Метод Лагранжа и его применение для решения задач с экономическим содержанием

Многие явления, в том числе и экономические, зависят от многих факторов. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, а именно, введения понятия функции нескольких переменных, под которой подразумевается уравнение с независящими друг от друга переменными x и y.

С развитием технического прогресса перед экономикой встал вопрос о том, как наиболее выгодно распределять производственные ресурсы. Максимизацию прибыли или минимизацию убытков не всегда можно свести только к расчету, так как зачастую нужно найти недостающие данные. Ища решение данной проблемы, Жозеф Луи Лагранж, крупнейший французский математик XVIII века, разрабатывает метод для вычисления оптимального распределения ресурсов, впоследствии названный методом множителей Лагранжа.

Данный метод при решении задач оптимизации достаточно прост и удобен. Его недостатком является введение дополнительных переменных, которые, при помощи дополнительных уравнений, в свою очередь, должны быть исключены.

Важно заметить, что, если при решении задачи используется метод Лагранжа, то экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть функция $z=f(x,y)$, аргументы x и y - это аргументы, удовлетворяющие условию $g(x,y)=C$, называемому уравнением связи, тогда точка (x_0,y_0) называется точкой условного максимума (минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x,y) из этой окрестности удовлетворяющих условию $g(x,y)=C$, выполняется неравенство

$f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ $\quad$ $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$

Наиболее простой способ для нахождения условного экстремума функции двух переменных – это сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Таким образом, выразив y через $x: y=\varphi(x)$ и подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z = f(x,y) = f(x,\varphi(x))$, то есть функцию одной переменной. Но этот способ подходит лишь тогда, когда уравнение связи $g(x,y) = C$ линейное и его легко решить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удается.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется метод множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа - это функция трёх переменных $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda[g(x,y) - C]$ где λ – множитель Лагранжа.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x,y)$ при условии $g(x,y) = C$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = g(x,y) - C = 0 \end{cases} \qquad \Delta(L) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_{x_1}(P_0) & \varphi'_{x_2}(P_0) \\ \varphi'_{x_1}(P_0) & L''_{x_1x_1}(P_0\lambda_0) & L''_{x_1x_2}(P_0\lambda_0) \\ \varphi'_{x_2}(P_0) & L''_{x_1x_2}(P_0\lambda_0) & L''_{x_2x_2}(P_0\lambda_0) \end{vmatrix}$$

Давайте рассмотрим решение задачи методом множителей Лагранжа.

На развитие двух предприятий выделено 2 млн. рублей. Если первому предприятию дадут x_1 млн. рублей, то прибыль, полученная от этого предприятия, будет равна $2\sqrt{x_1}$ млн. рублей, если x_2 млн. дадут второму, то прибыль от него будет равна $3\sqrt{x_2}$ млн. рублей. Определить, как следует распределить средства между предприятиями, чтобы суммарная прибыль была максимальной. Решим эту задачу методом множителей Лагранжа.

Задача состоит в отыскании точки глобального максимума функции $f = 2\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2}$ при ограничении $x_1 + x_2 = 2$

Точку возможного максимума найдем методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2} + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$$

Для отыскания точек возможных экстремумов составим систему:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_1}} + \lambda = 0 \\ L'_{x_2} = \dfrac{3}{2\sqrt{x_2}} + \lambda = 0 \\ L'_{\lambda} = x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Найдем ее решение. Из уравнений (1) и (2) получаем

$$-\lambda = \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{3}{2\sqrt{x_2}} \Rightarrow 2\sqrt{x_2} = 3\sqrt{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{9}{4}x_1$$

Подставим найденное соотношение $x_2 = \frac{9}{4}x_1$ в уравнение (3), получим $x_1 + \frac{9}{4}x_1 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{13}{4}x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{13}$ и тогда $x_2 = \frac{18}{13}$. Находим λ:

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{x_1}} = -\sqrt{\frac{13}{8}}$$

Итак, система имеет одно решение

$$P_0\left(\frac{8}{13}; \frac{18}{13}\right) \lambda_0 = -\sqrt{\frac{13}{8}}$$

Исследуем найденную точку на локальный условный экстремум с помощью определителя $\Delta(L)$

$$y(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2$$

$$y'_{x_1} = 1; y'_{x_2} = 1$$

$$L'_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \lambda$$

$$L''_{x_1^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x_1^3}}; L''_{x_1^2}(P_0\lambda_0) = -\frac{13}{32} \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}$$

$$L''_{x_1x_2} = 0$$

$$L'_{x_2} = \frac{3}{2\sqrt{x_2}} + \lambda$$

$$L''_{x_2^2} = -\frac{3}{4\sqrt{x_2^3}}; L''_{x_2^2}(P_0\lambda_0) = -\frac{13}{72} \cdot \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Подставив все в формулу получаем

$$\Delta = -1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{13}{32}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{13}{72}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} \end{vmatrix} = -\left(-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{72}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\frac{13}{32}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) = -\left(\frac{13}{72}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}} + \frac{13}{32}\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}\right)\langle 0$$

Так как $\Delta < 0$, то $Po\left(\frac{8}{13};\frac{18}{13}\right)$ – точка локального условного максимума.

Чтобы показать, что именно в точке P_o достигается и глобальный максимум, перейдём к задаче на отыскивание безусловного максимума функции одной переменной. С помощью задачи $x_1 + x_2 = 2$, запишем условную функцию в виде:

$$f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + 3\sqrt{x_2} = 2\sqrt{x_1} + 3\sqrt{2 - x_1} = y(x_1)$$

Требуется найти такую точку, где достигается наибольшее значение функции.

Область возможного изменения оставшейся переменной отрезок $[0;2]$.

Непрерывная функция на замкнутом отрезке обязательно достигает своего наибольшего значения либо в критических точках внутри отрезка, либо на концах отрезка: $y'(x_1) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{3}{2\sqrt{2-x_1}} = \frac{2\sqrt{2-x_1} - 3\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_1\sqrt{2-x_1}}}$

Из условия $y'(x_1) = 0$ находим стационарную точку

$$2\sqrt{2-x_1} - 3\sqrt{x_1} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2-x_1} = 3\sqrt{x_1} \Rightarrow 4(2-x_1) = 9x_1 \Rightarrow 8 - 4x_1 = 9x_1 \Rightarrow 13x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{13} \in (0;2)$$

Точек, где производная не существует, внутри отрезка нет. Находим значение целевой функции в стационарной точке и на концах отрезка.

$$y(\frac{8}{13}) = 2\sqrt{\frac{18}{13}} + 3\sqrt{2 - \frac{8}{13}} = 2\sqrt{\frac{8}{13}} + 3\sqrt{\frac{18}{13}} \approx 1{,}56 + 3{,}35 = 5{,}09$$

$$y(0) = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24 \qquad y(2) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Мы видим, что наибольшее значение достигается в точке $x_1 = \frac{8}{13}$

И так, глобальный максимум достигается при $x_1 = \frac{8}{13}$ *млн.руб.*, $x_2 = \frac{18}{13}$ *млн.руб.*

$$y = 2\sqrt{\frac{8}{13}} + 3\sqrt{\frac{18}{13}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{13}} + \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{26} \approx 5{,}09 \textit{млн.руб.}$$

Метод множителей Лагранжа позволил нам найти наиболее выгодное распределение средств между двумя предприятиями, при котором суммарная прибыль получается максимальной.

В макроэкономике, когда расходы достигают миллиардов долларов, расчет с помощью данного метода дает возможность получать прибыль в огромных масштабах, создавая благоприятную почву для дальнейшего развития производства.

Ссылки

1) Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов экон. специальностей вузов / И. Л. Акулич. - Москва : Высшая школа, 1986.

2) Вариационное исчисление и оптимальное управление. Автор: Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Издательство: МГТУ им. Н.Э.Баумана , 2006