf{B}$, ни $\mathrm{Im}\mathbf{B}$. Но тогда $(\mathbf{M}^{(1)}, [\mathbf{M}^{(2)}, \mathbf{n}]) \neq 0$ и равенство не может выполняться при $\alpha_2 \neq \alpha_3$ для любого радиус-вектора $\mathbf{x}$, так как это слагаемое в скобках содержит квадратичную комбинацию относительно $\exp[i(\mathbf{n}, \mathbf{x})]$, а первое слагаемое – имеет первую степень относительно этой экспоненты. Отсюда следует, что $\alpha_2 = \alpha_3$.

Покажем, наконец, что

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big(\nabla_j M_k \nabla_l M_j - \nabla_l M_k \nabla_j M_j\Big) = 0 \quad (3.1.21)$$

для полей, удовлетворяющих условию $M_j M_j = M^2$. Во первых, учитывая равенство нулю свертки $\varepsilon_{ikl}M_i M_k$, левая часть (51) записывается в виде

$$M_i\varepsilon_{ikl}\Big((\nabla_j M_k)\cdot(\nabla_l M_j) - (\nabla_l M_k)\cdot(\nabla_j M_j)\Big)\,.$$

Введем матрицу $\mathcal{A}_{kl} = \partial M_k/\partial_l$. Тогда, в терминах этой матрицы, последнее выражение имеет вид

$$M_i \varepsilon_{ikl} \Big((\mathcal{A}^2)_{kl} - A_{kl} \mathrm{Sp} \mathcal{A} \Big) .$$

Дифференцируя же по x_k условие $M_j M_j = M^2$ имеем дополнительную связь матрицы $\mathcal{A}$ с вектором M_j, $M_j A_{jk} = 0$, $k = 1, 2, 3$. Запишем это равенство в системе координат, где $M_j = 0$, $j = 2, 3$, $M_1 \neq 0$,

$$A_{1k} = 0\,, \ k = 1, 2, 3\,. \tag{3.1.22}$$

Тогда, в силу этих равенств, исследуемое выражение, действительно, обращается в нуль,

$$\varepsilon_{1kl} \Big((\mathcal{A}^2)_{kl} - A_{kl} \mathrm{Sp} \mathcal{A} \Big) =$$

$$= (A_{21} A_{13} - A_{31} A_{12}) + (A_{22} A_{23} - A_{32} A_{22}) + (A_{23} A_{33} - A_{33} A_{32}) -$$

$$- (A_{23} - A_{32})(A_{11} + A_{22} + A_{33}) =$$

$$= (A_{21} A_{13} - A_{31} A_{12}) - (A_{23} - A_{32}) A_{11} = 0\,.$$

Следовательно, (51) имеет место в выбранной нами системе координат, и поэтому оно верно, в следствие его инвариантности, в любой системе координат.

Теорема 1. *Весь класс термодинамических сил* $\mathbf{F}$, *который обеспечивают выполнение равенства* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = 0$ *дается следующим списком*

$$\varepsilon_{ikl} \nabla_j M_k \nabla_j M_l\,, \quad \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_j M_k M_m \nabla_m M_l\,,$$

$$\varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l \nabla_i M_j\,, \quad \nabla_j \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l M_i\,,$$

$$\nabla_j M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l\,, \quad \varepsilon_{ikl} \Big(\nabla_j M_k \nabla_l M_j - \nabla_l M_k \nabla_j M_j \Big)\,.$$

Заключение

В работе решена задача об описании класса всех эволюционных уравнений с дифференциальным эволюционным оператором по пространственным производным дивергентного типа для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x})$. При этом на возможный выбор эволюционного оператора наложены дополнительные условия: он должен содержать пространственные производные не выше второго порядка, должен быть ковариантным при преобразованиях группы $\mathbb{O}_3$ (повороты и отражения евклидового пространства) и при этом должен быть сферически симметричным. Далее, из этого класса эволюционных уравнений выделен класс таких из них, которые обладают инвариантом $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = M^2$.

В результате проведенного исследования оказалось, что все уравнения исследуемого класса имеют следующий вид

$$\begin{gathered}\dot{M}_i = \gamma_1 \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_k \nabla_j M_l + \gamma_2 \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_j M_k M_m \nabla_m M_l + \\ + \gamma_3 \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l \nabla_i M_j + \gamma_4 \nabla_j \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l M_i + \gamma_5 \nabla_j M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l + \\ + \gamma_6 \varepsilon_{ikl} \Big(\nabla_j M_k \nabla_l M_j - \nabla_l M_k \nabla_j M_j \Big) . \end{gathered} \tag{1}$$

с произвольными постоянными γ_a и $a = 1 \div 6$. В частности, если все постоянные $\gamma_a = 0$ при $a = 2 \div 6$ из этого общего уравнения получается сферически симметричное уравнение Ландау-Лифшица для плотности магнитного момента ферромагнетика в отсутствии внешнего магнитного поля.

В том случае, если накладывается дополнительное условие на термодинамические силы, которое состоит в том, что требуется сохранение соленоидальности поля $\mathbf{M}$, правая часть последнего уравнения упрощается таким образом, что остаются только два линейно независимых слагаемых

$$\dot{M}_i = \gamma(\varepsilon_{ikl} \nabla_j M_k \nabla_j M_l - \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l \nabla_i M_j) + \gamma'(\varepsilon_{jkl} \nabla_j M_k \nabla_l M_i - \varepsilon_{ikl} \nabla_j M_k \nabla_l M_j) . \tag{2}$$

Заметим, что найденные эволюционные уравнения, в общем случае, не обладают свойством инвариантности относительно замены $t \Rightarrow -t$, $\mathbf{M} \Rightarrow -\mathbf{M}$. А именно, такой тип инвариантности, которым обладает уравнение Ландау-Лифшица, нарушается в том случае, когда хотя бы одна из постоянных γ_a, $a = 3 \div 6$ отлична от нуля. Тогда можно ожидать, что наличие таких слагаемых приводит к эволюционным уравнениям, которые не обладают обратимостью движения.

Литература

1. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / М.: Мир, 1975.– 592 с.
   Truesdell C. A first Course in Rational Continuum Mechanics / Baltimore, Maryland: The John Hopkins University, 1972.

2. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход к теории антиферромагнитных систем // ТМФ. – 1993. – 95:1. – С.58-73.

3. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией / Физика элементарных частиц и атомного ядра.– 1996. – 27. – 2. – С.431-492.

4. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / М.: Наука, 1967. – 664 с.

5. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / М.: Гос. изд. ФМЛ, 1963. – 412 с.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред / Теоретическая физика т.8 / М.: Наука, 1982. – 620 с.

7. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны / М.: Наука, 1967. – 368 с.

8. Академик НАН Украины Виктор Григорьевич Барьяхтар. Жизнь в науке / Нац. акад. наук Украины, Нац. науч. центр «Харьк. физ.-техн. ин-т» / К. : Наукова думка, 2010. - 328 с.

9. Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2012. – 23(142);29. – С.54-66.

10. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели с парным взаимодействием. Случай вырожденного обменного интеграла // Belgorod State University Scientific. Bulletin Mathematics & Physics. – 2014. – 5(176);34. – С.126-133.

11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Теоретическая физика т.6 / М.: Наука, 1986.– 732с.

12. Вирченко Ю.П., Д.А. Чурсин Плотность потока магнитного момента сферически симметричного магнетика // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – No11(208); 39. – С.191-196.

13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: М.: Наука, 1966. – 576 с.

14. Барьяхтар В.Г., Белых В.Г., Соболева Т.К. Макроскопическая теория релаксации коллективных возбуждений в неупорядоченных и неколлинеарных магнетиках / Теор. и мат. физика.– 1988.– 77;2.– С.311Ц318.