

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
(Н И У « Б е л Г У »)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**ОСОБЕННОСТИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕ-
ПАДАХ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОКРЕСТНОСТИ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧА-
СТИЦЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Магистерская диссертация

обучающегося по направлению подготовки

03.04.02 Физика

очной формы обучения

группы 07001637

Трубаева Алексея Андреевича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Малай Н.В.

Рецензент:
к.ф.-м.н., доцент кафедры
естественнонаучных
дисциплин, БУКЭП
Стукалов А.А

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава I. Постановка задачи	9
Глава II. Расчет поля температуры внутри крупной аэрозольной частицы	15
Глава III. Метод сращиваемых асимптотических разложений и поле температуры вне частицы	20
Глава IV. Поток тепла на поверхность частицы. Анализ полученных результатов	31
Заключение	35
Список использованной литературы	36

ВВЕДЕНИЕ

Тема исследования: влияние на теплообмен нагрева поверхности частицы и движения среды при значительных относительных перепадах температуры между поверхностью частицы и окружающей ее газообразной средой вдали от нее.

Актуальность исследования: явления переноса представляют собой неравновесные процессы, в результате которых в физической системе происходит пространственный процесс переноса вещества, импульса, энергии, энтропии или какой-либо другой физической величины. Причина процессов переноса – возмущения, нарушающие состояние термодинамического равновесия: наличие пространственных неоднородностей состава, температуры или средней скорости движения частиц системы. Перенос физической величины происходит в направлении, обратном ее градиенту, в результате чего изолированная от внешних воздействий система приближается к состоянию термодинамического равновесия. Явления переноса протекают стационарно, если внешние воздействия поддерживаются постоянными,

При взаимодействии конденсированных сред, у которых различные температуры, происходит обмен энергией. Интенсивность движения частиц среды существенно зависит от ее температуры. Например, если температура тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, то интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой уменьшается. Вследствие такого взаимодействия одно из тел остывает, а другое тело нагревается. Перенос теплоты есть перенос энергии. Поток энергии, который передается частицами тела с более высокой температурой частицам тела с более низкой температурой в литературе принято называть тепловым потоком. Отсюда следует, чтобы возник тепловой поток, т.е. возник процесс теплообмена между различными областями пространства, заполненного вещественной средой, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях, имели место раз-

ные температуры. Перенос энергии осуществляется одним или несколькими носителями. Носителями теплоты могут быть любые вещественные системы: атомы, молекулярные комплексы, вихревые образования, гидродинамические потоки и т.д.

Значимость процесса теплообмена в производстве, природе и т.д. определяется тем, что свойства тел самым существенным образом зависят от их теплового состояния, которое в свою очередь само определяется условиями теплообмена. Эти условия оказывают существенное влияние на процессы изменения состояния вещества, механические, тепловые, магнитные и другие свойства тел. Именно этим и объясняется интенсивное развитие теории теплообмена и то исключительно важное значение, которое ей уделяется в энергетике, химической технологии, авиастроении, медицине, сельском хозяйстве и природе.

В различных областях химических технологий, гидрометеорологии, сельском хозяйстве, медицине, охраны окружающей среды, т.е. в современной науке и технике нашли очень широкое применение многофазные смеси. Наибольший интерес из многофазных смесей представляют так называемые аэродисперсные системы. Аэродисперсные системы состоят из двух фаз, одна из которых есть частицы, а вторая – вязкая газообразная среда. Аэрозолями называют частицы, взвешенные в газообразной среде, а сами частицы – аэрозольными.

Следует также отметить, что среднее расстояние между аэрозольными частицами, встречающихся в аэродисперсных системах, намного больше характерного размера аэрозольной частицы. Это означает, что в таких системах учет влияния аэрозоля на развитие теплообмена в аэродисперсной системе можно проводить, основываясь на знании законов теплообмена и динамики движения с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц. Без знания закономерностей такого теплообмена невозможно математическое моделирование эволюции аэродисперсных систем и решение такого важного и интересного вопроса как целенаправленное воздействие на аэро-

золи. Поэтому изучение закономерностей теплообмена отдельных частиц с бесконечной окружающей вязкой неизотермической газообразной средой является важной актуальной задачей, представляющей значительный теоретический и практический интерес.

В научной литературе аэрозольные частицы по размерам условно делятся на крупные, умеренно крупные и мелкие. Для классификации частиц по размерам применяют критерий Кнудсена [1]:

$$Kn = \frac{\lambda_{cp}}{R},$$

где λ_{cp} – средняя длина свободного пробега молекул газообразной среды; R – характерный размер частицы.

Если $Kn \leq 0.01$, то такие частицы называются крупными, при выполнении неравенства $0.01 \leq Kn \leq 0.3$ – умеренно крупными и при $Kn \gg 1$ – мелкими.

При описании процесса теплообмена будем использовать термин «относительный перепад температуры». Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_{is} и температурой окружающей частицу вязкой газообразной среды вдали от нее T_{∞} к последней. Относительный перепад температуры считается значительным, если имеет место следующая оценка $(T_{is} - T_{\infty})/T_{\infty} \sim (1)$. В этом случае необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры, что существенно осложняет анализ системы газодинамических уравнений и сама вязкая газообразная среда называется неизотермической. Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить к газу и частице, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы равной T_{is} , а индексом « ∞ » – обозначены средние значения физических величин, характеризующие газовую среду в невозмущенном потоке.

Нагрев поверхности частицы до температуры T_{is} осуществляется за счет внутренних источников тепла неоднородно распределенных в ее объеме, плотность этих тепловых источников будем обозначать через q_i . В работе считается, что плотность тепловых источников задана.

Внутренние источники тепла – это модельное представление, которое удобное для описания реальных процессов, сопровождающихся выделением тепла в объеме аэрозольной частицы. Так можно моделировать, например, нагрев поверхности аэрозольной частицы под действием химической реакции, радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения и т.д.

В работе мы не конкретизируем физическую природу плотности тепловых источников $q_i(\mathbf{r})$. Это позволяет рассмотреть процесс теплообмена в общей постановке.

В работе рассматривается стационарный теплообмен между крупной неравномерно нагретой аэрозольной частицы сферической формы и газообразной средой при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности.

Объектом исследования является изучение явления теплообмена при значительных относительных перепадах температуры.

Предметом исследования: влияние на теплоперенос нагрева поверхности аэрозольной частицы и движения газообразной среды с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры.

Цель исследования – получить выражения для полей температур вне и внутри крупной неравномерно нагретой частицы с учетом движения среды и степенного вида коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры., выражения для локального теплового потока и числа Нуссельта.

Исходя из поставленной цели, были сформулированы следующие *задачи исследования*:

- ознакомление с историей развития теплообмена крупных аэрозольных сферической формы в газообразных средах;
- изучить математические методы решения дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных в сферической системе координат;
- получить выражения для полей температур вне и внутри крупной аэрозольной частицы сферической формы, внутри которой действуют источники тепла с учетом степенного вида зависимости коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры при значительных относительных перепадах температуры в ее окрестности;
- провести качественный анализ влияния нагрева поверхности частицы и движения среды на распределения полей температур вне и внутри неравномерно нагретой аэрозольной частицы сферической формы, а также на локальный тепловой поток и тепловое число Нуссельта.

Научная новизна исследования и практическая значимость исследования: проведено теоретическое описание влияния на теплоперенос нагрева поверхности крупной аэрозольной частицы и движения среды, получены выражения для полей температур вне и внутри частицы с учетом степенного вида зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры, а также локальный тепловой поток на частицу и число Нуссельта.

Результаты выпускной квалификационной работы могут быть использованы при проектировании экспериментальных установок, в которых необходимо обеспечить направленное движение аэрозольных частиц; при разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных частиц; при оценке каналов просветления и т.д.

Апробация исследования. Основные результаты выпускной квалификационной работы докладывались на III Международной научно-практической конференции **«Современные проблемы физико-математических наук»** (23 – 26 ноября 2017 г., Орел) и опубликованы в сборнике **«Современные проблемы физико-математических наук»** (Орел – 2017).

Структура работы.

Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы.

ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим неравномерно нагретую крупную твердую сферическую частицу (т.е. частицу, на поверхности которой не происходит фазовый переход) радиуса R , взвешенную в газообразной среде с температурой T_e , плотностью ρ_e и вязкостью μ_e . Поверхность частицы нагревается за счет источников тепла плотностью $q_i(\mathbf{r})$, которые неравномерно распределены в ее объёме. (см. Рис. 1.). Процесс теплообмена будем описывать в сферической системе координат (r, θ, φ) , начало которой связано с центром масс аэрозольной частицы. Крупная аэрозольная частица обтекается бесконечным плоскопараллельным потоком, со скоростью U_∞ ($U_\infty \parallel OZ$). На большом расстоянии от частицы температура потока равна T_∞ , плотность $\rho_{e\infty}$ и вязкость $\mu_{e\infty}$. Задача осесимметрична. В окрестности частицы скорость потока и температура изменяются: скорость из-за возмущающего действия сферы, а температура – из-за неоднородного нагрева поверхности сферы. Поле скорости считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи.

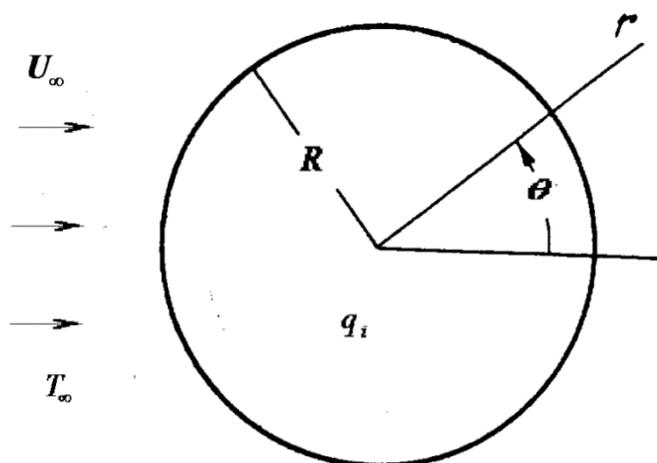


Рис. 1.

При рассмотрении теплообмена сделаны следующие физические допущения:

- характерные значения времен установления распределения полей температур и скорости течения в среде малы по сравнению с характерным временем нагрева ее до максимальной температуры. Это означает, что при теоретическом описании теплообмена в силу малости времен тепловой релаксации процессы теплообмена в системе частица-газ протекают квазистационарно;
- предполагается, что примеси в частице отсутствуют, т.е. она образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом;
- описание теплообмена рассматривается при значительных (больших) относительных перепадах температуры. При описании свойств газообразной среды и частицы используется степенной вид зависимости вязкости, теплопроводности и плотности от температуры [2]: $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta$, $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha$, $\rho_e = \rho_{e\infty} / t_e$, $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\gamma$, где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_\infty)$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_\infty)$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_\infty)$, $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_\infty)$, $t_e = T_e / T_\infty$, $t_i = T_i / T_\infty$, $0,5 \leq \alpha, \beta, \omega \leq 1$, $-1 \leq \gamma \leq 1$;
- коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газообразной среды, что имеет место для большинства газообразных сред. Это допущение приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью по углу θ в системе «частицы–газообразная среда» (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и, следовательно, вязкость связана только с температурой $t_{e0}(r)$, т.е. $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta$. При этом $t_e(r, \theta) = t_{e0}(r) + \delta t_e(r, \theta)$, $\delta t_e(r, \theta) \ll t_{e0}(r)$, $\delta t_e(r, \theta)$, $t_{e0}(r)$ определяются из решения тепловой задачи. При таком допущении можно рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется с помощью граничных условий.

Поскольку идет нагрев частицы, т.е. поглощаемая энергия переходит в тепловую, то через функцию $q_i(\mathbf{r})$ обозначим плотность неоднородно распределенных тепловых источников внутри объёма частицы. Так как на решение задачи влияет только температура частицы, а не способ нагрева, то считаем эту функцию заданной.

Таким образом, с учетом всех выше описанных допущений, распределение полей температуры вне (T_e) и внутри частицы (T_i), описывается следующей системой уравнений [3,4]:

$$\rho_e c_p (\mathbf{U}_e \nabla) T_e = \text{div}(\lambda_e \nabla T_e), \quad (1.1)$$

$$\text{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i. \quad (1.2)$$

Здесь c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; λ_i, λ_e – коэффициенты теплопроводности газа и частицы; \mathbf{U}_e – массовая скорость газа

Система дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2) решается со следующими граничными условиями в сферической системе координат ($y = r/R, \theta, \varphi$) [1,3]. На поверхности частицы $y = 1$, учитываются равенство температур (1.3) и равенство потоков тепла с учетом излучения (1.4):

$$T_e = T_i, \quad (1.3)$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_\infty^4). \quad (1.4)$$

Здесь σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, σ – интегральная степень черноты вещества частицы.

На большом расстоянии от частицы ($y \rightarrow \infty$) температура и давление газообразной среды равна температуре и давлению невозмущенного потока:

$$T_e = T_\infty, \quad P_e = P_\infty. \quad (1.5)$$

В центре частицы ($y \rightarrow 0$) нужно учесть конечность температуры:

$$T_i \neq \infty. \quad (1.6)$$

Граничные условия для компонент массовой скорости мы не приводим. Как было отмечено выше, что поле скорости считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи. Это позволяет рассматривать процесс теплообмена для общего случая, т.е. для установившегося движения крупной твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы. Установившееся движение означает, что на частицу кроме силы вязкого сопротивления среды (силы Стокса) действует другая сила, направленная противоположно силе сопротивления среды. Это может быть силы тяжести (гравитационное осаждение), термофоретическая сила (термофорез), фотофоретическая сила (фотофорез) и т.д.

С учетом выше сказанного, в дальнейшем нам потребуется выражения для компонент массовой скорости U_θ^e и U_r^e , которые взяты из работы [5,6], удовлетворяющие условию ограниченности решения при $y \rightarrow \infty$, имеют вид:

$$U_r^e = U_\infty \cos \theta G(y), \quad G(y) = A_1 G_1 + A_2 G_2 + G_3, \quad (1.7)$$

$$U_\theta^e = -U_\infty \sin \theta g(y), \quad g(y) = A_1 G_4 + A_2 G_5 + G_6. \quad (1.8)$$

Здесь $f = -\frac{\ell}{y(1+\alpha)}$, $G_k = \left(1 + \frac{\ell}{2(1+\alpha)}\right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G_{k-3}^I$ ($k = 4, 5, 6$), $f^I, f^{II}, G_1^I,$

G_2^I, G_3^I – первые, вторые производные по y от соответствующих функций.

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} \ell^n, \quad G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3,n} \ell^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y),$$

$$G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n} \ell^n + \omega_2 \ln(y) G_1(y).$$

Значения коэффициентов $C_{1,n}$ ($n \geq 1$), $C_{2,n}$ ($n \geq 3$) и $C_{3,n}$ ($n \geq 4$) определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$C_{1,n} = \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \left\{ [(n-1)(3n^2 + 13n + 8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)] C_{1,n-1} - \right. \\ \left. - [(n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3)] C_{1,n-2} + \right. \\ \left. + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{1,n-3} \right\}$$

$$C_{2,n} = \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \left\{ [(n-1)(3n^2 + n - 6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2] C_{2,n-1} - [\gamma_3(n+1) + \right. \\ \left. + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1 n(n-2) + \gamma_2(n-2)] C_{2,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \right. \\ \left. + \gamma_1(n-3)] C_{2,n-3} + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k - 6 \frac{(-\gamma_4)(1-\gamma_4) \cdot (n-1-\gamma_4)}{n!} \right\}$$

$$C_{3,n} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left\{ (n-1)[3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2] C_{3,n-1} - [(n-1)(n-2)(3n-4) + \right. \\ \left. + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3] C_{3,n-2} + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{3,n-3} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \right\}$$

$$\Delta_k = (3k^2 + 16k + 15) C_{1,k} - ((k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2) C_{1,k-1} +$$

$$+ (3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3) C_{1,k-2}, \quad \gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_2 = 2 \frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}.$$

При вычислении коэффициентов $C_{1,n}$, $C_{2,n}$ и $C_{3,n}$ по рекуррентным формулам необходимо учитывать, что $C_{1,0} = 1$, $C_{2,0} = 1$, $C_{3,1} = 0$, $C_{2,2} = 1$,

$$C_{2,1} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4), \quad \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2), \quad \gamma_4 = \beta/(1+\alpha),$$

$$\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15} \left[\frac{1}{4} (2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4)(4 + 3\gamma_1 + \gamma_2) + 3\gamma_3 + 3\gamma_4(\gamma_4 - 1) \right], \quad C_{3,2} = \frac{1}{4} \gamma_3,$$

$C_{3,3} = 1, C_{3,0} = 1, C_{1,n}, C_{2,n}$ и $C_{3,n}$ при $n < 0$ равны нулю.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяются из граничных условий на поверхности аэрозольной частицы.

Перейдем к безразмерным переменным в уравнениях и граничных условиях, введя безразмерные координату, скорость и температуру следующим образом: $y_k = x_k/R, t = T/T_\infty, V_e = U_e/U_\infty, V_i = U_i/U_\infty$.

Материальные постоянные $\mu_{e\infty}, \rho_{e\infty}, \lambda_{e\infty}$ и не меняющиеся в процессе массообмена параметры $T_{e\infty}, R$ и U_∞ являются определяющими. Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию, которую в научной литературе называют числом Рейнольдса: $Re = (\rho_{e\infty} R U_\infty) / \mu_{e\infty}$.

При $\varepsilon \ll 1$ решение уравнений гидродинамики будем искать в виде

$$V_e = V_e^{(0)} + \varepsilon V_e^{(1)} + \dots, \quad P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots \quad (\varepsilon = Re). \quad (1.9)$$

Для нахождения локального теплового потока и теплового числа Нуссельта необходимо знать поля температур вне и внутри неравномерно нагретой частицы и при их нахождении мы ограничимся до первого порядка малости.

ГЛАВА II. РАСЧЕТ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ КРУПНОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Найдем распределение температуры внутри частицы. Для этого необходимо решить следующее уравнение

$$\operatorname{div}(\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad \lambda_i = \lambda_{i\infty} T_{\infty}, \quad (2.1)$$

с граничным условием

$$T_i \neq \infty. \quad (2.2)$$

В безразмерном виде оно принимает вид:

$$\operatorname{div}(t_i^\gamma \nabla t_i) = -\frac{q_i R^2}{T_{\infty} \lambda_{i\infty}}. \quad (2.3)$$

Здесь $t_i = \frac{T_i}{T_{\infty}}$, $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^\gamma$.

Будем искать решение уравнения (2.3) методом разделения переменных по полиномам Лежандра [7]. Для этого сначала разложим правую часть уравнения (2.3) по полиномам Лежандра:

$$-\frac{q_i R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y) P_n(x), \quad x = \cos \theta. \quad (2.4)$$

Неизвестная функция $q_{in}(y)$ определяется следующим образом:

умножим выражение (2.4) на полином $P_m(x) dx$ и проинтегрируем от -1 до +1

$$-\int_{-1}^1 P_m(x) \frac{q_i R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(y) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx,$$

и используя, свойство ортогональности полиномов Лежандра [7]

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0; & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}; & n = m \end{cases}$$

имеем следующее выражение для функция $q_{in}(y)$

$$q_{in}(y) = -\frac{2n+1}{2} \frac{R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty-1}} \int_0^1 q_i P_n(x) dx. \quad (2.5)$$

В дальнейшем нам потребуются явный вид функций $q_{i0}(y)$ и $q_{i1}(y)$

$$q_{i0}(y) = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty-1}} \int_0^1 q_i(r, \theta) dx, \quad q_{i1}(y) = -\frac{3}{2} \frac{R^2}{\lambda_{i\infty} T_{\infty-1}} \int_0^1 q_i(r, \theta) dx. \quad (2.6)$$

Функцию $t_i(y, \theta)$ будем искать в виде:

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta). \quad (2.7)$$

Линеаризуем выражение стоящее в левой части уравнения (2.3). До первого порядка малости по ε имеем:

$$t_i^\gamma = (t_{i0} + \varepsilon t_{i1})^\gamma = t_{i0}^\gamma \left(1 + \frac{\varepsilon t_{i1}}{t_{i0}}\right)^\gamma \approx t_{i0}^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\varepsilon t_{i1}}{t_{i0}}\right) = t_{i0}^\gamma + \varepsilon \gamma t_{i0}^{\gamma-1} t_{i1}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.3), получаем систему из двух уравнений для нахождения функций $t_{i0}(y)$ и $t_{i1}(y, \theta)$

$$\operatorname{div}(t_{i0}^\gamma \nabla t_{i0}) = q_{i0}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div}(\gamma t_{i0}^{\gamma-1} t_{i1} \nabla t_{i0} + \nabla t_{i1} t_{i0}^\gamma) = q_{i1} \cos \theta. \quad (2.9)$$

Найдем решение уравнения (2.8). Введем новую функцию

$$f_0(y) = t_{i0}^{1+\gamma}(y), \quad (2.10)$$

и тогда наше уравнение (2.8) принимает вид:

$$\Delta f_0 = (1 + \gamma) q_{i0}. \quad (2.11)$$

В сферической системе координат, учитывая, что $f_0 = f_0(y)$ имеем:

$$\frac{d^2 f_0}{d y^2} + \frac{2}{y^2} \frac{d f_0}{d y} = (1 + \gamma) q_{i0}(y) . \quad (2.12)$$

Таким образом, мы получили неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Из теории решения обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение обыкновенного неоднородного уравнения второго порядка [8]

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

имеет вид [8]

$$y(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \varphi_2(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1(x) f(x)}{W(x)} dx - \varphi_1(x) \int_{x_0}^x \frac{\varphi_2(x) f(x)}{W(x)} dx, \quad (2.13)$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b) , φ_1 , φ_2 – функции, являющиеся решением соответствующего однородного уравнения, а W – определитель Вронского. Точка $x_0 \in (a, b)$ и выбирается таким образом, чтобы соответствующие интегралы легко вычислялись.

В нашем случае функции $\varphi_1 = 1$; $\varphi_2 = \frac{1}{y}$; определитель Вронского

$W = -\frac{1}{y^2}$. Следовательно, для функции $f_0(y)$ имеем:

$$f_0(y) = B_0 + \frac{C_0}{y} + \frac{1}{y} \int_1^y y^2 (1 + \gamma) q_{i0} dy - \int_1^y y (1 + \gamma) q_{i0} dy .$$

С учетом выражения (2.10) получаем следующее выражение для функции $t_{i0}(y)$:

$$t_0(y) = \left(B_0 + \frac{C_0}{y} - \frac{1}{y} \int_1^y \Phi_0 dy + \int_1^y \frac{\Phi_0}{y} dy \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (2.14)$$

где $\Phi_0 = -\frac{R^2 y^2 (1+\gamma)}{2\lambda_{i\infty} T_\infty} \int_{-1}^1 q_i dx$.

Константа C_0 находится из граничного условия конечности температуры (2.2) и она имеет вид:

$$C_0 = \int_1^0 y \Phi_0 dy,$$

которую можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_1^0 y^2 (1+\gamma) q_{i0}(y) dy = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{T_\infty \lambda_{i\infty}} (1+\gamma) \int_{-1}^1 \int_1^0 q_i y^2 dy dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{R^2 (1+\gamma)}{T_\infty \lambda_{i\infty}} \int_1^0 \int_{-\pi}^0 q_i y^2 dx (-\sin \theta) d\theta = -\frac{1}{2} \frac{R^2 (1+\gamma)}{T_\infty \lambda_{i\infty}} \int_R^0 \int_\pi^0 q_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{dr}{R} (-\sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 (1+\gamma)}{R^3 T_\infty \lambda_{i\infty}} \int_0^R \int_0^\pi q_i r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{1}{4\pi} \frac{R^2 (1+\gamma)}{R^3 T_\infty \lambda_{i\infty}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi q_i r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \frac{R^2 (1+\gamma)}{T_\infty \lambda_{i\infty}} \frac{1}{V} \int_V q_i dV, \end{aligned}$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad x = \cos \theta.$$

Таким образом,

$$C_0 = \frac{1+\gamma}{4\pi R \lambda_{i\infty} T_\infty} \int_V q_i dV. \quad (2.15)$$

Перейдем к нахождению первого приближения для поля температуры внутри частицы. Исходя из вида уравнения (2.9), будем искать решение для функции $t_{i1}(y, \theta)$ в виде:

$$t_{i1}(y, \theta) = \frac{1}{t_{i0}^\gamma(y)} f_1(y, \theta). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в уравнение (2.9), получаем

$$\Delta f_1 = q_{i1}(y)\cos\theta. \quad (2.17)$$

Решение уравнения (2.17) ищем в виде

$$f_1(y, \theta) = \tau_i(y)\cos\theta, \quad (2.18)$$

и, подставляя (2.18) в уравнение (2.17) в сферической системе координат получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2\tau_i}{dy^2} + \frac{2}{y}\frac{d\tau_i}{dy} - 2\frac{\tau_i}{y^2} = q_{i1}. \quad (2.19)$$

Применим к уравнению (2.19) формулу (2.13). Заметим, что в нашем случае $\varphi_1 = y$, $\varphi_2 = 1/y^2$, $W = -3/y^2$.

Таким образом, имеем следующее выражение для функции $t_{i1}(y, \theta)$:

$$t_{i1}(y) = \frac{N_0}{t_{i0}^\gamma} + \frac{\cos\theta}{t_{i0}^\gamma} \left(B_1 y + \frac{C_1}{y^2} + y \int_1^y \frac{\Phi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y y \Phi_1 dy \right). \quad (2.20)$$

Константа C_1 также находится, как и C_0 (из граничного условия конечности температуры) и равна:

$$C_1 = \frac{R}{3\lambda_{i\infty} T_\infty} J_1, \quad (2.21)$$

где $J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$, $z = r\cos\theta$, $\int_V q_i z dV$ – дипольный момент плотности теп-

ловых источников, $\Phi_1 = -\frac{R^2 y^2}{2\lambda_{i\infty} T_\infty} \int_{-1}^{+1} q_i x dx$.

ГЛАВА III. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ И ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНЕ ЧАСТИЦЫ

Исследование обыкновенных дифференциальных уравнений показали, что получить равномерно пригодные разложения в случаях, когда в некоторых областях изменения независимых переменных, где зависимые переменные испытывают резкие изменения обычными методами (например, метод возмущения, метод растягивания координат и т.п.) невозможно [9].

Один из методов, связанных с этой проблемой, заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) с использованием исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), описывающих эти резкие изменения и использующих увеличенные масштабы. Внешние разложения становятся непригодными в областях резких изменений, в то время как пригодность внутренних разложений нарушается при выходе из этих областей. Чтобы связать эти разложения, используют так называемую процедуру сращивания [9].

Сращивание представляет собой основную черту метода сращиваемых асимптотических разложений [9]. Возможность сращивания основана на существовании *области перекрытия*, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Реализация этой замечательной возможности осуществима только для возмущения параметра, которое неоднородно в координатах, или для возмущения координаты, которое неоднородно по другим координатам. Нельзя срастить два различных параметрических разложения, таких, как разложение для больших и малых значений числа Рейнольдса, числа Маха и т.д. Такие ряды могут перекрываться в том смысле, что они имеют общую область сходимости, но процесс аналитического продолжения дает только приближенное соотношение для некоторого конечного числа членов [9].

Воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений для нахождения поля температуры в окрестности неравномерно нагретой частицы.

Если перейти к безразмерным величинам, то конвективное уравнение теплопроводности (1.1) принимает вид:

$$\varepsilon \frac{\text{Pr}_\infty}{t_e} (\mathbf{V}_e \nabla) t_e = \text{div}(t_e^\alpha \nabla t_e), \quad t_e = T_e/T_\infty, \quad (3.1)$$

с граничным условием

$$t_e(y \rightarrow \infty, \theta) = 1. \quad (3.2)$$

Решать это уравнение будем методом сращиваемых асимптотических разложений. Внутренние и внешние асимптотические разложения безразмерной температуры t_e будем искать в виде:

– внутренние асимптотические разложения

$$t_e(y, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y, \theta), \quad (f_0(\varepsilon) = 1), \quad (3.3)$$

– внешние асимптотические разложения

$$t_e^*(\xi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi, \theta), \quad (3.4)$$

где $\xi = \varepsilon y$ – "сжатая" радиальная координата [9].

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности продолжения асимптотических разложений того и другого в некоторую промежуточную область, т.е.

$$t_e(y \rightarrow \infty, \theta) = t_e^*(\xi \rightarrow 0, \theta). \quad (3.6)$$

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнение для температуры t_e^* :

$$\frac{\text{Pr}_\infty}{t_e^*} (V_e^* \nabla^*) t_e^* = \text{div}(t_e^{\alpha*} \nabla t_e^*), \quad t_e^* \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

$$\text{и} \quad V_e^*(\xi, \theta) = \mathbf{n}_z + \varepsilon V_e^{(1)*}(\xi, \theta) + \dots, \quad P_e^*(\xi, \theta) \rightarrow P_\infty \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Здесь $V_r^{e*} = V_r^{e*}(\xi, \theta)$, $V_\theta^{e*} = V_\theta^{e*}(\xi, \theta)$; $t_e^* = t_e^*(\xi, \theta)$; $\text{Pr}_\infty = (\mu_{e\infty} c_{pe}) / \lambda_{e\infty}$ – число Прандтля, \mathbf{n}_z – единичный вектор в направлении оси Oz.

Построение решений начинается с определения нулевого члена внешнего разложения. В данном случае, очевидно, задаче удовлетворяет решение:

$$t_e^* = t_{e0}^* = 1. \quad (3.9)$$

Найдем нулевой член внутреннего разложения. При $\varepsilon = 0$ имеем следующее уравнение:

$$\text{div}(t_e^\alpha \nabla t_e) = 0. \quad (3.10)$$

Из (3.3) имеем:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y, \theta).$$

Недостающие постоянные интегрирования определяются из условия сращивания (3.6). В случае нулевого приближения для внутреннего разложения оно имеет вид:

$$t_{e0}(y \rightarrow \infty, \theta) = 1. \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что

$$t_{e0}(y, \theta) = t_{eo}(y). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в уравнение (3.10) в сферической системе координат имеем:

$$\frac{1}{y^2} \frac{d}{dy} \left(y^2 \frac{dt_{eo}^{1+\alpha}}{dy} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Интегрируя уравнение (3.13) два раза, получаем:

$$t_{e0}(y) = \left(D_0 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} .$$

Постоянная интегрирования D_0 определяется из условия сращивания (3.11). В нашем случае, очевидно, что $D_0 = 1$.

Таким образом, мы нашли нулевое приближение для внутреннего разложения и оно имеет вид:

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} . \quad (3.14)$$

Постоянная интегрирования Γ_0 определяется из граничных условий на поверхности неравномерно нагретой частицы (1.3) – (1.4).

Найдем первое приближение для внешнего разложения. До членов первого приближения внешнего разложения из (3.4) имеем:

$$t_e^*(\xi, \theta) = 1 + f_1^*(\varepsilon) t_{e1}^*(\xi, \theta) . \quad (3.15)$$

Из (3.14) видно, что для нахождения первого приближения внешнего разложения необходимо сначала определить явный вид коэффициента $f_1^*(\varepsilon)$. Для этого в решении (3.14) перейдем к внешней переменной $\xi = \varepsilon y$. Тогда из (3.14) следует, что $f_1^*(\varepsilon) = \varepsilon$ и, следовательно

$$t_e^*(\xi, \theta) = 1 + \varepsilon t_{e1}^*(\xi, \theta) . \quad (3.16)$$

Подставляя выражение (3.16) в уравнение (3.7), учитывая (3.8) и удерживая члены порядка ε , получаем:

$$\text{Pr}_\infty \left(x \frac{\partial t_{e1}^*}{\partial \xi} + \frac{1-x^2}{\xi} \frac{\partial t_{e1}^*}{\partial x} \right) = \Delta^* t_{e1}^* \quad (3.17)$$

$$\xi \rightarrow \infty, \quad t_{e1}^* \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

В уравнении (3.17) сделаем замену переменной – $z = \text{Pr}_\infty \xi$ и решение для функции t_{e1}^* будем искать в следующем виде:

$$t_{e1}^* = f(z, x) \exp\left\{\frac{1}{2}zx\right\}. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в уравнение (3.17) и после преобразований получаем уравнение Гельмгольца [7] для нахождения функции $f(z, x)$:

$$\Delta f - \frac{1}{4}f = 0. \quad (3.20)$$

Решение уравнения (3.20) будем искать методом разделения переменным (по полиномам Лежандра):

$$f(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) P_n(x). \quad (3.21)$$

После подстановки (3.21) в уравнение (3.20) и, учитывая свойства ортогональности полиномов Лежандра, получаем:

$$z^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial f_n}{\partial z} - \left(n(n+1) + \frac{z^2}{4} \right) f_n = 0. \quad (3.22)$$

Если в уравнении (3.22) перейти к новой переменной $v = z/2$, то уравнение (3.22) принимает вид:

$$v^2 \frac{\partial^2 f_n}{\partial v^2} + 2v \frac{\partial f_n}{\partial v} - \left(n(n+1) + \frac{v^2}{4} \right) f_n = 0. \quad (3.23)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное, решением которого являются модифицированные сферические функции Бесселя [10]:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2v}} I_{n+\frac{1}{2}}(v), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2v}} K_{n+\frac{1}{2}}(v). \quad (3.24)$$

Заметим, что при $v \rightarrow \infty$ $\sqrt{\frac{\pi}{2v}} I_{n+\frac{1}{2}}(v) \rightarrow \infty$, $\sqrt{\frac{\pi}{2v}} K_{n+\frac{1}{2}}(v) \rightarrow 0$, т.е.

функция $\sqrt{\frac{\pi}{2v}} I_{n+\frac{1}{2}}(v)$ не удовлетворяет граничному условию (3.18).

Общее решение уравнения (3.17), удовлетворяющее граничному условию (3.18) имеет вид:

$$t_{e1}^*(\xi, \theta) = \left(\frac{\pi}{\text{Pr}_\infty \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\text{Pr}_\infty \xi}{2} x \right) \sum_{n=0}^{\infty} L_n K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\text{Pr}_\infty \xi}{2} \right) P_n(x), \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{\pi}{\text{Pr}_\infty \xi} \right)^{\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\text{Pr}_\infty \xi}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{\text{Pr}_\infty \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\text{Pr}_\infty \xi}{2} \right) \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)! m! (\text{Pr}_\infty \xi)^m}$$

Произвольные постоянные L_n должны быть определены в результате срачивания, которое в данном случае заключается в сравнении поведения функции (3.25) при $\xi \rightarrow 0$ и функции (3.14) при $y \rightarrow \infty$, т.е. условие срачивания имеет вид $t_e(y \rightarrow \infty, \theta) = t_e^*(\xi \rightarrow 0, \theta)$. Нетрудно установить, что

$$t_e(y \rightarrow \infty, \theta) \approx \left(1 + \varepsilon \frac{\Gamma_0}{\xi} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \approx 1 + \varepsilon \frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi},$$

$$t_e^*(\xi \rightarrow 0, \theta) \approx 1 + \varepsilon \left(\frac{\pi}{\text{Pr}_\infty \xi} \right) \left\{ 1 + \frac{\text{Pr}_\infty \xi}{2} \xi(x-1) + \dots \right\} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{(2n)!}{n! (\text{Pr}_\infty \xi)^m} P_n(x),$$

и видим: $L_0 = \frac{\text{Pr}_\infty \Gamma_0}{\pi(1+\alpha)}$, $L_n = 0 (n \geq 1)$. Следовательно,

$$t_{e1}^*(\xi, \theta) = \frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi} \exp\left\{ \frac{\text{Pr}_\infty \xi}{2} \xi(x-1) \right\}. \quad (3.26)$$

Найдем первое приближение для внутреннего разложения. Из (3.3) имеем:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + f_1(\varepsilon) t_{e1}(y, \theta) \quad (3.27)$$

Для определения явного вида коэффициента $f_1(\varepsilon)$ поступим аналогичным образом, что и для $f_1^*(\varepsilon)$. Видим – $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$. Таким образом, первое приближение для внутреннего разложения равно:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta) . \quad (3.28)$$

Таким образом, мы видим, что до первого порядка малости имеем следующие выражения:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta) , \quad (3.29)$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta) . \quad (3.30)$$

Для нахождения локального теплового потока и теплового числа Нуссельта постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур вне и внутри частицы должны быть определены. Они определяются из граничных условий на поверхности частицы. С учетом выражений (3.29) и (3.30) линеаризуем граничные условия на поверхности частицы:

До членов $\sim \varepsilon$ получаем следующие линеаризованные граничные условия.

– нулевое приближение:

$$t_{e0} = t_{i0}, \quad \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} = \frac{\partial t_{i0}}{\partial y} + \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{i0}^4 - 1) \quad (3.31)$$

– первое приближение:

$$t_{e1} = t_{i1}, \quad \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \left[\frac{\partial t_{e1}}{\partial y} + \frac{\alpha}{t_{e0}} \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} t_{e1} \right] = \frac{\partial t_{i1}}{\partial y} + \frac{\omega}{t_{i0}} t_{i1} \frac{\partial t_{i0}}{\partial y} + 4\sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} t_{i0}^3 t_{i1} \quad (3.32)$$

Постоянные интегрирования Γ_0, B_0 , входящие в нулевые приближения определяются из граничных условий на поверхности частицы (3.31) и определяются из системы уравнений (3.33).

Среднее значение температуры поверхности частицы T_{iS} определяется из решения следующей трансцендентной системы уравнений:

$$\begin{cases} t_{iS} = t_{eS}, \\ \frac{\ell^{(S)}}{1+\alpha} \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{iS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} (t_{iS}^4 - 1), \end{cases} \quad (3.33)$$

в котором $\lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha$, $\lambda_{iS} = \lambda_{i\infty} t_{iS}^\omega$, $t_{iS} = t_{i0}|_{y=1}$, $t_{eS} = t_{e0}|_{y=1}$, $T_{iS} = t_{iS}T_{e\infty}$,

$$T_{eS} = t_{eS}T_{e\infty}, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i(r, \theta) dV, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \ell^{(S)} = \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0}, \quad \Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1.$$

В (3.33) интегрирование ведется по всему объему частицы.

Для $t_{e1}(y, \theta)$ в двучленном внутреннем разложении получаем из (3.1) (оставляя члены $\sim \varepsilon$) следующую задачу:

$$\frac{\text{Pr}_\infty}{t_{e0}} (V_e \nabla) t_{e0} = \Delta (t_{e0}^\alpha t_{e1}), \quad (3.34)$$

$$t_{e1} = t_{i1}, \quad \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \left[\frac{\partial t_{e1}}{\partial y} + \frac{\alpha}{t_{e0}} \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} t_{e1} \right] = \frac{\partial t_{i1}}{\partial y} + \frac{\omega}{t_{i0}} t_{i1} \frac{\partial t_{i0}}{\partial y} + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{iS}} t_{i0}^3 t_{i1}. \quad (3.35)$$

Чтобы определить поведение функции $t_{e1}(y \rightarrow \infty, \theta)$, сравним двучленные внутренние и внешние разложения:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad t_e^*(\xi, \theta) = 1 + \varepsilon \frac{\Gamma_0}{(1+\alpha)\xi} \exp\left\{ \frac{\text{Pr}_\infty}{2} \xi(x-1) \right\},$$

в результате сращивания получаем:

$$t_{e1}(y \rightarrow \infty, \theta) = \frac{\omega_3}{2} (x-1), \quad \omega_3 = \frac{\Gamma_0 \text{Pr}_\infty}{1+\alpha}. \quad (3.36)$$

Таким образом, граничное условие для первого приближения поля температуры вдали от частицы имеет вид (3.36).

Из (3.36) видим, что для нахождения $t_{e1}(y, \theta)$ необходимо сначала определить поле скорости, т.е. решить гидродинамическую задачу. Как мы отмечали в первой главе оно считается заданным и имеет вид (1.7) – (1.8).

Выражения (1.7) – (1.8) можно записать в компактном виде:

$$V_r^e(y, \theta) = G(y) \cos \theta, \quad V_\theta^e(y, \theta) = -g(y) \sin \theta. \quad (3.37)$$

Поскольку поле скорости нам известно, то мы можем найти первое приближение для внутреннего разложения. Решение (3.34) ищем в виде:

$$t_{e1} = \frac{1}{t_{e0}^\alpha} [\zeta(y) + \tau_e(y) \cos \theta], \quad (3.38)$$

с краевыми условиями

$$\zeta(y) \rightarrow -\frac{\omega_3}{2}, \quad \tau_e(y) \rightarrow \frac{\omega_3}{2} \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (3.39)$$

$$\zeta(y) = \text{const}, \quad \tau_e(y) = \text{const} \quad \text{при } y = 1. \quad (3.40)$$

Подставляя (3.38) в (3.34), убеждаемся, что переменные разделяются и

$$\zeta(y) = \frac{\omega_3}{2} \left(\frac{N_1}{y} - 1 \right), \quad (3.41)$$

а $\tau_e(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \tau_e}{d y^2} + \frac{2}{y} \frac{d \tau_e}{d y} - \frac{\tau_e}{y^2} = -\frac{\omega_3(1-l)}{y^2} G(y). \quad (3.42)$$

Таким образом, мы получили неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения функции $\tau_e(y)$. Интегрируя, получаем:

$$\tau_e(y) = D_1 y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega}{3} \left[\tau_3 + A_2 \frac{\tau_2}{y} - A_1 \frac{\tau_1}{y^3} \right], \quad (3.43)$$

где

$$\tau_1(y) = (1-l) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(1)} l^n}{n+1} - \frac{(1-l)^4}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(2)} l^n}{n+4}; \quad \omega = \frac{\Gamma_0 \text{Pr}_{\infty}}{1+\alpha}$$

$$\tau_2(y) = \frac{1}{1-l} \left[1 + l \ln l + l C_1^{(2)} (l - \ln l) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+2}^{(2)} l^{n+2}}{n+1} \left(1 - \frac{n+1}{n+2} l \right) \right] + (1-l)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(3)} l^n}{n+2} -$$

$$- \frac{\omega_2 (1-l)}{y^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n+1} (\Delta_n^{(1)} \ln y + \Omega_n^{(1)}) - \frac{(1-l)^3}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n+4} (\Delta_n^{(2)} \ln y + \Omega_n^{(2)}) \right]$$

$$\tau_3(y) = \frac{1}{(1-l)^2} \left[\frac{1}{2} - 2l - l^2 \ln l + l^2 C_2^{(3)} \left(2l - \ln l - \frac{l^2}{2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+3}^{(3)} l^{n+3}}{n+1} \left(1 - 2 \frac{n+1}{n+2} l + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{n+1}{n+3} l^2 \right) \right] + (1-l) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^{(4)} l^n}{n+1} - \frac{\omega_3 (1-l)}{y^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n+1} (\Delta_n^{(1)} \ln y + \Omega_n^{(1)}) - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-l)^3}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^n}{n+4} (\Delta_n^{(2)} \ln y + \Omega_n^{(2)}) \right],$$

$$\Delta_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n C_k^{(1)}, \quad \Omega_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_k^{(1)}}{k+1}, \quad \Omega_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_k^{(2)}}{k+4}, \quad \Delta_n^{(4)} = \sum_{k=0}^n C_k^{(3)},$$

$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n (n-k-1)(n-k+2)(n-k+3) C_k^{(1)}, \quad \Delta_n^{(3)} = \sum_{k=0}^n (n-k+1) C_k^{(2)}.$$

Поскольку $l \ll 1$, то при интегрировании использовались следующие формулы:

$$(1+l)^k = 1 + kl + \frac{k(k-1)}{2} l^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)! n!} l^n, \quad \frac{1}{1-l} = \sum_{n=0}^{\infty} l^n, \quad \frac{1}{1+l} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n l^n,$$

$$(1-l)^k = 1 - kl + \frac{k(k-1)}{2!} l^2 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k!}{(k-n)! n!} l^n, \quad \frac{1}{1+l^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n l^{2n},$$

$$\ln(1+l) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{l^{n+1}}{n+1},$$

$$(1+l)^{-k} = 1 - kl + \frac{k(k-1)}{2!} l^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)! n!} l^n, \quad \ln(1-l) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^{n+1}}{n+1},$$

$$(1-l)^{-k} = 1 + kl + \frac{k(k-1)}{2!} l^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{(k-1)! n!} l^n, \quad \ln l =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(l-1)^n}{n},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\sum_{k=0}^n C_k b_{n-k} \right).$$

Следовательно, первое приближение для внутреннего разложения, удовлетворяющее граничному условию (3.39) имеет вид:

$$t_{e1}(y, \theta) = \frac{1}{t_{e0}^\alpha} \frac{\omega_3}{2} \left(\frac{N_1}{y} - 1 \right) + \frac{\cos \theta}{t_{e0}^\alpha} \left[\frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_3}{3} \left(\tau_3 + A_2 \frac{\tau_2}{y} - A_1 \frac{\tau_1}{y^3} \right) \right]. \quad (3.44)$$

Найдем постоянные интегрирования, входящие в (3.44) и (2.20). Подставляя (4.44) и (2.20) в граничные условия (3.35), имеем:

$$N_0 = 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{es}} t_{is}^3 - 1, \quad N_1 = \frac{t_{is}^\gamma}{t_{es}^\alpha} \frac{\omega_3}{2} \left(4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{es}} t_{is}^3 - 2 \right),$$

$$\frac{\Gamma_1}{t_{es}^\alpha} = \frac{1}{t_{es}^\alpha} \frac{\omega_3}{3\delta} \left\{ \frac{\lambda_{es}}{\lambda_{is}} \tau_3'(1) - \tau_3(1) \left(1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{is}^3 \right) + A_2 \left[\frac{\lambda_{es}}{\lambda_{is}} (\tau_2'(1) - \tau_2(1)) - \right. \right.$$

$$\left. - \tau_2(1) \left(1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{is}^3 \right) \right] - A_1 \left[\frac{\lambda_{es}}{\lambda_{is}} (\tau_1'(1) - 3\tau_1(1)) - \tau_1(1) \left(1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{is}^3 \right) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{3C_1}{\delta t_{is}^\gamma}, \quad \delta = 1 + \frac{2\lambda_{es}}{\lambda_{is}} + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{is}^3.$$

Здесь индекс "S" означает, что физические величины берутся при средней относительной температуре поверхности частицы T_{is} , определяемой из выражения (3.33); функции $\tau_1^{(1)}(y)$, $\tau_1^{(2)}(y)$ и т.д. берутся при $y=1$, а $\tau_1^{(1)'}(y)$ и т.д. первая производная от соответствующих функций.

ГЛАВА IV. ПОТОК ТЕПЛА НА ПОВЕРХНОСТЬ ЧАСТИЦЫ. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В третьей главе получены общие выражения для распределения полей температур вне и внутри неравномерно нагретой крупной твердой частицы сферической формы. При получении этих выражений было учтено: степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры и влияние движения среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности) и имеют следующий вид:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad (4.1)$$

$$t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), \quad (4.2)$$

$$\text{где } t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i\infty}T_\infty y} J_0 - \frac{1}{y} \int_y^1 \Phi_0 dy + \int_y^1 \frac{\Phi_0}{y} dy\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$$

$$t_{e1}(y, \theta) = \frac{1}{t_{e0}^\alpha} \frac{\omega_3}{2} \left(\frac{N_1}{y} - 1\right) + \frac{\cos\theta}{t_{e0}^\alpha} \left[\frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_3}{3} \left(\tau_3 + A_2 \frac{\tau_2}{y} - A_1 \frac{\tau_1}{y^3}\right)\right].$$

$$t_{i1}(y) = \frac{N_0}{t_{i0}^\gamma} + \frac{\cos\theta}{t_{i0}^\gamma} \left(B_1 y + \frac{C_1}{y^2} + y \int_1^y \frac{\Phi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y y \Phi_1 dy\right).$$

$$N_0 = 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{es}} t_{iS}^3 - 1, \quad N_1 = \frac{t_{iS}^\gamma}{t_{eS}^\alpha} \frac{\omega_3}{2} \left(4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{es}} t_{iS}^3 - 2\right),$$

$$C_1 = \frac{R}{3\lambda_{i\infty}T_\infty} J_1, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV, \quad z = r \cos\theta, \quad \int_V q_i z dV - \text{дипольный момент}$$

плотности тепловых источников,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_1}{t_{eS}^\alpha} = & \frac{1}{t_{eS}^\alpha} \frac{\omega_3}{3\delta} \left\{ \frac{\lambda_{es}}{\lambda_{is}} \tau'_3(1) - \tau_3(1) \left(1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{iS}^3 \right) + A_2 \left[\frac{\lambda_{es}}{\lambda_{is}} (\tau'_2(1) - \tau_2(1)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \tau_2(1) \left(1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{iS}^3 \right) \right] - A_1 \left[\frac{\lambda_{es}}{\lambda_{is}} (\tau'_1(1) - 3\tau_1(1)) - \tau_1(1) \left(1 + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{iS}^3 \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{3C_1}{\delta t_{iS}^\gamma}, \quad \delta = 1 + \frac{2\lambda_{es}}{\lambda_{is}} + 4\sigma_0\sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{is}} t_{iS}^3. \end{aligned}$$

Поскольку выражения для полей температур вне и внутри частицы нами получены, то мы можем найти локальный тепловой поток. Если температура вязкой среды не постоянна вдоль ее объема, то перенос тепла будет происходить за счет теплопроводности – непосредственный молекулярный перенос энергии из мест с более высокой в места с более низкой температурой. Он не связан с макроскопическим движением и происходит также и в неподвижной среде.

Если обозначить через j_T плотность локального потока тепла, переносимого посредством теплопроводности и ограничиться случаем когда градиент температуры в среде не слишком велик, то мы можем разложить j_T в ряд по степеням градиента температуры и ограничиться первыми членами разложения. Постоянный член в этом разложении, очевидно, исчезает, поскольку j_T должно обращаться в нуль вместе с ∇T . Таким образом, получаем [3]:

$$j_T = -\lambda \nabla T. \quad (4.3)$$

В литературе выражение (4.3) называется законом Фурье. Поскольку локальный поток энергии должен быть направлен из мест с более высокой в места с более низкой температурой j_T и ∇T должны иметь противоположные направления.

Найдем j_T для нашего случая. Поскольку мы рассматриваем теплообмен при больших перепадах температуры, т.е. коэффициент теплопроводности не постоянная величина, а является функцией температуры имеем:

$$\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha = \lambda_{e\infty} (t_{e0} + \varepsilon t_{e1})^\alpha \approx \lambda_{e\infty} t_{e0}^\alpha + \varepsilon t_{e0}^{\alpha-1} t_{e1},$$

$$j_T = -\lambda_e \nabla T_e = -\lambda_e \frac{T_\infty}{R} \left(\frac{\partial t_e}{\partial y} e_r + \frac{1}{y} \frac{\partial t_e}{\partial \theta} e_\theta \right).$$

До членов порядка ε получаем следующее выражение для локального потока тепла:

$$j_T = -\lambda_{e\infty} \frac{T_\infty t_{e0}^\alpha}{R} \left\{ \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} e_r + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial t_{e1}}{\partial y} + \alpha \frac{t_{e1}}{t_{e0}} \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} \right) e_r + \frac{1}{y} \frac{\partial t_{e1}}{\partial \theta} e_\theta \right] \right\}. \quad (4.4)$$

Далее нам потребуются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{e0}}{\partial y} &= -\frac{\ell t_{e0}}{(1+\alpha)y}, \quad \frac{\partial t_{e1}}{\partial y} = -\frac{\omega_3}{2yt_{e0}^\alpha} \left[\frac{\alpha\ell}{1+\alpha} + \frac{N_1}{y} \left(1 - \frac{\alpha\ell}{1+\alpha} \right) \right] + \\ &+ \frac{\cos\theta}{t_{e0}^\alpha} \left\{ \frac{\Gamma_1}{y^3} \left(\frac{\alpha\ell}{1+\alpha} - 2 \right) + \frac{\omega_3}{3} \left[\tau_3' + \frac{\alpha\ell\tau_3}{y(1+\alpha)} + \frac{A_2}{y} \left\{ \tau_2' + \frac{\tau_2}{y} \left(\frac{\alpha\ell}{1+\alpha} - 1 \right) \right\} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{A_1}{y^3} \left\{ \tau_1' + \frac{\tau_1}{y} \left(\frac{\alpha\ell}{1+\alpha} - 3 \right) \right\} \right] \right\}, \\ \frac{\partial t_{e1}}{\partial \theta} &= -\frac{\sin\theta}{t_{e0}^\alpha} \left[\frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_3}{3} \left(\tau_3 + A_2 \frac{\tau_2}{y} - A_1 \frac{\tau_3}{y^3} \right) \right], \end{aligned}$$

и подставляя полученные выражения в (4.4), получаем следующее выражение для локального потока тепла:

$$\begin{aligned} j_T &= \lambda_{e\infty} \frac{T_\infty t_{e0}^{\alpha+1}}{R} \frac{\ell}{y(1+\alpha)} e_r + \lambda_{e\infty} \frac{T_\infty}{R} \varepsilon \left\{ \left[\frac{\omega_3}{2y^2} N_1 + \cos\theta \left\{ \frac{2}{y^3} \Gamma_1 + \frac{\omega_3}{3} \left[\tau_3' + \frac{A_2}{y} \times \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\tau_2' - \frac{\tau_2}{y} \right) - \frac{A_1}{y^3} \left(\tau_1' - 3 \frac{\tau_1}{y} \right) \right] \right\} e_r + \frac{\sin\theta}{y} \left[\frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega_3}{3} \left(\tau_3 + A_2 \frac{\tau_2}{y} - A_1 \frac{\tau_3}{y^3} \right) \right] e_\theta \right\}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Зная локальный поток тепла можно найти: молекулярный поток тепла $Q_T^{(M)}$ и тепловое число Нуссельта Nu_T :

$$Q_T^{(M)} = \oint_{S_p} j_T \cdot dS_p, \quad (4.6)$$

$$Nu_T = - \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial t_e}{\partial y} \right) \Big|_{y=1} dx. \quad (4.7)$$

где dS_p – дифференциальный векторный элемент поверхности частицы S_p , направление которого совпадает с направлением внешней нормали.

Из полученных выражений видно, на физические величины, которые характеризуют теплообмен существенное влияние оказывает нагрев поверхности частицы, зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры и движение среды (учет конвективных членов в уравнении теплопроводности).

Следует отметить, что в полученные выше выражения входят постоянные интегрирования A_1 и A_2 . Эти постоянные входят в поле скорости, которое в работе считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи. Это позволяет рассматривать процесс теплообмена для общего случая, т.е. для установившегося движения крупной твердой неравномерно нагретой частицы сферической формы. Установившееся движение означает, что на частицу кроме силы вязкого сопротивления среды (силы Стокса) действует другая сила, направленная противоположно силе сопротивления среды. Это может быть силы тяжести (гравитационное осаждение), термофоретическая сила (термофорез), фотофоретическая сила (фотофорез) и т.д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магистерской диссертации получены аналитические выражения для полей температур вне и внутри крупной неравномерно нагретой частицы с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры и влияния движения среды. При нахождении распределения температуры в окрестности частицы использовался метод сращиваемых асимптотических выражений; выражение для локального теплового потока тепла, которое позволяет найти физические величины, характеризующие теплообмен, а именно: молекулярный поток тепла $Q_T^{(M)}$ и тепловое число Нуссельта Nu_T .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.И. Яламов, В.С. Галоян Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван.: Луйс. 1985. 207 с.
2. Ст. Бретшнайдер Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966. 535 с.
3. Л.Д, Ландау, Е.М. Лифшиц Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
4. Дж. Хаппель, Г. Бреннер Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 630 с.
5. Малай Н.В., Щукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // ПМТФ. 2008. № 1. С. 74 – 80.
6. Малай Н.В., Лиманская А.В, Щукин Е.Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы //ПМТФ. 2016. Т. 57, № 2(336). С. 164-171.
7. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
8. Матвеев А.Н. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 564 с.
9. Найфе А. Введение в методы возмущения. М.: Мир. 1984. 535 с.
10. Абрамовица М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 830 с.