Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение Высшего Образования

«Уральский Государственный Экономический Университет»

Статья по теме:

«Распределение Пуассона. Применение в задачах.»

Преподаватель: Синцова С.Г.

Исполнитель: Абакумова Е.А.
Устинова К.А.

Оглавление

Екатеринбург, 2019 г.

Случаи, при которых используется формула Пуассона в задачах

Введение.

Случайные величины играют значимую роль. Они возникают в теории ошибок измерений, в демографии, в теории стрельбы, в количественных методах в биологии и молекулярной физике. Также случайная величина имеет важность в современных представлениях о математике, а также в научных и непосредственно практических целях. Для моделирования случайных величин существует много способов. Мы рассмотрим Моделирование случайной величины распределением Пуассона.

Распределение Пуассона — вероятностное распределение дискретного типа, моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Распределение Пуассона значительно отличается своей «предметной» областью: в нём рассматривается интенсивность событий.

При большом значения числа испытаний n удобнее всего использовать формулу Пуассона. Данная формула определяется теоремой Пуассона.

Теорема Пуассона.

Теорема гласит, что если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, а число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность наступления события A ровно m раз приближенно равна:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$,

Где $\lambda = np$.

Доказательство гласит: Допустим, имеются вероятность наступления события A в одном испытании p и число независимых испытаний n. Обозначим $\lambda = np$.

Из этого выражения следует, что $p = \frac{\lambda}{n}$. Подставим данное выражение в формулу Бернулли:

$$P_n(m)=C_n^m\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{n^m}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-m+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Все скобки, за исключение предпоследней можно считать равными единице при весьма большом !!n и небольшим !!m, а именно:

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

.

Принимая во внимание то, что n очень велико, правую часть данного выражения можно рассмотреть при $n\to\infty$, а именно найти предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}.$$

В таком случае получим

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Примеры использования в задачах.

Пример 1. Биография А.С. Пушкина издается тиражом в 1000 экземпляров. Для каждой книги вероятность быть неправильно прошитой равна 0,002. Найти вероятность того, что тираж будет содержать ровно 7 бракованных книг.

Решение: n = 1000, p = 0,002, q =0,998, k = 7

Получим

λ = np = 1000*0,002 = 2<10

По значения из таблицы функции Пуассона находим вероятность:

$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k} * e^{-\lambda} = \frac{2^7}{7!} * e^{-7} \approx 0{,}003437$

Ответ: 0,003437

Пример 2. Среднее число самолетов, взлетающих с полевого аэродрома за одни сутки, равно 10. Найти вероятность того, что за 6 часов взлетят:

А) три самолета,

Б) не менее двух самолетов.

Решение. Будем использовать формулу Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{(10t)^k}{k!} e^{-10t}$$

- вероятность того, что за время t суток с полевого аэродрома взлетят ровно k самолетов.

Здесь λ = 10 - интенсивность потока взлетов (10 взлетов в сутки)

Так как 6 часов равны $t = \frac{1}{4}$ суток, получаем вероятности:

А) Вероятность того, что за 6 часов взлетят три самолета:

$$P_{1/4}(3) = \frac{\left(10/4\right)^3}{3!} e^{-(10/4)} \approx 0{,}214.$$

Б) вероятность того, что за 6 часов взлетят не менее двух самолетов:

$$P_{1/4}(k \geq 2) = 1 - P_{1/4}(k < 2) = 1 - P_{1/4}(0) - P_{1/4}(1) =$$

$$= 1 - \frac{\left(10/4\right)^0}{0!} e^{-(10/4)} - \frac{\left(10/4\right)^1}{1!} e^{-(10/4)} = 1 - \left(1 + \frac{10}{4}\right) e^{-5/2} \approx 0{,}713.$$

Ответ: 0,214; 0,713.

Вывод

Подводя итоги стоит обратить внимание, что распределение Пуассона является достаточно распространенным. Его особое свойство, заключающееся в равенстве математического ожидания и дисперсии, часто применяют на практике для решения вопроса, распределена случайная величина по закону Пуассона или нет. Также важен тот факт, что закон Пуассона позволяет находить вероятности события в повторных независимых испытаниях при большом количестве повторов опыта и малой единичной вероятности.

Список литературы:

1. Н.Ш. Кремер «Теория вероятностей и математическая статистика»: Учеб. пособие. М., 2004

2. Ивашев-Мусатов О.С. Теория вероятностей и математическая статистика., М.: Наука, 1979.

3. А.А. Френкель, Е.В. Адамова «Корреляционно регрессионный анализ в экономических приложениях»/ М., 1987.

4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М, "Высшая школа" 1998

5. Высшая математика. Математический анализ [Текст] : учебное пособие / [Ю.Б. Мельников, М.Д. Боярский; М.Д. Локшин; П.И. Гниломедов; Синцова, С. Г.; А.А. Кныш] М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. гос. экон. ун-т. - Екатеринбург : Издательство УрГЭУ, 2018. - 193 с