ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА»**

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
канд. физ.-мат наук, доц.
________ О. Г. Костров
(подпись)
«24» июня 2019г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК

Автор бакалаврской работы (подпись) (дата) 21.06.19 Г. Б. Булавкин

Обозначение бакалаврской работы БР–02069964–02.03.01–01–19

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Руководитель работы

ст. преподаватель (подпись) (дата) 21.06.19 Е. Г. Смольянова

Нормоконтролер

канд. физ.-мат наук, доц. (подпись) (дата) 24.06.19 О. Г. Костров

Саранск

2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА»**

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
канд. физ.-мат наук, доц.
________ О. Г. Костров
(подпись)
«05» февраля 2019 г.

ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ

(в форме бакалаврской работы)

Студент Булавкин Герман Борисович

1 Тема Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек

Утверждена приказом № 548-с от 31.01.2019 г.

2 Срок представления работы к защите 26.06.2019 г.

3 Исходные данные для научного исследования (проектирования)

Научная литература и статьи по теме исследования

4 Содержание выпускной квалификационной работы

4.1 Координатная интерпретация пифагоровых троек

4.2 Интерпретация троек восьмиконечной звездой Брюне

4.3 Интерпретация с использованием серпантина Ньютона

4.4 Свойство периодичности семейства пифагоровых троек по составному модулю

4.5 Обобщённое свойство периодичности пифагоровых троек по простому модулю

4.6 Разработка программы, реализующей интерпретацию серпантином Ньютона

4.7 Интерпретация троек долями площадей плоской фигуры

5 Приложения

Приложение А Код калькулятора пифагоровых троек

Руководитель работы 05.02.19 Смольянова Е.Г.

подпись, дата

Задание принял к исполнению 05.02.19

подпись, дата

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 65 листов, 13 рисунков, 11 таблиц, 16 использованных источников, 1 приложение.

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК.

Цель работы – исследование геометрических интерпретаций пифагоровых троек, их свойств и их использование в качестве классификационного признака.

Объект исследования – множество пифагоровых троек.

Метод исследования – аналитический, геометрический и компьютерно-вычислительный.

Результаты исследования – получены оригинальные геометрические интерпретации пифагоровых троек; исследованы свойства делимости по модулю простого числа генерируемых последовательностей пифагоровых троек; предложен классификационный признак множества всех пифагоровых троек.

Область применения – результаты работы могут быть использованы при преподавании факультативных курсов по теории чисел.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, пифагоровым принято называть прямоугольный треугольник, длины сторон которого являются решениями целочисленного уравнения

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.1}$$

Самым известным пифагоровым треугольником является треугольник со сторонами 3, 4, 5. Это так называемый Египетский треугольник. Если стороны треугольника выражаются попарно взаимно простыми числами, то говорят о простом (примитивном) пифагоровом треугольнике [1]. Соответственно любую упорядоченную тройку (a, b, c) натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению (1.1), называют пифагоровой тройкой. Аналогичным образом упорядоченную тройку (a, b, c) попарно взаимно простых чисел называют примитивной пифагоровой тройкой.

Множество пифагоровых троек бесконечно. Доказать это можно, например, так. Выберем произвольное нечётное число n и сформируем тройку натуральных чисел вида $n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$. Тогда из тождества

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 \tag{1.2}$$

сразу следует, что доказательство завершено: примитивных пифагоровых троек с соответствующего вида сторонами бесконечно много ввиду бесконечного количества различных нечётных чисел.

Существует множество различных способов генерации пифагоровых троек. Приведем некоторые из них.

В частности, существенный интерес представляет формула, принадлежащая Евклиду:

$$m^2n^2p^2q^2 + \left(\frac{m^2np - npq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2np + npq^2}{2}\right)^2. \qquad (1.3)$$

Здесь m, q – натуральные числа одной четности, n, p – произвольные натуральные числа. Данную формулу можно упростить и записать более компактно, подобрав числа p и n так, чтобы число $\frac{np}{2}$ являлось точным квадратом [2]. Для этого осуществляют следующую замену:

$$\frac{m^2np}{2} = a^2,\ \frac{npq^2}{2} = b^2. \qquad (1.4)$$

В результате последних преобразований получают такую тройку пифагоровых чисел:

$$(2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2), \qquad (1.5)$$

где m и n взаимно простые натуральные числа (способ Евклида и Диофанта). Этот способ расчёта пифагоровых троек применяется до сих пор [3]. Важно заметить, что алгоритм не предоставляет возможности исчерпать все решения уравнения (1.1). Чтобы устранить этот недостаток и описать все целые решения, используется следующая формула:

$$(2mnl,\ (m^2 - n^2)l,\ (m^2 + n^2)l), \qquad (1.6)$$

где m, n, l – натуральные числа, $m > n$.

Известны также методы генерации пифагоровых троек из двух других. Так, если известны две пифагоровы тройки (a, b, c) и (p, q, r), то тройка чисел $(ap - bq, aq + bp, cr)$ также является пифагоровой [4].

Определённый интерес при поиске способов генерации пифагоровых троек представляют тождества, задающие пифагоровы тройки специального вида. К таким можно отнести, например, тождество Месснера. С помощью него получают множество всевозможных пифагоровых треугольников, у которых длина одного из катетов на 1 меньше длины гипотенузы:

$$(10n-5)^2+(50n(n-1)+12)^2=(50n(n-1)+13)^2, \tag{1.7}$$

где n – натуральное число.

В истории математики осталось немало документов, в которых упоминаются пифагоровы тройки и пифагоровы треугольники. Одним из наиболее известных научных артефактов является математический текст, именуемый «Plimpton 322». Его схематичное изображение можно увидеть на рисунке 1.

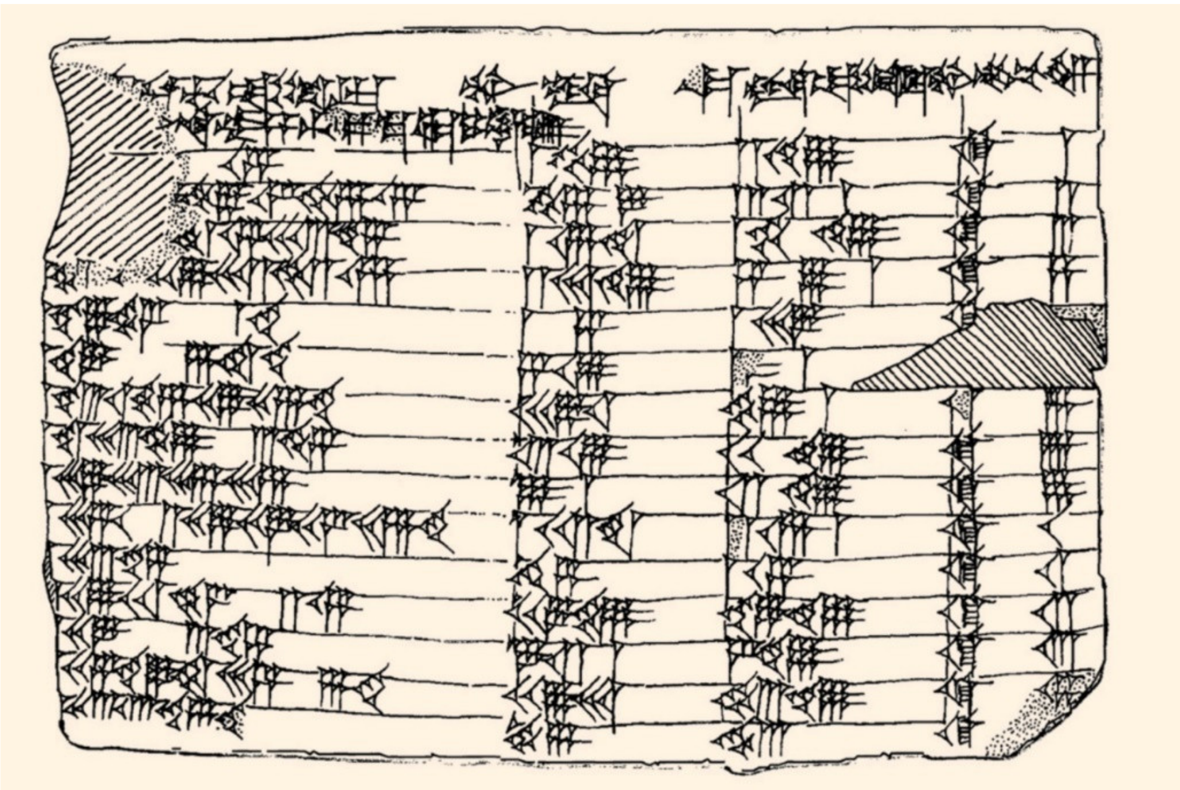


Рисунок 1 – Глиняная табличка «Plimpton 322»

Это глиняная табличка шириной в 12,7 см и высотой в 8,8 см, найденная на территории бывшего Вавилона. В данный момент она находится в

Плимптоновской библиотеке Колумбийского университета [5]. В этом тексте приводятся 15 пифагоровых троек в шестидесятеричной системе счисления. Содержание этой таблицы частично приведено ниже в десятичной системе счисления [6]. Больший катет обозначим буквой b.

Таблица 1 – Содержание «Plimpton 322»

h/b	Меньший катет a	Гипотенуза h
1,9834	119	169
1,9416	3367	11521
1,9188	4601	6649
1,8862	12709	18541
1,8150	65	97
1,7852	319	481
1,7200	2291	3541

Далее перечислим некоторые особенные свойства пифагоровых троек. Положим, что (a, b, c) удовлетворяют неравенству $a < b < c$. Тогда

– одно из чисел a или b нечетно, c четно;

– число $\frac{(c-a)(c-b)}{2}$ является полным квадратом;

– любое целое число, большее 2, входит в примитивную или непримитивную пифагорову тройку;

– для любого натурального n существует n различных пифагоровых троек с различными гипотенузами и равной площадью.

Обобщение пифагоровых троек на равенства вида

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i)^2 = (x_n)^2 \tag{1.8}$$

даёт так называемые пифагоровы n-наборы. Разработаны специальные алгоритмы для поиска пифагоровых четвёрок, пятёрок и т.д. [7].

Необходимо отметить, что пифагоровы тройки представляют не только теоретический, но и прикладной интерес. Так, известны научные изыскания, посвященные приложению пифагоровых троек к криптографии [8].

В данном исследовании интерес представляют способы геометрической интерпретации пифагоровых троек. При этом мы предложим как и известные интерпретации, так и оригинальные – авторские.

В ходе работы предстоит решить следующие задачи:

– ознакомиться с достаточным (для такого исследования) объёмом теоретического материала, связанным с понятием пифагоровых троек;

– понять и изложить математическую суть наиболее интересных геометрических интерпретаций;

– предложить собственные (оригинальные) геометрические интерпретации;

– разработать программу, позволяющие производить вычисление пифагоровых троек в предложенных авторских интерпретациях;

– исследовать особые свойства предлагаемых геометрических интерпретаций;

– попытаться предложить некий признак в качестве классификационного, поскольку как отмечается в [7]: «поиск классификационного признака пифагоровых троек – реальная современная научная проблема, решением которой занимаются как профессионалы, так любители математики».

Для решения поставленных задач в работе будут использоваться как аналитический и геометрический подходы, так и элементы компьютерного моделирования.

Для целей компьютерного моделирования будут использованы средства табличного процессора Microsoft Excel (язык VBA).

1 Координатная интерпретация пифагоровых троек

Представим некоторые известные интерпретации пифагоровых троек.

Каждой тройке (a, b, c) на декартовой плоскости сопоставим точку с координатами (a, b). Если тройка (a, b, c) примитивная, то используем для её изображения синий цвет. В случае, если тройка (a, b, c) – непримитивная, «закрасим» точку (a, b) красным цветом.

Фрагмент распределения пифагоровых троек на координатной плоскости для $x < 100, y < 100$ продемонстрирован в соответствии с рисунком 2.

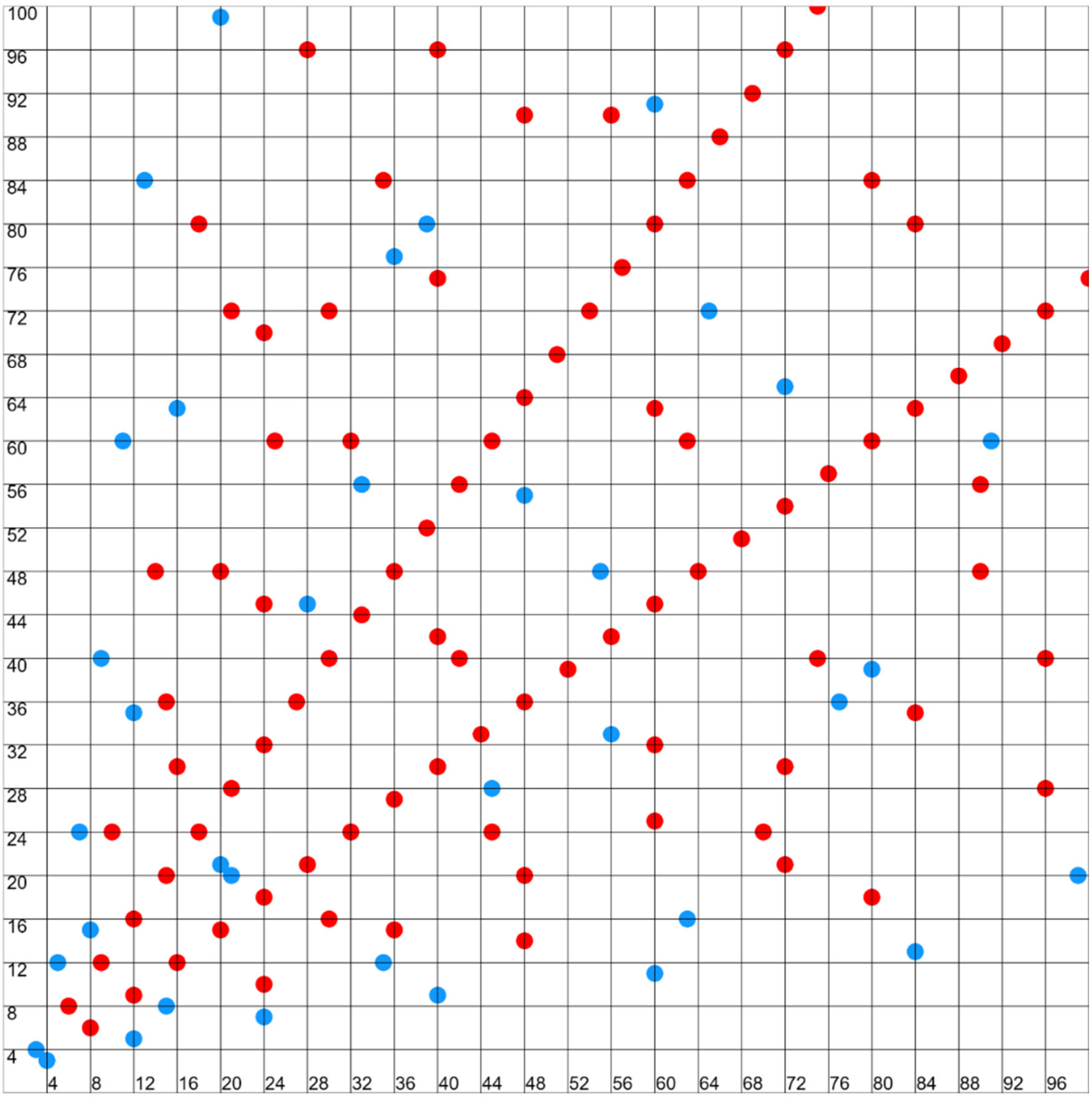


Рисунок 2 – Распределение точек на плоскости

На рисунке 2 можно наблюдать, что непримитивные тройки, как кратности примитивных, выстраиваются на декартовой плоскости в «лучи». Кроме того, можно разглядеть и «криволинейные» закономерности в расположении всех остальных точек.

Очевидно, что последнее изображение примет иной вид, если отмечать исключительно примитивные пифагоровы тройки (рисунок 3).

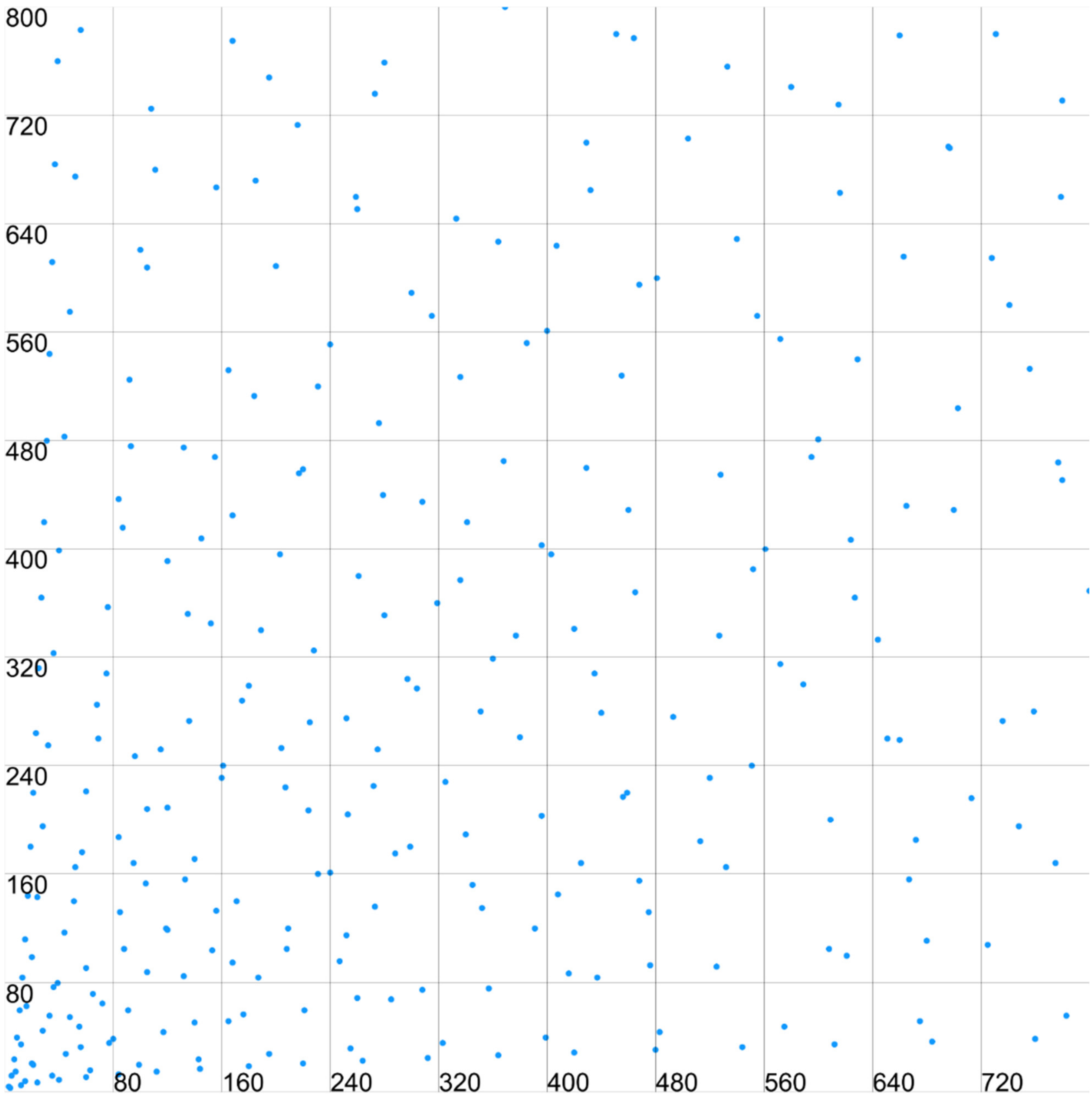


Рисунок 3 – Распределение примитивных пифагоровых троек на плоскости

Попытки упорядочить бесконечное множество примитивных пифагоровых троек всегда встречали определённые препятствия. В основе различных способов систематизации, которые разрабатывались в разное время и разными авторами, чаще всего были итерационные формулы. Так, например, все примитивные пифагоровы тройки можно организовать в своего рода генеалогическое дерево, начиная с тройки $(3, 4, 5)$ [9]. Это дерево будет «расти» вправо и для каждого узла в нём есть по три «наследника» (для краткости: верхний, прямой и нижний). В таком случае каждая последующая тройка из троек-потомков может быть сгенерирована различным преобразованием исходной, «родительской» тройки (a, b, c) по правилам:

Таблица 2 – Дерево пифагоровых троек

Тройка	Преобразование	Преобразованная тройка
(a, b, c)	Верхнее	$(a - 2b + 2c,\ 2a - b + 2c, 2a - 2b + 2c)$
	Прямое	$(a + 2b + 2c, 2a + b + 2c, 2a + 2b + 3c)$
	Нижнее	$(-a + 2b + 2c, -2a + b + 2c, -2a + 2b + 3c)$

Необходимо заметить, что при перестановке a и b в любой из троек, в результате всех трех преобразований («верхнем», «прямым» и «нижним»), получаются идентичные тройки с той лишь разницей, что «верхняя» и «нижняя» тройка поменяются местами.

В соответствии с рисунком 4 представлены элементы следующего дерева:

Таблица 3 – Пример дерева пифагоровых троек

«Корень» дерева	Первый потомок	Второй потомок
$(3, 4, 5)$	$(5, 12, 13)$	$(7,24,25)$
		$(55, 48, 73)$
		$(45, 28, 53)$

Окончание таблицы 3

«Корень» дерева	Первый потомок	Второй потомок
$(3, 4, 5)$	$(21, 20, 29)$	$(39, 80, 89)$
		$(119, 120, 169)$
		$(77, 36, 85)$
	$(15, 8, 17)$	$(33, 56, 65)$
		$(65, 72, 97)$
		$(35, 12, 37)$

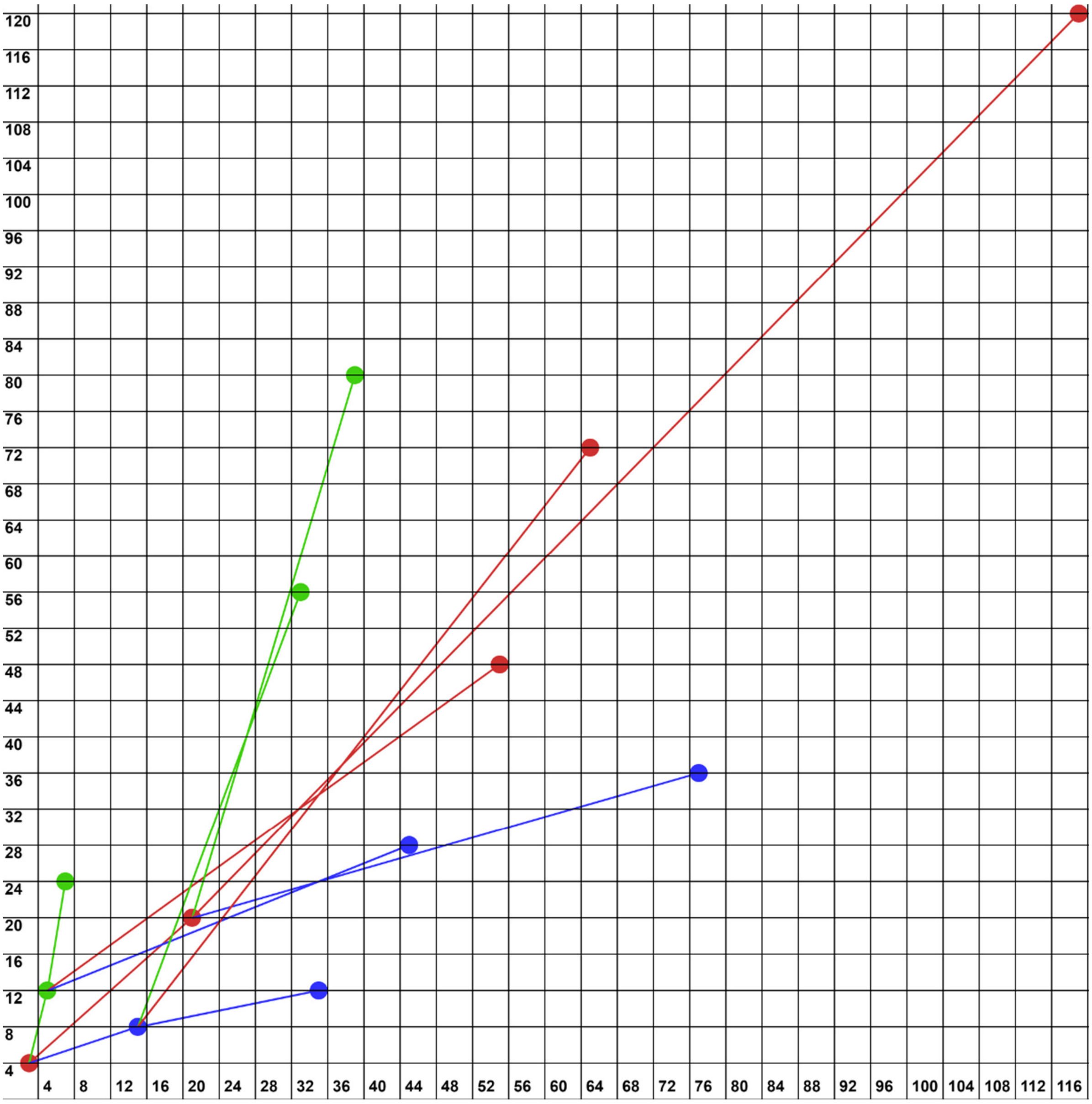


Рисунок 4 – Дерево пифагоровых троек

В качестве альтернативы, аналогичное преобразование можно осуществить, умножая следующие матрицы на вектор-столбец $(a, b, c)^{\text{т}}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Также известно более простое преобразование, с помощью которого можно «вырастить» то же самое дерево [10]. А именно:

Таблица 4 – Преобразование пифагоровых троек

Исходная тройка	Название преобразования	Преобразование
(a, b)	Верхнее	$(2a - b, a)$
	Прямое	$(2a + b, a)$
	Нижнее	$(a + 2b, b)$

2 Интерпретация троек восьмиконечной звездой Брюне

Данная интерпретация была предложена математиком Тонсом Брюне (Tons Brunes) в шестидесятых годах прошлого столетия. В своей работе он реконструировал древний метод деления сторон квадрата на 2, 3, 4 или 5 равных частей [11, 12]. Удваивая или утраивая решетки со сторонами 3, 4 или 5, он получал решетки размерами 6×6, 8×8, 9×9 или 10×10. Звезда Брюне получается следующим образом. В качестве примера рассмотрим решетку размером 2×2 (рисунок 5).

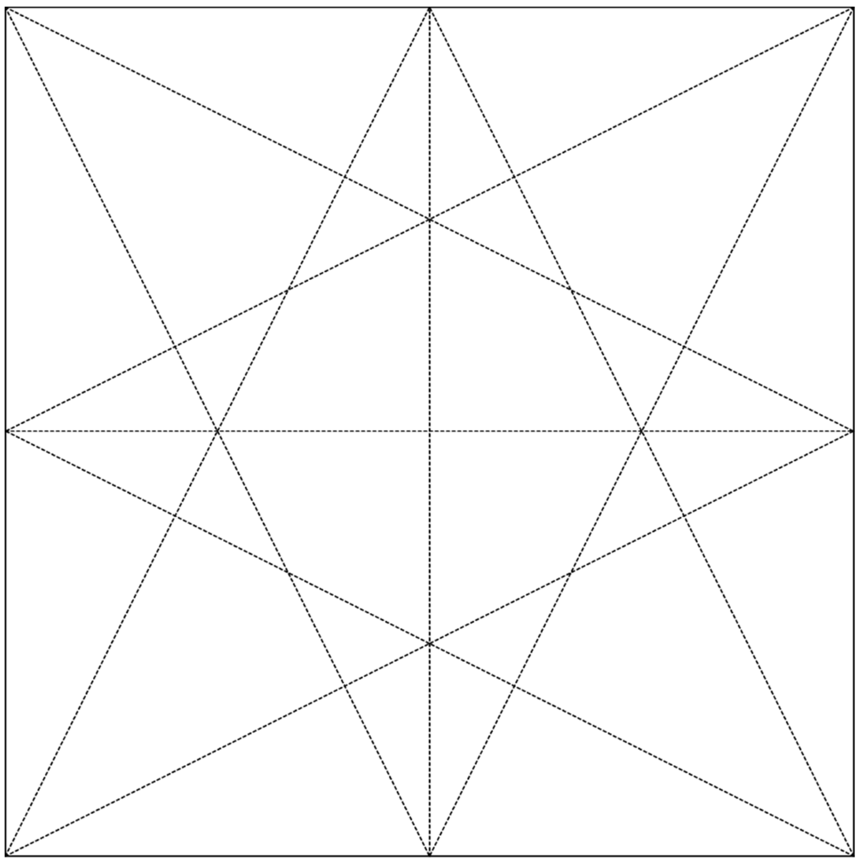


Рисунок 5 – Звезда Брюне для решётки 2×2

Необходимо найти отношение сторон прямоугольного треугольника со сторонами $a, b, c,$ полученного пересечением диагоналей соответствующих прямоугольников с отношением сторон 1:2.

В общем случае получают уравнение:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}. \tag{3.1}$$

С помощью этого уравнения, можно определить отношение катетов a и b:

$$b = a + \frac{b}{4} \to \frac{a}{b} = \frac{3}{4}. \tag{3.2}$$

Применив далее теорему Пифагора, находят семейство подобных треугольников, отношение сторон которых равно 3:4:5.

По аналогии можно рассмотреть и решетки вида 3×3. Рассмотрим, например, прямоугольники с отношением сторон

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(a + \frac{2b}{3}\right)^2 = a^2 + \frac{4ab}{3} + \frac{4b^2}{9},$$
$$b = \frac{4a}{3} + \frac{4b}{9} \to \frac{4a}{3} = \frac{5b}{9} \to a = \frac{5b}{12} \to \frac{a}{b} = \frac{5}{12}. \tag{3.3}$$

Таким образом, получают семейство прямоугольных треугольников с отношением сторон 5:12:13 (рисунок 6).

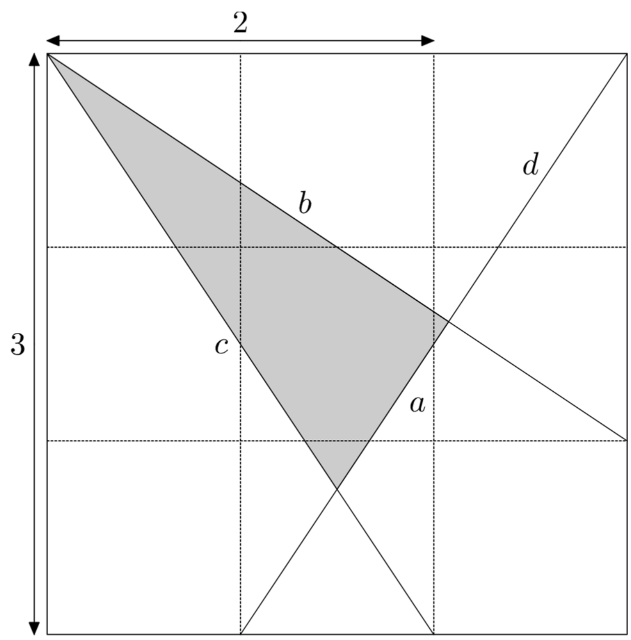


Рисунок 6 – Прямоугольный треугольник, построенный на пересечении диагоналей прямоугольников с отношением сторон 3:2

Восьмиконечная звезда, получившаяся как результат наложения восьми треугольников со сторонами 5, 12, 13, не является «классической» звездой Брюне, вершины которой лежат на сторонах квадрата. Звезда, полученная в результате пересечения диагоналей восьми прямоугольников, лежащих в квадрате, вершины которой не лежат на его сторонах, называют «обобщенной звездой Брюне».

В работе Тонса Брюне рассматривался и случай произвольного квадрата со стороной n, в котором пересечены три диагонали прямоугольников со сторонами m и n, вписанных в них таким образом, что последние образуют прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c.

Не вдаваясь в подробности построения, приведем здесь формулу для отношения сторон $a{:}b$.

$$a^2 + b^2 = c^2 = \left(a + \frac{m}{n}b\right)^2 = a^2 + \frac{2m}{n}ab + \frac{m^2b^2}{n^2},$$

$$b = \frac{2m}{n}a + \frac{m^2}{n^2}b,\ \frac{n^2-m^2}{n^2}b = \frac{2m}{n}a,$$

$$\frac{n^2-m^2}{n} = \frac{2ma}{b},\ \frac{a}{b} = \frac{n^2-m^2}{2mn}. \tag{3.4}$$

В исследовании [11] также представлена иллюстрация, на которой можно увидеть, что данная интерпретация предоставляет возможность отличать геометрически пифагоровы тройки, для которых $a > b$, а также примитивные пифагоровы треугольники от непримитивных по внешнему виду решетки (рисунок 7).

Следует отметить, что данная интерпретация представляет по большей части геометрический интерес, так как не обладает серьезными приложениями. Однако она интересна с точки зрения истории математики.

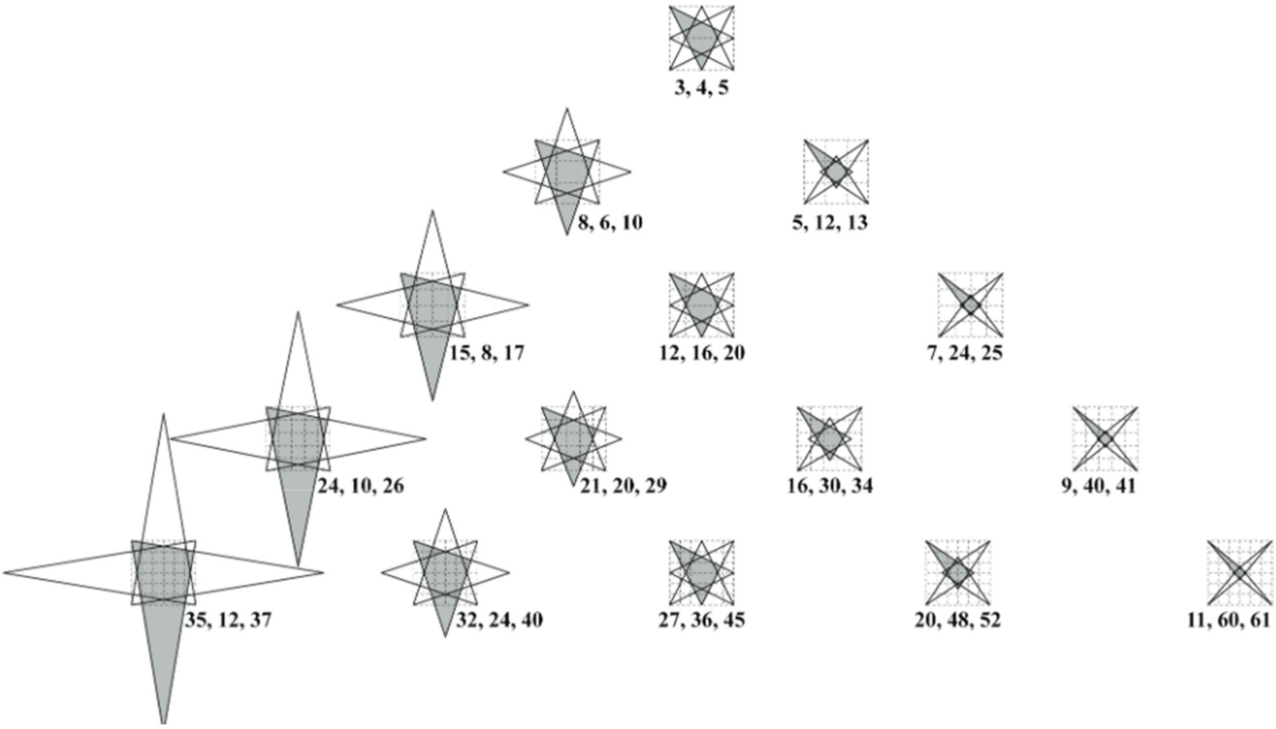


Рисунок 7 – Примеры некоторых троек

3 Интерпретация с использованием серпантина Ньютона

Предложим оригинальную графическую интерпретацию, основанную на применении квадратического тождества, преобразованного специальным образом. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим числа M_1, M_2, k формулами:

$$M_1 = \frac{n(n-1)}{2}, M_2 = \frac{n(n+1)}{2}, k^2 = n + 1. \tag{4.1}$$

Введем в рассмотрение тождество:

$$\left(\frac{k}{n}(na + (M_1 + M_2)(c - b)\right)^2 + (na + M_1(c - b) + b)^2 = \\ = (na + M_2(c - b) + c)^2, \tag{4.2}$$

где (a, b, c) – начальная (корневая) пифагорова тройка, (a_k, b_k, c_k) – «тройка-потомок», $(k > 1)$ [13]. В своих исследованиях некоторые авторы используют значение разности $c_k - b_k$ как классификационный признак отдельных подмножеств пифагоровых троек.

Истинность тождества (4.2) может быть проверена непосредственно после соответствующих равносильных преобразований. С его помощью можно сгенерировать любое количество пифагоровых троек, исходя из произвольной (стартовой) тройки (a, b, c). Так, выбирая начальной тройку $(a, b, c) = (11, 60, 61)$, получим:

Таблица 5 – Потомки корневой пифагоровой тройки $(11, 60, 61)$

Номер потомка	k–потомок
$k = 1$	$(11, 60, 61)$
$k = 2$	$(28, 96, 100)$
$k = 3$	$(57, 176, 185)$

Окончание таблицы 5

Номер потомка	k–потомок
$k = 4$	$(104, 330, 346)$
$k = 5$	$(175, 600, 625)$
$k = 6$	$(276, 1040, 1076)$
$k = 7$	$(413, 1716, 1765)$
$k = 8$	$(592, 2706, 2770)$

Заметим, что при любом номере k, справедливо

$$c_k - b_k = k^2(c - b). \tag{4.3}$$

В сформированной последовательности троек можно перемещаться не только от начала к концу, то есть от (a_1, b_1, c_1) к (a_k, b_k, c_k), но и в обратном направлении. Это можно легко осуществить с помощью матриц перехода $S(n)$ и $S^{-1}(n)$:

$$S(n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} & -n\sqrt{n+1} & n\sqrt{n+1} \\ n & 1 - M_1 & M_1 \\ n & -M_2 & 1 + M_2 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$S^{-1}(n) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sqrt{n+1}} & \frac{n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} \\ \frac{n}{\sqrt{n+1}} & \frac{1-M_1}{n+1} & \frac{M_2}{n+1} \\ -\frac{n}{\sqrt{n+1}} & -\frac{M_1}{n+1} & \frac{1+M_2}{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Эти матрицы можно представить в ином виде, что будет полезно с технической точки зрения. Ввиду того, что $n = k^2 - 1 \geq 0$, то:

$$S(k) = \begin{pmatrix} k & -k(k^2-1) & k(k^2-1) \\ k^2-1 & 1-\frac{1}{2}(k^2-2)(k^2-1) & \frac{1}{2}(k^2-1)(k^2-2) \\ k^2-1 & -\frac{1}{2}k^2(k^2-1) & 1+\frac{1}{2}k^2(k^2-1) \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

$$S^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 1-\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2}-1 \\ \frac{1-k^2}{k} & 1+\frac{1}{2}(1-k^2) & \frac{1}{2}(k^2-1) \\ \frac{1-k^2}{k} & \frac{(k^2-2)(k^2-1)}{2k^2} & \frac{1+\frac{1}{2}k^2(k^2-1)}{k^2} \end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Для дальнейшего заметим, что величину

$$e = a + b - c \qquad (4.8)$$

принято называть избытком прямоугольного треугольника со сторонами a, b, c, а величину

$$h = c - b \qquad (4.9)$$

его ростом.

Ясно, что с тем же успехом можно обсуждать пифагоровы тройки (a, b, c) в случае $a > b$. Тогда рост соответствующего пифагорова треугольника определяется как

$$h = c - a. \qquad (4.10)$$

Договоримся называть такие тройки «немонотонными» в отличие от троек с ростом (4.9), т.е. «монотонных».

Поскольку все пифагоровы тройки получаются из тождества (1.6) то соответственно рост $h = c - b$ будет равен либо ln^2, либо $2ln^2$. Договоримся далее тройки (la, lb, lc) отождествлять с тройкой (a, b, c) по причине равенства отношений

$$\frac{la}{lb} = \frac{a}{b}. \tag{4.11}$$

Поскольку вместе с натуральными решениями уравнения (1.1) мы будем искать и любые другие целочисленные решения, то «стартовая» тройка при использовании тождества (4.2) может формироваться не только из положительных чисел.

Итак, пусть (a, b, c) произвольная пифагорова тройка с ростом $h \in \{1, 2\}$. Рассмотрим соответствующую ей тройку рациональных чисел $\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$. Такую тройку иногда называют тройкой пифагоровых дробей. Она удовлетворяет уравнению (1.1). Будем называть ее «копией» тройки (a, b, c).

Приведем пример. Пусть $(23, 264, 265)$ – начальная пифагорова тройка [14]. Выберем $k = 7$. Тогда матрица перехода $S(k)$ примет следующий вид:

$$S(7) = \begin{pmatrix} 7 & -336 & 336 \\ 8 & -1127 & 1128 \\ 8 & -1176 & 1177 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу $S(7)$ на $(5, 12, 13)^T$ справа:

$$\begin{pmatrix} 7 & -336 & 336 \\ 8 & -1127 & 1128 \\ 8 & -1176 & 1177 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 264 \\ 265 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 497 \\ 2496 \\ 2545 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$(a_7, b_7, c_7) = (497, 2496, 2545).$$

Приведем пример поиска корневой тройки. Выберем любое $k \geq 2$.

С помощью тождества (4.2) сгенерируем по k соответствующую тройку относительно начальной тройки (a, b, c).

Найдем, например, «корневую» тройку для пифагоровой тройки $(240, 782, 818)$ [15]. Имеем

$$c_k - b_k = 818 - 782 = 36 = k^2(c - b).$$

При однозначном выборе

$$h = 1 = c - b,\ k^2 = 36,$$

получим, что $k = 6$. Тогда:

$$\begin{pmatrix} 3 & -24 & 24 \\ 8 & -2 & 3 \\ 8 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 782 \\ 818 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для тройки $(240, 782, 818)$ корневой является тройка $(5, 12, 13)$.

Рассмотрим следующее соотношение:

$$\frac{c_k + b_k}{a_k} = \frac{c_k^2 - b_k^2}{a_k(c_k - b_k)} = \frac{{a_k}^2}{a_k k^2(c - b)} = \frac{a_k}{k^2(c - b)} =$$
$$= \frac{k\left(a + (k^2 - 1)(c - b)\right)}{k^2(c - b)} = \frac{(a + b - c) + k^2(c - b)}{k \cdot (c - b)} =$$
$$= \frac{e + k^2 h}{kh} = \frac{e/h}{k} + k. \qquad (4.12)$$

Если $a_k > 0, b_k > 0, c_k > 0$, то

$$\frac{b_k + c_k}{a_k} = P_k - 1, \qquad (4.13)$$

где P_k – периметр прямоугольного треугольника со сторонами a_k, b_k, c_k и большим катетом b_k. Следовательно,

$$\frac{e}{h} = \frac{a}{h} - 1. \tag{4.14}$$

Обозначим

$$\frac{b_k + c_k}{a_k} = f_{\frac{e}{h}}(k) = f_p(k), \tag{4.15}$$

где

$$f_p(x) = \frac{p}{x} + x, p = \frac{e}{h}, x > 0. \tag{4.16}$$

Функция $\frac{1}{f_p(x)}$ является представителем класса функций, называемых серпантинами Ньютона:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta x}{x^2 + \alpha^2}, \tag{4.17}$$

где α и β – числовые параметры.

Серпантин [16]

$$f(x) = \frac{1}{f_p(x)} = \frac{1}{\frac{p}{x} + x} \tag{4.18}$$

получается при выборе

$$\alpha = \sqrt{p} = \sqrt{\frac{e}{h}} \text{ и } \beta = \frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{h}{e}}. \tag{4.19}$$

Заметим на будущее, что

$$f_p(1) = p + 1 = f_p(p). \tag{4.20}$$

Зафиксируем произвольную точку B на графике функции f_p с целой положительной абсциссой k и рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с основанием $AC = 1$.

Введём дополнительно в рассмотрение точку B' с координатами $\left(1, \frac{b_k + c_k}{a_k}\right)$. Построим копию тройки (a_k, b_k, c_k) с периметром

$$P_k = 1 + \frac{b_k + c_k}{a_k} + AB = 1 + y_b + AB \tag{4.21}$$

следующим образом.

Отметим на стороне AB точку L, так, что $AL = BL$, где $B'L$ – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Тогда $AB' + B'C = BC$, и, следовательно, треугольник ABC и есть искомая копия. Описанные построения продемонстрированы в соответствии с рисунком 8.

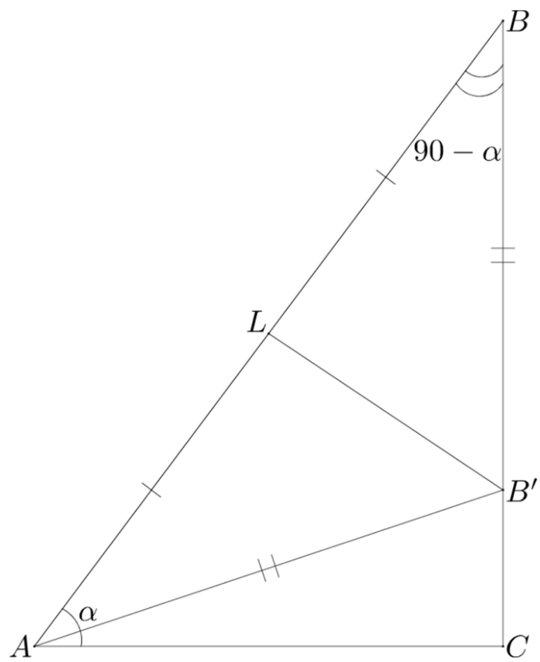


Рисунок 8 – Исследуемый треугольник ABC

Обозначая ординату точки B' через u, попробуем найти аналитическое выражение ее зависимости от k:

$$AB = \sqrt{1 + BC^2} = \sqrt{1 + f_{\frac{e}{h}}^2(k)}\,. \qquad (4.22)$$

По построению

$$u = f_{\frac{e}{h}}(k) - BB' = f_{\frac{e}{h}}(k) - v. \qquad (4.23)$$

А так как

$$\frac{AB}{2} = BL = v\cos(90 - \alpha) = v\sin(\alpha)\,,\ \sin(\alpha) = \frac{BC}{AB}, \qquad (4.24)$$

то

$$v = \frac{AB^2}{2BC} = \frac{1 + f_{\frac{e}{h}}^2(k)}{2f_{\frac{e}{h}}(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_{\frac{e}{h}}(k)} + f_{\frac{e}{h}}(k)\right). \qquad (4.25)$$

Следовательно

$$u\ = f_{\frac{e}{h}}(k) - v = \frac{1}{2}\left(f_{\frac{e}{h}}(k) - \frac{1}{f_{\frac{e}{h}}(k)}\right) = F_{\frac{e}{h}}(k), \qquad (4.26)$$

где

$$F_p(x) = \frac{1}{2}\left(f_p(x) - \frac{1}{f_p(x)}\right). \qquad (4.27)$$

Отметим следующее свойство последней функции:

$$F_p(1) = F_p(p) = F_p + 1. \tag{4.28}$$

Изобразим график функции $F_p(x)$, соответствующий начальной тройке $(7, 24, 25)$ (рисунок 9). Для этого вычислим отношение избытка e к росту h:

$$e = a + b - c = 7 + 24 - 25 = 6, h = c - b = 25 - 24 = 1,$$

$$p = \frac{e}{h} = \frac{6}{1} = 6, F_6(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{x} + x - \frac{1}{\frac{6}{x} + x}\right).$$

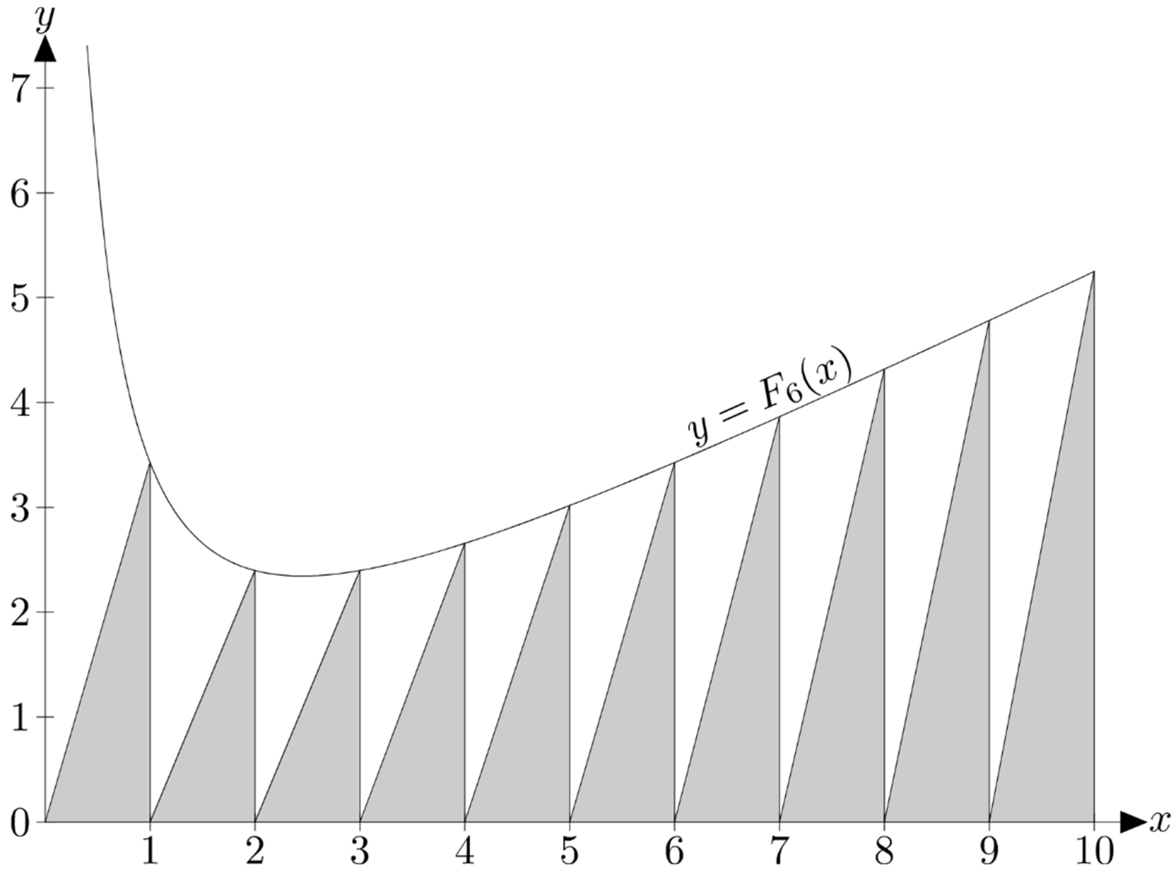


Рисунок 9 – График функции $y = F_6(x)$

Рассмотрим теперь случай, когда не все числа в наборе (a_k, b_k, c_k) положительные. Тогда $p = \frac{e}{h}$ может оказаться отрицательным числом. Следовательно, вершина B треугольника ABC может иметь отрицательную ординату. Несмотря на это обстоятельство, повторим все предыдущие рассуждения применительно к аналогичным геометрическим объектам. Результат будет тот же: вершины всех копий будут принадлежать кривой $y = F_p(x)$, но некоторые из этих копий будут «перевернутыми» треугольниками (рисунок 10).

Приведем пример. Рассмотрим начальную тройку $(13, -84, 85)$:

$$e = 13 - 84 - 85 = -156, h = 85 - (-84) = 169,$$

$$p = \frac{e}{h} = -\frac{12}{13}, F_{\left(-\frac{12}{13}\right)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{12}{13x} + x - \frac{1}{-\frac{12}{13x} + x}\right).$$

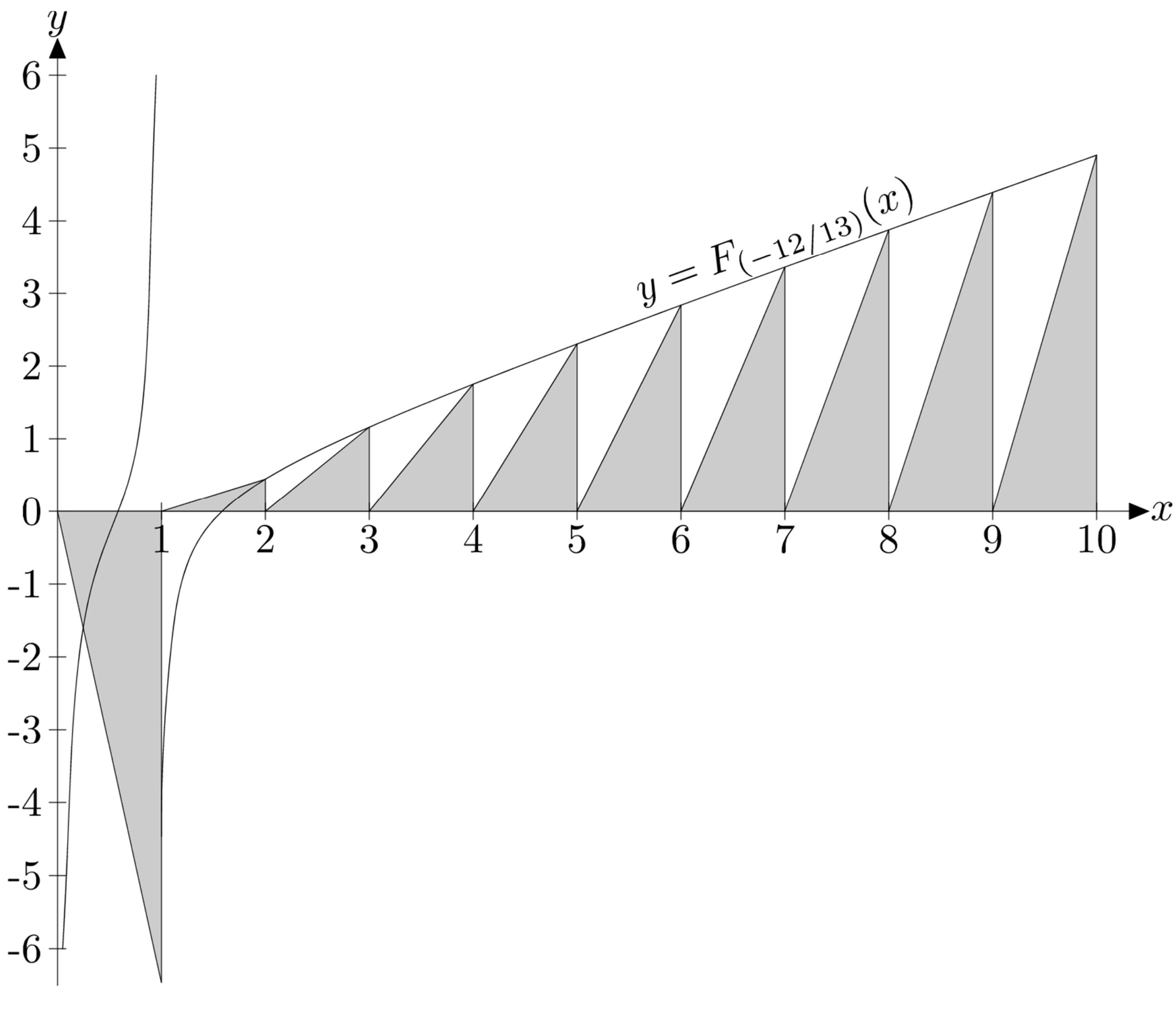


Рисунок 10 – График функции $y = F_{\left(-\frac{12}{13}\right)}(x)$

Итак, вершины всех копий соответствующих пифагоровых треугольников находятся на графике функции Γ_F: $B'\left(k, F_{\frac{e}{h}}(k)\right)$.

Ясно, что вместо геометрических копий можно обсуждать соответствующую точку B' на графике Г, которую будем тоже называть копией пифагоровой тройки (a_k, b_k, c_k).

Исследуем некоторые свойства графика функции $F_p(x)$. Рассчитаем коэффициенты уравнения наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{p}{x^2} + 1 - \frac{1}{x\left(\frac{p}{x}+x\right)}\right) = \frac{1}{2}, \tag{4.28}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{p}{x} + x - \frac{1}{\frac{p}{x}+x}\right) - \frac{x}{2} = 0. \tag{4.29}$$

Таким образом, вершины прямоугольных треугольников будут асимптотически приближаться к прямой $y = \frac{1}{2}x$.

Зафиксируем теперь произвольное значение параметра $p > 0$. Выясним, сколько различных «копий» имеет одну и ту же ординату, то есть при каких положительных p выполняется равенство

$$F_p(1) = F_p(p). \tag{4.30}$$

На отрезке $[1, p]$ функция $F_p(x)$ имеет абсолютный минимум. Поэтому остаётся исследовать интервал $\left(p, 2F_p(1)\right)$. Так как

$$2F_p(p) = \frac{p(p+2)}{p+1} = \frac{(p+1)^2-1}{p+1} = (p+1) - \frac{1}{p+1}, \tag{4.31}$$

то

$$2F_p(1) - p = 1 - \frac{1}{p+1} < 1 \qquad (4.32)$$

при любых $p > 0$. Следовательно, других целых точек на интервале $(p, 2F_p(1))$ нет.

Заметим, что в любой последовательности троек $\{(a_k, b_k, c_k)\}$ тройка (a_p, b_p, c_p) есть p-потомок корневой тройки (a_1, b_1, c_1). Таким образом, сама тройка (a_1, b_1, c_1) изображается точкой $(1, F_p(1))$, а ее потомки, соответственно, точками $(p, F_p(p))$.

Таким образом, параметр p мы будем использовать в качестве классификационного признака пифагоровых троек.

4 Свойство периодичности семейства пифагоровых троек по составному модулю

Рассмотрим произвольную монотонную корневую пифагорову тройку (a, b, c) с ростом $h = 1$ и соответствующее ей семейство троек-потомков.

В качестве примера рассмотрим тройку $(9, 40, 41)$. Умножим ее на матрицу перехода и сгенерируем пифагоровы тройки до $k = 20$.

Таблица 6 – Потомки корневой пифагоровой тройки $(9, 40, 41)$

Номер потомка	k–потомок
$k = 1$	$(9, 40,41)$
$k = 2$	$(24, 70, 74)$
$k = 3$	$(51, 140, 149)$
$k = 4$	$(96, 280, 296)$
$k = 5$	$(165, 532, 557)$
$k = 6$	$(264, 950, 986)$
$k = 7$	$(399,1600,1649)$
$k = 8$	$(576, 2560,2624)$
$k = 9$	$(801, 3920, 4001)$
$k = 10$	$(1080, 5782, 5882)$
$k = 11$	$(1419, 8260, 8381)$
$k = 12$	$(1824, 11480, 11624)$
$k = 13$	$(2301, 15580, 15749)$
$k = 14$	$(2856, 20710, 20906)$
$k = 15$	$(3495, 27032, 27257)$
$k = 16$	$(4224, 34720, 34976)$
$k = 17$	$(5049, 43960, 44249)$
$k = 18$	$(5976, 54950, 55274)$

Окончание таблицы 6

Номер потомка	k–потомок
$k = 19$	$(7011, 67900, 68261)$
$k = 20$	$(8160, 83032, 83432)$

Поинтересуемся теперь остатками от деления чисел a_k, b_k, c_k на 10:

$$\{a_k\ (mod\ 10)\} = \{9, 4, 1, 6, 5, 4, 9, 6, 1, 0, 9, 4, 1, 6, 5, 4, 9, 6, 1, 0\}.$$

Несложно заметить, что такая последовательность обладает свойством периодичности и длина её периода равна 10. Аналогично, рассмотрим последовательность

$$\{c_k\ (mod\ 10)\} = \{1, 4, 9, 6, 7, 6, 9, 4, 1, 2, 1, 4, 9, 6, 7, 6, 9, 4, 1, 2\}.$$

Она также обладает этим свойством. Длина периода также равна 10.

Поступим таким же образом с последовательностью b_k:

$$\{b_k\ (mod\ 10)\} = \{0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 2\}.$$

Нетрудно заметить, что длина периода по k равна 5.

Рассмотрев ещё несколько примеров других монотонных пифагоровых троек с ростом $h = 1$, можно указать на следующую закономерность: остатки от деления a_k, b_k, c_k на 10 обладают периодическим свойством, причем этот период одинаков для любой корневой тройки.

Утверждение 1. Любое семейство троек

$$\{(a_k\ (mod\ 10), b_k\ (mod\ 10), c_k\ (mod\ 10)\},$$

соответствующих $h = 1$, обладает следующими свойствами:

– периодично по a_k, c_k с длиной периода $T = 10$;

– значения b_k периодичны с длиной периода $T = 5$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{a_k\ (mod\ 10)\}$:

$$\begin{gathered} a_k = ak + bk(1-k^2) + ck(k^2-1) = \\ = k\big(a + b(1-k^2) + c(k^2-1)\big) = \\ = k\big(a + (1-k^2)(b-c)\big). \end{gathered} \tag{5.1}$$

Так как $h = 1$, то последнее равенство можно переписать в следующем виде:

$$a_k = k\big(a + (k^2-1)\big). \tag{5.2}$$

Выберем

$$k = n : n\ \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 10.$$

Тогда справедливо:

$$\begin{gathered} a_n\ = n(a + n^2 - 1) = (an + n^3 - n), \\ a_{10+n} = (10+n)\big(a + ((10+n)^2 - 1)\big) = \\ = (10+n)(a + \big((100 + 20n + n^2) - 1\big) = \\ = (10+n)(a + 100 + 20n + n^2 - 1) = \\ = (10a + 1000 + 200n + 10n^2 - 10) + (an + 100n + 20n^2 + n^3 - n) \equiv \\ \equiv (an + n^3 - n)(mod\ 10). \end{gathered}$$

Аналогичным образом поступим с $\{c_k\ (mod\ 10)\}$:

$$c_k = a(k^2-1) - \tfrac{1}{2}bk^2(k^2-1) + c\left(1 + \tfrac{1}{2}k^2(k^2-1)\right) = \tag{5.3}$$

$$= a(k^2-1) - \tfrac{1}{2}bk^2(k^2-1) + c + \tfrac{1}{2}ck^2(k^2-1) =$$

$$= a(k^2-1) + \tfrac{1}{2}(c-b)k^2(k^2-1) + c =$$

$$= a(k^2-1) + \tfrac{1}{2}k^2(k^2-1) + c.$$

Снова для произвольного

$$k = n\colon\ n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 10$$

справедливо

$$c_n = \left(a(n^2-1) + \frac{1}{2}n^2(n^2-1) + c\right),$$

$$c_{10+n} = a((10+n)^2-1) + \frac{1}{2}(10+n)^2((10+n)^2-1) + c =$$

$$= a(100+20n+n^2-1) + \frac{1}{2}(100+20n+n^2)(100+20n+n^2-1) +$$

$$+ c = (100a + 20an + an^2 - a) + + \frac{1}{2}(10000 + 2000n + 100n^2 - 100 +$$

$$+2000n + 400n^2 + 20n^3 - 20n + 100n^2 + 20n^3 + n^4 - n^2) + c \equiv$$

$$\equiv (an^2 - a + \frac{1}{2}(n^4 - n^2) + c)(mod\ 10) = a(n^2-1) + \frac{1}{2}n^2(n^2-1) + c = c_n.$$

Далее рассмотрим множество $\{b_k\ (mod\ 10)\}$. Имеем:

$$b_k = a(k^2-1) + \tfrac{1}{2}c(k^2-2)(k^2-1) + b\left(1 - \tfrac{1}{2}(k^2-2)(k^2-1)\right) = \tag{5.4}$$

$$= a(k^2-1) + \tfrac{1}{2}c(k^2-2)(k^2-1) + b - \tfrac{b}{2}(k^2-2)(k^2-1) =$$

$$= a(k^2-1) + \tfrac{1}{2}(c-b)(k^2-2)(k^2-1) + b =$$

$$= a(k^2 - 1) + \frac{1}{2}(k^2 - 2)(k^2 - 1) + b.$$

Выберем произвольное n:

$$k = n: n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5,$$

Тогда справедливо:

$$b_n = a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}(n^2 - 2)(n^2 - 1) + b,$$

$$b_{5+n} = a((n+5)^2 - 1) + \frac{1}{2}((n+5)^2 - 2)((n+5)^2 - 1) + b =$$

$$= a(n^2 + 10n + 25 - 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 10n + 25 - 2)(n^2 + 10n + 25 - 1) + b =$$

$$= an^2 + 10an + 25a - a + \frac{1}{2}(n^4 + 10n^3 + 25n^2 - n^2 + 10n^3 + 100n^2 +$$

$$+250n - 10n + 25n^2 + 250n + 625 - 25 - 2n^2 - 20n^2 - 50 + 2) + b \equiv$$

$$\equiv \left(a(n^2 - 1) + 25a + \frac{1}{2}(n^4 - 3n^2 + 2 - 50) + b\right)(mod\ 10) =$$

$$= (a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}(n^2 - 2)(n^2 - 1) + b) + 25a - 25 =$$

$$= b_n + 25a - 25 = b_n + 25(a - 1).$$

Заметим, что

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b). \qquad (5.5)$$

А так как $c - b = 1$, то число

$$a^2 = 1(c + b) \qquad (5.6)$$

есть нечётное число. Следовательно, a тоже нечётное число. Но тогда $(a - 1)$ – чётное число, и, значит,

$$25(a-1) \equiv 0 \ (mod\ 10), b_{5+n} \equiv b_n (mod\ 10).$$

Что и требовалось доказать.

Далее будем рассматривать семейства пифагоровых троек $\{(a_k, b_k, c_k)\}$ с $h = 2$.

В качестве примера рассмотрим тройку $(8, 15, 17)$. Снова умножим её на матрицу перехода и рассмотрим пифагоровы тройки до $k = 15$.

Таблица 7 – Потомки корневой пифагоровой тройки $(8, 15, 17)$

Номер потомка	k–потомок
$k = 1$	$(8, 15, 17)$
$k = 2$	$(28, 45, 53)$
$k = 3$	$(72, 135, 153)$
$k = 4$	$(152, 345, 377)$
$k = 5$	$(280, 759, 809)$
$k = 6$	$(468, 1485, 1557)$
$k = 7$	$(728, 2655, 2753)$
$k = 8$	$(1072, 4425, 4553)$
$k = 9$	$(1512, 6975, 7137)$
$k = 10$	$(2060, 10509, 10709)$
$k = 11$	$(2728, 15255, 15497)$
$k = 12$	$(3528, 21465, 21753)$
$k = 13$	$(4472, 29415, 29753)$
$k = 14$	$(5572, 39405, 39797)$
$k = 15$	$(6840, 51759, 52209)$

Одновременно рассмотрим тройки

$$\{(a_k \ (mod\ 10), b_k \ (mod\ 10), c_k \ (mod\ 10))\}$$

при различных значениях k:

$$\{a_k \ (mod\ 10)\} = \{8, 8, 2, 2, 0, 8, 8, 2, 2, 0, 8, 8, 8, 2, 2, 0\},$$
$$\{c_k \ (mod\ 10)\} = \{7, 3, 3, 7, 9, 7, 3, 3, 7, 9, 7, 3, 3, 7, 9\},$$
$$\{b_k \ (mod\ 10)\} = \{5, 5, 5, 5, 9, 5, 5, 5, 5, 9, 5, 5, 5, 5, 9\}.$$

В данном случае длина периода последовательностей a_k, b_k, c_k равна $T = 5$.

Исследовав другие семейства пифагоровых троек, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2. Любое семейство троек

$$\{(a_k \ (mod\ 10), b_k \ (mod\ 10), c_k \ (mod\ 10))\},$$

соответствующих $h = 2$, периодично по a_k, b_k, c_k с длиной периода $T = 5$.

Доказательство. Идея доказательства ничем не отличается от доказательства утверждения 1. Вновь рассмотрим множество $\{a_k \ (mod\ 10)\}$:

$$a_k = ak + bk(1 - k^2) + ck(k^2 - 1) = k\big(a + (1 - k^2)(b - c)\big).$$

Заметим, что $c - b = 2$. Поэтому последнее равенство примет вид:

$$a_k = k\big(a - 2(1 - k^2)\big). \tag{5.7}$$

Тогда для произвольного

$$k = n: n \ \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5,$$

справедливо

$$a_n = n\big(a - 2(1 - n^2)\big),$$
$$a_{5+n} = (5+n)\big(a - 2(1 - (5+n)^2)\big) =$$
$$= (5+n)(a - 2 + 50 + 20n + 2n^2) = 5a - 10 + 250 + 100n +$$
$$+10n^2 + an - 2n + 50n + 20n^2 + 2n^3 \ \equiv$$
$$\equiv (5a + an - 2n + 2n^3)(mod\ 10) =$$
$$= 5a + n(a - 2(1 - n^2)) = (5a + a_n)\ (mod\ 10).$$

Ввиду того, что

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = 2(c - b),$$

a^2 – чётное число, а следовательно, a – тоже чётное число. Тогда

$$5a \ \equiv 0\ (mod\ 10),$$

и, следовательно,

$$a_{5+n} \ \equiv a_n\ (mod\ 10).$$

Проведем аналогичные преобразования для $\{b_k\}$. Для произвольного числа

$$k = n : n \ \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 5$$

имеем:

$$b_n = a(n^2 - 1) + (n^2 - 1)(n^2 - 2) + b, \qquad (5.8)$$
$$b_{5+n} = \ a((5+n)^2 - 1) + ((5+n)^2 - 2)((5+n)^2 - 1) + b =$$
$$= (25a + 10na + n^2a - a) + (25 + 10n + n^2 - 2)\ \cdot$$
$$\cdot\ (25 + 10n + n^2 - 1) + b = (25a + 10na + an^2 - a) +$$

$$+(625+250n+25n^2-25+250n+100n^2+10n^3-10n+$$
$$+25n^2+10n^3+n^4-n^2-50-20n-2n^2+2)+b=$$
$$=\left(25a+10na+a(n^2-1)\right)+(550+470n+150n^2-3n^2+20n^3+n^4+$$
$$+2)+b\equiv\left(\left(25a+a(n^2-1)\right)+(n^4-3n^2+2)+b\right)\ (mod\ 10)=$$
$$=25a+a(n^2-1)+(n^2-1)(n^2-2)+b.$$

Так как a – чётное число, то

$$25a\ \equiv 0\ (mod\ 10),$$
$$25a+a(n^2-1)+(n^2-1)(n^2-2)+b\ \equiv\ (a(n^2-1)+$$
$$+(n^2-1)(n^2-2)+b)\ (mod\ 10).$$

Повторим наши рассуждения для последовательности $\{c_n\}$.

$$c_k=a(k^2-1)-\frac{1}{2}bk^2(k^2-1)+c\left(1+\frac{1}{2}k^2(k^2-1)\right)= \tag{5.9}$$
$$=a(k^2-1)-\frac{b}{2}k^2(k^2-1)+c+\frac{c}{2}k^2(k^2-1)=$$
$$=a(k^2-1)+\frac{1}{2}(c-b)k^2(k^2-1)+c=a(k^2-1)+k^2(k^2-1)+c.$$

Вновь выберем

$$k=n\colon n\ \in\mathbb{N}, 1\leq n\leq 5.$$

Тогда верно, что

$$c_n=a(n^2-1)+n^2(n^2-1)+c,$$
$$c_{5+n}=a((5+n)^2-1))+(5+n)^2((5+n)^2-1)+c=a(25+10n+n^2-$$
$$-1)+(25+10n+n^2)(25+10n+n^2-1)+c=a(25+10n+n^2-1)+$$
$$+(625+250n+25n^2-25+250n+100n^2+10n^3-10n+25n^2+10n^3+$$

$$+n^4 - n^2) + c \equiv (a(n^2-1) + n^4 - n^2 + c)(mod\ 10) =$$
$$= a(n^2-1) + n^2(n^2-1) + c = c_n.$$

Доказательство завершено.

Будем теперь рассматривать немонотонные пифагоровы тройки. Интерес представляет ответ на вопрос: будут ли свойства периодичности по остаткам выполняться и для них?

Пример. Рассмотрим тройку $(40, 9, 41)$. Умножим ее на матрицу перехода $S(n)$.

Таблица 8 – Потомки корневой пифагоровой тройки $(40, 9, 41)$

Номер потомка	k–потомок
$k = 1$	$(40, 9, 41)$
$k = 2$	$(272, 225, 353)$
$k = 3$	$(888, 1225, 1513)$
$k = 4$	$(2080, 3969, 4481)$
$k = 5$	$(4040, 9801, 10601)$
$k = 6$	$(6960, 20449, 21601)$
$k = 7$	$(11032, 38025, 39593)$
$k = 8$	$(16448, 65025, 67073)$
$k = 9$	$(23400, 104329, 106921)$
$k = 10$	$(32080, 159201, 162401)$
$k = 11$	$(42680, 233289, 237161)$
$k = 12$	$(55392, 330625, 335233)$
$k = 13$	$(70408, 455625, 461033)$
$k = 14$	$(87920, 613089, 619361)$
$k = 15$	$(108120, 808201, 815401)$

Тогда

$$\{a_k \ (mod\ 10)\} = \{0, 2, 8, 0, 0, 0, 2, 8, 0, 0, 0, 2, 8, 0, 0\},$$
$$\{b_k \ (mod\ 10)\} = \{9, 5, 5, 9, 1, 9, 5, 5, 9, 1, 9, 5, 5, 9, 1\},$$
$$\{c_k \ (mod\ 10)\} = \{1, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 1, 3, 3, 1, 1\}.$$

Не представляет труда заметить, что для немонотонных пифагоровых троек (a, b, c) период по a_k, b_k, c_k равен 5. Сформулируем наше наблюдение в виде утверждения.

Утверждение 3. Любое семейство немонотонных пифагоровых троек

$$\{(a_k \ (mod\ 10), b_k \ (mod\ 10), c_k \ (mod\ 10))\}$$

соответствующих $h = 1$ периодично по a_k, b_k, c_k с длиной периода $T = 5$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательствам утверждений 1 и 2.

Рассмотрим семейство троек $\{(a_k, b_k, c_k)\}$, для которых $h = 2$. В качестве примера выберем тройку $(15, 8, 17)$. Результаты представлены в таблице 9.

Таблица 9 – Потомки корневой пифагоровой тройки $(15, 8, 17)$

Номер потомка	k–потомок
$k = 1$	$(15, 8, 17)$
$k = 2$	$(84, 80, 116)$
$k = 3$	$(261, 380, 461)$
$k = 4$	$(600, 1178, 1322)$
$k = 5$	$(1155, 2852, 3077)$
$k = 6$	$(1980, 5888, 6212)$
$k = 7$	$(3129, 10880, 11321)$
$k = 8$	$(4656, 18530, 19106)$
$k = 9$	$(6615, 29648, 30377)$

Окончание таблицы 9

Номер потомка	k–потомок
$k = 10$	$(9060, 45152, 46052)$
$k = 11$	$(12045, 66068, 67157)$
$k = 12$	$(15624, 93530, 94826)$
$k = 13$	$(19851, 128780, 130301)$
$k = 14$	$(24780, 173168, 174932)$
$k = 15$	$(30465, 228152, 230177)$
$k = 16$	$(36960, 295298, 297602)$
$k = 17$	$(44319, 376280, 378881)$
$k = 18$	$(52596, 472880, 475796)$
$k = 19$	$(61845, 586988, 590237)$
$k = 20$	$(72120, 720602, 724202)$

Получим:

$$\{a_k\ (mod\ 10)\} = \{5, 4, 1, 0, 5, 0, 9, 6, 5, 0, 5, 4, 1, 0, 5, 0, 9, 6, 5, 0\},$$
$$\{b_k\ (mod\ 10)\} = \{8, 0, 0, 8, 2, 8, 0, 0, 8, 2, 8, 0, 0, 8, 2, 8, 0, 0, 8, 2\},$$
$$\{c_k\ (mod\ 10)\} = \{7, 6, 1, 2, 7, 2, 1, 6, 7, 2, 7, 6, 1, 2, 7, 2, 1, 6, 7, 2\}.$$

Утверждение 4. Любое семейство немонотонных пифагоровых троек

$$\{(a_k\ (mod\ 10), b_k\ (mod\ 10), c_k\ (mod\ 10))\},$$

соответствующих $h = 2$, обладает следующими свойствами:

– периодично по a_k, c_k с длиной периода $T = 10$;

– периодично по b_k с длиной периода $T = 5$.

Доказательство. Идея доказательства идентична вышеизложенным.

5 Обобщённое свойство периодичности пифагоровых троек по простому модулю

Поинтересуемся, как описанное выше свойство будет проявляться, в случае, когда деление будет производиться на простое число p.

Зададимся некоторой корневой пифагоровой тройкой и простым числом p.

Рассмотрим два примера:

– $(a, b, c) = (11, 60, 61), p = 7$;

– $(a, b, c) = (16, 63, 65), p = 11$.

Как и прежде, будем умножать корневую пифагорову тройку на матрицу $S(n)$. Запишем в таблицу 10 результат деления по модулю p.

Геометрическую интерпретацию можно построить способом, аналогичным тому, что применялся выше.

Таблица 10 – Остатки от деления на p потомков пифагоровых троек

Номер потомка	k–потомок $(11, 60, 61)(mod\ 7)$	k–потомок $(16, 63, 65)(mod\ 11)$
$k = 1$	$(4, 4, 5)$	$(5, 8, 10)$
$k = 2$	$(0, 5, 2)$	$(0, 7, 4)$
$k = 3$	$(1, 1, 3)$	$(8, 5, 1)$
$k = 4$	$(6, 1, 3)$	$(8, 7, 6)$
$k = 5$	$(0, 5, 2)$	$(1, 9, 4)$
$k = 6$	$(3, 4, 5)$	$(10, 9, 4)$
$k = 7$	$(0, 1, 1)$	$(3, 7, 6)$
$k = 8$	$(4, 4, 5)$	$(3, 5, 1)$
$k = 9$	$(0, 5, 2)$	$(0, 7, 4)$
$k = 10$	$(1, 1, 3)$	$(6, 8, 10)$
$k = 11$	$(6, 1, 3)$	$(0, 5, 5)$
$k = 12$	$(0, 5, 2)$	$(5, 8, 10)$

Окончание таблицы 10

Номер потомка	k–потомок $(11, 60, 61)(mod\ 7)$	k–потомок $(16, 63, 65)(mod\ 11)$
$k = 13$	$(3, 4, 5)$	$(0, 7, 4)$
$k = 14$	$(0, 1, 1)$	$(8, 5, 1)$
…	…	…
$k = 21$	$(0, 1, 1)$	$(6, 8, 10)$
$k = 22$	$(4, 4, 5)$	$(0, 5, 5)$

Сформулируем следующее утверждение:

Утверждение 5. Последовательность

$$\{(a_k, b_k\ , c_k)\}\ (mod\ p)$$

периодична по k, причем длина периода $T = p$.

Доказательство. Рассмотрим случай монотонной пифагоровой тройки с ростом $h = 1$. Рассмотрим множество $\{a_k\ (mod\ p)\}$

Тогда:

$$a_k = ak + bk(1 - k^2) + ck(k^2 - 1) = k\big(a + (1 - k^2)(b - c)\big) =$$
$$= k\big(a - (1 - k^2)\big) = k(a - 1 + k^2).$$

Выберем

$$k = n: n\ \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq p.$$

Следовательно,

$$a_n = n(a - 1 + n^2), \tag{6.2}$$

$$a_{n+p} = (n+p)(a-1+(n+p)^2) \equiv n(a-1+(n+p)^2)\ (mod\ p) =$$
$$= n(a-1+n^2+2pn+p^2) = an - n + n^3 + 2pn^2 + p^2 n \equiv$$
$$\equiv (an - n + n^3)(mod\ p) = n(a-1+n^2) = a_n.$$

Поступим аналогичным образом с $\{b_k\}$. Зададимся соответствующим n.

$$b_n = \left(\frac{n^4}{2} + n^2\left(a - \frac{3}{2}\right) - a + 1 + b\right), \qquad (6.3)$$

$$b_{n+p} = a((n+p)^2 - 1) + \frac{1}{2}((n+p)^2 - 2)((n+p)^2 - 1) + b =$$
$$= a(n^2 + 2pn + p^2 - 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2pn + p^2 - 2)(n^2 + 2pn + p^2 - 1) + b =$$
$$= an^2 + 2apn + ap^2 - a + \frac{n^4}{2} + pn^3 + \frac{p^2n^2}{2} - \frac{n^2}{2} + pn^3 + 2p^2n^2 + p^3 n -$$
$$-pn + \frac{p^2n^2}{2} + p^3 n + \frac{p^4}{2} - \frac{p^2}{2} - n^2 - 2pn - p^2 + 1 + b =$$
$$= an^2 + 2apn + ap^2 - a + \frac{n^4}{2} + 2pn^3 + 3p^2n^2 - \frac{3n^2}{2} +$$
$$+2p^3 n - 3pn + \frac{p^4}{2} - \frac{p^2}{2} - p^2 + 1 + b \equiv$$
$$\equiv an^2 - a + \frac{n^4}{2} - \frac{3n^2}{2} + \frac{p^4}{2} - \frac{p^2}{2} + 1 + b\ (mod\ p) =$$
$$= n^2\left(a - \frac{3}{2}\right) + \frac{n^4}{2} + \frac{1}{2}p^2(p^2 - 1) - a + 1 + b \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{n^4}{2} + n^2\left(a - \frac{3}{2}\right) - a + 1 + b\right)(mod\ p) = b_n.$$

Доказательство утверждения для $\{c_k\}$ на идейном уровне идентично предыдущим.

$$c_n = a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}n^2(n^2 - 1) + c,$$

$$c_{n+p} = a((n+p)^2 - 1) + \frac{1}{2}(n+p)^2((n+p)^2 - 1) + c =$$

$$= a(n^2 + 2np + p^2 - 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2np + p^2)(n^2 + 2np + p^2 - 1) + c =$$

$$= an^2 + 2anp + ap^2 - a + \frac{1}{2}(n^4 + 2n^3p + n^2p^2 - n^2 + 2n^3p + 4n^2p^2 +$$

$$+2np^3 - 2np + n^2p^2 + 2np^3 + p^4 - p^2) + c =$$

$$= a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}(n^4 + 4pn^3 + 6p^2n^2 - n^2 + 4p^3n + p^4 - p^2) + c =$$

$$= a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}n^2(n^2 - 1) + (2pn^3 + 2p^3n + 3p^2n^2) +$$

$$+\frac{1}{2}p^2(p^2 - 1) + c.$$

Так как $p^2(p^2 - 1)$ – произведение двух последовательных натуральных чисел, то оно всегда чётно. Если $p = 2$, то

$$\frac{1}{2}p^2(p^2 - 1) = p(p^2 - 1) \equiv 0 \ (mod\ p).$$

Если $p \neq 2$, то p нечётно. Следовательно, $(p^2 - 1)$ – чётное число, p^2 – нечётное число. Пусть $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\frac{1}{2}p^2(p^2 - 1) = (2m - 1)p^2 \equiv 0 \ (mod\ p).$$

Следовательно,

$$a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}n^2(n^2 - 1) + (2pn^3 + 2p^3n + 3p^2n^2) + \frac{1}{2}p^2(p^2 - 1) + c \equiv$$

$$\equiv a(n^2 - 1) + \frac{1}{2}n^2(n^2 - 1) + c \ (mod\ p) = c_n.$$

Теперь будем рассматривать случай монотонной пифагоровой тройки с ростом $h = 2$.

Выберем

$$k = n: n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le p.$$

По доказанному ранее:

$$a_n = n\big(a - 2(1 - n^2)\big), \tag{6.2}$$

$$a_{n+p} = (n+p)\big(a - 2(1-(n+p)^2)\big) = n\big(a - 2(1-(n+p)^2)\big) +$$
$$+p\big(a - 2(1-(n+p)^2)\big) \equiv n(a - 2 - 2n^2 - 4pn - 2p^2)\ (mod\ p) = na -$$
$$-2n - 2n^3 - 4pn^2 - 2p^2n\ \equiv n(a - 2 - 2n^2) =$$
$$= n\big(a - 2(1 + n^2)\big)(mod\ p) = a_n.$$

Не отступая от рассуждений, приведенных в доказательстве предыдущего случая, произведем аналогичные преобразования с $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$.

$$b_n = a(n^2 - 1) + (n^2 - 2)(n^2 - 1) + b,$$
$$b_{n+p} = a((n+p)^2 - 1) + ((n+p)^2 - 2)((n+p)^2 - 1) + b =$$
$$= a(n^2 + 2np + p^2 - 1) + (n^2 + 2np + p^2 - 2) \cdot$$
$$\cdot (n^2 + 2np + p^2 - 1) + b = an^2 + 2apn + ap^2 - a + n^4 + 2pn^3 +$$
$$+p^2n^2 - n^2 + 2pn^3 + 4p^2n^2 + 2p^3n - 2pn + p^2n^2 + 2p^3n + p^4 - p^2 - 2n^2 -$$
$$-4pn - 2p^2 + 2 + b \equiv (an^2 - a + n^4 - n^2 - 2n^2 + 2 + b)(mod\ p) =$$
$$= a(n^2 - 1) + (n^2 - 2)(n^2 - 1) + b = b_n.$$
$$c_n = a(n^2 - 1) + n^2(n^2 - 1) + c,$$
$$c_{n+p} = a((n+p)^2 - 1) + (n+p)^2((n+p)^2 - 1) + c =$$
$$= a(n^2 + 2pn + p^2 - 1) + (n^2 + 2pn + p^2)(n^2 + 2pn + p^2 - 1) +$$
$$+c = an^2 + 2apn + ap^2 - a + n^4 + 2pn^3 + p^2n^2 - n^2 + 2pn^3 +$$

$$+4p^2n^2 + 2p^3n - 2pn + p^2n^2 + 2p^3n + p^4 - p^2 + c \equiv$$
$$\equiv (an^2 - a + n^4 - n^2 + c)(mod\ p) = a(n^2 - 1) +$$
$$+ n^2(n^2 - 1) + c = c_n.$$

Утверждение доказано.

Интерес будут представлять и немонотонные тройки. Рассмотрим следующий пример:

– $(a, b, c)_1 = (24, 7, 25), p = 11;$

– $(a, b, c)_2 = (84, 13, 85), p = 5.$

Умножим корневую тройку (a, b, c) на матрицу $S(n)$ и запишем в таблицу 11 тройки $(a_k, b_k, c_k)\ \ (mod\ p)$.

Таблица 11 – Остатки от деления на p потомков пифагоровых троек

Номер потомка	$(a_k, b_k, c_k)_1\ (mod\ p)$	$(a_k, b_k, c_k)_2\ (mod\ p)$
$k = 1$	$(2, 7, 3)$	$(4, 3, 0)$
$k = 2$	$(2, 1, 7)$	$(0, 1, 4)$
$k = 3$	$(9, 10, 7)$	$(0, 1, 4)$
$k = 4$	$(10, 2, 4)$	$(1, 3, 0)$
$k = 5$	$(3, 7, 6)$	$(0, 1, 1)$
$k = 6$	$(8, 7, 6)$	$(4, 3, 0)$
$k = 7$	$(1, 2, 4)$	$(0, 1, 4)$
$k = 8$	$(2, 10, 7)$	$(0, 1, 4)$
$k = 9$	$(9, 1, 7)$	$(1, 3, 0)$
$k = 10$	$(9, 7, 3)$	$(0, 1, 1)$
$k = 11$	$(0,1,1)$	$(4, 3, 0)$
$k = 12$	$(2, 7, 3)$	$(0, 1, 4)$
...	...	...

Окончание таблицы 11

Номер потомка	$(a_k, b_k, c_k)_1 \ (mod\ p)$	$(a_k, b_k, c_k)_2 \ (mod\ p)$
$k = 21$	$(9, 7, 3)$	$(4, 3, 0)$
$k = 22$	$(0, 1, 1)$	$(0, 1, 4)$
$k = 23$	$(2, 7, 3)$	$(0, 1, 4)$

Как можно заметить, свойство периодичности распространяется и на немонотонные пифагоровы тройки. Доказательство приводить не будем из экономии места, так как оно идейно повторяет доказательство утверждения 5.

6 Разработка программы, реализующей интерпретацию серпантином Ньютона

Разработать программу, которая бы вычисляла произвольного потомка по данной корневой тройке, или же наоборот, находила корневую тройку по некоторому потомку, не представляет большого труда. Продемонстрируем ее работу.

Реализация «прямого» хода крайне проста. Пользователь вводит корневую тройку (a, b, c) и номер поколения k и из связи $n = k^2 - 1$ находим n.

Выражения для a_k, b_k, c_k получаются, как известно, умножением матрицы $S(n)$ на вектор $(a, b, c)^T$. Далее, запустив цикл с предусловием от 1 до k, вычислим значения $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_k, b_k, c_k)$ и осуществим их вывод в текстовое поле. При этом происходит проверка на предмет того, является ли введённая тройка пифагоровой. В противном случае пользователю будет выведено сообщение об ошибке. Пользовательский интерфейс можно увидеть на рисунке 11.

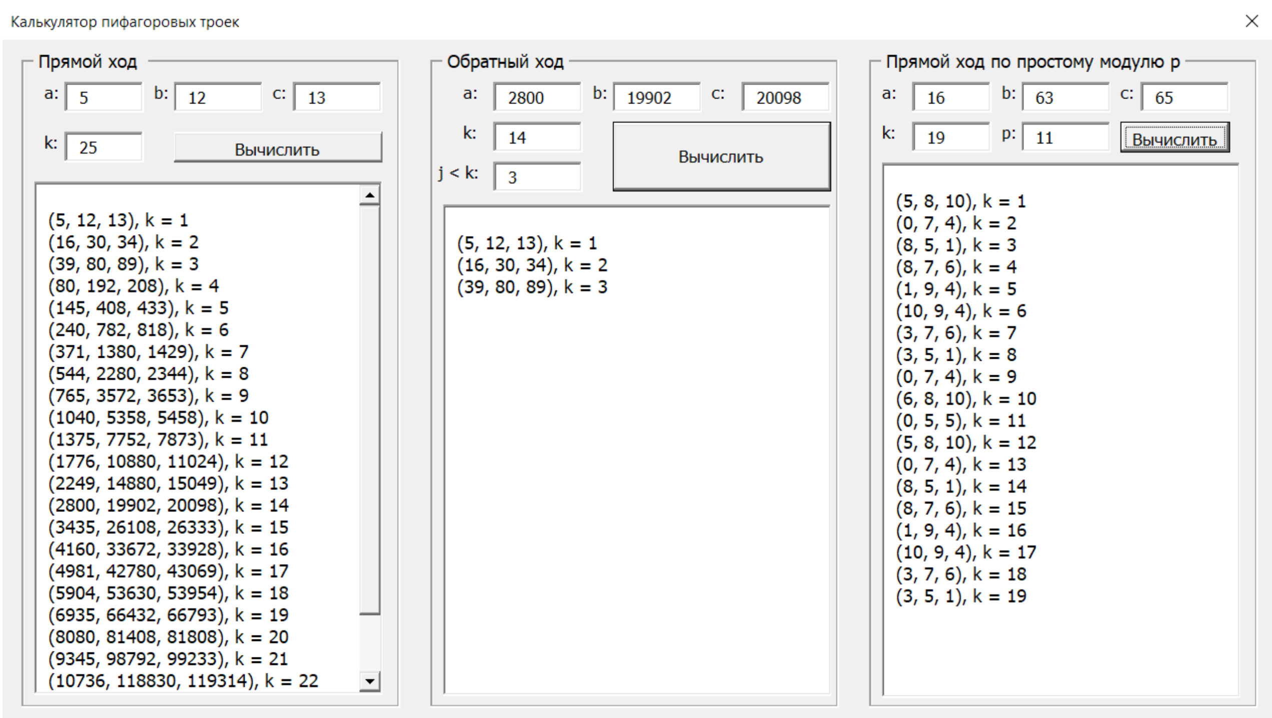


Рисунок 11 – Пользовательский интерфейс приложения

В VBA этот участок кода выглядит следующим образом:

```
For j = 1 To k
n = j * j - 1
ak = a * Sqr(1 + n) + b * (-n) * Sqr(1 + n) + c * n * Sqr(1 + n)
bk = a * n + b * (1 - (n * n - n) / 2) + c * (n * n - n) / 2
ck = a * n + b * ((-n * n - n) / 2) + c * (1 + (n * n + n) / 2)
TextBox12.Text = TextBox12.Text & vbNewLine & "(" & ak Mod p & ", " & bk Mod p & ", " & ck Mod p & ")" & ", k = " & j
Next j
```

Стоит отметить, что вычисление значения n необязательно. С тем же успехом можно было бы вычислить значения a_k, b_k, c_k по соответствующим формулам.

После того, как вычисления закончены и результат выведен в текстовое поле, остатки от деления троек на p выводятся на лист электронной таблицы. По ним осуществляется построение графиков (рисунок 12).

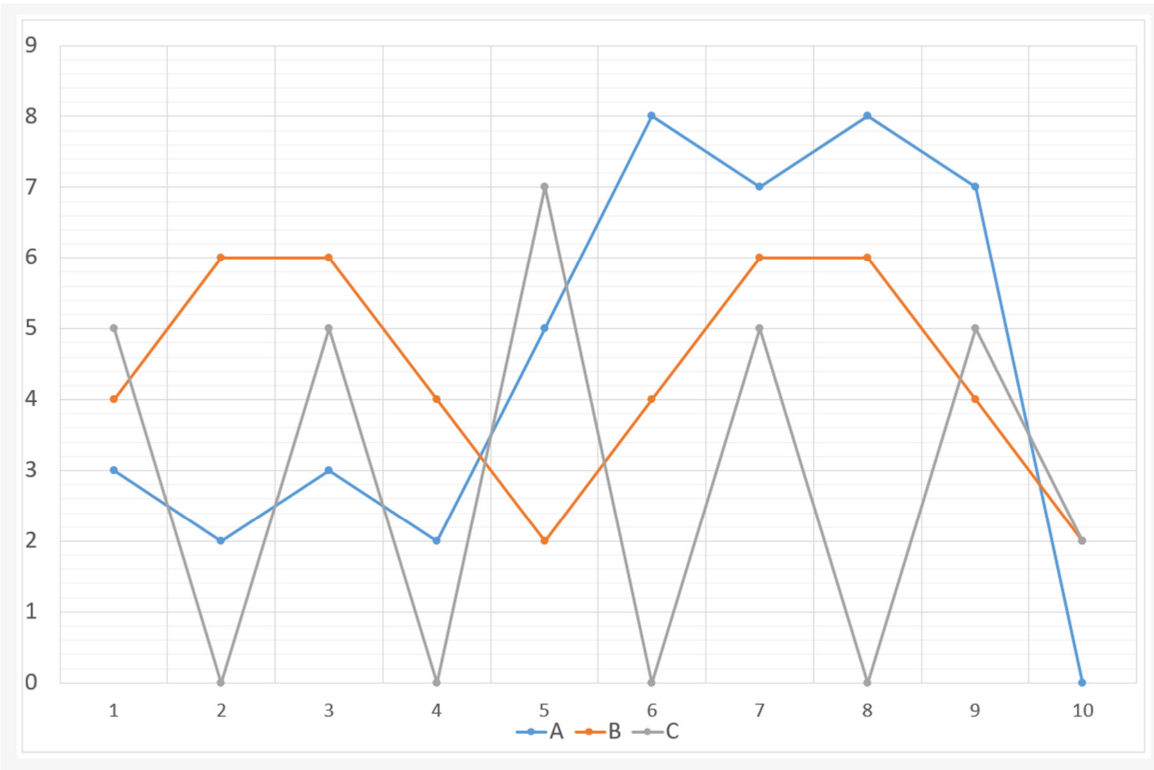


Рисунок 12 – Построение диаграммы остатков

Реализация «прямого хода» с делением по модулю простого числа p ничем не отличается от приведённой выше, с той лишь разницей, что на каждом шаге цикла для полученного выражения для a_k, b_k, c_k осуществляется операция деления по модулю p. Из соображений экономии приводить код не будем.

При реализации «обратного хода» от пользователя требуется ввод чисел a_k, b_k, c_k,и номеров k и $j < k$. Параметр j указывает, до какого «потомка» будет осуществлен вывод пифагоровых троек. Ясно, что выражения для корневой пифагоровой тройки могут быть получены из матрицы перехода $S^{-1}(k)$. Этот участок кода выглядит следующим образом:

```
a = ak / k + bk * (k * k - 1) / (k * k) + ck * (1 - k * k) / (k * k)
b = ak * (1 - k * k) / k + bk * (1 + (1 - k * k) / 2) + ck * (k * k - 1) / 2
c = ak * (1 - k * k) / k + bk * ((k * k - 2) * (k * k - 1)) / (-2 * k * k) + ck * (1 + k * k * (k * k - 1) / 2) / (k * k).
```

В случае, если пользователь желает видеть помимо корневой тройки её потомков до номера j, то запускается цикл с предусловием от 1 до j, в котором осуществляется вычисление троек-потомков и их вывод в текстовое поле:

```
For j = 1 To k
n = j * j - 1
ak = a * Sqr(1 + n) + b * (-n) * Sqr(1 + n) + c * n * Sqr(1 + n)
bk = a * n + b * (1 - (n * n - n) / 2) + c * (n * n - n) / 2
ck = a * n + b * ((-n * n - n) / 2) + c * (1 + (n * n + n) / 2)
TextBox12.Text = TextBox12.Text & vbNewLine & "(" & ak Mod p & ", " & bk Mod p & ", " & ck Mod p & ")" & ", k = " & j
Next j
```

7 Интерпретация троек долями площадей плоской фигуры

Рассмотрим некоторую фигуру Ф с площадью S. Придадим равенству

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{7.1}$$

следующий вид:

$$x(xS) + y(yS) = z(zS), \tag{7.2}$$

где под x, y, z будем понимать доли площади S, причём полагаем:

$$x + y + z = 1. \tag{7.3}$$

Геометрический смысл (7.3) очевиден.

Приведем пример. Если $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right)$, то имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{12} = 1, \\ \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{25}{144}. \end{cases}$$

Следовательно, треть от трети площади S в сумме с четвертью от четверти площади S – то же, что пять двенадцатых от пяти двенадцатых этой площади S. Такие доли фигуры назовём пифагоровыми.

Если обозначить

$$x = \frac{m_1}{k}, y = \frac{m_2}{k}, z = \frac{m_3}{k}. \tag{7.4}$$

то по предыдущему

$$\begin{cases} m_1^2 + m_2^2 = m_3^2, \\ m_1 + m_2 + m_3 = k. \end{cases} \tag{7.5}$$

Таким образом, тройка (x, y, z) пифагоровых долей сгенерировала пифагорову тройку (m_1, m_2, m_3). Верно и обратное: любая пифагорова тройка (a, b, c) генерирует тройку пифагоровых дробей:

$$\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right). \tag{7.6}$$

Исследуем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2, \end{cases} \tag{7.7}$$

где x, y, z – положительные рациональные числа. Так как

$$z = 1 - (x + y), \tag{7.8}$$

То

$$x^2 + y^2 = 1 - 2(x + y) + (x^2 + 2xy + y^2). \tag{7.9}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} y = \frac{1-2x}{2-2x}, \\ z = 1 - (x + y). \end{cases} \tag{7.10}$$

Параметризуем множество таких точек (x, y, z) уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \varphi(t), \\ z = 1 - \big(t + \varphi(t)\big) = \psi(t), \end{cases} \tag{7.11}$$

где

$$\varphi(t) = \tfrac{1-2t}{2-2t}, t \in \mathbb{Q}. \tag{7.12}$$

Отметим следующие свойства функции $\varphi(t)$:

– $\forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi(t) -$ положительная несократимая дробь;

– $\forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \Rightarrow \varphi(t) \leq 0.$

Далее будем рассматривать лишь рациональные значения переменной t в пределах интервала $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Приведем пример. Выбор $t = \frac{1}{3}$ влечёт

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right) = \left(\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}\right).$$

Заметим, что выбирая $t = \frac{1}{4}$, получим тот же набор чисел: $(4,3,5)$. Объяснение этому обстоятельству простое. Дело в том, что функция $\varphi(t)$ автоморфна, так как $\varphi\big(\varphi(t)\big) = t$ в соответствующей области определения. Поэтому функция $\psi(t)$ будет иметь $\varphi(t)$ своим инвариантом. Действительно,

$$\psi\big(\varphi(t)\big) = 1 - \Big(\varphi(t) + \varphi\big(\varphi(t)\big)\Big) = \psi(t). \tag{7.13}$$

Так что результат перестановки

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(\varphi(t)) = t \\ z = \psi(\varphi(t)) = \psi(t), \end{cases} \tag{7.11}$$

даст ту же пифагорову тройку. Будем иметь это в виду, то есть не различать далее тройки $(t, \varphi(t), \psi(t))$ и $(\varphi(t), t, \psi(t))$.

Составим теперь особую таблицу (бесконечную вправо и вниз) по следующим правилам. Во-первых, заполнять её будем по строкам слева-направо, а по столбцам сверху-вниз. Каждому числу

$$t = \frac{p}{q} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

сопоставим точку (p_φ, q_φ), где

$$\frac{p_\varphi}{q_\varphi} = \varphi(t). \tag{7.14}$$

Если $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь, то закрасим ячейку (p, q) синим цветом, а соответствующую ячейку (p_φ, q_φ) – зелёным цветом. Все ячейки заполняемой таблицы, соответствующие сократимым дробям $\frac{p}{q}$, закрасим жёлтым цветом.

В результате получим интерпретацию множества пифагоровых троек в виде множества закрашенных на рисунке 13 клеток.

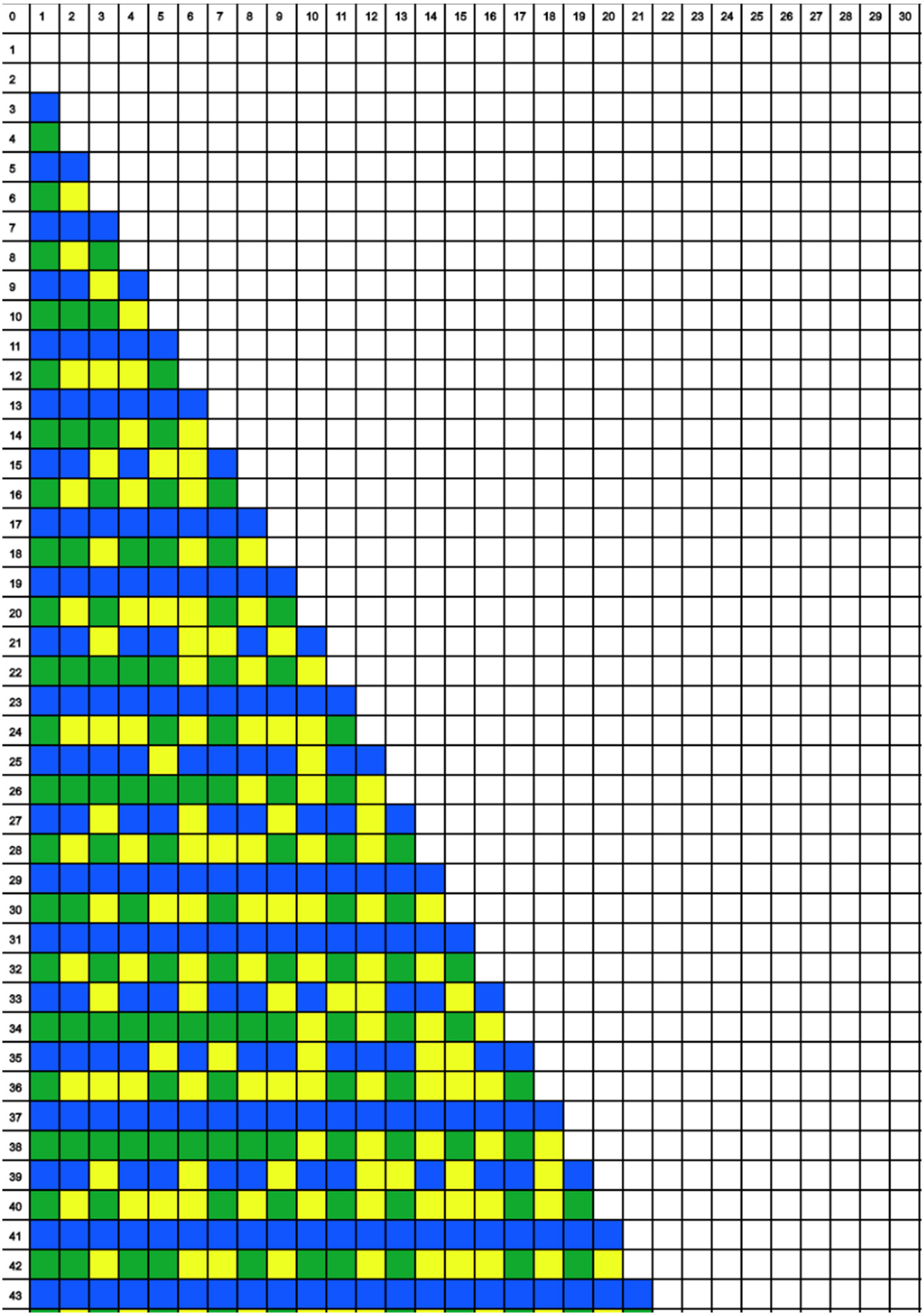


Рисунок 13 – Интерпретация долями площадей плоской фигуры

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пифагоровы тройки – математический объект, известный человеку на протяжении тысячелетий. Однако, изучение способов их классификации ещё не закончено и знания в этой области могут быть пополнены и расширены.

В рамках настоящей бакалаврской работы была разработана компьютерная программа, позволяющая перемещаться по семейству пифагоровых троек в прямом и обратном направлениях, а также вычисляет остатки от деления пифагоровых троек на произвольное число; были приведены и доказаны некоторые свойства, которыми обладают построенные геометрические интерпретации. Кроме того, были приведены некоторые из известных науке способов генерации пифагоровых троек и геометрических интерпретации. Таким образом, были выполнены поставленные перед работой задачи.

Результаты данной работы могут быть использованы при преподавании факультативных курсов по теории чисел, а также при дальнейших исследованиях приложений пифагоровых троек, в частности, в области шифрования информации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Мурсеев М. П. Теоремы «пифагоровых троек» / М. П. Мурсеев // Наука и современность 2016 : сборник научных работ XIII Международной научной конференции Евразийского Научного Объединения (г. Москва, январь 2016). – М. : ЕНО, 2015. – 147 с.

2 Жуков А. В. Пифагоровы треугольники / А. В. Жуков // Квант. – 2008. – № 4. – С. 32-33.

3 Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма – Генеалогическое введение в алгебраическую теорию чисел / Г. Эдвардс. – М. : МИР, 1980. – 486 с.

4 Стюарт И. Математические диковинки профессора Стюарта / И. Стюарт ; пер. с англ. Н. А. Шиховой. – М. : Лаборатория знаний, 2018. – 320 с. : ил.

5 Robson E. Words and Pictures: New Light on Plimpton 322 / E. Robson // The American Mathematical Monthly. – 2002. – № 109. – С. 105-120.

6 McKenzie D., Cypra B. Rewriting History / D. McKenzie, B. Cypra // What's happening in mathematical sciences. – 2002. – V. 5. – С. 55-59.

7 Смольянова Е. Г., Булавкин Г. Б. Исследование способов классификации пифагоровых троек как элемент вариативной части математического образования // Образовательные технологии и общество – 2019. – Т. 22, № 1. – С. 185-197.

8 Subhash K. Pythagorean Triples and Cryptographic Coding. [Электронный ресурс] / K. Subhash // Cornell University arXiv. – 2010. – Режим доступа: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1004/1004.3770.pdf – (Дата обращения: 03.06.2019).

9 Холл А. Genealogy of Pythagorean Triads. / Холл. А. // The Mathematical Gazette. – 1970. – № 54 (390). – С. 377-379.

10 Ли Прайс Х. The Pythagorean Tree: A New Species. [Электронный ресурс] // Х. Ли Прайс // Cornell University arXiv. – 2008. – Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf. – (Дата обращения: 04.05.2019).

11 Kozlov D. Generalized Brunes Stars and System of Pythagorean Triples / D. Kozlov // Proceedings of Bridges 2016: Mathematics, Music, Art, Architecture, Education, Culture. – Phoenix : Tessellations Publishing, 2016. – C. 379-382.

12 Kozlov D. Eight-Pointed Star and Precise Construction of 7×7 Square Grid /D. Kozlov // Proceedings of Bridges 2015: Mathematics, Music, Art, Architecture, Education, Culture. – Phoenix : Tessellations Publishing, 2015. – C. 331-334.

13 Смольянова Е. Г., Воробьева У. А. Об одном методе генерации пифагоровых $n-$наборов и некоторых их обобщений / Е. Г. Смольянова, У. А. Воробьева // Материалы XXI научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов Национального исследовательского МГУ им. Н. П. Огарёва. Естеств. науки. – Саранск : Изд-во Мордовского ун-та, 2017. – С. 171-174.

14 Деза Е. И. Специальные числа натурального ряда: учебное пособие // Е. И. Деза. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 240 с.

15 Коротков А. В. Таблицы чисел Пифагора, Диофанта, Фибоначчи. Ч. 3. / А. В. Коротков. – Новочеркасск : Изд-во НОК, 2016. – 46 с.

16 Смольянова Е. Г., Булавкин Г. Б. Генерация пифагоровых троек с помощью серпантина Ньютона / Е. Г. Смольянова, Г. Б. Булавкин // Материалы XXII научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов Национального исследовательского МГУ им. Н. П. Огарёва. Ч.2. Естеств. науки. – Саранск : Изд-во Мордовского ун-та, 2019. – С. 375-380.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код калькулятора пифагоровых троек

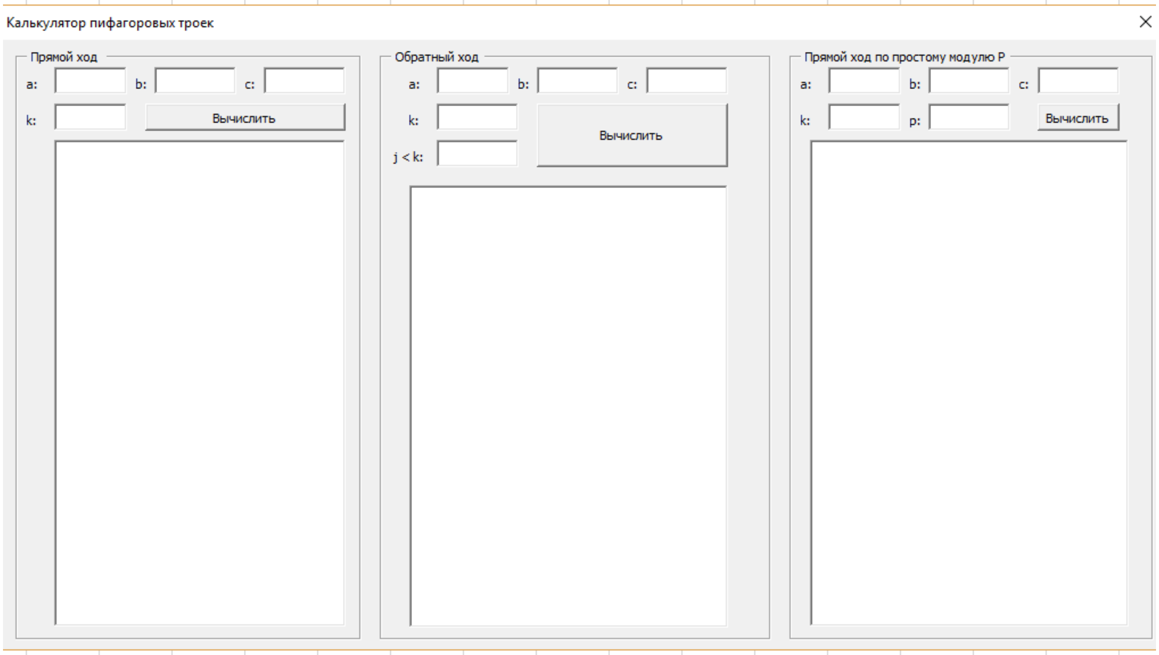


Рисунок А.1 – пользовательский интерфейс приложения

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Worksheets("Лист1").Range("B5:D14").Clear
TextBox5.Text = " "
Dim a As Long, b As Long, c As Long
Dim k As Integer
a = TextBox1.Value
b = TextBox2.Value
c = TextBox3.Value
leftsqr = a * a + b * b
rightsqr = c * c
If (leftsqr <> rightsqr) Then
MsgBox ("Введенная тройка чисел не является пифагоровой")
Exit Sub
End If
```

```
k = TextBox4.Value
For j = 1 To k
n = j * j - 1
ak = a * Sqr(1 + n) + b * (-n) * Sqr(1 + n) + c * n * Sqr(1 + n)
bk = a * n + b * (1 - (n * n - n) / 2) + c * (n * n - n) / 2
ck = a * n + b * ((-n * n - n) / 2) + c * (1 + (n * n + n) / 2)
If (((CInt(c) - CInt(b) = 1) Or (CInt(c) - CInt(a) = 2)) And (j < 11)) Then
Worksheets("Лист1").Cells(j + 4, 2) = ak Mod 10
Worksheets("Лист1").Cells(j + 4, 3) = bk Mod 10
Worksheets("Лист1").Cells(j + 4, 4) = ck Mod 10
End If
If (((CInt(c) - CInt(b) = 2) Or (CInt(c) - CInt(a) = 1)) And (j < 6)) Then
Worksheets("Лист1").Cells(j + 4, 2) = ak Mod 10
Worksheets("Лист1").Cells(j + 4, 3) = bk Mod 10
Worksheets("Лист1").Cells(j + 4, 4) = ck Mod 10
End If
TextBox5.Text = TextBox5.Text & vbNewLine & "(" & ak & ", " & bk & ", "
& ck & ")" & ", k = " & j
Next j
End Sub
Private Sub CommandButton2_Click()
TextBox11.Text = " "
ak = TextBox9.Value
bk = TextBox8.Value
ck = TextBox7.Value
k = TextBox6.Value
p = TextBox10.Value
leftsqr = ak * ak + bk * bk
rightsqr = ck * ck
If (leftsqr <> rightsqr) Then
```

```
MsgBox ("Введенная тройка чисел не является пифагоровой")
Exit Sub
End If
a = ak / k + bk * (k * k - 1) / (k * k) + ck * (1 - k * k) / (k * k)
b = ak * (1 - k * k) / k + bk * (1 + (1 - k * k) / 2) + ck * (k * k - 1) / 2
c = ak * (1 - k * k) / k + bk * ((k * k - 2) * (k * k - 1)) / (-2 * k * k) + ck * (1 + k * k * (k * k - 1) / 2) / (k * k)
For j = 1 To p
n = j * j - 1
ak = a * Sqr(1 + n) + b * (-n) * Sqr(1 + n) + c * n * Sqr(1 + n)
bk = a * n + b * (1 - (n * n - n) / 2) + c * (n * n - n) / 2
ck = a * n + b * ((-n * n - n) / 2) + c * (1 + (n * n + n) / 2)
TextBox11.Text = TextBox11.Text & vbNewLine & "(" & ak & ", " & bk & ", " & ck & ")" & ", k = " & j
Next j
End Sub
Private Sub CommandButton3_Click()
Worksheets("Лист1").Range("B5:D14").Clear
TextBox12.Text = " "
Dim a As Long, b As Long, c As Long
Dim k As Integer
a = TextBox16.Value
b = TextBox18.Value
c = TextBox13.Value
leftsqr = a * a + b * b
rightsqr = c * c
If (leftsqr <> rightsqr) Then
MsgBox ("Введенная тройка чисел не является пифагоровой")
Exit Sub
End If
```

```
k = TextBox20.Value
p = TextBox19.Value
For j = 1 To k
n = j * j - 1
ak = a * Sqr(1 + n) + b * (-n) * Sqr(1 + n) + c * n * Sqr(1 + n)
bk = a * n + b * (1 - (n * n - n) / 2) + c * (n * n - n) / 2
ck = a * n + b * ((-n * n - n) / 2) + c * (1 + (n * n + n) / 2)
TextBox12.Text = TextBox12.Text & vbNewLine & "(" & ak Mod p & ", " & bk Mod p & ", " & ck Mod p & ")" & ", k = " & j
Next j
End Sub
```

ОТЗЫВ

о выпускной квалификационной работе «Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек» студента 4 курса ФМиИТ направления подготовки «Математика и компьютерные науки» Булавкина Г.Б.

Работа посвящена исследованию нетрадиционных способов геометрической интерпретации пифагоровых троек и их классификации. Последнее, несомненно, актуально, поскольку поиски классификационных признаков продолжаются до сих пор. Автор работы предложил свой взгляд на эту проблему и параллельно изучил особенности последовательностей троек, генерируемых в оригинальной интерпретации. А именно, доказал факт периодического поведения остатков по модулю простого числа всех элементов генерируемых пифагоровых троек. Для визуализации геометрической интерпретации результатов исследования автором было разработано специальное программное обеспечение.

Результаты настоящей работы полезны как с теоретической, так и с практической (например, для создания ГПСЧ) точек зрения. Они были отражены в двух статьях (в соавторстве): в журнале «Образовательные технологии и общество» (Казань) и в материалах XXII научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П.Огарёва (Саранск).

Булавкин Г.Б. показал хорошую теоретическую и прикладную подготовку в процессе выполнения ВКР.

Считаю, что работа вполне заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель
старший преподаватель Е.Г.Смольянова

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.П. ОГАРЁВА”

ОТЗЫВ РЕЦЕНЗЕНТА
О ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

Студента ___Булавкина Германа Борисовича___
(Фамилия, имя, отчество)

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа Группа 401
Направление подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки
Квалификация (степень) бакалавр
Наименование темы: Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек
Рецензент: Сухарев Л. А., ФМиИТ, доцент кафедры алгебры и геометрии, к. ф.-м.н.

ОЦЕНКА ВЫПУСКНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Показатели		Оценка				
			5	4	3	2	0*
1.	Актуальность тематики работы		+				
2.	Степень полноты обзора состояния вопроса и корректность постановки задачи			+			
3.	Уровень и корректность использования в работе методов исследования, математического моделирования		+				
4.	Степень комплексности работы, применение в ней знаний естественнонаучных, социально-экономических, общепрофессиональных и специальных дисциплин						+
5.	Ясность, четкость, последовательность и обоснованность изложения			+			
6.	Применение современного математического и программного обеспечения, компьютерных технологий в работе		+				
7.	Качество оформления (общий уровень грамотности, стиль изложения, качество иллюстраций, соответствие требованиям стандарта)		+				
8.	Оригинальность и новизна полученных результатов (научных, конструкторских и технологических решений)		+				
9.	Тип работы	фундаментальная с оригинальными результатами	+				
		реферативная					
		прикладная					
10.	Рекомендации	к опубликованию		+			
		к внедрению					
ИТОГОВАЯ ОЦЕНКА			Отлично				

* – не оценивается (трудно оценить)

Отмеченные достоинства: Настоящая работа посвящена исследованию свойств и различных геометрических интерпретаций пифагоровых троек. Помимо обзора наиболее известных геометрических интерпретаций, в том числе и современных, автор предлагает собственные. Автором разработана программа визуализации геометрической интерпретации пифагоровых троек. В работе представлены доказательства обнаруженных автором закономерностей в последовательностях, образованных остатками от деления генерируемых пифагоровых троек на произвольные простые числа, т.е. остатками от деления по модулю простого числа. Предложен классификационный признак множества пифагоровых троек, что до сих пор является предметом научных изысканий.

Отмеченные недостатки: Описание применения полученных теоретических результатов в работе отсутствует.

Заключение: Данная работа написана математически грамотно, вполне соответствует требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам бакалавров по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки», может быть допущена к защите. Считаю, что автор работы, Булавкин Г. Б., заслуживает присвоения степени бакалавра по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки».

11 июня 2019 г. Рецензент ____________ (подпись)

Заявление о самостоятельном характере выполнения работы

Я, Булавкин Герман Борисович, обучающийся 4 курса направления подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, заявляю, что в моей работе по теме «Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек», представленной в Государственную экзаменационную комиссию для публичной защиты, не содержится элементов неправомерных заимствований.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также ранее защищенных письменных работ, кандидатских и докторских диссертаций, имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим в Университете Положением о проверке работ обучающихся ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» на наличие заимствований, в соответствии с которым обнаружение неправомерных заимствований является основанием для отрицательного отзыва руководителя работы.

Подпись обучающегося Дата 07.06.19

Работа представлена для проверки в Системе «Антиплагиат.ВУЗ»

Дата представления работы 07.06.19 *подпись руководителя*

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева

СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа на наличие заимствований

Проверка выполнена в системе Антиплагиат.ВУЗ

Автор работы	**Булавкин Герман Борисович**
Факультет, кафедра, номер группы	Факультет математики и информационных технологий, кафедра математического анализа, группа 401
Тип работы	Выпускная квалификационная работа
Название работы	2019 Булавкин Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек
Название файла	Булавкин_ГБ_ВКР.docx
Процент заимствования	**3,26%**
Процент цитирования	**1,18%**
Процент оригинальности	**95,56%**
Дата проверки	**12:40:47 07 июня 2019г.**
Модули поиска	Сводная коллекция ЭБС; Коллекция РГБ; Цитирования; Переводные заимствования; Коллекция Гарант; Модуль поиска Интернет; Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"; Модуль поиска перефразирований Интернет; Модуль поиска общеупотребительных выражений; Кольцо Вузов

Работу проверил СМОЛЬЯНОВА ЕЛЕНА ГРИГОРЬЕВНА

ФИО проверяющего

Дата подписи 07.06.19

Подпись проверяющего

Чтобы убедиться в подлинности справки, используйте QR-код, который содержит ссылку на отчет.

Ответ на вопрос, является ли обнаруженное заимствование корректным, система оставляет на усмотрение проверяющего. Предоставленная информация не подлежит использованию в коммерческих целях.

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: СМОЛЬЯНОВА ЕЛЕНА ГРИГОРЬЕВНА p000000354@mrsu.ru / ID: 2796
Проверяющий: СМОЛЬЯНОВА ЕЛЕНА ГРИГОРЬЕВНА (p000000354@mrsu.ru / ID: 2796)
Организация: Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

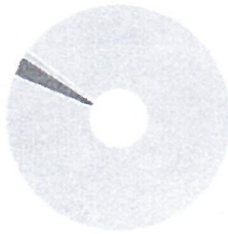
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://mrsu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 6
Начало загрузки: 07.06.2019 12:40:23
Длительность загрузки: 00:00:05
Имя исходного файла: Булавкин_ГБ_ВКР
Размер текста: 3424 кБ
Символов в тексте: 29475
Слов в тексте: 3571
Число предложений: 218

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 07.06.2019 12:40:29
Длительность проверки: 00:00:18
Комментарии: не указано
Модули поиска: Сводная коллекция ЭБС, Коллекция РГБ, Цитирования, Переводные заимствования, Коллекция Гарант, Модуль поиска Интернет, Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева", Модуль поиска перефразирований Интернет, Модуль поиска общеупотребительных выражений, Кольцо Вузов



ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
3,26%	1,18%	95,56%

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	0,73%	1,12%	РАЗРАБОТКА КОНФИГУРАЦИИ «УПРАВ..	не указано	16 Июн 2017	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	3	3
[02]	0,07%	0,96%	Фролов В А.docx	не указано	24 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	1	2
[03]	0,39%	0,89%	Диплом Горбенко Олеси	не указано	10 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	1	2
[04]	0%	0,8%	Отчет о самообследовании ИФХ-2015-...	не указано	31 Мар 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	2
[05]	0,09%	0,75%	Бакалаврская работа Китайкитн Н.	не указано	19 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	1	3
[06]	0,2%	0,75%	Опыт становления и совершенствован..	не указано	26 Мая 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	2	3
[07]	0%	0,58%	Трушина С. В. ДИПЛОМНАЯ 2015 фина...	не указано	26 Мая 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[08]	0%	0,58%	DIPLOMA KNYAZEV 2015.docx	не указано	26 Мая 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[09]	0%	0,58%	Документ Microsoft Word.doc	не указано	15 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[10]	0%	0,58%	Kupriashkin	не указано	19 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[11]	0%	0,55%	Социальные службы как субъекты реш	не указано	26 Мая 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[12]	0%	0,55%	Организационно-технологическая хар.	не указано	26 Мая 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[13]	0%	0,55%	Социальное самочувствие семей с дет...	не указано	26 Мая 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[14]	0%	0,55%	ВКР Курашкин	не указано	16 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[15]	0,54%	0,54%	Спиридонов, Кирилл Игоревич Разраб..	http://dlib.rsl.ru	19 Фев 2018	Коллекция РГБ	1	1
[16]	0%	0,54%	diplomalexsh	не указано	24 Июн 2016	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	2
[17]	0%	0,54%	Коновалова О.И..docx	не указано	14 Июн 2017	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	2
[18]	0%	0,54%	Диплом Петянкин	не указано	23 Июн 2017	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	2
[19]	0%	0,5%	Диссертация	http://vniro.ru	01 Янв 2017	Модуль поиска перефразирований Интернет	0	1
[20]	0%	0,49%	237660	http://biblioclub.ru	19 Апр 2016	Сводная коллекция ЭБС	0	1
[21]	0%	0,48%	252293	http://biblioclub.ru	раньше 2011	Сводная коллекция ЭБС	0	1

[22]	0%	0,48%	55038	http://e.lanbook.com	раньше 2011	Сводная коллекция ЭБС	0	1
[23]	0,46%	0,46%	Пифагорова тройка	http://ru.wikipedia.org	11 Ноя 2016	Модуль поиска Интернет	3	3
[24]	0,41%	0,41%	ПРИМЕНЕНИЕ ФИГУРНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ...	http://cyberleninka.ru	28 Янв 2017	Модуль поиска перефразирований Интернет	1	1
[25]	0%	0,36%	Чертоусова	не указано	30 Авг 2016	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[26]	0,36%	0,36%	Прогностические критерии течения п...	не указано	05 Июн 2015	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	1	1
[27]	0%	0,36%	Диссертация	не указано	11 Сен 2017	Модуль поиска "МГУ им. Н. П. Огарева"	0	1
[28]	0%	0,36%	Понкратова_503_1.docx	не указано	28 Апр 2015	Кольцо Вузов	0	1
[29]	0%	0,36%	Понкратова_503_2.docx	не указано	07 Мая 2015	Кольцо Вузов	0	1
[30]	0%	0,35%	ITEH_k_r_dolg_Prozorova_626zseh_2911...	не указано	27 Окт 2015	Кольцо Вузов	0	1
[31]	0%	0,35%	ITM_k_r_M_Stepanova_629zl_22052015_...	не указано	27 Окт 2015	Кольцо Вузов	0	1
[32]	0%	0,35%	будаев.docx	не указано	06 Июл 2015	Кольцо Вузов	0	1
[33]	0%	0,33%	(2/2)	https://edu.tusur.ru	07 Авг 2018	Модуль поиска Интернет	0	2
[34]	0,56%	0%	не указано	не указано	раньше 2011	Цитирования	1	1
[35]	0,61%	0%	не указано	не указано	раньше 2011	Модуль поиска общеупотребительных выражений	4	13

Заведующему кафедрой
математического анализа
Кострову Олегу Геннадьевичу
студента 4 курса очной формы обучения
(на бесплатной основе) направления
подготовки 02.03.01 «Математика
и компьютерные науки»
факультета математики
и информационных технологий
ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва»
Булавкина Германа Борисовича

заявление.

Прошу разместить мою выпускную квалификационную работу на тему «Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек» в электронной библиотечной системе университета в полном объёме.

Дата 28.06.19 подпись

ОТЧЕТ

о результатах проверки работы обучающегося

на наличие заимствований

Ф.И.О. автора работы: Булавкин Герман Борисович

Тема работы: Альтернативные геометрические интерпретации пифагоровых троек

Руководитель работы: Смольянова Елена Григорьевна

Представленная работа прошла проверку на наличие заимствований в системе «Антиплагиат.ВУЗ».

Результаты автоматической проверки: оригинальность 95,56 %

цитирования 1,18 %

заимствования 3,26 %

Результаты анализа полного отчёта на наличие заимствований:

правомерные заимствования: да, 3,26%;

корректные цитирования: да, 1,18 %;

неправомерные заимствования: нет;

признаки обхода системы: нет.

Общее заключение об итоговой оригинальности работы и возможности её допуска к защите: студент Булавкин Герман Борисович допускается к защите.

Руководитель
стар. преподаватель

Е. Г. Смольянова

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. П. ОГАРЁВА»

МАТЕРИАЛЫ XXII НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ, АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО МОРДОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. Н. П. ОГАРЁВА

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

Часть 2
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

САРАНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО МОРДОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019

• выразить целое число в виде произведения простых множителей;

• вычислить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное набора целых чисел.

• и другие…

2. Алгебраические выражения и формулы. Необходимые компетенции:

• сложение и вычитание алгебраических выражений и упрощение результата; перемножение двух алгебраических выражений, вынесение за скобки;

• решение линейных алгебраических уравнений;

• и другие… ……..

На следующем по сложности уровне (level 1) необходимыми являются следующие темы и их компетенции.

1. Векторная арифметика. Необходимые компетенции:

• представить вектор графически;

• определить единичный вектор в заданном направлении;

• представить вектор в виде векторных компонент (две и три компоненты);

• и другие…

2. Матрицы и определители. Необходимые компетенции:

• умножение матрицы на число;

• вычисление определителей матриц размерностью 2×2 и 3×3;

• вычисление ранга матрицы;

• и другие…

Такие списки представлены и для следующих уровней усвоения курса, а также для других базовых математических курсов.

Инструментальные средства разработки электронной системы изучения математических и инженерных дисциплин Math-Bridge разрешают автоматически вычислять уровень усвоения студентами учебного материала в терминах компетентностного подхода в рамках стандарта SEFI. Такого рода объективная оценка качества полученных знаний координируется с положениями Болонского процесса и помогает повышению уровня инженерного образования в технических вузах Российской Федерации.

E-learning система Math-Bridge является пионером среди дистанционных систем обучения в области не только гибкого интеллектуального подхода к процессу приобретения знаний и навыков, но и оценки уровня их усвоения.

УДК 511.5

ГЕНЕРАЦИЯ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК С ПОМОЩЬЮ СЕРПАНТИНА НЬЮТОНА

Е. Г. Смольянова, Г. Б. Булавкин

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва»

Аннотация

В статье предлагается способ генерации пифагоровых троек, в котором параметр серпантина Ньютона используется в качестве классификационного признака.

Ключевые слова: генерация пифагоровых троек, отношение «предок – потомок», серпантин Ньютона.

В статье [1] предлагается тождество, с помощью которого можно генерировать бесконечные последовательности троек Пифагора, находящихся в отношении «предок – потомок». А именно:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \left(n \cdot a + (M_1 + M_2) \cdot (c - b)\right)^2 + (n \cdot a + M_1 \cdot (c - b) + b)^2 = \\ = (n \cdot a + M_2 \cdot (c - b) + c)^2, \qquad (1)$$

где $n + 1 = k^2, M_1 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$, $M_2 = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, $(a, b, c) = (a_1, b_1, c_1)$ – начальная (корневая) пифагорова тройка, (a_k, b_k, c_k) – ее «потомок» ($k > 1$). При этом

$$d_k = c_k - b_k = k^2 \cdot (c - b) = k^2 \cdot d, k = 2, \ldots$$

Некоторые авторы используют в своих исследованиях значение разности d_k как классификационный признак отдельных подмножеств пифагоровых троек. (Обозначения M_1 и M_2 введены с целью придать записи (1) и последующих формул более «симметричный» вид). Договоримся далее обсуждать в роли (a, b, c) только примитивные пифагоровы тройки с $d = c - b \in \{1; 2\}$. Заметим, что в последовательности пифагоровых троек

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots$$

можно «перемещаться» в противоположных направлениях с помощью соответствующих матриц перехода:

$$S(n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n+1} & -n \cdot \sqrt{n+1} & n \cdot \sqrt{n+1} \\ n & 1 - M_1 & M_1 \\ n & -M_2 & 1 + M_2 \end{pmatrix},$$

$$\left(S(n)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n}{n+1} & \frac{-n}{n+1} \\ \frac{-n}{\sqrt{n+1}} & \frac{1 - M_1}{n+1} & \frac{M_2}{n+1} \\ \frac{-n}{\sqrt{n+1}} & \frac{-M_1}{n+1} & \frac{1 + M_2}{n+1} \end{pmatrix}.$$

Например, если $(a_k, b_k, c_k) = (196, 2397, 2405)$, то $d_k = 8 = 2^2 \cdot 2$и, следовательно, $k = 2$ и $n = 3$. Тогда будем иметь:

$$(a, b, c) = \left(\left(S(3)\right)^{-1} \cdot (a_k, b_k, c_k)^T\right)^T = (92, 2115, 2117).$$

Корневая тройка нашлась однозначно. Числа, формирующие тройку (a, b, c), допускаются в нашем исследовании и отрицательными. Ясно, что