

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
( Н И У « Б е л Г У » )

**ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**  
**Кафедра теоретической и математической физики**

**ОСОБЕННОСТИ МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕ-  
ПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОКРЕСТНОСТИ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИ-  
ЦЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Выпускная квалификационная работа  
обучающегося по направлению подготовки 03.04.02 Физика  
очной формы обучения группы 07001637  
Соханя Павела Витальевича

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Малай Н.В.

Рецензент:  
к.ф.-м.н., доцент кафедры  
естественнонаучных  
дисциплин, БУКЭП  
Стукалов А.А.

**БЕЛГОРОД - 2018**

## РЕФЕРАТ

Рассмотрено влияние нагрева поверхности частицы на массообмен между крупной испаряющейся каплей сферической формы и окружающей ее бинарной газообразной средой. Получены выражения для полей диффузии, температуры вне и внутри испаряющейся капли до первого порядка малости по диффузионному числу Пекле, выражения для локального диффузионного потока массы и диффузионное число Нуссельта.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
<b>I. Постановка задачи</b> .....	12
<b>II. Поля концентрации, температур вне и внутри нагретой испаряющейся капли</b> .....	18
<b>III. Поток массы на поверхность частицы. Анализ полученных результатов</b> .....	30
<b>Заключение</b> .....	37
<b>Список использованной литературы</b> .....	38

## ВВЕДЕНИЕ

**Тема исследования:** влияние на массообмен нагрева поверхности капли при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности.

**Актуальность исследования:** явления переноса представляют собой неравновесные процессы [1-5], в результате которых в физической системе происходит пространственный процесс переноса вещества, импульса, энергии, энтропии или какой-либо другой физической величины. Причина процессов переноса – возмущения, нарушающие состояние термодинамического равновесия: наличие пространственных неоднородностей состава, температуры или средней скорости

движения частиц системы. Перенос физической величины происходит в направлении, обратном ее градиенту, в результате чего изолированная от внешних воздействий система приближается к состоянию термодинамического равновесия. Если внешние воздействия поддерживаются постоянными, явления переноса протекают стационарно.

Явления переноса характеризуются необратимыми потоками соответствующей физической величины [6-9]:

- диффузионным потоком вещества для явления диффузии;
- тепловым потоком – для явления теплопроводности;
- потоком импульса – для явления внутреннего трения (вязкости).

Потоком физической величины называется количество данной физической величины, переносимое в единицу времени через площадку, ориентированную перпендикулярно направлению переноса. Поток через поверхность единичной площади называют плотностью потока и обозначается вектором  $j$ .

При взаимодействии конденсированных сред, у которых различные температуры, происходит обмен энергией и массой. Интенсивность движения частиц среды существенно зависит от их агрегатного состояния. Например, если температура тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, то интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой уменьшается. Вследствие

такого взаимодействия одно из тел остывает, а другое тело нагревается. Перенос теплоты есть перенос энергии. Поток энергии, который передается частицами тела с более высокой температурой частицам тела с более низкой температурой в литературе принято называть тепловым потоком. Отсюда следует, чтобы возник тепловой поток, т.е. возник процесс теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях, имели место разные температуры. Перенос энергии осуществляется одним или несколькими носителями. Носителями теплоты могут быть любые вещественные системы: атомы, молекулярные комплексы, вихревые образования, гидродинамические потоки и т.д.

В окружающей среде процессы теплообмена, как правило, сопровождаются переносом массы одного компонента относительно другого. Массообмен — самопроизвольный и необратимый процесс переноса массы части вещества в пространстве с неоднородным полем химического потенциала в направлении уменьшения этого химического потенциала. Переход вещества (или нескольких веществ) из одной фазы в другую через их границу в направлении достижения равновесия называют *массообменом*, а переход вещества из фазы к границе раздела фаз или в обратном направлении, т. е. в пределах одной фазы, называется *массоотдачей*. Диффузией называется самопроизвольный процесс, стремящийся к установлению внутри фаз равновесного распределения концентраций. В однородной по температурам и давлениям смеси процесс диффузии направлен к выравниванию внутри фаз равновесного распределения концентраций, т.е. к выравниванию концентраций в системе: при этом происходит перенос вещества из области с большей в область с меньшей концентрацией.

В технологических установках встречаются следующие массообменные процессы: абсорбция и адсорбция газов и паров; десорбция газов из жидкостей и твердых поглотителей; перегонка жидкостей; экстракция жидких и твердых веществ; кристаллизация и растворение твердых веществ; сушка влажных материалов и др. В этих процессах наблюдается не только передача теплоты внутри

обрабатываемого материала (теплообмен), но и одновременно перемещение вещества одного компонента в другой, т. е. *массообмен*. Поэтому в расчетах технологических процессов необходимо учитывать закономерности одновременного перемещения теплоты и вещества.

Одним из видов массообмена является диффузия. *Диффузией* называют самопроизвольный процесс проникновения одного вещества в другое в направлении установления внутри них равновесного распределения концентраций.

Когда наблюдается четкая граница между взаимодействующими веществами, перенос вещества происходит вследствие так называемой *молекулярной диффузии*. Причиной возникновения молекулярной диффузии является тепловое движение молекул. В других случаях перенос вещества осуществляется не только вследствие молекулярной диффузии, но и вследствие интенсивного перемешивания отдельных частей взаимодействующих веществ (конвекции). Такая диффузия называется *конвективной* (или молярной).

Переход вещества из одной фазы в другую путем молекулярной и конвективной диффузий называется *конвективным массообменом*. Этот процесс протекает до тех пор, пока не установится подвижное фазовое равновесие, при котором из одного вещества в другое переходит столько молекул, сколько из второго в первое.

В общем случае, причиной возникновения потока массы является либо неравномерное распределение концентрации вещества (*концентрационная диффузия*), либо неоднородность температурного поля (*термодиффузия*), либо неоднородность полного давления (*бародиффузия*).

Следовательно, значимость процесса массообмена в производстве, природе и т.д. определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое в свою очередь само определяется условиями как теплообмена, так и массообмена. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел. Именно этим и объясняется интенсивное развитие

теории массообмена и то исключительно важное значение, которое ей уделяется в энергетике, химической технологии, авиастроении, медицине, сельском хозяйстве и природе.

В различных областях химических технологий, гидрометеорологии, сельском хозяйстве, медицине, охраны окружающей среды, т.е. в современной науке и технике нашли очень широкое применение многофазные смеси. Наибольший интерес из многофазных смесей представляют так называемые аэродисперсные системы. Аэродисперсные системы состоят из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – вязкая газообразная среда. Аэрозолями называют частицы, взвешенные в газообразной среде, а сами частицы – аэрозольными [7].

Следует также отметить, что среднее расстояние между аэрозольными частицами, встречающихся в аэродисперсных системах, намного больше характерного размера аэрозольной частицы. Это означает, что в таких системах учет влияния аэрозоля на развитие массообмена в аэродисперсной системе можно проводить, основываясь на знании законов массообмена и динамики движения с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Без знания закономерностей такого массообмена невозможно математическое моделирование эволюции аэродисперсных систем и решение такого важного и интересного вопроса как целенаправленное воздействие на аэрозоли. Поэтому изучение закономерностей массообмена отдельных частиц с бесконечной окружающей вязкой неизотермической газообразной средой является важной актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

В научной литературе аэрозольные частицы по размерам условно делятся на крупные, умеренно крупные и мелкие. Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена [7]:

$$Kn = \frac{\lambda_{cp}}{R},$$

где  $\lambda_{cp}$  – средняя длина свободного пробега молекул вязкой бинарной газообразной среды;  $R$  – характерный размер частицы.

Если  $Kn \leq 0.01$ , то такие частицы называются крупными, при выполнении неравенства  $0.01 \leq Kn \leq 0.3$  - умеренно крупными и при  $Kn \gg 1$  - мелкими.

Кроме того, если на поверхности частиц происходит конденсация или испарение молекул вещества частиц, то такие аэрозольные частицы называются летучими. Нелетучими называются аэрозольные частицы, на поверхности которых фазовый переход не происходит.

При описании процесса массообмена будем использовать термин «относительный перепад температуры». Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы  $T_{is}$  и температурой окружающей частицу вязкой газообразной среды вдали от нее  $T_\infty$  к последней. Относительный перепад температуры считается значительным, если имеет место следующая оценка  $(T_{is} - T_\infty)/T_\infty \sim (1)$ . В этом случае необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) и плотности газообразной среды от температуры [11], что существенно осложняет анализ системы газодинамических уравнений и сама вязкая газообразная среда называется неизотермической. Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить к газу и частице, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы равной  $T_{is}$ , а индексом « $\infty$ » – обозначены средние значения физических величин, характеризующие газовую среду в невозмущенном потоке.

Нагрев поверхности частицы до температуры  $T_{is}$  осуществляется за счет внутренних источников тепла неоднородно распределенных в ее объеме, плотность этих тепловых источников будем обозначать через  $q_i$  [11-12]. В дипломной работе считается, что плотность тепловых источников задана.

Внутренние источники тепла – это модельное представление, которое удобное для описания реальных процессов, сопровождающихся выделением тепла в объеме аэрозольной частицы. Так можно моделировать, например, нагрев

поверхности аэрозольной частицы под действием химической реакции, радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д.

В дипломной работе мы не конкретизируем физическую природу плотности тепловых источников  $q_i(\mathbf{r})$ . Это позволяет рассмотреть процесс массообмена в общей постановке.

Если, например, неоднородный нагрев обусловлен поглощением электромагнитного излучения, то  $q_i(x, y, z)$  определяется из решения электродинамической задачи (системы уравнений Максвелла). Причем, система уравнений Максвелла, позволяет рассчитать функцию  $q_i(\mathbf{r})$  в объеме частицы при заданных значениях длины волны и интенсивности подающего излучения, размеров частицы и комплексного показателя преломления вещества частицы [13].

Нагрев капли вызывает, с одной стороны, усиление испарения (реактивный эффект), что сказывается на процесс массообмена между каплей и окружающей средой; с другой стороны, влияет на величину теплового и диффузионного скольжений вдоль поверхности капли, а также на термокапиллярный эффект, связанный с возникновением касательных напряжений на поверхности капли за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  с температурой (эффект Марангони).

В дипломной работе рассматривается массообмен крупной неравномерно нагретой испаряющейся капли сферической формы при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности.

**Объектом исследования** является изучение явления массопереноса в вязкой бинарной неизотермической газообразной среде.

**Предметом исследования:** влияние на массоперенос нагрева поверхности испаряющейся капли с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности) и плотности бинарной газообразной среды от температуры.

**Цель исследования** – получить выражения для полей концентрации, температур вне и внутри крупной неравномерно нагретой испаряющейся капли с учетом степенного вида коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности) и плотности бинарной газообразной среды от температуры, выражения для локального диффузионного потока массы и диффузионное число Нуссельта.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие **задачи исследования**:

- ознакомление с историей развития массообмена крупных испаряющихся капель сферической формы в бинарных газообразных средах;
- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в сферической системе координат;
- получить выражения для полей концентрации, температур вне и внутри крупной испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют источники тепла с учетом степенного вида зависимости коэффициентов переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности;
- провести качественный анализ влияния нагрева поверхности частицы на распределения полей концентрации, температур вне и внутри неравномерно нагретой испаряющейся капли сферической формы, а также локальный диффузионный поток на частицу и массообмен между испаряющейся каплей и бинарной газообразной средой.

**Научная новизна исследования и практическая значимость исследования:** проведено теоретическое описание влияния на массоперенос нагрева поверхности крупной испаряющейся капли, получены выражения для полей концентрации, температур вне и внутри частицы с учетом степенного вида зависимости вязкости, теплопроводности, диффузии и плотности газообразной среды от

температуры, а также локальный диффузионный поток на частицу и число Нуссельта.

Результаты выпускной квалификационной работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц; при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при оценке каналов просветления и т.д.

**Апробация исследования.** Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались на Международной научно-практической и научно-методической конференции **«Современные проблемы математики и механики: теория и практика»** (г. Белгород, БУКЭиП, 2016), опубликованы тезисы докладов конференции и опубликована статья в журнале из списка ВАК – Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, П.В. Сохань, А.А. Стукалов Особенности массообмена в неизотермических газообразных средах //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2018. Т. 50. № 1. С. 73-79.

#### **Структура работы.**

Дипломная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы.

## ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем описывать процесс массопереноса в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой жестко связано с центром масс частицы. В этом случае, наша задача сводится к анализу обтекания крупной испаряющейся капли сферической формы, внутри которой действуют неоднородно распределенные в ее объеме внутренние источники тепла плотностью  $q_i(\mathbf{r})$ , бесконечным плоскопараллельным потоком, со скоростью  $U_\infty$  ( $U_\infty \parallel OZ$ ). На большом расстоянии от аэрозольной частицы скорость потока равна  $U_\infty$  и температура  $T_\infty$  (см. Рис. 1.). Задача осесимметрична.

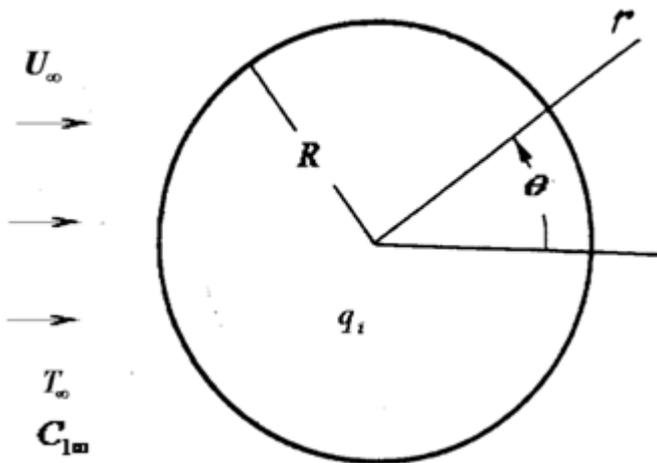


Рис. 1.

Рассматривается установившийся процесс диффузии в потоке вязкой бинарной газообразной среды, обтекающей крупную нагретую испаряющуюся каплю сферической формы радиуса  $R$ . На большом расстоянии от капли концентрация диффундирующей компоненты равна  $C_{1\infty}$ .

Бинарная газовая смесь состоит из несущей (основной) компоненты  $C_2$  и граничная поверхность для нее непроницаема и компоненты  $C_1$ , появление которой связано с фазовым переходом вещества капли в газообразную среду и гра-

ничная поверхность для нее непрерывна. Для бинарной газовой смеси мы можем записать:  $C_2 + C_1 = 1$ ,  $C_2 = \frac{n_2}{n_e}$ ,  $C_1 = \frac{n_1}{n_e}$ ,  $n_e = n_2 + n_1$ ,  $\rho_e = \rho_2 + \rho_1$ ,  $\rho_2 = n_2 m_2$ ,  $\rho_1 = n_1 m_1$ ,  $m_e = m_2 + m_1$ ,  $n_1, m_1$  и  $n_2, m_2$  – соответственно, концентрация и масса первого и второго компонента бинарной газовой смеси.

При рассмотрении массообмена испаряющейся капли сделаны следующие физические допущения:

- характерные значения времен установления распределения полей концентрации, температуры и скорости течения в среде малы по сравнению с характерным временем испарения капли и времени нагрева ее до максимальной температуры. Это означает, что при теоретическом описании массообмена в силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации процессы тепло-и массообмена в системе капля-газ протекают квазистационарно;
- радиус капли будем считать неизменным. Это верно в случае, если время заметного изменения радиуса капли значительно больше времен релаксации диффузионных и тепловых неоднородностей вблизи капли;
- предполагается, что примеси в капле отсутствуют, т.е. она образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом;
- молекула конденсированной фазы испаряются или конденсируются при числах Маха много меньших единицы, т.е. испарение капли протекает в диффузионном режиме ( $C_1 \ll 1$ ), основное влияние на процесс переноса в окрестности капли определяется молекулярной диффузией;
- описание массообмена рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. При описании свойств газообразной среды и частицы используется степенной вид зависимости вязкости, диффузии, теплопроводности и плотности от температуры [11]:  $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta$ ,  $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha$ ,  $D_{12} = D_{e\infty} t_e^{1+\omega}$ ,  $\rho_e = \rho_{e\infty} / t_e$ ,  $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\gamma$ , где  $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_\infty)$ ,  $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_\infty)$ ,  $D_{e\infty} = D_{12}(T_\infty)$ ,  $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_\infty)$ ,  $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_\infty)$ ,  $t_e = T_e / T_\infty$ ,  $t_i = T_i / T_\infty$ ,  $0,5 \leq \alpha, \beta, \omega \leq 1$ ,  $-1 \leq \gamma \leq 1$ ;

- коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газообразной среды, что имеет место для большинства газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью по углу  $\theta$  в системе «частицы–газообразная среда» (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой  $t_{e0}(r)$ , т.е.  $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta$ . При этом  $t_e(r, \theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r, \theta)$ ,  $\delta t_e(r, \theta) \ll t_{e0}(r)$ ,  $\delta t_e(r, \theta)$ ,  $t_{e0}(r)$  определяются из решения тепловой задачи. При таком допущении можно рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется с помощью граничных условий.

При теоретическом исследовании массообмена будем предполагать, что обтекание испаряющейся капли происходит при числах Рейнольдса и Пекле много меньших единицы.

В дипломной работе решалась следующая система уравнений, описывающая распределение относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси и температур вне и внутри капли [8-9]

$$\operatorname{div}\left(\frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \nabla C_1\right) = 0, \quad \operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0, \quad \operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i. \quad (1)$$

Система уравнений (1) решалась со следующими граничными в сферической системе координат  $(y = r/R, \theta, \varphi)$  [7]. На поверхности испаряющейся капли  $(y = 1)$ :

- непроницаемость поверхности капли для второго компонента бинарной газовой смеси

$$n_2 U_r^{(e)} + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

- непрерывность радиального потока первого компонента бинарной газовой смеси, испытывающего фазовый переход

$$n_1 U_r^{(e)} - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} = n_{1i} U_r^{(i)}, \quad (3)$$

где  $n_{1i}$  – концентрация молекул вещества капли,  $n_1 U_r^{(e)}$ ,  $n_2 U_r^{(e)}$  – радиальные конвективные потоки соответствующих компонентов, а  $D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y}$ ,

$D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y}$  – радиальные диффузионные потоки;

- равенства температур и непрерывность радиального потока тепла с учетом тепла, идущего на фазовый переход и излучение

$$T_e = T_i, \quad -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = LD_{12} \frac{n_e^2 m_2 m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_{e\infty}^4), \quad (4)$$

где  $L$  – теплота фазового перехода,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\sigma$  – интегральная степень черноты вещества капли;

- концентрация компоненты, испытывающего фазовый переход с учетом зависимости насыщенной концентрации от температуры во внешней к капле газообразной среде, удовлетворяет соотношению

$$C_1 = C_1^{(H)}(T_{is}) + \delta T^*, \quad (5)$$

где  $C_1^{(H)}(T_{is})$  – насыщенная концентрация первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли  $T_{is}$ . Наличие функции  $\delta T^*$  обусловлено неоднородным распределением насыщенной концентрации первого компонента в окрестности неравномерно нагретой испаряющейся капли.

Учтем конечность температуры, скорости и давления в центре испаряющейся капли, т.е. при  $y \rightarrow 0$

$$T_i \neq \infty, \quad P_i \neq \infty, \quad |U_i| \neq \infty \quad (6)$$

В качестве граничных условий вдали от капли ( $y \rightarrow \infty$ ) для радиальной  $U_r^{(e)}$  и тангенциальной  $U_\theta^{(e)}$  составляющих массовой скорости  $U_e$ , давления  $P_e$  и температуры  $T_e$  равны соответственно

$$U_r^{(e)} = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta^{(e)} = -U_\infty \sin \theta, \quad P_e = P_\infty, \quad T_e = T_\infty. \quad (7)$$

Заметим, что мы не приводим явный вид граничных условий для компонент массовой скорости. Это позволяет получить выражение для локального диффузионного потока в общем виде, который можно использовать, например, при рассмотрении диффузиофореза. В этом случае к граничным условиям (2)-(7) добавляются следующие условия

$$y = 1: \quad U_{\theta}^{(e)} - U_{\theta}^{(i)} = K_{TS} \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \quad (8)$$

$$\mu_e \left( \frac{\partial U_{\theta}^{(e)}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_{\theta}^{(e)}}{y} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \mu_i \left( \frac{\partial U_{\theta}^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{U_{\theta}^{(i)}}{y} \right), \quad (9)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad C_1 = C_{1\infty} + |\nabla C_1| r \cos \theta, \quad (10)$$

где граничное условие (8) учитывает, что разность касательных составляющих внешней и внутренней сред равна сумме теплового и диффузионного скольжения, пропорциональных коэффициентам  $K_{TS}$ ,  $K_{DS}$  [14]; граничное условие (9) учитывает непрерывность касательных составляющих тензора напряжений с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  от температуры и граничное условие (10) показывает, что с помощью внешних источников в бинарной газовой смеси поддерживается постоянный малый градиент относительных концентраций ее компонентов ( $|\nabla C_1|, |\nabla C_2|$ ).

Перейдем к безразмерным переменным в уравнениях и граничных условиях, введя безразмерные координату, скорость и температуру следующим образом:  $y_k = x_k/R$ ,  $t = T/T_{\infty}$ ,  $V_e = U_e/U_{\infty}$ ,  $V_i = U_i/U_{\infty}$ .

Материальные постоянные  $\mu_{\infty}$ ,  $\rho_{\infty}$ ,  $D_{\infty}$ ,  $\lambda_{\infty}$  и не меняющиеся в процессе массообмена параметры  $T_{\infty}$ ,  $R$  и  $U_{\infty}$  являются определяющими. Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию, которую в научной литературе называют числом Рейнольдса:  $Re = (\rho_{\infty} R U_{\infty}) / \mu_{\infty}$ .

При  $\varepsilon \ll 1$  решение уравнений гидродинамики будем искать в виде

$$V_e = V_e^{(0)} + \varepsilon V_e^{(1)} + \dots, \quad P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots \quad (\varepsilon = Re). \quad (11)$$

Из граничных условий (7) следует, что компоненты массовой скорости  $V_r(y, \theta)$  и  $V_\theta(y, \theta)$  следует искать в виде разложения по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [9]. Для нахождения локального диффузионного потока массы и диффузионное число Нуссельта необходимо знать поля концентрации первого компонента бинарной газообразной среды, температур вне и внутри испаряющейся капли и при их нахождении мы ограничимся до первого порядка малости.

## ГЛАВА II. ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ, ТЕМПЕРАТУР ВНЕ И ВНУТРИ НАГРЕТОЙ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ

Для нахождения поля температуры внутри крупной испаряющейся аэрозольной капли сферической формы необходимо решить уравнение (12):

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad (12)$$

где  $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\lambda$ ,  $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_\infty)$ ,  $t_i = T_i / T_\infty$ .

В безразмерном виде уравнение (12) принимает вид:

$$\operatorname{div}(t_i^\lambda \nabla t_i) = -\frac{q_i R^2}{T_\infty \lambda_{i\infty}}. \quad (13)$$

Решение этого уравнения будем искать методом разделения переменных [15]. Для этого сначала правую часть уравнения разложим в ряд по полиномам Лежандра

$$-\frac{q_i R^2}{\lambda_{i\infty} T_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y) P_n(x), \quad x = \cos\theta.$$

В полученное выше выражение входит неизвестная функция  $q_{in}(y)$ , для ее нахождения поступим следующим образом. Умножим и левую и правую части  $P_m(x) dx$  и проинтегрируем от -1 до +1, имеем

$$-\int_{-1}^1 P_m(x) \frac{q_i R^2}{\lambda_{i\infty} T_\infty} dx = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx,$$

и далее воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра [15]:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}; & n = m \end{cases},$$

и в результате получаем

$$q_{in}(y) = -\frac{2n+1}{2} \frac{R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} \int_{-1}^1 q_i P_n(x) dx. \quad (14)$$

Как мы отмечали в первой главе для нахождения локального диффузионного потока массы и диффузионное число Нуссельта мы ограничимся поправками до первого порядка малости. Поэтому нам в дальнейшем потребуются

$$q_{i0}(y) = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} \int_{-1}^1 q_i dx, \quad q_{i1}(y) = -\frac{3}{2} \frac{R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} \int_{-1}^1 q_i x dx. \quad (15)$$

Перейдем теперь к левой части уравнения (13). Функцию  $t_i(y, \theta)$  будем искать в виде:

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta). \quad (16)$$

Подставляя (16), (15) в уравнение (13) и, оставляя члены по первого порядка малости по  $\varepsilon$ , получаем следующие два уравнения для нахождения функций  $t_{i0}(y)$  и  $t_{i1}(y, \theta)$

$$\operatorname{div}(t_{i0}^\gamma \nabla t_{i0}) = q_{i0}, \quad (17)$$

$$\operatorname{div}(\gamma t_{i0}^{\gamma-1} t_{i1} \nabla t_{i0} + t_{i0}^\gamma \nabla t_{i1}) = q_{i1} \cos \theta. \quad (18)$$

Из теории решения обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение обыкновенного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

имеет вид [15]

$$y(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \varphi_2(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1(x) f(x)}{W(x)} dx - \varphi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_2(x) f(x)}{W(x)} dx, \quad (19)$$

где функции  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  определены и непрерывны на некотором интервале  $(a, b)$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – функции, являющиеся решением соответствующего однородного уравнения, а  $W$  – определитель Вронского. Точка  $x_0 \in (a, b)$  и выбирается таким образом, чтобы соответствующие интегралы легко вычислялись.

Найдем решение уравнения (17). Введем новую функция

$$f_0(y) = t_{i0}^{1+\gamma}, \quad (20)$$

тогда уравнение (17) принимает вид

$$\Delta f_0 = (1 + \gamma)q_{i0},$$

и в сферической системе координат получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2 f_0}{d y^2} + \frac{2}{y} \frac{d f_0}{d y} = (1 + \gamma)q_{i0}. \quad (21)$$

Применим к уравнению (21) формулу (19). Заметим, что в нашем случае  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = 1/y$ ,  $W = -1/y^2$ . Следовательно,

$$f_0(y) = B_0 + \frac{H_0}{y} + \frac{1}{y} \int_{y_0}^y \frac{(1+\gamma)q_{i0}}{W} dy - \int_{y_0}^y \frac{(1+\gamma)q_{i0}}{yW} dy$$

мы ищем решение  $y \in [0,1]$ , поэтому можно положить  $y_0 = 1$ .

Таким образом, имеем

$$t_{i0}(y) = \left( B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \Psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\Psi_0}{y} dy \right)^{\frac{1}{1+\gamma}},$$

где  $\Psi_0 = -\frac{R^2 y^2}{2\lambda_{i\infty} T_\infty} \int_{-1}^{+1} q_i dx$ .

Постоянную  $H_0$  определяем из граничного условия (6), т.е.  $t_{i0}(y \rightarrow 0) \neq \infty$ ,

получаем  $H_0 = \frac{1+\gamma}{4\pi R \lambda_{i\infty} T_\infty} \int_V q_i dV$ .

С учетом полученных выше выражений, имеем

$$t_{i0}(y) = \left( B_0 + \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i\infty} T_{\infty} y} J_0 - \frac{1}{y} \int_y^1 \Psi_0 d y + \int_y^1 \frac{\Psi_0}{y} d y \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (22)$$

где  $J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i dV$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

Найдем решение уравнения (18). Будем искать его решение в виде

$$t_{i1}(y, \theta) = \frac{1}{t_{i0}^\gamma} f_1(y, \theta). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (18), получаем

$$\Delta f_1 = q_{i1} \cos \theta. \quad (24)$$

При получении уравнения (24) необходимо учесть, что

$$t_{i0}^\gamma \nabla t_{i1} + \gamma t_{i0}^{\gamma-1} t_{i1} \nabla t_{i0} = \gamma t_{i0}^{\gamma-1} \frac{1}{t_{i0}^\gamma} f_1 \nabla t_{i0} + t_{i0}^\gamma \left[ -\frac{\gamma}{t_{i0}^{\gamma+1}} f_1 \nabla t_{i0} + \frac{1}{t_{i0}^\gamma} \nabla f_1 \right]$$

Решение уравнения (24) ищем в виде

$$f_1(y, \theta) = \tau_i(y) \cos \theta, \quad (25)$$

и, подставляя (25) в (24) в сферической системе координат получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2 \tau_i}{d y^2} + \frac{2}{y} \frac{d \tau_i}{d y} - 2 \frac{\tau_i}{y^2} = q_{i1}. \quad (26)$$

Применим к уравнению (26) формулу (19). Заметим, что в нашем случае  $\varphi_1 = y$ ,  $\varphi_2 = 1/y^2$ ,  $W = -3/y^2$ . Следовательно,

$$\tau_i(y) = B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{y^2} \int_{y_0}^y \frac{y q_{i1}}{W} dy - y \int_{y_0}^y \frac{q_{i1}}{y^2 W} dy$$

Поступая аналогично как для функции  $t_{i0}$ , получаем следующее выражение

$$t_{i1}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{t_{i0}^\gamma} \left\{ B_1 y + \frac{H_1}{y^2} - \frac{1}{y^2} \int_y^1 y \Psi_1 d y + y \int_y^1 \frac{\Psi_1}{y^2} d y \right\}, \quad (27)$$

где  $H_1 = \frac{R}{3\lambda_{i\infty} T_\infty} J_1$ ,  $J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$ ,  $z = r \cos \theta$ ,  $\int_V q_i z dV$  – дипольный момент

плотности тепловых источников,  $\Psi_1 = -\frac{R^2 y^2}{2\lambda_{i\infty} T_\infty} \int_{-1}^+ q_i x d x$ .

Найдем поле температуры вне испаряющейся капли. Для этого необходимо решить следующее уравнение

$$\operatorname{div}(\lambda_e \nabla T_e) = 0, \quad (28)$$

с граничным условием

$$T_e(y \rightarrow \infty, \theta) = T_e. \quad (29)$$

Здесь  $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha$ ,  $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_\infty)$ ,  $t_e = T_e / T_\infty$ .

Решение уравнения (28) будем искать в виде

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta). \quad (30)$$

Поставляя (30) в (29) и удерживая члены до первого порядка малости имеем

$$\operatorname{div}(t_{e0}^\alpha \nabla t_{e0}) = 0, \quad (31)$$

$$\operatorname{div}(\alpha t_{e0}^{\alpha-1} t_{e1} \nabla t_{e0} + t_{e0}^\alpha \nabla t_{e1}) = 0. \quad (32)$$

Найдем решение уравнения (31). Если ввести функцию

$$\Phi_0(y) = t_{e0}^{1+\alpha}, \quad (33)$$

тогда уравнение (31) принимает вид

$$\Delta\Phi_0 = 0 ,$$

или в сферической системе координат имеем

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{d y} \left( y^2 \frac{d\Phi_0}{d y} \right) = 0. \quad (34)$$

Интегрируя это уравнение два раза, получаем следующее выражение для функции  $t_{e0}$ , удовлетворяющее граничному условию (29)

$$t_{e0}(y) = \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (35)$$

где постоянная  $\Gamma_0$  определяется из граничных условий.

Найдем решение уравнения (32). Будем искать его решение в виде

$$t_{e1}(y, \theta) = \frac{1}{t_{e0}^\alpha} \Phi_1(y, \theta) . \quad (36)$$

Подставляя (36) в (32), получаем

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad (37)$$

и его решение будем искать в виде

$$\Phi_1(y, \theta) = \tau_e(y) \cos\theta , \quad (38)$$

Подставляя (38) в (37) в сферической системе координат получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2\tau_e}{d y^2} + \frac{2}{y} \frac{d\tau_e}{d y} - 2 \frac{\tau_e}{y^2} = 0. \quad (39)$$

Решениями уравнения (39) являются функции  $\varphi_1 = y$ ,  $\varphi_2 = 1/y^2$ .

Таким образом, мы получаем следующее решение для функции  $t_{e1}(y, \theta)$ , удовлетворяющее граничному условию (29)

$$t_{e1}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{t_{e0}^\alpha} \frac{\Gamma_1}{y^2}. \quad (40)$$

Найдем распределение концентрации в окрестности испаряющейся капли. Для этого необходимо решить уравнение диффузии

$$\operatorname{div} \left( \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \nabla C_1 \right) = 0, \quad (41)$$

с граничным условием

$$C_1(y \rightarrow \infty, \theta) = C_{1\infty}. \quad (42)$$

где  $D_{12} = D_{e\infty} t_e^{1+\omega}$ ,  $D_{e\infty} = D_{12}(T_\infty)$ ,  $\rho_\infty = \rho_{e\infty} / t_e$ ,  $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_\infty)$ .

Линеаризуем уравнение (41). До первого порядка малости по  $\varepsilon$  имеем:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta),$$

$$n_e(y, \theta) = \frac{n_{e\infty}}{t_e} = \frac{n_{e\infty}}{t_{e0} + \varepsilon t_{e1}} \approx \frac{n_{e\infty}}{t_{e0}} \left( 1 - \varepsilon \frac{t_{e1}}{t_{e0}} \right),$$

$$\rho_e(y, \theta) = \frac{\rho_{e\infty}}{t_e} = \frac{\rho_{e\infty}}{t_{e0} + \varepsilon t_{e1}} \approx \frac{\rho_{e\infty}}{t_{e0}} \left( 1 - \varepsilon \frac{t_{e1}}{t_{e0}} \right), \quad (43)$$

$$D_{12}(y, \theta) = D_{e\infty} t_e^{1+\omega} = D_{e\infty} (t_{e0} + \varepsilon t_{e1})^{1+\omega} \approx D_{e\infty} t_{e0}^{1+\omega} + \varepsilon t_{e0}^\omega (1 + \omega) t_{e1},$$

$$t_e^\omega(y, \theta) \approx t_{e0}^\omega + \varepsilon \omega t_{e0}^{\omega-1} t_{e1},$$

и после подстановки (43) в уравнение (41) до первого порядка малости имеем систему из двух уравнений

$$\operatorname{div} (t_{e0}^\omega \nabla C_{10}) = 0, \quad (44)$$

$$\operatorname{div} (\omega t_{e0}^{\omega-1} t_{e1} \nabla C_{10} + t_{e0}^\omega \nabla C_{11}) = 0. \quad (45)$$

Найдем решение уравнения (44). В сферической системе координат имеем

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{dy} \left( y^2 t_{e0}^\omega \frac{dC_{10}}{dy} \right) = 0,$$

или

$$dC_{10} = M_0 t_{e0}^{\omega} \frac{1}{y^2} \frac{d y}{y^2},$$

и далее воспользуемся ранее полученным выражением при решении уравнения теплопроводности вне не испаряющейся капли (см. формулу (34)), мы можем записать

$$t_{e0}^{\alpha} y^2 \frac{d t_{e0}}{d y} = \Gamma_0, \quad t_{e0}^{\alpha} d t_{e0} = \Gamma_0 \frac{d y}{y^2}.$$

С учетом этого получаем

$$dC_{10} = M_0 t_{e0}^{\alpha-\omega} d t_{e0},$$

и после интегрирования имеем

$$C_{10} = M_0 t_{e0}^{1+\alpha-\omega} + N_0.$$

Постоянную интегрирования  $N_0$  определяется из граничного условия  $C_{10}(y \rightarrow \infty) = C_{1\infty}$ , получаем  $N_0 = C_{1\infty} - M_0$ . Таким образом, имеем следующее выражение для  $C_{10}$

$$C_{10}(y) = M_0 (t_{e0}^{1+\alpha-\omega} - 1) + C_{1\infty}. \quad (46)$$

Найдем решение уравнения (45):

$$\operatorname{div}(\omega t_{e0}^{\omega-1} t_{e1} \nabla C_{10} + t_{e0}^{\omega} \nabla C_{11}) = 0. \quad (47)$$

Если учесть ранее полученные выражения, а именно

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad \frac{d t_{e0}}{d y} = -\frac{\ell t_{e0}}{y(1+\alpha)}, \quad \ell = \frac{\Gamma_0}{y + \Gamma_0}, \quad t_{e1} = \frac{\cos \theta \Gamma_1}{t_{e0}^{\alpha} y^2}.$$

Уравнение (47) принимает вид

$$\frac{\partial^2 C_{11}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \left(2 - \frac{\omega \ell}{1+\alpha}\right) \frac{\partial C_{11}}{\partial y} + \frac{1}{y^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_{11}}{\partial \theta}\right) = -\omega \frac{1+\alpha-\omega}{y^2(1+\alpha)} \times$$

$$\times \frac{M_0 \Gamma_1}{t_{e0}^\omega} \ell \frac{2-\ell}{y^2} \cos\theta. \quad (48)$$

Решение уравнения (48) будем искать в виде

$$C_{11}(y, \theta) = \tau_C(y) \cos\theta. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (48) получаем

$$y^2 \frac{d^2 \tau_C}{dy^2} + y \left( 2 - \frac{\omega \ell}{1 + \alpha} \right) \frac{d\tau_C}{dy} - 2\tau_C = -\omega \frac{1 + \alpha - \omega}{(1 + \alpha)} \frac{M_0 \Gamma_1}{t_{e0}^\omega} \ell \frac{2 - \ell}{y^2}. \quad (50)$$

Мы получили неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Найдем решение однородного уравнения. Из (50) имеем

$$y^2 \frac{d^2 \tau_C}{dy^2} + y \left( 2 - \frac{\omega \ell}{1 + \alpha} \right) \frac{d\tau_C}{dy} - 2\tau_C = 0. \quad (51)$$

Точка  $y = 0$  для нашего уравнения (50) является регулярной особой точкой и поэтому его решение ищем в виде обобщенного степенного ряда [15]

$$\tau_C = y^\rho \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n \ell^n, \quad \Delta_0 \neq 0, \quad (52)$$

$$\tau_C' = -y^{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)\Delta_n - (n-1)\Delta_{n-1}] \ell^n,$$

$$\tau_C'' = y^{\rho-2} \sum_{n=0}^{\infty} [(n-\rho)(n-\rho+1)\Delta_n - 2(n-1)(n-\rho)\Delta_{n-1} + (n-1)(n-2)\Delta_{n-2}] \ell^n.$$

Подставляя (52) в (51) и приравнивая коэффициенты при  $y^\rho$ , получаем определяющее уравнение

$$\rho^2 + \rho - 2 = 0,$$

корни которого равны соответственно:  $\rho_1 = -2$ ,  $\rho_2 = 1$ . Заметим, что разность корней равна целому числу, следовательно, согласно общей теории решения

дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов (метод Фробениуса) система линейно независимых решений однородного уравнения (51) содержит логарифмические члены [15].

Первое решение, удовлетворяющее большему корню по модулю, ищем в виде:

$$\tau_C^{(1)} = \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{(1)} \ell^n . \quad (53)$$

Подставляя ряд (53) в уравнение (52) методом неопределенных коэффициентов получаем рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов  $\Delta_m^{(1)}$

$$\Delta_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+1)} \left[ (n+1) \left( 2n-2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-1}^{(1)} - (n-2) \left( n-1 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-2}^{(1)} \right] \quad (n \geq 1), \quad (54)$$

Второе решение, линейно независимое с (53), ищем в виде

$$\tau_C^{(2)} = y \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{(2)} \ell^n + \omega_0 \ln y \tau_C^{(1)} . \quad (55)$$

Подставляя (55) в уравнение (52) методом неопределенных коэффициентов находим рекуррентную формулу для коэффициентов  $\Delta_m^{(2)}$

$$\Delta_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-3)} \left\{ (n-2) \left( 2n-2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-1}^{(2)} - (n-2) \left( n-1 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-2}^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \left[ (2k+3) \Delta_k^{(1)} - \left( 2k-2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{k-1}^{(1)} \right] \right\} \quad (n \geq 4) . \quad (56)$$

При вычислении коэффициентов  $\Delta_m^{(1)}$  и  $\Delta_m^{(2)}$  по рекуррентным формулам

(55) и (56) необходимо учитывать, что  $\Delta_0^{(1)} = 1$ ,  $\Delta_0^{(2)} = 1$ ,  $\Delta_1^{(2)} = -\frac{\omega}{2(1+\alpha)}$ ,  $\Delta_3^{(2)} = 1$ ,

$\frac{\omega_0}{2\Gamma_0^3} = \frac{\Delta_1^{(2)}}{6} \left( 2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right)$ . Значения коэффициентов  $\Delta_0^{(1)} = 1$ ,  $\Delta_0^{(2)} = 1$  выбираются так,

чтобы при малых относительных перепадах температуры  $(T_{is} - T_{\infty})/T_{\infty} \ll 1$ , т.е.

когда  $\Gamma_0 \rightarrow 0$  выражение для распределения концентрации первого компонента бинарной газовой смеси совпадало с ранее полученными формулами, например, [7].

Из вида правой части уравнения (50) видно, что частное решение этого уравнения имеет вид:

$$\tau_C^{(3)}(y) = (1 + \alpha - \omega) \frac{M_0 \Gamma_1}{y^2 t_{e0}^\omega}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (48) имеет следующий вид

$$C_{11}(y, \theta) = \cos \theta (N_1 \tau_C^{(1)}(y) + M_1 \tau_C^{(2)}(y) + \tau_C^{(3)}(y)). \quad (57)$$

Таким образом, во второй главе получены выражения для распределения полей температур вне и внутри испаряющейся капли и распределение концентрации первого (летучего) компонента бинарной газовой смеси при степенном виде зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) и плотности от температуры и они имеют следующий вид:

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon_{i1}(y, \theta), \quad t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \\ C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta), \quad (58)$$

$$\text{где } t_{i0}(y) = \left( B_0 + \frac{(1 + \gamma) R^2}{3 \lambda_{i\infty} T_\infty y} J_0 - \frac{1}{y} \int \Psi_0 d y + \int \frac{\Psi_0}{y} d y \right)^{\frac{1}{1 + \gamma}}, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i d V, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$t_{i1}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{t_{i0}^\gamma} \left\{ B_1 y + \frac{H_1}{y^2} - \frac{1}{y^2} \int y \Psi_1 d y + y \int \frac{\Psi_1}{y^2} d y \right\}, \quad H_1 = \frac{R}{3 \lambda_{i\infty} T_\infty} J_1,$$

$$J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z d V, \quad z = r \cos \theta, \quad \int_V q_i z d V - \text{дипольный момент плотности тепловых}$$

$$\text{источников, } \Psi_1 = -\frac{R^2 y^2}{2 \lambda_{i\infty} T_\infty} \int_{-1}^{+1} q_i x d x, \quad t_{e0}(y) = \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1 + \alpha}}, \quad t_{e1}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{t_{e0}^\alpha} \frac{\Gamma_1}{y^2},$$

$$C_{10}(y) = M_0 (t_{e0}^{1 + \alpha - \omega} - 1) + C_{1\infty}, \quad C_{11}(y, \theta) = \cos \theta (N_1 \tau_C^{(1)}(y) + M_1 \tau_C^{(2)}(y) + \tau_C^{(3)}(y)),$$

$$\tau_C^{(1)} = \frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{(1)} \ell^n, \quad \tau_C^{(2)} = y \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n^{(2)} \ell^n + \omega_0 \ln y \tau_C^{(1)}, \quad \tau_C^{(3)}(y) = (1 + \alpha - \omega) \frac{M_0 \Gamma_1}{y^2 t_{e_0}^\omega},$$

$$\Delta_n^{(1)} = \frac{1}{n(n+1)} \left[ (n+1) \left( 2n-2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-1}^{(1)} - (n-2) \left( n-1 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-2}^{(1)} \right] \quad (n \geq 1),$$

$$\Delta_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-3)} \left\{ (n-2) \left( 2n-2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-1}^{(2)} - (n-2) \left( n-1 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-2}^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \left[ (2n+3) \Delta_n^{(1)} - \left( 2n-2 - \frac{\omega}{1+\alpha} \right) \Delta_{n-1}^{(1)} \right] \right\} \quad (n \geq 4).$$

### ГЛАВА III. ПОТОК МАССЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЧАСТИЦЫ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Во второй главе получены общие выражения для распределения полей температур вне и внутри испаряющейся капли и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси и мы можем найти локальный диффузионный поток, а также диффузионное число Нуссельта и поток массы.

Для нахождения этих физических величин необходимо определить постоянные интегрирования входящих для распределения полей температур и концентрации первого компонента бинарной газовой смеси. Эти постоянные определяются из граничных условий на поверхности испаряющейся капли, а именно:

- равенства температур и непрерывность радиального потока тепла с учетом тепла, идущего на фазовый переход и излучение

$$T_e = T_i, \quad -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = LD_{12} \frac{n_e^2 m_2 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_{\infty}^4), \quad (59)$$

где  $L$  – теплота фазового перехода,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,  $\sigma$  – интегральная степень черноты вещества капли;

- концентрация компоненты, испытывающего фазовый переход с учетом зависимости насыщенной концентрации от температуры во внешней к капле газообразной среде, удовлетворяет соотношению

$$C_1 = C_1^{(H)}(T_{is}) + \delta T^*, \quad (60)$$

где  $C_1^{(H)}(T_{is})$  – насыщенная концентрация первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли  $T_{is}$ . Наличие функции  $\delta T^*$  обусловлено неоднородным распределением насыщенной концентрации первого компонента в окрестности неравномерно нагретой испаряющейся капли.

Линеаризуем граничные условия (59)-(60):

– для нулевого приближения

$$t_{e0} = t_{i0}, \quad C_{10} = C_1^{(H)}(T_{iS}),$$

$$-\lambda_{eS} \frac{\partial t_{eo}}{\partial y} = -\lambda_{iS} \frac{\partial t_{io}}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 (t_{i0}^4 - 1) + L \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty}} D_{e\infty} t_{e0}^\omega \frac{\partial C_{10}}{\partial y}, \quad (61)$$

– для первого приближения

$$t_{e1} = t_{i1}, \quad C_{11} = C_{1S}^* t_{i1},$$

$$-\lambda_{eS} \left( \frac{\partial t_{e1}}{\partial y} + \frac{\alpha}{t_{e0}} t_{e1} \frac{\partial t_{eo}}{\partial y} \right) = -\lambda_{iS} \left( \frac{\partial t_{i1}}{\partial y} + \frac{\gamma}{t_{i0}} t_{i1} \frac{\partial t_{io}}{\partial y} \right) - 4\sigma_0 \sigma_1 RT_\infty^3 t_{i0}^4 t_{i1} +$$

$$+ L \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty}} D_{e\infty} t_{e0}^\omega \left( \frac{\partial C_{11}}{\partial y} + \frac{\omega}{t_{e0}} t_{e1} \frac{\partial C_{10}}{\partial y} \right). \quad (62)$$

Здесь  $\lambda_{iS} = \lambda_{i\infty} t_{iS}^\gamma$ ,  $\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha$ ,  $t_{iS} = t_{i0}(y=1)$ ,  $t_{eS} = t_{e0}(y=1)$ ,  $C_{1S}^* = dC_1^{(H)} / dt_i |_{T_i=T_{iS}}$ .

Для нулевого приближения мы можем записать. Среднее значение температуры поверхности частицы  $T_{iS}$  определяется из решения следующей системы уравнений, в которой  $T_{iS} = t_{iS} T_{e\infty}$ ,  $T_{eS} = t_{eS} T_{e\infty}$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{iS} = t_{iS}, \quad M_0 = \frac{C_1^{(H)} - C_{1\infty}}{t_{eS}^{1+\alpha-\omega} - 1}, \quad \Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1, \\ \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{eS} T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{eS}} (t_{iS}^4 - 1) - L \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty}} D_{e\infty} \frac{1+\alpha-\omega}{1+\alpha} M_0 \ell^{(S)} t_{eS}^{1+\alpha} \end{array} \right., \quad (63)$$

где  $\ell^{(S)} = (t_{eS}^{1+\alpha} - 1) / t_{eS}^{1+\alpha}$ .

Постоянные интегрирования, входящие в первые приближения определяются из системы уравнений (62) и равны:

$$M_1 = 0, \quad N_1 = C_{1S}^* \frac{\Gamma_1}{t_{eS}^\alpha \tau_C^{(1)}(1)} - \frac{\tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)},$$

$$\frac{\Gamma_1}{t_{eS}^\alpha} = \frac{R}{\delta \lambda_{iS} T_\infty} J_1 + \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} \lambda_{iS} \delta t_{eS}} LD_{12}^{(S)} \frac{\tau_C^{(3)}(1) \tau_C^{(1)}(1) - \tau_C^{(1)}(1) \tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)}, \quad (64)$$

$$\delta = 1 + 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 T_\infty^3}{\lambda_{iS}} R t_{iS}^4 + LD_{12}^{(S)} \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} t_{eS} \lambda_{iS}} \left[ C_{1S}^* \frac{\tau_C^{(1)'}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} - \omega \frac{1 + \alpha - \omega}{1 + \alpha} M_0 \ell^{(S)} t_{eS}^{\alpha - \omega} \right].$$

Здесь  $C_{1S}^* = dC_1^{(H)} / dt_i |_{T_i=T_{iS}}$ ,  $C_1^{(H)}(T_{iS})$  – насыщенная концентрация первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли  $T_{iS}$ ,  $L$  – теплота фазового перехода,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана,

$\sigma$  – интегральная степень черноты вещества капли,  $M_0 = \frac{C_1^{(H)} - C_{1\infty}}{t_{eS}^{1+\alpha} - 1}$ , функции

$\tau_C^{(1)}(1) = \tau_C^{(1)}(y=1)$ ,  $\tau_C^{(1)'}(1)$  – производная от функции  $\tau_C^{(1)}(y)$ ,  $\ell^{(S)} = (t_{eS}^{1+\alpha} - 1) / t_{eS}^{1+\alpha}$ ,

$J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$ ,  $z = r \cos \theta$ ,  $\int_V q_i z dV$  – дипольный момент плотности тепловых

источников, индексы «e» и «i» относятся к физическим величинам, характеризующие газообразную среду и частицу, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы равной  $T_{iS}$ , которая определяется из системы уравнений (63), а индексом «∞» – обозначены средние значения физических величин, характеризующие газовую среду в невозмущенном потоке.

С учетом выражений (64) имеем следующие выражения для полей температуры и концентрации первого компонента бинарной неизотермической газообразной среды в первом приближении:

$$t_{e1}(y, \theta) = \frac{\cos \theta}{y^2} \left\{ \frac{R}{\delta \lambda_{iS} T_\infty} J_1 + \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} \lambda_{iS} \delta t_{eS}} LD_{12}^{(S)} \frac{\tau_C^{(3)'}(1) \tau_C^{(1)}(1) - \tau_C^{(1)'}(1) \tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} \right\},$$

$$C_{11}(y, \theta) = \cos \theta \{ N_1 \tau_C^{(1)}(y) + \tau_C^{(3)}(y) \}.$$

Таким образом, окончательно получаем следующие выражения для распределения температуры и концентрации первого компонента бинарной неизотермической газообразной среды:

$$t_e(y, \theta) = \left(1 + \frac{t_{eS}^{1+\alpha} - 1}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{y^2} \left\{ \frac{R}{\delta \lambda_{iS} T_\infty} J_1 + \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} \lambda_{iS} \delta t_{eS}} LD_{12}^{(S)} \frac{\tau_C^{(3)'}(1) \tau_C^{(1)}(1) - \tau_C^{(1)'}(1) \tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} \right\}, \quad (65)$$

$$C_1(y, \theta) = C_{1\infty} + \frac{C_1^{(H)} - C_{1\infty}}{t_{eS}^{1+\alpha-\omega} - 1} (t_{e0}^{1+\alpha-\omega}(y) - 1) + \varepsilon \cos \theta (N_1 \tau_C^{(1)}(y) + \tau_C^{(3)}(y)) \quad (66)$$

Здесь

$$N_1 = \frac{C_{1S}^*}{\tau_C^{(1)}(1)} \left[ \frac{R J_1}{\lambda_{iS} \delta T_\infty} + \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} \lambda_{iS} \delta t_{eS}} LD_{12}^{(S)} \frac{\tau_C^{(3)'}(1) \tau_C^{(1)}(1) - \tau_C^{(1)'}(1) \tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} \right] - \frac{\tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)}.$$

Поскольку выражения для полей температуры и концентрации нами получены, то мы можем найти локальный диффузионный поток. Диффузионный поток вещества  $j_D$  возникают в результате наличия в газе градиентов концентрации. Не следует думать, что  $j_D$  зависит только от концентрации. Если температура смеси переменна, то возникает так называемая термическая диффузии (эффект Соре). Из кинетической теории газов следует, что если массы молекул двух компонентов различны, то за счет термодиффузии более тяжелые молекулы стремятся перейти в холодные области. Если массы молекул одинаковы, то в холодные области стремятся перейти более крупные молекулы.

Следствием молекулярного диффузионного переноса теплоты является так называемый диффузионный термоэффект (эффект Дюфо), представляющий собой возникновение разности температур в результате диффузионного перемешивания двух газов, первоначально имевших одинаковую температуру. Диффузионные термоэффект – явление, обратное термодиффузии.

Таким образом, локальный диффузионный поток массы первого компонента за счет молекулярного переноса с учетом концентрационной и термодиффузии описывается следующим уравнением (с учетом того, что  $C_1 \ll C_2$ ):

$$\mathbf{j}_D = -\rho_e D_{12} \left( \frac{m_1}{m_2} \nabla C_1 + \frac{k_T}{T_e} \nabla T_e \right), \quad (67)$$

где первого слагаемое определяет диффузионный поток при наличии только градиента концентрации. Второе слагаемое это диффузионный поток, вызванный градиентом температуры, определяется коэффициентом термодиффузии  $k_T D_{12}$ . Безразмерную величину  $k_T$  называют термодиффузионным отношением.

Найдем локальный диффузионный поток и для этого необходимо линеаризовать выражение (67). Учитывая, что

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta),$$

$$\rho_e(y, \theta) = \frac{\rho_{e\infty}}{t_e} = \frac{\rho_{e\infty}}{t_{e0} + \varepsilon t_{e1}} \approx \frac{\rho_{e\infty}}{t_{e0}} \left( 1 - \varepsilon \frac{t_{e1}}{t_{e0}} \right),$$

$$D_{12}(y, \theta) = D_{e\infty} t_e^{1+\omega} = D_{e\infty} (t_{e0} + \varepsilon t_{e1})^{1+\omega} \approx D_{e\infty} t_{e0}^{1+\omega} + \varepsilon t_{e0}^{\omega} (1+\omega) t_{e1},$$

$$t_e^{\omega}(y, \theta) \approx t_{e0}^{\omega} + \varepsilon \omega t_{e0}^{\omega-1} t_{e1}, \quad \rho_e D_{12} = \rho_{e\infty} D_{e\infty} t_{e0}^{\omega} \left( 1 + \varepsilon \frac{\omega}{t_{e0}} t_{e1} \right),$$

имеем:

$$\nabla C_1 = -\frac{1+\alpha-\omega}{(1+\alpha)Ry} \ell M_0 t_{e0}^{1+\alpha-\omega} \mathbf{e}_r + \frac{\varepsilon}{R} \left\{ \cos\theta (N_1 \tau_C^{(1)} + \tau_C^{(3)}) \mathbf{e}_r - \frac{\sin\theta}{y} (N_1 \tau_C^{(1)} + \tau_C^{(3)}) \mathbf{e}_{\theta} \right\},$$

$$\frac{1}{T_e} \nabla T_e = \frac{1}{R t_{e0}} \nabla t_{e0} + \frac{\varepsilon}{R t_{e0}} \left( \nabla t_{e1} - \frac{t_{e1}}{t_{e0}} \nabla t_{e0} \right),$$

$$\frac{k_T}{T_e} \nabla T_e = -\frac{k_T \ell}{yR(1+\alpha)} \mathbf{e}_r + \frac{\varepsilon \Gamma_1}{y^3 R t_{e0}^{1+\alpha}} [\cos\theta (\ell - 2) \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_{\theta}].$$

Таким образом, локальный диффузионный поток равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_D = \rho_{e\infty} D_{e\infty} t_{e0}^{\omega} & \left\{ \frac{\ell}{yR(1+\alpha)} \left( k_T + \frac{m_1}{m_2} (1+\alpha-\omega) M_0 t_{e0}^{1+\alpha-\omega} \right) \mathbf{e}_r - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon}{R} \left[ \cos\theta \left\{ \frac{m_1}{m_2} (N_1 \tau_C^{(1)} + \tau_C^{(3)}) + \frac{\Gamma_1}{y^3 t_{e0}^{1+\alpha}} [k_T (\ell - 2) - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{\omega \ell}{1 + \alpha} \left( k_T + \frac{m_1}{m_2} (1 + \alpha - \omega) M_0 t_{e0}^{1+\alpha-\omega} \right) \right\} e_r - \quad (68)$$

$$\left. - \frac{\sin \theta}{y} \left( \frac{m_1}{m_2} (N_1 \tau_C^{(1)} + \tau_C^{(3)}) + \frac{\Gamma_1}{y^2 t_{e0}^{1+\alpha}} k_T \right) e_\theta \right\} ,$$

$$\text{где } N_1 = \frac{C_{1S}^*}{\tau_C^{(1)}(1)} \left[ \frac{R J_1}{\lambda_{iS} \delta T_\infty} + \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} \lambda_{iS} \delta t_{eS}} LD_{12}^{(S)} \frac{\tau_C^{(3)'}(1) \tau_C^{(1)}(1) - \tau_C^{(1)'}(1) \tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} \right] - \frac{\tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} ,$$

$$\frac{\Gamma_1}{t_{eS}^\alpha} = \frac{R}{\delta \lambda_{iS} T_\infty} J_1 + \frac{n_\infty^2 m_1 m_2}{\rho_{e\infty} \lambda_{iS} \delta t_{eS}} LD_{12}^{(S)} \frac{\tau_C^{(3)'}(1) \tau_C^{(1)}(1) - \tau_C^{(1)'}(1) \tau_C^{(3)}(1)}{\tau_C^{(1)}(1)} ,$$

$$M_0 = \frac{C_1^{(H)} - C_{1\infty}}{t_{eS}^{1+\alpha-\omega} - 1} , \text{ индексом «S» – обозначены значения физических величин,}$$

взятых при средней температуре поверхности частицы равной  $T_{iS}$ , которая определяется из системы уравнений (63), индексом « $\infty$ » – обозначены средние значения физических величин, характеризующие газовую среду в невозмущенном потоке, функции  $\tau_C^{(1)}(1)$ ,  $\tau_C^{(3)}(1)$  – берутся при  $y=1$ , а  $\tau_C^{(1)'}$  и  $\tau_C^{(3)'}$  – первая производная от соответствующей функции.

Зная локальный диффузионный поток можно найти: молекулярный потоки тепла  $Q_T^{(M)}$  и пара  $Q_C^{(M)}$  и диффузионное число Нуссельта  $Nu_D$ :

$$Q_T^{(M)} = \oint_{S_p} j_T \cdot dS_p ,$$

$$Q_C^{(M)} = \oint_{S_p} j_D \cdot dS_p , \quad (69)$$

$$Nu_D = - \int_{-1}^{+1} \left( \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=1} dx ,$$

где  $j_T = -\lambda_e \nabla T_e$ ,  $dS_p$  – дифференциальный векторный элемент поверхности частицы  $S_p$ , направление которого совпадает с направлением внешней нормали.

Диффузионное число Нуссельта характеризует массообмен на границе фаз и является аналогом теплового критерия Нуссельта. В частности для диффузионного числа Нуссельта имеем следующее выражение:

$$Nu_D = 2\rho_{e\infty} D_{e\infty} t_{eS}^{\omega} \left( k_T + \frac{m_1}{m_2} (1 + \alpha - \omega) \frac{C_1^{(H)} - C_{1\infty}}{t_{eS}^{1+\alpha-\omega} - 1} t_{eS}^{1+\alpha-\omega} \right) \frac{\ell^{(S)}}{(1 + \alpha)}. \quad (70)$$

Из полученных выражений видно, на физические величины, которые характеризуют теплообмен существенное влияние оказывает нагрев поверхности частицы, зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

## Заключение

В дипломной работе получены аналитические выражения для полей концентрации, температур вне и внутри крупной неравномерно нагретой испаряющейся капли с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, диффузии, теплопроводности) и плотности бинарной газообразной среды от температуры; выражение для локального диффузионного потока массы, которое позволяет найти физические величины, характеризующие массообмен: молекулярный потоки тепла  $Q_T^{(M)}$  и пара  $Q_C^{(M)}$  и диффузионное число Нуссельта  $Nu_D$ . В частности, полученное диффузионное число Нуссельта показало, что это число существенно зависит от средней температуры поверхности испаряющейся капли, от концентрации молекул насыщенного пара, отношения масс молекул и термодиффузионного фактора.

## Список использованной литературы

1. Н.К. Булатов, А.Б. Лундин Термодинамика необратимых физико-химических процессов. М.: Наука. 1984. 334 с.
2. Дж. Кайзер Статистическая термодинамика неравновесных процессов. М.: Мир. 1990. 607 с.
3. Д.Н. Зубарев Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука. 1971. 415 с.
4. И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. М.: МГУ. 1989. 240 с.
5. И.А. Квасников Термодинамика и статистическая физика. Т. 3. Теория неравновесных систем. М.: МГУ. 2003. 445 с.
6. О.Н. Брюханов, С.Н. Шевченко Тепломассообмен. М.: АСВ, 2005. 460 с.
7. Ю.И. Яламов, В.С. Галоян Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван.: Луйс. 1985. 207 с.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
9. Дж. Хаппель, Г. Бреннер Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
10. Ст. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966. 535 с.
11. К. Борен, Д. Хафмен Поглощение и рассеяние света малыми частицами М.: Мир. 1986. 660 с.
12. О.А. Волковицкий, Ю.С. Седунов, Л.П. Семенов Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Ленинград: Гидрометеоиздат. 1982. 312 с.
13. С.А. Береснев, Ф.Д. Ковалев, Л.Б. Кочнева, В.А. Рунков, П.Е. Суетин, А.А. Черемисин // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16. № 1. С. 52-57.

14. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц. ЖТФ. 1982. Т.52, Вып.11./ С. 2253-2661
15. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.