ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(Н И У « Б е л Г У »)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа
обучающейся по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
очной формы обучения, группы 02041402
Попковой Анастасии Олеговны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
Сокольский А.Г.

БЕЛГОРОД 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Абсолютная величина является одной из важнейших характеристик числа как в области действительных, так и в области комплексных чисел.

В различных разделах школьного курса математики, а также при изучении высшей математики и физики понятие модуль используется довольно часто. Например, в теории приближенных вычислений применяются понятия абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа. В математическом анализе понятие модуля содержится в определениях самых основных понятий, таких как предел, ограниченная функция и др. В механике и геометрии изучаются понятия вектора и его длины (модуля вектора). Задачи, которые связаны с абсолютными величинами, довольно часто встречаются на математических олимпиадах, вступительных экзаменах в вузы, на ОГЭ и ЕГЭ.

В программе основного общего образования по математике [33, с. 35] в разделе арифметика в теме «Рациональные числа» коротко записано: «Модуль (абсолютная величина) числа». Больше это понятие не упоминается ни в указанной программе, ни в программе среднего (полного) образования. Вводится понятие «модуль» в курсе математики шестого класса через его геометрический смысл, но не как унитарная операция на множестве чисел.

Далее в 6 классе модуль используется при сравнении чисел, при умножении и делении положительных и отрицательных чисел, а также приводится несколько простейших уравнений и неравенств с использованием модуля.

В последующих классах только в некоторых учебниках вводится повторно понятие модуля числа и модуля выражения, и проскакивают эпизодические простейшие задания с модулем, например, линейные уравнения с модулем, но и они приводятся изредка и бессистемно.

Можно сказать, что ситуация с изучением неравенств с модулем в средней школе близка к катастрофической. После окончания как основной, так и средней школы обучающимся предстоит пройти ГИА по математике, а во множестве заданий части 2 ОГЭ и части С ЕГЭ встречаются задания с модулем самого разного вида, причем такого уровня сложности, который и не мыслился ранее.

Актуальность рассматриваемой темы заключается именно в этом пробеле школьного образования, так как в теме «Модуль» практически отсутствует самое главное, переход от простейших заданий к очень трудным. А ведь модуль фантастическим образом меняет любую функцию, любое уравнение или неравенство, делает их не только более сложными, но и более интересными.

Кроме того, на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения, а в последнее время и на Едином государственном экзамене, задания с модулем есть постоянно. Кто-то же должен научить школьников их решать, а это посильно осуществить и на школьных уроках математики, не прибегая к помощи репетиторов.

Программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний о модуле и его свойствах, полученных обучающимися за весь период обучения. Актуальность, теоретическая и практическая значимость проблемы, ее недостаточная разработанность в литературе обусловили выбор темы дипломного проекта, определили его цель и задачи.

Проблема исследования: каковы особенности обучения решению неравенств с модулем.

Степень изученности проблемы. В настоящее время на страницах журнала «Математика в школе» и газеты «Математика» публикуется множество статей, посвященных теме «Модуль числа». Так Гуртова О.С. в своей статье «Решение неравенств с модулем в 9 классе делится опытом решения простейших неравенств на основании определения модуля числа, а

Иванова Е.Ю. предлагает еще один способ решения неравенств, основанный на понятии расстояния. Для обучающихся 7-9 классов В.Ф. Чаплыгин в статье «Сравнение и классификация в упражнениях с «модулями»» демонстрирует способ, основанный на сравнении выражений, стоящих под знаком модуля, а Смоляков А. О. публикует интересный подбор заданий на тему: «Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля». Однако, проблему особенностей решения неравенств с модулем в средней школе эти авторы решали по отдельным аспектам, не соединив их в общую тему. Достаточно большой интересный опыт других педагогов, свои наработки мы попытались соединить в единую систему знаний по теме «Решение неравенств с модулем в средней школе».

Предмет исследования составляют методические основы изучения решений неравенств, содержащих знак модуля.

Объект исследования: неравенства с модулем.

Гипотеза: мы предполагаем, что систематическое использование различных способов для решения неравенств, содержащих абсолютную величину, приведет к повышению качества знаний по теме «Решение неравенств с модулем».

Целью дипломного проекта является разработка методики обучения решению неравенств, содержащих знак модуля в средней школе.

Для достижения цели в работе поставлены и решены следующие **задачи:**

1. Изучить определение понятия абсолютная величина, геометрический смысл и ее свойства.

2. Определить психолого-педагогические основы обучения школьников при решении неравенств с модулем.

3. Рассмотреть различные виды неравенств с модулем и способы их решения.

4. Изучить состояние и перспективы развития темы «Неравенства с модулем» по отношению к школе.

5. Обосновать и разработать методику обучения теме «Неравенства с модулем» для уроков алгебры в 9 классе.

Теоретическая и методическая база исследования. Теоретической базой исследования являются научные труды, результаты фундаментальных и прикладных исследований современных отечественных и зарубежных специалистов в области математики. Исследование основывается на методологии системного подхода, методов логического и сравнительного анализа.

Информационной базой исследования послужили отечественные и зарубежные публикации в переводе, различные справочные материалы, материалы конференций по исследуемой проблематике.

Практическая значимость работы. Результаты исследования могут быть использованы учителями математики при обучении детей решению неравенств с модулем в средней школе.

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1.1. Некоторые сведения из истории появления неравенств с модулем

Слово «модуль» произошло от латинского «modulus», что в переводе означает «мера». Считается, что английский математик и философ Роджер Котс, который в свою очередь являлся учеником знаменитого ученого Исаака Ньютона, впервые ввел этот термин.

По другой версии в 1806 году термин «модуль» ввел французский математик Жорж Аргон.

Великий немецкий физик, изобретатель, математик и философ Готфрид Лейбниц также в своих работах и трудах использовал функцию модуля, которую обозначал $mol\ x$.

Не смотря на это, общепринятое и современное значение модуля как абсолютной величины было дано только в 1841 году выдающимся немецким математиком Карлом Вейерштрассом. В начале девятнадцатого века ученые Арган и Коши ввели данное понятие и для комплексных чисел.

На сегодняшний день, так как функция модуля вычисляется очень просто, ее ввели в список стандартных функций фактически всех языков программирования.

Понятия «больше» и «меньше» возникли в связи со счетом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Древние греки пользовались понятиями неравенства в III в. до н. э.. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Иначе говоря, Архимед указал границы числа π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Евклид в своем знаменитом трактате «Начала» приводит ряд неравенств. Он, например, доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического и не меньше их среднего гармонического, т. е. что верно неравенство $\frac{2a\cdot b}{a+b} \leq \quad \overline{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$. В «Математическом собрании» Папы Александрийского (III в.) оказывается, что если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (a, b, c, d), то $ad > bc$.

Однако все эти рассуждения проводили словесно и в большинстве случаев опирались на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенств появились лишь в XVII— XVIII вв. Знаки $<$ и $>$ ввел английский математик Т. Гарриот (1560—1621), знаки $\leq$ и $\geq$ французский математик П. Бугер (1698—1758).

1.2. Психолого-педагогические основы обучения школьников при решении неравенств с модулем

Учение является основным видом деятельности в младшем школьном возрасте, позже, в подростковом возрасте на первый план выходит общение и взаимодействие. Отсюда меняется характер и содержание учебной деятельности [31, с. 18]. Подросток приступает к систематическому овладению основами наук. Процесс обучения становится многопредметным, на место одного учителя приходит коллектив педагогов. К ребенку более старшего возраста предъявляются более высокие требования. Это приводит к изменению отношения к учению. Для школьника среднего возраста учебные занятия стали привычным делом. Очень часто обучающиеся склонны не выполнять «лишние» упражнения, а делают уроки в пределах заданного объёма или даже меньше. В связи с этим, нередко происходит снижение успеваемости. То, что побуждало младшего школьника активно учиться, не играет теперь такой роли, а новые стремления к учению, такие как установка на будущее, дальние перспективы, еще не появились.

Ребенок в возрасте 11-14 лет не всегда осознает роль теоретических знаний, чаще всего он связывает их с личными, узко практическими целями. Часто восьмиклассник не желает и не хочет учить правила, теоремы, формулы математики, так как он уверен, что эти знания не пригодятся ему в будущем. При изучении различных неравенств с модулем нужно на практике объяснять для чего нужен модуль, где понятие модуль встречается людям в повседневной жизни. Затем рассказывать как изучение неравенств может пригодится в дальнейшем. От элементарных примеров переходить к более сложным.

В младшем школьном возрасте дети все указания учителя воспринимают, как порядок действий обязательный для выполнения, у них не возникает вопросов «Для чего это?» и «Зачем?». Что касается подростков, то тут ситуация в корне меняется. Им нужно объяснение «Что? Как? И почему?», а главное «Зачем это нам нужно?». В вопросах сквозит недоумение, а часто и недовольство, иногда даже недоверие к учителю. Чтобы этого избежать, на каждый вопрос учителю следует отвечать.

Однако в подростковом возрасте дети с радостью берутся за изготовление наглядного пособия, активно откликаются на предложение сделать что-либо своими руками. В этом возрасте дети с удовольствием выполняют различные самостоятельные задания и с готовностью берутся за выполнение практических работ. Те, у кого низкая успеваемость активно проявляют себя в выполнении индивидуальных заданий. Здесь учителю полезно подумать о дифференциальном разделении класса с предоставлением каждому задания, которое соответствует уровню подготовки отдельного обучающегося.

Учебные предметы для подростков часто начинают являться особой областью теоретических знаний. В этом возрасте дети узнают множество различных фактов, с удовольствием готовы рассказать о них, выступить перед классом с сообщением или докладом. Не смотря на это, подростков интересуют не сами факты, а их практическая значимость. Также, зачастую мелкие детали не позволяют ребенку выделить главное и сделать необходимое обобщение. Поэтому является целесообразным организовывать уроки, посвященные выступлениям обучающихся по различным темам математики, с последующими дискуссиями и вопросами со стороны слушателей.

Следует также отметить очень кратковременную память школьников [31, с. 35]. Как только дети переходят к изучению новой темы, приобретенные ранее знания и навыки вытесняются. В связи с этим следует на каждом уроке проводить актуализацию знаний.

Если младшие школьники с интересом воспринимают уже готовую информацию, то подростку нужно давать возможность самостоятельно добывать знания. Многие дети подросткового возраста предпочитают избегать дополнительных объяснений, справляться с задачами, не списывая их с доски, часто высказывают свои личные суждения, могут придумать оригинальный пример. В этом возрасте у детей развивается самостоятельность мышления. Подростки предъявляют более высокие требования к рассказу учителя, они ждут доказательности и убедительности, в то время как младшие школьники принимают все на веру.

Резкое поведение, слабый самоконтроль, неумение сдерживать себя очень характерны для области эмоционально-волевой сферы подростка [12, с. 83]. Ребенок за считанные секунды может «взорваться» и впасть в состояние аффекта, если в отношении к нему проявляется несправедливость, зачастую подросток потом жалеет об этом. Обычно такое поведение возникает из-за усталости ребенка. Подросток часто спорит, высказывает возмущение, доказывает свою правоту, бурно реагирует на различные ситуации. Если деятельность вызывает отрицательные чувства у ребенка подросткового возраста, то это приведет к тому, что он попросту не доведет до конца начатое дело. Наоборот, подросток может быть настойчивым, усидчивым, выдержанным, если деятельность вызывает положительные чувства.

В подростковом возрасте дети часто ищут объект для подражания. Обычно он служит для него образцом, критерием оценки поведения других людей. Объект для подражания является эмоционально окрашенным и внутренне принятым образом. Зачастую это выдающиеся люди, яркие, героические личности, о которых он узнает из книг, кино и реже этим идеалом являются близкие люди. Половое созревание оказывает существенное влияние на подростка. Особенностью подросткового возраста является желание быть и считаться взрослым. Дети всеми силами пытаются утвердить свою взрослость, но в то же время ощущения полноценной взрослости у него нет. В связи с этим стремление и желание быть взрослым, потребность в признании его взрослости переживается остро.

В связи с «чувством зрелости» у подростка появляется специфическая социальная активность [12, с. 125], стремление приобщаться к различным сторонам жизни и деятельности взрослых, приобрести их качества, умения и привилегии. Более доступные стороны взрослости: внешний облик и манера поведения, обычно усваиваются в первую очередь.

Стремление быть взрослым ярко проявляется и в сфере взаимоотношений со взрослыми. Часто ребенок протестует и обижается, когда его, «как маленького», опекают, контролируют, наказывают, требуют беспрекословного послушания, не считаются с его желаниями и интересами. Подростку нужно, чтобы взрослые считались с его мнением, взглядами, тем самым претендуя на равноправие со взрослыми.

Таким образом, важнейшим благоприятным условием нормальных взаимоотношений с подростком является такая ситуация, когда взрослые выступают по отношению к подростку в роли старшего друга и товарища, у которого можно многому научиться. Если же старшие продолжают относиться к подростку, как к ребенку, то может возникнуть конфликтная ситуация.

1.3. Различные подходы к определению понятия абсолютная величина. Геометрический смысл модуля. Свойства.

Определение 1. Модулем числа называют расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.

Иногда вместо термина «модуль» используется термин «абсолютная величина» или «абсолютное значение» числа. Обозначается модуль посредством символа | |.

В соответствии с приведенным определением $3 = 3,\ -6 = 6,\ 0 = 0.$

Устанавливая связь между модулем числа и самим числом, получим аналитическую запись определения

Определение 2.

$$a = \begin{matrix} a, \text{если } a > 0, \\ 0, \text{если } a = 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{matrix}$$

Модуль числа может быть определен и как наибольшее из чисел a и $-a$.

Иногда встречается определение модуля через арифметический квадратный корень [39,с. 95].

Определение 3. Модуль числа *a* – это арифметический квадратный корень из квадрата числа a, то есть $a = \overline{a^2}$.

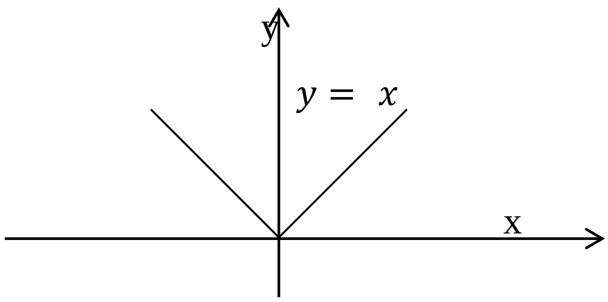


Рис.1. График функции $y = x$.

Понятие модуля обладает простым геометрическим смыслом: $|x|$ есть расстояние от точки *x* до нуля. Более общим образом, $|x - a|$ есть расстояние от точки *x* до точки a.

Давайте рассмотрим несколько элементарных примеров.

Пример 1. Решениями неравенства $|x| < 7$ служат все те x, которые удалены от нуля на расстояние меньшее 7. Они расположены на интервале $(-7; 7)$.

Пример 2. Решения неравенства $|x - 2| \leq 3$ суть все те x, которые удалены от точки 2 на расстояние, не превосходящее 3; они заполняют отрезок $[-1; 5]$.

Пример 3. Решениями неравенства $|x| > 4$ являются все x, удалённые от нуля на расстояние, не меньшее 4. Это объединение двух непересекающихся лучей: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Пример 4. Решениями неравенства $|x + 3| > 5$ являются все те x, которые удалены от точки -3 на расстояние, большее 5. Это объединение двух непересекающихся лучей с выколотыми началами: $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$.

Основные свойства модуля.

Для всех $x, y \in R$.

1. $x \ \geq 0, \ \ x \ = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $-x \ = \ x \ $;
3. $x \cdot y \ = \ x \ \cdot \ y \ $;
4. $\frac{x}{y} \ = \frac{x}{y}, y \neq 0$;
5. $x + y \ \leq \ x \ + \ y \ $;
6. $c \cdot x \ = c \cdot \ x \ $, при $c > 0$;
7. $x \ ^2 = x^2$;
8. $x \ ^n = \ x^n \ $;
9. $a - b \ \geq \ a \ - \ b \ $;
10. $\ a \ - \ b \ \ \leq \ a - b \ $.

Докажем пятое свойство.

Предположим, что существуют такие $x, y \in R$, что $| \ x + y \ |>| \ x \ | +| \ y \ |$.

Возведем левую и правую части неравенства в квадрат (это можно сделать, т.к. обе части неравенства всегда неотрицательны):

$$x + y \ > \ x \ + \ y \ \Leftrightarrow$$

$$x + y^{\ 2} > \ \ x\ +\ y\ ^{\ 2} \Leftrightarrow$$
$$x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + 2 \cdot\ x\ \cdot\ y\ + y^2 \Leftrightarrow$$
$$xy > \ x\ \cdot\ y\ \Leftrightarrow$$
$$xy > \ xy\ ,$$

а это противоречит определению модуля.

Следовательно, таких $x, y \in R$ не существует, а значит, при всех $x,\ y \in R$ выполняется неравенство $x + y\ \le\ x\ +\ y$, ч.т.д.

Докажем шестое свойство.

Воспользуемся свойством №3: $c \cdot y\ =\ c\ \cdot\ y$, а поскольку $c > 0 \Rightarrow c\ = c$, тогда $c \cdot x\ = c \cdot\ x$, ч.т.д.

Докажем девятое свойство.

Если a и b – положительные числа, то их модули совпадают с самими числами. Поэтому $|a - b|\ =\ |a| - |b|$, потому что можно не брать модули вообще и тогда с двух сторон получим $a - b$.

Если a – положительное число, а b – отрицательное, то выражение $a - b$ примет вид $|a\ +\ b|$, что больше, чем $|a| - |b|$.

Если a – отрицательное число, а b – положительное, то имеем

$|-a - b|\ =\ |-(a\ +\ b)|\ =\ |a\ +\ b|$, что больше, чем $|a| - |b|$.

Следовательно $a - b\ \ge\ a\ -\ b$, ч.т.д.

1.4. Виды неравенств с модулем и способы их решения

При изучении темы «Неравенства с модулем» обучающиеся должны знать понятие числового неравенства, понимать, что такое решение неравенства, что значит решить неравенство, а также помнить свойства неравенств. То же самое относится и к системам числовых неравенств.

Свойства числовых неравенств.

1. Если а $> b$, то $b <$ а; наоборот, если а $< b$, то $b >$ а.

2. Если а $> b$ и $b > c$, то а $> c$. Точно так же, если а $< b$ и $b < c$, то а $< c$.

3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$ (и $a - c > b - c$). Если же $a < b$, то $a + c < b + c$ (и $a - c < b - c$). Т. е. можно к обеим частям неравенства прибавлять или вычитать из них одну и ту же величину.

4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$; точно так же, если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$, т. е. можно почленно складывать неравенства одинакового смысла.

Замечание. Нельзя почленно вычитать друг из друга два неравенства одинакового смысла, потому что результат может быть неверным. Например, если из неравенства $11 > 9$ почленно вычесть неравенство $3 > 2$, то получим верное неравенство $8 > 7$. Если из неравенства $11 > 9$ почленно вычесть неравенство $7 > 2$, то полученное неравенство будет неверным.

5. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$, если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$, т.е. можно из одного неравенства почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, при этом нужно оставить знак того неравенства, из которого вычиталось другое.

6. Если $a > b$ и m – положительное число, то $ma > mb$, т.е. можно умножить или разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число (при этом, знак неравенства остается прежним)

Если же $a > b$ и n – отрицательное число, то $na < nb$, т.е. можно умножить или разделить обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, но при этом знак неравенства нужно переменить на противоположный.

7. Если $a > b$ и $c > d$, где $a, b, c, d > 0$, то $ac > bd$ и если $a < b$ и $c < d$, где $a, b, c, d > 0$, то $ac < bd$, т.е. неравенства одного смысла на множестве положительных чисел можно почленно перемножать.

Следствие. Если $a > b$, где $a, b > 0$, то $a^2 > b^2$, и если $a < b$, то $a^2 > b^2$, т.е. на множестве положительных чисел обе части неравенства можно возводить в квадрат.

8. Если $a > b$, где $a, b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ и если $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Существуют различные виды неравенств, содержащих знак модуля. Рассмотрим основные виды и способы решения этих неравенств.

1. По определению модуля через расстояние.

Данный метод можно использовать для решения неравенств следующего вида [7, с. 75]:

1) Неравенство вида $\mathbf{f}\ \mathbf{x}\quad < \boldsymbol{a}$.

Решение равносильно системе, т.е. пересечение решений двух неравенств: $\begin{array}{c} \mathbf{f}\ \mathbf{x}\ > -\boldsymbol{a} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) < \boldsymbol{a} \end{array}$.

Вместо знака < может стоять знак ≤.

Напомним, что:

1. Если $a > 0$, то $(\ f\ \ x\quad < a) \Leftrightarrow (-a < f(x) < a)$.

Примечание. Если $a \leq 0$, то неравенство $f(x)\ < a$ решений не имеет.

2. Если , $a > 0$, то $(\ f\ \ x\quad \leq a) \Leftrightarrow (-a \leq f(x) \leq a)$.

Примечание. Если $a \leq 0$, то неравенство $f(x)\ \leq a$ решений не имеет; неравенство $\mathrm{f(x)}\ \leq \mathrm{a}$ равносильно уравнению $\mathrm{f\ x}\ = 0$.

Пример 1. Решим неравенство $x - 3\ < 1$.

Решение. Имеем: $x - 3\ < 1\ \Leftrightarrow (-1 < x - 3 < 1) \Leftrightarrow (2 < x < 4)$.

Ответ: $x \in (2; 4)$.

Пример 2. Решим неравенство $x^2 - 5x + 5\ \leq 1$.

Решение. Имеем:

$$(\ x^2 - 5x + 5\ \leq 1) \Leftrightarrow \begin{array}{c} x^2 - 5x + 5 \leq 1 \\ x^2 - 5x + 5 \geq -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} 1 \leq x \leq 4 \\ x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{array}.$$

Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4)$.

2) Неравенство вида $\mathbf{f}\ \mathbf{x}\quad > \boldsymbol{a}$.

Решение равносильно совокупности, т. е объединение решений двух неравенств.

Вместо знака > может стоять знак: ≥.

1. Если а > 0, то $(|f(x)| > a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right.$.

Примечание. Если а $= 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| > 0$ совпадает с областью определения функции $f(x)$, исключая такие x при которых $f(x) = 0$, т. е. исключая нули функции $f(x)$.

Если $a < 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| > a$ совпадает с областью определения функции *f(x)*.

2. Если а > 0, то $(|f(x)| \geq a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{array}\right.$.

Примечание. Если $a < 0$, или $a = 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| \geq a$ совпадает с областью определения функции *f(x)*.

Пример 1. $|x - 2| \geq 5$

Решение: $|x - 2| \geq 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 \geq 5 \\ x - 2 \leq -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 7 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [7; +\infty)$.

Пример 2. $|x^2 - 2x - 6| > 9$.

Решение:

$$|x^2 - 2x - 6| > 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 6 > 9 \\ x^2 - 2x - 6 < -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 15 > 0 \\ x^2 - 2x + 3 < 0 \end{array}\right.$$

Второе неравенство системы не имеет решений. Первое неравенство сводится к виду $(x + 3)(x - 5) > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

2. Возведение обеих частей неравенства в квадрат.

Здесь необходимым условием является то, чтобы обе части неравенства были неотрицательны [7, с. 85].

Для того чтобы решить неравенство содержащее модуль, необходимо освободиться от знака модуля. Для этого следует: возвести в квадрат обе части неравенства, решить его. Но не забывать, что при возведении в квадрат появляются лишние корни, поэтому, надо найти ОДЗ и выявить принадлежат ли корни данному условию. Однако необходимо учитывать, что после возведения обеих частей неравенства в квадрат оно должно легко решаться. Такой способ решения применим для неравенств следующего вида:

1) Неравенство вида $\boldsymbol{f(x)} \;\; > \;\; \boldsymbol{g(x)}$.

Оно равносильно неравенству $f(x)\;^2 > \; g(x)\;^2$.

Преобразуем неравенство, получим неравенство $f(x)\;^2 - \; g\;x\;\;^2 > 0 \Leftrightarrow (f\;x\; - g\;x\;)(f\;x\; + g\;x\;) > 0$, которое решается методом интервалов [25, с. 18].

Пример 1. Решите неравенство $2x - 1 \; > \; x + 2$.

Решение.

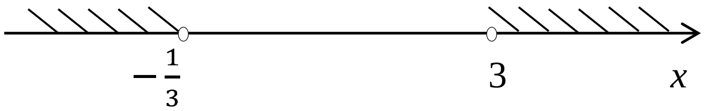
$$2x - 1\;^2 > \; x + 2\;^2 \Leftrightarrow$$

$$(2x - 1)^2 - \; x + 2\;^2 > 0 \Leftrightarrow \; 2x - 1 - x - 2 \;\; 2x - 1 + x + 2 \; > 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 \;\; 3x + 1 \; > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов.

$x > 3$ и $x < -\frac{1}{3}$.



Ответ: $x \in \; -\infty; -\frac{1}{3} \; \cup \; 3; +\infty$.

Пример 2. Решить неравенство $x - 6 \; > \; x^2 - 5x + 9$.

Решение. Неравенство $x - 6\;^2 > \; x^2 - 5x + 9\;^2$ равносильно исходному.

В полученном неравенстве перенесем все члены в одну сторону и применим формулу разности квадратов.

$$x^2 - 5x + 9\;^2 - \; x - 6\;^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 9 - x + 6 \;\; x^2 - 5x + 9 + x - 6 \; < 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 15 \;\; x^2 - 4x + 3 \; < 0.$$

Так как $x^2 - 6x + 15 > 0$ для всех x, то полученное неравенство равносильно $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решим последнее неравенство, используя метод интервалов.

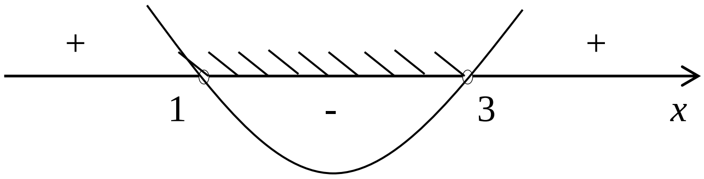
Находим корни уравнения:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$D_1 = 4 - 3 = 1,$$

$$x_1 = 2 + 1 = 3,$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1.$$



$$1 < x < 3.$$

Ответ: $x \in \ \ 1; 3\ \ $.

3. По определению модуля по формуле.

Данный метод удобно применять для решения неравенств с одним знаком модуля, когда способ решения возведения двух частей неравенства в квадрат неприменим.

1) Неравенства вида $\mathbf{f(x)} \ > \boldsymbol{g(x)}$.

Вместо знака > может стоять знак: ≥.

Используя определение модуля, получаем равносильную совокупность систем: $\begin{matrix} f\ \ x\ \ \ge 0, \\ f\ \ x\ \ > g\ \ x \end{matrix}$ или $\begin{matrix} f\ \ x\ \ < 0 \\ -f\ \ x\ \ > g(x) \end{matrix}$

4. Метод промежутков (интервалов)

Модуль легко раскрыть по определению, если в задаче он только один, но встречаются упражнения, где модулей больше одного. В таких случаях, у обучающихся возникают затруднения, так как нужно определить знаки в одном и том же промежутке, но для различных подмодульных выражений, к тому же, нужно еще учесть знаки из самого упражнения. В таких случаях принято использовать метод интервалов [25, с. 25].

Рассмотрим алгоритм решения упражнения методом интервалов:

а) Находим ОДЗ неравенства.

б) Находим точки, в которых функции, стоящие под знаком модуля, равны 0.

в) Полученные точки разделяют ОДЗ на несколько множеств.

г) Определяем знак каждой функции на каждом из полученных множеств. Согласно определению модуля, снимаем знак модуля.

д) Решаем каждое из полученных неравенств.

е) Объединяем полученные множества, получаем ответ..

Пример 1:

Решить неравенство $x-1\ +\ x-2\ +\ x-3\ <6$.

ОДЗ неравенства R.

Находим точки , в которых функции, стоящие под знаком модуля равны 0. Это точки 1, 2 и 3. Следовательно, нужно рассмотреть четыре случая.

1 случай. Берем промежуток $x \le 1$ и определяем знак каждой функции, снимаем знаки модуля.

$$x \le 1,$$
$$1 - x - x + 2 - x + 3 < 6,$$

$$x \le 1,$$
$$-3x < 0,$$

$$x \le 1,$$
$$x > 0,$$

$$0 \le x \le 1.$$

2 случай. Берем промежуток $1 < x \le 2$ и определяем знак каждой функции, снимаем знаки модуля.

$$1 < x \le 2,$$
$$x - 1 - x + 2 - x + 3 < 6,$$

$$1 < x \le 2,$$
$$-x < 2,$$

$$1 < x \le 2,$$
$$x > 2,$$

решений нет.

3 случай. Берем промежуток $2 < x \leq 3$, и определяем знак каждой функции, снимаем знаки модуля.

$$2 < x \leq 3,$$
$$x - 1 + x - 2 - x + 3 < 6,$$

$$2 < x \leq 3,$$
$$x < 6,$$

$$2 < x \leq 3,$$
$$x < 6,$$

$$2 < x \leq 3.$$

3 случай. Берем промежуток $x > 3$, и определяем знак каждой функции, снимаем знаки модуля.

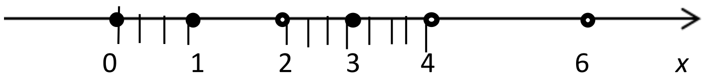
$$x > 3,$$
$$x - 1 + x - 2 + x - 3 < 6;$$

$$x > 3,$$
$$3x < 12;$$

$$x > 3,$$
$$x < 4;$$

$$3 < x < 4.$$

Полученные множества объединяем и получаем ответ.



Ответ: $x \in \ 0; 1 \ \cup (2; 4)$.

Пример 2:

Решите неравенство: $x^2 + 2x - 3 \ + 3(x + 1) < 0$.

Решение. Это задание уже чуть посложнее. Для начала уединим модуль, перенеся второе слагаемое вправо:

$$x^2 + 2x - 3 \ < -3 \ x + 1 \ ,$$

Очевидно, перед нами вновь неравенство вида «модуль меньше», поэтому избавляемся от модуля по уже известному алгоритму:

$$- \ -3 \ x + 1 \quad < x^2 + 2x - 3 < -3 \ x + 1 \ ,$$

Теперь раскроем все скобки в двойном неравенстве:

$$3x + 3 < x^2 + 2x - 3 < -3x - 3,$$

Переходим к системе неравенств:

$$3x + 3 < x^2 + 2x - 3,$$
$$x^2 + 2x - 3 < -3x - 3;$$

$$x^2 + 5x < 0,$$
$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Оба неравенства являются квадратными и решаются методом интервалов. Переходим к уравнению в первом неравенстве:

$$x^2 + 5x = 0;$$

$$x \;\; x + 5 \;\; = 0;$$

$$x_1 = 0; x_2 = -5.$$

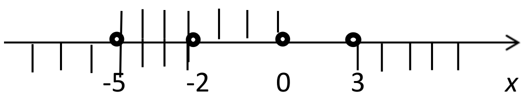
Теперь разберёмся со вторым неравенством системы. Применим теорему Виета:

$$x^2 - x - 6 = 0;$$

$$x - 3 \;\;\; x + 2 \;\; = 0;$$

$$x_1 = 3; x_2 = -2$$

Отмечаем полученные числа на числовой прямой:



Поскольку мы решаем систему неравенств, нас интересует пересечение заштрихованных множеств: $x \in (-5; -2)$. Это и есть ответ.

Ответ: $x \in (-5; 2)$.

Методика использования показала, что такие упражнения могут успешно решать как обучающиеся математического профиля, так и обучающиеся общеобразовательного и гуманитарного профиля, этот способ резко снижает количество ошибок по невнимательности.

Практика обучения девятиклассников способам решения неравенств, содержащих модули, позволила выявить достоинства и недостатки каждого способа, которые для удобства сведены нами в таблицу (см. Приложение 1).

Таким образом, проанализировав достоинства и недостатки каждого из указанных способов, можно с уверенностью сказать, что на мотивационном этапе формирования умений решать неравенства с модулем обучающимся следует показывать все, доступные на данном этапе обучения способы решения, и, главное, на конкретных примерах доказывать, что первым этапом решения является выбор самого эффективного способа.

ГЛАВА II. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

2.1. Анализ обучения неравенств с модулем в УМК по программе основной школы

Рассмотрим программу по математики и выясним в каких классах и темах школьного курса встречается понятие модуль, а также, какие требования предъявляются к знаниям и умениям школьников при изучении «модулей».

Также проанализируем, как излагается тема «модуль» в основных школьных учебниках.

Впервые в школьном курсе математики понятие «модуль» встречается в шестом классе, в разделе «Рациональные числа». Вводится определение модуля числа, его геометрический смысл и свойства.

Мы проанализировали требования, которые предъявляются в программах к знаниям и умениям обучающихся после знакомства с модулем, а также выявили, что должны уметь школьники в результате изучения темы модуль:

- знать определение модуля числа;
- уметь находить модули положительных и отрицательных чисел;
- уметь решать простейшие уравнения, содержащие модуль;
- уметь сравнивать рациональные числа по модулю.

Далее понятие модуля встречается уже во всех важных разделах курса алгебры и начал анализа: квадратный корень, уравнения, неравенства, функции.

В процессе изучения алгебры в 7-9 классах понятие модуля тесно вплетается в другие темы, поэтому четко требования к ученикам именно по теме «модуль» в программе не прописываются. Однако, проанализировав конкретные рабочие программы по алгебре [34, с. 25], можно выделить ряд требований к знаниям и умениям учеников:

- знать определение модуля, геометрический смысл модуля;
- знать свойство модулей противоположных чисел;
- знать аналитическое определение модуля;
- знать свойство квадратного корня $|a|$;
- уметь решать уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля:
  - ✓ решаемые по определению;
  - ✓ вида $|x-a| = |x-b|$;
  - ✓ вида $|x-a| + |x-b| = b-a$, где $b > a$;
  - ✓ решаемые методом интервалов;
  - ✓ решаемые с использованием условия равенства модулей двух выражений;
  - ✓ с параметрами;
  - ✓ логарифмические и тригонометрические.
- уметь изображать на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют уравнению.
- уметь решать неравенства типа $|x| < a$; $|x| > a$.
- уметь решать системы неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля;
- уметь решать неравенства с двойным модулем;
- уметь изображать на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

Анализ школьных учебников по математике.

Проведем анализ действующих учебников математики, алгебры и начал анализа. Выясним, каким образом в школьном курсе математики вводится понятие «модуль», насколько часто в них предлагаются задания, в которых используется это понятие.

Для начала, рассмотрим определение понятия «модуль» в учебниках по математике для 6 класса. Учебники Мордковича А.Г. и Виленкина Н.Я. – это два основных учебника, которые используются в школах.

В учебнике Мордковича А.Г. [28, с.75] определение модуля встречается в следующем виде: «Расстояние от точки $A(a)$ до начала отсчета, т.е. до точки *O(0)*, называется модулем числа a, и обозначают $|a|$.

Далее в этом учебнике рассматривается свойство модуля: $|0| = 0$. После дается объяснение понятия противоположных чисел. Затем в задачах №71,89 предлагается обучающимся сделать вывод о модулях противоположных чисел. Тем самым дети сами должны вывести следующее свойство модуля: модули противоположных чисел равны.

Также в учебнике перечисляются остальные свойства модуля:

- модуль является числом неотрицательным;
- модуль отрицательного числа равен противоположному числу;
- модуль положительного числа равен этому же числу.

В учебнике имеются задания:

- сравнить модули чисел (№68, 90, 91);
- найти модули рациональных чисел (№66, 67);
- решить простейшие уравнения (№95) и простейшие неравенства с модулем (№145, 146);
- вычислить значения выражений, которые содержат знак модуля (№92,96).

В учебнике Виленкина Н.Я. определение модуля дается также через расстояние: «Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $A(a)$».

После определения модуля изучаются все его свойства:

- модуль 0 равен нулю;
- модуль положительного числа равен этому же числу;
- модуль является неотрицательным числом;

- модуль отрицательного числа равен противоположному числу;
- модули противоположных чисел равны.

В учебнике Виленкина Н.Я. [8, с.135] в теме «модуль числа» предлагается решить следующие задачи:

- найти модули чисел (№934, 935);
- найти числа по его модулю (№939, 940);
- сравнить модули чисел (№942);
- вычислить значения выражений, которые содержат знак модуля (№937).

Таким образом, изучив два основных учебника по математике для 6 класса, можно сделать вывод о том, что теоретическое изложение понятия «модуль числа» лучше в учебнике Виленкина Н.Я.. Однако, в учебнике Мордковича А.Г. представлены простейшие уравнения и неравенства с модулем, что является основой для изучения более сложных уравнений и неравенств, рассматриваемых в старших классах.

Теперь рассмотрим учебники по алгебре для 7-9 класса.

Алгебра. 7 класс.

В учебнике Макарычева Ю.Н. [21, с.85] модуль появляется при изучении темы «линейные уравнения». В №130 рассматриваются простейшие уравнения с модулем. Более сложные задания с модулем предлагаются лишь в дополнениях к первой главе (№206-209,217).

Это задания вида:

$|a| = |b|$; верно ли, что $a = b$?

$|x| < |y|$; верно ли, что $x < y$?

$|x| > |y|$; верно ли, что $x > y$?

Являются ли тождествами равенства:

$a)$ $a + 5 = a + 5$;

б) $a^2 + 4 = a^2 + 4$;

в) $|a - b| - |b - a| = 0$;

г) $a + b - a = b$?

В учебнике Алимова Ш.А. [1, с. 108] при изучении темы «Уравнения с одним неизвестным» предлагаются следующие задания:

- решить линейные уравнения с модулем (№83,100), задачи помечены в учебнике как задания повышенного уровня;
- решить уравнения, содержащие знак модуля в обеих частях равенства (№133).

Существует еще один актуальный учебник по алгебре для 7 класса, автор которого Мордкович А.Г. [28, с. 84]. Следует отметить, что это учебное пособие состоит из двух частей: из учебника и задачника.

В учебнике Мордковича А.Г. задания с модулем вовсе не разбираются.

Что касается задачника А.Г. Мордковича, то уже в главе есть следующие задания:

- применить свойства модуля числа и раскрыть модули (№1.50).
- решить уравнения с модулем, причем помимо простейших уравнений, представлены уравнения, содержащие переменную и под знаком модуля и вне его (№4.22-4.25). Например, уравнения $x + |x| + 4 = 0$ или $|5 - 2x| - 2x = x + 3$.

Таким образом, во всех трех учебниках по алгебре 7 класса, рассмотренных нами, встречается крайне мало заданий, содержащих модуль. Наиболее разнообразные задания предлагаются в дополнении к основным главам учебника Макарычева Ю.Н., а в задачнике Мордковича А.Г. представлены интересные, достаточно сложные уравнения с модулем.

Алгебра. 8 класс.

Для восьмого класса нами также рассматривались учебники Мордковича А.Г., Алимова Ш.А. и Макарычева Ю.Н..

В 8 классе модуль впервые появляется в теме «Функция» учебника Макарычева Ю.Н. [22, с.112]. Предлагается решить следующие задачи:

- найти допустимые значения выражений, причем два из выражений содержат в знаменателе переменную под знаком модуля (№194);

- построить графики функций, содержащие в знаменателе переменную под знаком модуля (№249).

В главе «Действительные числа» предлагаются задания на раскрытие знака модуля (№268, 269).

В главе «Арифметический квадратный корень» рассматривается теорема: «При любом значении x верно равенство $\overline{x^2} = x$ ». Хорошо расписано доказательство этой теоремы и примеры ее применения. Далее в учебнике есть различные задачи, для решения которых требуется знание этой теоремы.

В главах «Квадратные уравнения» и «Неравенства» в учебнике Макарычева Ю.Н. [22, с.12] уравнения и неравенства с модулем не рассматриваются.

В учебнике Алимова Ш.А. [2, с. 39] при изучении неравенств рассматриваются следующие задачи:

- решить простейшие неравенства с модулем (№152-164). (рассматривается именно алгебраическое решение таких неравенств);
- определить знак a, если $a \cdot |a| < 0$;
- проверить, справедливо ли тождество $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, и др.
- решить уравнения;
- вычислить корни;
- сравнить иррациональные чисел;
- построить графики функций.

В учебниках по алгебре для 8 класса рассматривается функция $y = |x|$. А также уравнения, содержащие знак модуля.

В 8 классе учебник Мордковича А.Г. используется для обучения на базовом уровне. В разделе «Действительные числа» рассматривается понятие модуля действительного числа. Он определяется следующим образом: «Модулем неотрицательного действительного числа x называют само это число: $|x| = x$; модулем отрицательного действительного числа x называют противоположное число: $x = -x$». Также, в учебнике говорится о применении модуля для оценки иррациональных чисел.

Геометрический смысл модуля определяется формулой: $p(a, b) = |a - b|$.

Также рассматривается функция $y = |x|$, и уравнения содержащие знак модуля, причем уравнения подразумевают решение как аналитическим, так и графическим способом. Однако, уравнения, предлагаемые в данном учебнике довольно просты.

В задачнике А.Г. Мордковича уже в главе в главе «Квадратные уравнения» предлагаются уравнения с модулем различного уровня сложности.

Таким образом, во всех трех учебниках по алгебре 8 класса, рассмотренных нами, встречаются задания, содержащих модуль. На наш взгляд, наиболее разнообразны и интересны задания в учебнике Ш.А. Алимова.

Алгебра. 9 класс.

В учебниках А.Г. Мордковича [30, с. 89] и Ю.Н. Макарычева [23, с. 133] для 9 класса рассматривается решение модульных неравенств с помощью геометрического смысла модуля, предлагаются простые неравенства, такие как $|x - 2| < 3$; $|x + 3{,}2| < 2$.

Также в теме «Системы неравенств» предлагаются задания с модулем, эти задания выделены как задания повышенной трудности.

В обоих учебниках рассматриваются графический и аналитический способы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

В учебнике Ш.А. Алимова [3, с.136] очень мало заданий с модулем.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

- в каждом проанализированном учебнике задания, содержащие модуль, используется для проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения той или иной темы, очень редко предлагаются задания творческого характера, требующие от учащихся применения полученных знаний и умений в нестандартных условиях;

- во всех рассмотренных учебниках не даётся чёткое определение модуля;
- чаще всего модуль встречается при вычислении значений выражений, решении уравнений и неравенств;
- не во всех учебниках рассматривается графический и аналитический методы решения уравнений и неравенств с модулем.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что для реализации разноуровневого изучения темы «модуль» в школьном курсе математики недостаточно пользоваться каким-либо одним учебником.

2.2. Методические особенности изучения темы «уравнения с модулем» на уроках алгебры в 9 классе на базовом и повышенном уровнях

Использование уровневой дифференциации вносит в процесс обучения ряд изменений, которые проявляются в особых методических приемах, применяемых учителем, а также в изменении стиля взаимодействия с учениками [5, с.25]. Разработка и использование таких приемов требует от учителя серьезной работы над содержанием и структурой изучаемого материала, так как уровневый подход предполагает вариативность глубины и темпа изучения определенной темы, различие учебных заданий, выбор разных видов деятельности, дифференциацию помощи со стороны учителя [13, с.10], [14, с.106].

Соответствующая работа, на наш взгляд, должна проводиться в каждом классе на всех ступенях школьного обучения. Рассмотрим некоторые методические приемы и средства реализации уровневого подхода при изучении темы «Решение неравенств с модулем», учитывая при этом различные уровни математической подготовки учащихся [18, с.36], [20, с.56].

В ходе исследования нами были выделены основные цели обучения теме «Неравенства с модулем».

Цель 1: приобретение УИ, формирование логических ПУД.

Цель считается достигнутой, если Вы на уровнях:

- первом:
  - ✓ *сравниваете* неравенства по признаку: неизвестная входит в квадрате;
  - ✓ *составляете* схему определения понятия «неравенство с модулем» с использованием учебника и набора упражнений;
  - ✓ *сравниваете* решение однотипных неравенств с модулем.
- втором:
  - ✓ *составляете* схему определения понятия «неравенство с модулем» с использованием набора объектов;
  - ✓ *выполняете* анализ и выявляете преобразования для решения неравенств с модулем, с использованием помощи;
  - ✓ *обобщаете* решение неравенств с модулем.
- третьем:
  - ✓ *даёте* определение понятию «неравенство с модулем», *составляете* классификацию типов неравенств с модулем; набор неравенств;
  - ✓ *выполняете* анализ и выявляете преобразования, нужные для решения неравенств с модулем;
  - ✓ *составляете* приёмы решения неравенств с модулем с помощью указаний.

Цель 2: контроль усвоения теории.

Цель считается достигнутой, если Вы на уровнях:

- первом:
  - ✓ *знаете определения:* 1) неравенство с модулем первой степени и второй степени; 2) приемы раскрытий знака модуля (по определению модуля через геометрический смысл, возведение обеих частей выражения в квадрат); 3) различные подходы к определению модуля числа и модуля

выражения; 4) способы выполнения проверки; 5) приемы решения неравенств с модулем первой и второй степени; 6) процедуру анализа вида выражения;

- ✓ *приводите примеры* в соответствии с определениями;

- втором:

- ✓ *знаете определения*: 1) приемы раскрытий знака модуля (обобщение раскрытия модуля по определению модуля через геометрический смысл, возведение обеих частей выражения в квадрат, используя определение модуля выражения); 2) классификацию неравенств с модулем определения; 3) решение неравенств с модулем методом интервалов; 4) формулу для нахождения дискриминанта, если 2 коэффициент – чётный;

- ✓ *приводите примеры* в соответствии с определениями;

- третьем:

- ✓ *знаете* 1) методы решения рациональных неравенств с модулем первого и второго порядков;2) все приемы раскрытия знака модуля

- ✓ *понимаете* мировоззренческое значение неравенств с модулем.

Цель 3: применение знаний и умений.

Цель считается достигнутой, если Вы на уровнях:

- первом:

- ✓ *умеете*: а) использовать основные преобразования для решения простейших неравенств с модулем в соответствии со стандартами; б) раскрывать знак модуля в простейших неравенствах первого и второго порядков одним способом.

- втором:

- ✓ *умеете:* а) использовать все преобразования и способы для решения простейших неравенств с модулем; б) раскрывать знак модуля в неравенствах первого и второго порядков двумя способами.

- третьем:

- ✓ *умеете* а) использовать все преобразования и способы для решения простейших неравенств с модулем; б) раскрывать знак модуля в дробно-рациональных неравенствах первого и второго порядков двумя способами, обоснованно выбирать наиболее рациональный метод раскрытия; в) самому составлять неравенства с модулем нужного уровня сложности;

Цель 4: формирование КУД.

Цель считается достигнутой, если Вы умеете:

- ✓ *работать* в группе, оказывать взаимопомощь;
- ✓ *осуществлять* взаимоконтроль и взаимопроверку на всех этапах учебно-познавательной деятельности (УПД) по выполненным заданиям предыдущих уровней с обоснованием;
- ✓ *оказывать* помощь товарищам, работающим на предыдущих уровнях;
- ✓ *осуществлять* поиск информации для подготовки письменного сообщения и устного выступления в соответствии с изучаемой темой, используя правила коммуникативного взаимодействия.

Цель 5: формирование общих ПУД и РУД

Цель считается достигнутой, если Вы умеете:

- ✓ *выбирать* уровень освоения темы и сформулировать цели своей учебной деятельности;
- ✓ *осуществлять* самопроверку с использованием образцов, алгоритмов и приёмов;
- ✓ *составлять* контрольную работу для своего уровня подготовки;
- ✓ *оценивать* свою итоговую деятельность по данным объективным критериям; по собственным критериям, сравнивая их с объективными критериями;
- ✓ *делать* выводы о дальнейших действиях, планировать коррекцию учебно-познавательной деятельности

УИ - учебная информация; ПУД – познавательные; КУД – коммуникативные; РУД – регулятивные учебные действия.

В процессе исследования нами была разработана учебная рабочая программа по математике (фрагмент).

Учебная рабочая программа по математике (фрагмент).

Условные обозначения: Ц 1 – Ц 5 – цель 1 – 5, ДЗ – домашнее задание, П-1 - практикум 1, Д-1 – диагностика 1, К-1 – коррекция 1.

№ уро-ков	Раздел, тема урока	Форма урока; форма обучения	Предметные и метапредметные результаты
1 - 9	Название темы Средства обучения	Уроки: семинар, практикум, лекция, др. Фронтальная, индивидуальная групповая формы обучения	Ц 1: усваивание учебной информации и развитие интеллектуальных возможностей при изучении понятий, теорем, типов и классов задач; Ц 2: контролирование приобретенных теоретических знаний, таких как математические понятия, теоремы, различные типы и классы задач; Ц 3: использование знаний обучающихся при решении математических и учебных задач; Ц 4: совершенствование коммуникативных умений через включение в групповую работу и взаимопомощь, организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на всех этапах УПД;

			Ц 5: формирование организационных навыков, таких как целеполагание, планирование, реализация плана, саморегуляция УПД.
1	Классификация неравенств с модулем первой и второй степени (таблица обобщения и систематизации видов неравенств с модулем Т-1)	Урок смешанного типа Фронтально-индивидуальная	Ц 1: совершенствование познавательных логических УУД; Ц 2: умение находить ошибки в решении задач своего уровня сложности; решать задачи своего уровня сложности; Ц 3: в соответствии таблицей целей; Ц 5: введение в тему, постановка и формулирование целей своей учебной деятельности;
2	Приемы раскрытия знака модуля в неравенствах (по определению, через геометрический смысл, возведение обеих частей в квадрат) (алгоритмические предписания для	Практикум Фронтально-индивидуальная работа	Ц 2, 3: уметь использовать предписания для решения типов задач своего уровня сложности, составлять задачи, аналогичные данным, обратные задачи и решать их; Ц 4: в соответствии таблицей целей; Ц 5: в соответствии таблицей целей (в качестве ДЗ);

	каждого метода раскрытия знака модуля в неравенствах)		
3	Приемы раскрытия знака модуля в неравенствах (метод интервалов) (алгоритмические предписания, решение прототипов задач к Д-1)	Практикум Фронтальная и парная формы	Ц 2, 3: использовать предписания для решения типов задач своего уровня сложности, составлять задачи, аналогичные данным, обратные задачи и решает их; Ц 4: в соответствии таблицей целей; Ц 5: в соответствии таблицей целей (в качестве Д1);
4	Неравенства с модулем первой и второй степени (Решение заданий трех уровней сложности, контроль знаний - Д-1)	Урок смешанного типа Парное взаимообучение Фронтально-индивидуальная работа Контроль Д-1	Ц 2: в соответствии таблицей целей; Ц 3: в соответствии таблицей целей; Ц 4: в соответствии таблицей целей; Ц 5: в соответствии таблицей целей (в качестве Д-1);
5	Методы решения неравенств с модулем первой и второй степени (метод замены, метод разложения на множители)	Урок смешанного типа Фронтально-индивидуальная Коррекция К-1	Ц 1- 5

	(алгоритмические предписания, решение прототипов задач к Д-2)		
6	Методы решения неравенств с модулем первой и второй степени (метод замены, метод разложения на множители) (Решение заданий трех уровней сложности, контроль знаний - Д-2)	Практикум Фронтально-индивидуальная работа Парное взаимообучение Контроль Д-2 (для 2-го и 3-го уровня сложности)	Ц 2- 5 (в соответствии с таблицей целей).
7	Решение разных задач по теме: подготовка к контрольной работе (Решение заданий трех уровней сложности, повторение видов неравенств помощью систематизационных таблиц)	Урок смешанного типа Фронтально-индивидуальная	Ц 2 – 4 (в соответствии с таблицей целей); Ц 5: делать выводы о качестве собственных знаний, необходимых для выполнения контрольной работы.
8	Контрольная работа	Практикум Индивидуальная	Ц 2, 3, 5: выбирать задачи своего уровня сложности , решать их, проводить

			самопроверку; делать выводы о качестве собственных знаний, необходимых для выполнения контрольной работы.
9	Урок коррекции и рефлексии	Рефлексивный семинар Индивидуальная, парная (взаимопомощь)	Ц 2, Ц 4: уметь анализировать собственные ошибки с помощью товарища и исправлять их; Ц 5: умение делать выводы о результатах своей деятельности; планировать коррекцию учебной познавательной деятельности.
Внеурочная самостоятельная деятельность:			
I. Тематика для подготовки рефератов, выступлений на конференцию, математический вечер, декаду математики и др. (по итогам изучения темы, курса за триместр, за год): 1) Решение уравнений с модулем графическим методом. 2) Решение неравенств с модулем с параметром. 3) Самостоятельно выбранная тема. II. Тематика долгосрочных проектов по разделу: 1) Решение систем неравенств с модулем. 2) Использование нестандартных приемов при решении неравенств с модулем.			

В дополнение к учебной программе нами была разработана карта изучения темы «Неравенства с модулем» для удобства и наглядности.

Карта изучения темы «Неравенства с модулем»

I. Логическая структура и цели изучения темы (таблица целей)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ц 1- 5	**Ц 2 -5**	**Ц 2 -5**	**Ц2 -5**	**Ц 1 - 5**	**Ц 2-5**	**Ц 1,5**	**Ц2,3,5**	**Ц 2,4**
Т-1	П	П	П Д-1	Т-2 К-1	П Д-2	Подготовка к КР Т-1 Т-2	Контрольная работа	Урок коррекции и контроля

I. Блок актуализации знаний учащихся.

Знать: тождественные преобразования первой и второй групп, определения: рациональных выражений, многочлена первой (второй степени) степени, методы решения неравенств (метод замены, метод разложения на множители, метод интервалов), определение модуля числа, его геометрический смысл.
Уметь: решать линейные и квадратные неравенства, вычислять модуль числа.

II. Предметные результаты: уметь решать неравенства с модулем, используя понятия: определение «неравенство с модулем»; способы решения неравенств с модулем (с помощью раскрытия знака модуля по определению, по геометрическому смыслу; с помощью возведения обеих частей уравнения в квадрат, метода интервалов).

III. Образцы заданий итоговой контрольной работы

1 уровень	Баллы	2 уровень	Баллы	3 уровень	Баллы
1) Решить неравенства с модулем: а) $-x-2 \leq 2$; б) $\mathrm{x}+7>$	1	1) Решить неравенства с модулем: а) $x^2 - x - 0{,}25 > 0$; б) $3x^2 - x <$	2	1) Решите неравенства: а) $\frac{4x-3}{3x-4} \leq \frac{1}{4-3x}$; б) $(x-1)(x-2)(x-3) > (1-$	2

8 ; в) $x^2 - 2x <$ $x^2 - 2x$; г) $x^2 - 5x \le$ $5x - 9$. 2)Решите неравенства, используя метод замены или метод интервалов: 1) $x - 1$ $> 2x + 2$; 2) $x - 3$ $\le x - 5$ $- 5$.	2	$8 + x$; в) $2x + 1 \ge$ $x - 1$; г) $x - 8x^2 \le$ $5x - 9$. 2)Решите неравенства, используя метод замены или метод интервалов: 1) $7\ 2 - 3x -$ $2\ 3x - 1 >$ $4 + 3x$; 2) $x^2 + 2x -$ $2x + 1 \ge$ $x^2 - x$.	2	$x)(2 - x)(3 - x)$; в) $x^2 - 3x + 1 \ge$ 1; г) $x^2 + 4x - 3 -$ $7x + 11 < 0$. 2)Решите неравенства, используя метод замены или метод интервалов: 1) $x + 1 -$ $x - 3 \le x$; 2) $\frac{x^2 - x - 12}{x - 3} > 2$.	3

IV. Средства обучения теме.

1) Приём решения различных типов неравенств с модулем;

2) Приём решения неравенств с модулем методами интервалов, замены, разложения на множители;

4) Приём саморегуляции при выполнении преобразований и решении неравенств.

V. Темы индивидуальных заданий.

1) Биквадратные уравнения.

2) Способы устного решения квадратных уравнений.

3) Метод выделения полного квадрата.

4) Биография Франсуа Виета.

5) Самостоятельно выбранная тема.			
VI. Метапредметные результаты: перечень учебных действий (умений) для освоения темы			
Познавательные УУД	**Регулятивные УУД**	**Коммуникативные УУД**	**Личностные УУД**
Сравнение, обобщение, конкретизация, анализ; составление схемы определения понятия, подведение под понятие; постановка и решение проблемы при составлении задачи	Выбор и принятие целей, составление плана, самоконтроль, самооценка, соотнесение своих знаний с той учебной информацией, которую нужно усвоить; приёмы саморегуляции	Взаимоконтроль, взаимопроверка, распределение обязанностей в группе, умение слушать, выступать, рецензировать, писать текст выступлений	Рефлексия собственной деятельности

В ходе исследования мы разработали систематизационную таблицу, которая позволяет обучающимся обобщить различные методы решения неравенств с модулем.

Т-1. Виды неравенств с модулем и способы их решения.

Вид неравенств с модулем	$f\ x > a$	$f(x) < a$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) < g(x)$ $f(x) > g(x)$
Примеры	$5x - 7 > 3$	$3x^2 - 5 < 8$	$5x - 7 > 4x^2$	$3x^2 - 5 < 8x + 5$	$3x^2 - 5 < 8x + 5$
Способы решения	Запись решения в общем виде				
1. Раскрытие модуля (геометрический смысл)	$f\ x > a$ или $f\ x < -a$	$f\ x < a$ $f\ x > -a$	Обобщение метода $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$	Обобщение метода $f\ x < g(x)$ $f\ x > -g(x)$	
2. Возведение обеих частей неравенства в квадрат			$f^2(x) > g^2(x)$ $g\ x \geq 0$	$f^2\ x < g^2(x)$ $g\ x \geq 0$	$f^2(x) > g^2(x)$ $g\ x \geq 0$ Или $f^2\ x < g^2(x)$ $g\ x \geq 0$
3. Раскрытие модуля (по определе			$f\ x > 0$ $f\ x > g\ x$ или $f\ x < 0$ $-f\ x < g(x)$	$f\ x > 0$ $f\ x < g\ x$ или $f\ x < 0$ $-f\ x > g(x)$	

нию)					
4. Метод интервалов	Замечание: применяется, когда в неравенстве два и более знаков модуля.				

Также нами разработаны проверочные работы для диагностики уровня обученности и дальнейшей коррекции усвоения знаний обучающимися.

Образцы проверочных работ для диагностики и коррекции полученных знаний по теме «Решение уравнений и неравенств с модулями».

Д-1. Решение неравенств с модулями.

1 уровень	Баллы	2 уровень	Баллы	3 уровень	Баллы

1) Решите неравенства: а) $2x-3\ \ > 7$; б) $3x+5\ \ < 6-2x$; в) $5x+2\ \ \geq\ 3-3x$; г) $x\ x\ \ +8x-7 \leq 0$. 2) Решите неравенство методом интервалов: $2x+1\ \ +\ \ x\ +\ 3\ \ \leq 4$.	1 2	1) Решите неравенства: а) $x^2-x-5\ \ > 1$; б) $x+3\ \ < x^2+x+6$; в) $x^2-2\ x-1\ \ \geq 2$. г) $x\ \ +2\ \ \leq 2$. 2) Решите неравенство методом интервалов: $x\ +\ x-\ 2\ +\ 2\ x-5\ \ \geq 6$.	2 2	1) Решите неравенства: а) $x+3\ \ > x^2+x+6$; б) $x-\ x-\ x-1\ \ \ < 0{,}5$; в) $x\ x-1\ -2x\ \ \leq x^2-2$; г) $\frac{x^2+5x-6}{x-2} \geq 2$. 2) Решите неравенство методом интервалов: $x^2-3x+2\ +\ x^2-5x+6\ \ > 2$.	3 2

Д-2. Методы решения неравенств с модулем.

1 уровень	Баллы	2 уровень	Баллы	3 уровень	Баллы
1) Решите неравенства методом замены: а) $x^2-\ x\ \ -2 > 0$; б) $x^2-4\ x\ \ -12 \leq 0$;	1	1) Решите неравенства методом замены: а) $2(x-1)^2 +\ x-\ 1\ \ -1 > 0$; б) $x^2+3\ x\ \ \geq 10$; 2) Решите	2	1) Решите неравенства методом замены: а) $\frac{2\ x-1\ -1}{3\ x-1\ -2} \leq 1$; б) $x^2+\ \ x\ -5\ \ \ x\ +7\ \ > 0$;	3

2) Решите неравенство методом интервалов: $x+1\ +$ $x\ -1\ > 2.$	2	неравенство методом интервалов: $x\ -2\ x+1\ +$ $3\ x+2\ < 4.$	2	2) Решите неравенство методом интервалов: $\frac{3}{x+3\ -1} >\ x+2\ .$	2

В процессе изучения темы «Неравенства с модулем» может быть использован банк заданий для внеаудиторной работы (см. Приложение 2), который позволяет обучающимся выбирать нужный уровень сложности.

В ходе исследования нами были разработаны методические рекомендации обучения теме «Неравенства с модулем» и применены в учебном процессе.

Рассмотрим, как происходит формирование универсальных учебных действий на одном из уроков алгебры в 9 классе по теме «Линейные и квадратичные неравенства с модулем».

Тема урока «Линейные и квадратичные неравенства с модулем»

Тип урока: урок обобщения и систематизации нового материала.

Цель урока: осознать, систематизировать и упрочить знания по данной теме, выработать умение самостоятельно применять знания, осуществлять их перенос в новые условия.

Формируемые УУД:

Познавательные: анализ, сравнение, аналогия, использование знаковой системы, осознанное построение речевого высказывания, подведение под понятие.

Регулятивные: выбор и принятие целей, составление плана, самоконтроль, самооценка, соотнесение своих знаний с той учебной информацией, которую нужно усвоить; приёмы саморегуляции.

Коммуникативные: взаимоконтроль, взаимопроверка, распределение обязанностей в группе, умение слушать, выступать, рецензировать, аргументация своего мнения.

Личностные: рефлексия собственной деятельности.

Средства обучения: компьютер, классная доска, проектор, презентация, учебник «Алгебра. 9 класс» под редакцией Мордковича А.Г.

План урока.

1. Организационный этап — 2 мин
2. Повторение теоретического материала — 8 мин
3. Этап всесторонней проверки знаний — 20 мин
4. Этап обобщения и систематизации изученного материала — 8 мин
5. Этап информации учащихся о домашнем задании и инструктаж к его выполнению — 5 мин
6. Этап подведения итогов урока — 2 мин

Ход урока.

I. Организационный этап.

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II.Повторение теоретического материала.

Для актуализации знаний полезно провести следующий теоретический опрос (см. Приложение 3).

После заполнения таблицы осуществить проверку: на обороте доски заранее подготовить ответы, соседям по парте обменяться своими работами. Критерии оценивания: 5 баллов – безошибочное выполнение всех заданий; 4 балла – 1или 2 ошибки; 3 балла – 3 или 4 ошибки; 2 балла – 5-7 ошибок.

III. Этап всесторонней проверки знаний.

Выполните следующие задания:

1.Упростите выражение $|x-5|-6$ при $x< 2$.

2. Решите уравнения: а) $|2x+3| = 5$;

б) $|5x-1| = 3-\overline{19}$.

3. Решите неравенство $|x-7| \geq 4$.

4. Решите неравенство $|x+1| + |x-2| + |x-3| < 3x - 9$.

Ответы: 1) $-x-1$; 2) а) 1;-4; б) корней нет; 3) $(-\infty; 3) \cup (11; +\infty)$; 4) $(-\frac{13}{6}; 3)$.

IV. Этап обобщения и систематизации изученного материала.

Весь изученный теоретический материал обобщаем и систематизируем в виде таблицы, таблицу заносим в справочник и сохраняем до экзамена в новой форме.

V. Этап информации учащихся о домашнем задании и инструктаж к его выполнению.

На дом вам предложено решить задания трех уровней сложности. Все аналогичные примеры были разобраны на предыдущих уроках. (см. Приложение 2).

VI Этап подведения итогов урока.

Подвести итоги урока: что получилось, над чем надо ещё поработать, тема очень важна для экзамена; выставить оценки обучающимся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модуль – одна из самых интересных и многогранных тем в математике. При изучении материалов вступительных экзаменов (тестовые задания ЕГЭ и сборники для поступающих в Вузы), стало ясно, что многие из них содержат задания с модулем, но, эти задачи либо мало, либо вообще не представлены в учебниках для средних школ.

Завершая рассмотрение различных способов решения неравенств, содержащих знак модуля, еще раз отметим тот важный факт, что ни один из них не является универсальным и для получения наилучших результатов необходимо добиваться того, чтобы обучающиеся овладели как можно большим количеством методов решения, оставляя право выбора решения за собой.

Мы работали над проблемой обучения решению неравенств в средней школе. В результате изучения данной проблемы были решены поставленные перед нами задачи:

1. Изучили определение понятия абсолютная величина, геометрический смысл и ее свойства.

Аналитическое определение модуля:

$$\mathrm{a} = \begin{matrix} \mathrm{a}, \text{если } \mathrm{a} > 0, \\ 0, \text{если } \mathrm{a} = 0, \\ -\mathrm{a}, \text{если } \mathrm{a} < 0. \end{matrix}$$

Геометрический смысл: $|\mathrm{x}|$ есть расстояние от точки x до нуля. Более общим образом, $|\mathrm{x} - \mathrm{a}|$ есть расстояние от точки x до точки a.

Основные свойства модуля.

Для всех $x, y \in R$. $x \ \geq 0$, $x \ = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $-x \ = \ x$; $x \cdot y \ = \ x \cdot y$; $\frac{x}{y} \ = \frac{x}{y}, y \neq 0$; $x + y \ \leq \ x \ + \ y$; $c \cdot x \ = c \cdot \ x$, при $c > 0$; $x^{\ n} = \ x^n$; $a - b \ \geq \ a \ - \ b$; $a \ - \ b \ \ \leq \ a - b$.

2. Определили психолого-педагогические основы обучения школьников при решении неравенств с модулем.

В школьном обучении учебные предметы начинают выступать для подростков как особая область теоретических знаний. В то же время подросток стремится к самостоятельности в умственной деятельности. Но при встрече с трудностями возникают сильные отрицательные чувства, которые приводят к тому, что школьник не доводит до конца начатое дело. Учитывая это, следует разбить теоретический и практический материал при изучении темы «Неравенства с модулем» на различные уровни сложности, что мы и сделали.

3. Рассмотрели различные виды неравенств с модулем и способы их решения.

Виды неравенств: f x $< a$, f x $> a$, $f(x) > g(x)$, f(x) $> g(x)$.

Основные способы решения неравенств с модулем: метод последовательного раскрытия модулей, метод интервалов, метод решения при помощи зависимостей между числами, их модулями и квадратами этих чисел, геометрическая интерпретация модуля.

4. Изучили состояние и перспективы развития темы «Неравенства с модулем» по отношению к школе.

Мы изучили различные школьные учебники по математики. В каждом проанализированном учебнике задания, содержащие модуль, используются для проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения той или иной темы. Очень редко предлагаются задания творческого характера, требующие от обучающихся применения полученных знаний и умений в нестандартных условиях. Не во всех учебниках рассматривается графический и аналитический методы решения уравнений и неравенств с модулем.

5. Обосновали и разработали методику обучения теме «Неравенства с модулем» для уроков алгебры в 9 классе.

Цель внедрения данной методики заключается в стремлении повысить качество умения решать неравенства, содержащие абсолютную величину. Обучающиеся с помощью этой методики должны понять, что к каждому неравенству можно подобрать наиболее эффективный метод решения. На наш взгляд, это приведет к повышению качества обученности решению неравенств с модулем.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: систематическое использование различных способов для решения неравенств, содержащих абсолютную величину, приведет не только к повышению интереса к математике, повышению творческой активности школьников, но и повысет уверенность детей в собственных силах, так как у них будет иметься возможность выбора того способа решения, который наиболее эффективен в каждом конкретном случае.

В ходе данного исследования мы пришли к выводу, что вполне реально на уроках выделить время для подготовки обучающихся к решению неравенств с модулем. Это возможно осуществить следующим способом: внедрить технику решения неравенств с модулем непосредственно после прохождения соответствующих тем решения линейных и квадратных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А. Алгебра. Учебник для 7 класса. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с.

2. Алимов Ш.А. Алгебра. Учебник для 8 класса. – М.: Просвещение, 2007. – 195 с.

3. Алимов Ш.А. Алгебра. Учебник для 9 класса. – М.: Просвещение, 2010. – 202 с.

4. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / под. ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.

5. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения (Общедидактический аспект). – М.: Педагогика, 1997. – 225 с.

6. Бородин. А. И. Биографический словарь деятелей в области математики. – М.: Просвещение, 1979. – 167 с.

7. Боженкова Л.И. Алгебра в схемах, таблицах, алгоритмах: Учебные материалы. Калуга: КГПУ, 2012. – 75 с.

8. Виленкин Н.Я. Математика. Учебник для 5 класса. – М.: Мнемозина, 2010. – 225 с.

9. Виленкин Н.Я. Математика. Учебник для 6 класса. – М.: Мнемозина, 2010. – 235 с.

10. Голубев В. А. Школа решения нестандартных задач. Занятие 5. Сумма модулей// Математика. – 2005. - №12. - с.41-48. 1

11. Данилюк А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Коцепция духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России. – М.: Просвещение, 2009. – 24 с. – (Стандарты второго поколения).

12. Добрынин Н.Ф. Возрастная психология: Курс лекций. - М.: Просвещение, 1965. - 296 с.

13. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие. – М.: Педагогика, 1989. – 345 с.

14. Есипов Б.П. Самостоятельная работа учащихся на уроке. М.: Просвещение, 1961. – 118 с.

15. Козлова В.В., Кондакова А.М. Фундаментальное ядро общего образования:.. – М.: Просвещение, 2009-78 с.

17. Колягин Ю.М., Луканкин Г. Л. И др. Методика преподавания математики в школе: Частные методики. - М.: Просвещение, 1977.- 315 с.

18. Кочагин В.В., Кочагина М.Н. Тематические тренировочные задания // Математика. – 2008. - № 3. – с.15-18.

19. Крамов В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. – М.: Просвещение, 1994. – 450с.

20. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике/Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. - 10-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2007. - 624с.

21. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Учебник для 7 класса. – М.: Просвещение, 2009. – 180 с.

22. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Учебник для 8 класса. – М.: Просвещение, 2008. – 193 с.

23. Макарычев Ю.Н. Алгебра. Учебник для 9 класса. – М.: Просвещение, 2011. – 192 с.

24. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики. Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 2002. – 187 с.

25. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б. и др. Алгебраический тренажер. – М.:Илекса. - 2005. -125 с.

26. Мерзляк А.Г. Методические рекомендации – М.:Илекса. - 2005. -110 с.

27. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987.- 435 с.

28. Мордкович А.Г. Алгебра, учебник для 7 класса. 2 часть. - М.: Мнемозина, 2011. - 85 с.

29. Мордкович А.Г. Алгебра, учебник для 8 класса. 2 часть. - М.: Мнемозина, 2011. - 92 с.

30. Мордкович А.Г. Алгебра, учебник для 9 класса. 2 часть. - М.: Мнемозина, 2012. - 87 с.
31. Мухина В.С. Детская психология. - М.: Апрель-Пресс, 1999. - 352 с.
32. Онищук В.А. Урок в современной школе. – М.: Просвещение, 1981 г.
33. Примерные программы по математике. – М.: Просвещение, 2010. -67с. – (Стандарты второго поколения).
34. Примерные программы по учебным предметам. Математика 7 - 9 классы. – М.: Просвещение, 2011.
35. Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев: Математика, 5 – 11кл. / Сост. Мордкович А.Г. – М.: Мнемозина, 2012. – 75 с.
36. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения : учебно-методическое пособие. - М.: Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2005 г, - 144 с.
37. Тишин В. И., Математика для учителей и учащихся: рациональные алгебраические уравнения/ Тишин В. И. --- п. Комаричи, 2002. --- 167с.
38. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с. – (Стандарты второго поколения) .

Приложение 1

Достоинства и недостатки способов решения неравенств с модулем

Способы	Достоинства	Недостатки
Метод последовательного раскрытия модулей	1) Нахождение условия раскрытия одного модуля, можно пользоваться им для раскрытия других модулей, при этом выиграть время при решении задачи. 2) Последовательные действия, направленные на поиск ответа, позволяют контролировать и проверять промежуточные результаты.	Решая некоторые задачи, можно потерять много времени, последовательно раскрывая каждый модуль.
Метод интервалов	Считается самым эффективным способом, так как сопровождается относительно небольшим объемом работы.	В процессе нахождения концов интервалов может возникнуть ситуация, когда соответствующее уравнение либо вызывает серьезные затруднения при определении корней, либо недоступно школьнику на данном этапе обучения.

Метод решения при помощи зависимостей между числами, их модулями и квадратами этих чисел	В некоторых случаях применение данного способа позволяет решать уравнения определенного вида на более раннем этапе.	Иногда при выборе этого способа получается довольно громоздкое решение. Бывает, что решение сводится к уравнению, недоступному для школьника на данном этапе обучения.
Геометрическая интерпретация модуля	Перевод алгебраической задачи на геометрический язык часто позволяет избежать громоздких решений.	Этим способом можно решить неравенства определенного вида.

Приложение 2

Задания для внеаудиторной работы обучающихся по теме «Решение неравенств с модулем»

Модуль

Раскрыть следующие модули:

1) $\pi - 3$ 5) x^2

2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 6) $x + 1$

3) $1 - \sqrt{2}$ 7) $x^2 - x + 0{,}25$

4) $\sqrt{5} - 2$ 8) $x^2 + 2x + 2$

Решить неравенства, содержащие выражения под знаком модуля

1) $|x| < 10$
2) $|2x - 3| < 5$
3) $|x^2 + 5x| \le 6$
4) $|x^2 - x - 3| < 9$
5) $|x^2 + 3x| \le x + 4$
6) $|x^2 - 6x + 8| < 4x - x^2$
7) $|x - 6| < x^2 - 5x + 9$
8) $|x| \ge 7$
9) $|2x + 1| \ge 1$
10) $|3x - 5| > 9x + 1$
11) $|x^2 + 3x| \ge 2 - x^2$
12) $|5x - 3| > x^2 - x - 2$
13) $|x^3 - 1| \ge 1 - x$
14) $|3x - 2| > |x^2 + 1|$
15) $|x^2 + x - 2| > |x + 2|$
16) $|x + 4 - x^2| \le |x^2 - 5x + 4|$
17) $|24x^2 - 39x - 8| \le |18x^2 - 25x + 32|$
18) $|x + 2| < |x - 2|$
19) $|3 + x| \ge |x|$
20) $|2x^2 + x - 1| > |x + 1|$

Приложение 3

Теоретический опрос по теме: «Модули»

Вопрос	Возможный вариант ответа
1) Сформулируйте аналитическое определение модуля.	Модулем числа a называется само число a, если $a > 0$, число *(-a)*, если $a < 0$, и нуль, если $a = 0$, т.е. $a \;=\; \begin{array}{l} a, \text{если } a > 0, \\ 0, \text{если } a = 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{array}$
2) Геометрическая интерпретация модуля.	а) Модулем числа *а* называется расстояние от начала отсчёта до точки с координатой a. б) Модуль разности чисел *а* и b есть расстояние между точками a и b числовой оси, т. е. $a - b \;= p(a, b)$.
3) Перечислите свойства модуля.	1. $x \;\geq 0, \;\; x \;= 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2. $-x \;=\; x$; 3. $x \cdot y \;=\; x \;\cdot\; y$; 4. $\frac{x}{y} \;= \frac{x}{y}, y \neq 0$; 5. $x + y \;\leq\; x \;+\; y$; 6. $c \cdot x \;= c \cdot\; x$, при $c > 0$; 7. $x \;^2 = x^2$; 8. $x \;^n = \; x^n$; 9. $a - b \;\geq\; a \;-\; b$; 10. $a \;-\; b \;\leq\; a - b$.
4) Перечислите приёмы решений неравенств с модулем.	Разбор случаев с применением аналитического определения модуля, применение геометрической интерпретации модуля, метод интервалов для непрерывных функций, функционально-графический метод, использование частных схем.