

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИЛОЖЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

КРИТЕРИИ ВЫСОТНОСТИ АТОМА

Выполнила студентка
607 группы
Трифопова Виктория Александровна

подпись студента

Научный руководитель:
акад. А.Т. Фоменко

подпись научного руководителя

Соруководители:
проф. Е.А. Кудрявцева

подпись соруководителя

доц. И.М. Никонов

подпись соруководителя

Москва

2020

Содержание

1. Введение	2
2. Основные понятия и определения	3
3. Критерии высотности атома	6
4. Новое доказательство гипотезы В.А.Васильева	21

1. Введение

Понятие атома, появившееся в задачах качественного анализа и классификации динамических систем, находит применение в самых разных разделах современной комбинаторики и маломерной топологии, теории узлов [1–12]. Понятие атома в гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А.Т. Фоменко [3] и используется для Лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем [8].

Задача классификации высотных атомов была сформулирована А.Т. Фоменко. Изучению этого класса атомов посвящены работы В.О. Мантурова [2], И.М. Никонова и Н.В. Волчанецкого [12], И.М. Никонова [10], В.А. Трифионовой [11]. При этом в работах [12,10,11] получены классификации высотных атомов, группы собственных симметрий которых транзитивно действуют на ребрах [12], или вершинах [10], или белых кольцах [11] атома. Высотные атомы играют важную роль в теории узлов. Оказывается, что все узлы могут быть закодированы (неоднозначно) высотными атомами.

А.А. Ошемковым в работе [16] было введено понятие f -графа. Выяснилось, что с помощью f -графов удобно описывать перестройки торов Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, а также легко реализовать алгоритм перечисления таких перестроек. И.М. Никонов [10] обнаружил, что высотность атома эквивалентна ориентированной вложимости его f -графа в плоскость (теорема 1).

В разделе 2 настоящей работы доказывается, что все высотные атомы являются ориентлируемыми (утверждение 1).

В разделе 3 устанавливаются два новых критерия высотности атома в терминах его f -графа (теорема K_1 и теорема K_2). Хотя все критерии высотности по сути эквивалентны, они весьма полезны в разных ситуациях для доказательства высотности различных классов атомов. Найдены препятствия к ориентированной вложимости f -графа в плоскость, доказана их минимальность (утверждение 2).

В разделе 4 приводится новое доказательство гипотезы В.А.Васильева [21] о критерии планарности графа с вершинами степени 4 и дополнительной крестовой структурой. Впервые гипотеза была доказана В.О.Мантуровым [22].

Автор благодарен А.Т. Фоменко за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор также благодарит Е.А.Кудрявцеву и И.М.Никонова за полезные обсуждения и ценные замечания.

2. Основные понятия и определения

Пусть M^2 — гладкое замкнутое двумерное многообразие, $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Морса на M^2 и $f^{-1}(0) = \{x \in M^2 : f(x) = 0\}$, — ее связный критический уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $f^{-1}([- \varepsilon, + \varepsilon])$ не содержит критических точек, кроме лежащих на критическом уровне $f^{-1}(0)$.

Определение. *Атомом* называется поверхность $f^{-1}([- \varepsilon, + \varepsilon])$ с заданной на ней функцией Морса f . Два атома называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм поверхностей (сохраняющий ориентацию, если поверхность ориентирована), который линии уровня функции переводит в линии уровня функции.

Определение. Назовем атом, порожденный функцией f , *высотным*, если существует такое вложение $i : f^{-1}([- \varepsilon, + \varepsilon]) \rightarrow \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(i(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([- \varepsilon, + \varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве \mathbb{R}^3 , т.е. z — функция высоты на $i(f^{-1}([- \varepsilon, + \varepsilon]))$.

Случай погружения (вместо вложения) изучен в работе Е.А.Кудрявцевой [13].

Следующее утверждение было сформулировано в [2, замечание перед определением 6] без доказательства. Так как мы не нашли его доказательства в литературе, то приводим доказательство в данной дипломной работе.

Утверждение 1. *Все высотные атомы являются ориентируемыми.*

Доказательство. Высотный атом, как многообразие с краем, вложим в \mathbb{R}^3 так, что его края лежат в двух параллельных плоскостях. Их можно заклеить дисками так, что получится вложенная в \mathbb{R}^3 замкнутая двумерная поверхность. Докажем, что любая вложимая в \mathbb{R}^3 замкнутая двумерная поверхность S ориентируема. Из этого будет следовать ориентируемость высотного атома.

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема (Жордана–Брауэра [14]). *Дополнение к компактной связной гиперповерхности R в \mathbb{R}^n состоит из двух открытых связных множеств: "внешнего" D_0 и "внутреннего" D_1 . Более того, границей замыкания каждого из данных множеств является гиперповерхность R .*

Из данной теоремы следует, что поверхность S , вложенная в \mathbb{R}^3 , разбивает \mathbb{R}^3 на два трехмерных многообразия с краем S . Эти многообразия ориентируемые, поскольку в \mathbb{R}^3 нет неориентируемых трехмерных подмногообразий. Тогда в каждой точке границы S этих многообразий однозначно определена внешняя и внутренняя нормаль. Это означает, что поверхность S ориентируема. Утверждение доказано. ■

Определение. Эквивалентным образом атом (а точнее, атом с точностью до изоморфизма) можно задать как "оснащенную пару" $(P^2, K)^\#$ (тоже рассматриваемую с точностью до изоморфизма), где P^2 — компактная поверхность с краем, K — непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 4, причем множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0, 1]$, $S^1 \times \{1\} \subset \partial P^2$, и множество колец разбито на два подмножества (белые и черные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K) , и оснащенная пара обозначается через $(P^2, K)^\#$. Две оснащенные пары считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец. Граф K будем называть *остовом* атома.

Действительно, по атому однозначно строится оснащенная пара $(P^2, K)^\#$, где белые (соответственно черные) кольца задаются неравенством $f > 0$ (соответственно $f < 0$). Верно и обратное: по оснащенной паре $(P^2, K)^\#$ однозначно строится атом.

Атом (точнее, атом с точностью до изоморфизма) может быть определен также как f -граф (см. [16]), что в свою очередь позволяет работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение (А.А.Ошемков [16], 1994). Конечный связный граф G назовем f -графом, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) Все вершины графа G имеют степень 3.

2) Некоторые ребра графа G ориентированы, причем к каждой вершине графа G примыкают ровно два ориентированных ребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра-петли.

3) Каждому неориентированному ребру графа G приписано число ± 1 .

Опишем построение f -графа по атому $X = (P^2, K)^\#$.

Зафиксируем произвольным образом ориентацию на каждой граничной окружности белых колец атома.

В качестве неориентированного ребра f -графа G берется отрезок, проходящий через вершину графа K и соединяющий границы противоположных белых колец (см. рис. 1), а в качестве вершин — соответствующие концы отрезка. В роли ориентированных ребер выступают примыкающие к вершинам дуги белых колец с соответствующей ориентацией.

f -Граф, построенный по черным кольцам атома (P^2, K) , назовем *двойственным f -графом*.

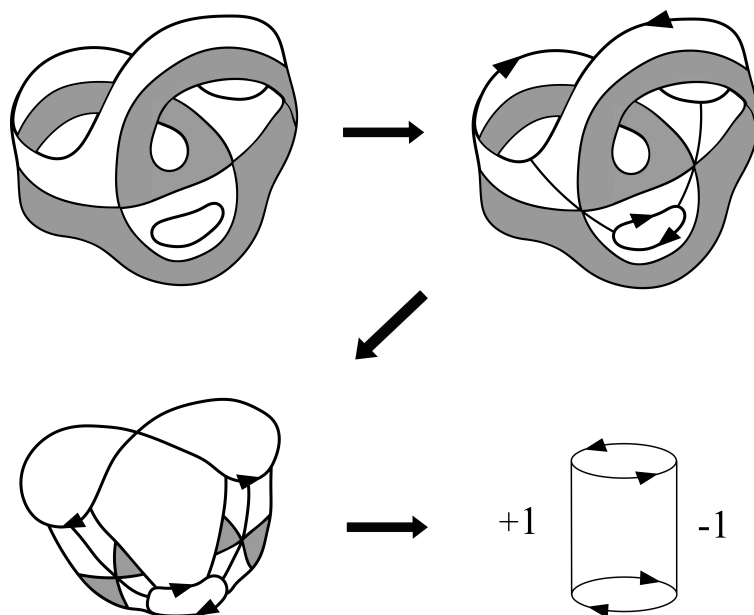


Рис. 1. Построение f -графа по атому

Из данного построения ясно, что f -граф (двойственный f -граф) состоит из непустого множества ориентированных циклов, которым соответствуют ориентированные граничные окружности белых (соответственно черных) колец, и неориентированных ребер. Ориентированные циклы будем называть *окружностями*.

Для завершения построения f -графа осталось расставить метки на неориентированных ребрах. Для этого рассмотрим малую окрестность неориентированного ребра в поверхности P^2 . Это прямоугольник, две противоположные стороны которого лежат на граничных окружностях белых колец, и потому — ориентированы. Если эти стороны

прямоугольника индуцируют одну и ту же ориентацию границы прямоугольника, то ставим метку $\varepsilon = +1$. Если же ориентации противоположны, то ставим метку $\varepsilon = -1$.

Заметим, что если поверхность P^2 ориентирована, то соответствующий f -граф имеет все метки, равные $+1$. Поскольку всюду далее в данном разделе и в разделе 3 мы имеем дело только с высотными атомами, которые ориентируемы по утверждению 1, то будем считать, что поверхность P^2 ориентируема и на ней фиксирована ориентация, а соответствующий f -граф будем рассматривать без меток. В разделе 4 в определении атома под поверхностью P^2 будем считать компактную поверхность с краем и будем уточнять, когда она ориентируема, а когда неориентируема.

Определение. Неориентированное ребро f -графа будем называть *внутренней хордой*, если оба его конца лежат на одной окружности. Иначе ребро назовем *внешней хордой*.

Определение. Назовем f -граф *ориентированно вложимым в плоскость*, если его можно вложить в плоскость так, что окружности, соединенные хотя бы одним ребром, лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Соответствующее вложение также будем называть *ориентированным*.

Следующий критерий позволяет нам свести задачу проверки высотности атома к проверке ориентированной вложимости его f -графа в плоскость.

Теорема 1 (И.М. Никонов, критерий высотности атома [10]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f -граф ориентированно вложим в плоскость.*

Замечание. Если атом высотный, то, поменяв раскраску его колец, получим высотный атом. Поэтому теорема 1 будет верна, если f -граф заменить на двойственный f -граф.

Определим понятие под- f -графа.

Определение. f -Граф G называется *под- f -графом* некоторого f -графа H , если множество окружностей f -графа G является подмножеством множества окружностей f -графа H , а каждое неориентированное ребро f -графа G является неориентированным ребром f -графа H .

Теперь дадим определение изоморфности и f -гомеоморфности f -графов.

Определение. f -Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$ множества V_1 вершин f -графа G_1 на множество V_2 вершин f -графа G_2 , удовлетворяющее условию: вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром в том и только том случае, когда вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром, причем если ребро ориентировано от A к B (от B к A), то соответствующее ребро ориентировано от $f(A)$ к $f(B)$ (соответственно от $f(B)$ к $f(A)$).

Определение. f -Граф G *f -гомеоморфен* f -графу H , если существует конечная цепочка преобразований $G = G_1 \rightarrow \dots \rightarrow G_n = H$, композиция которых преобразует G в H и каждое из которых относится к одному из следующих видов:

- 1) изоморфизм f -графов;
- 2) подразбиение неориентированного ребра f -графа (см. рис. 2a,b);
- 3) обратная операция к подразбиению неориентированного ребра.

Каждое из трех данных видов преобразований будем называть *операцией f -гомеоморфизма*.

Определение. *Препятствием V* назовем f -граф, состоящий из двух окружностей с вершинами v_1, v_2, v_3 на одной окружности и u_1, u_2, u_3 на другой, циклический порядок которых согласован с ориентацией соответствующей окружности, и хорд (v_1, u_1) , (v_2, u_2) , (v_3, u_3) (см. рис. 3,a).

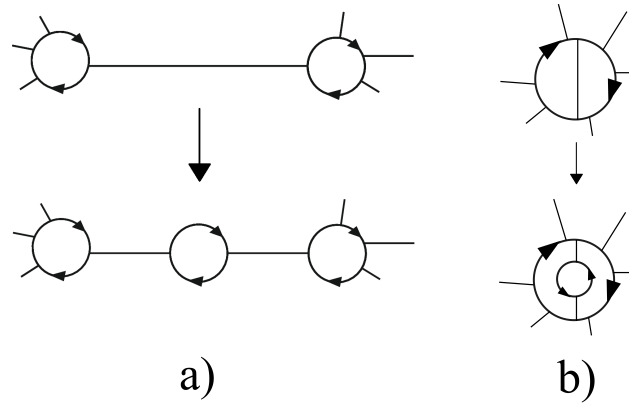


Рис. 2. Операция подразделения неориентированного ребра f -графа

Определение. Препятствием $V(r)$, $r \geq 1$, назовем f -граф, состоящий из одной окружности с вершинами v_1, \dots, v_{4r+2} , циклический порядок которых согласован с ориентацией окружности, и хорд (v_{4i-3}, v_{4i}) , $1 \leq i \leq r$, (v_{4i-1}, v_{4i+2}) , $1 \leq i \leq r$, и (v_{4r+1}, v_2) (см. рис. 3, b).

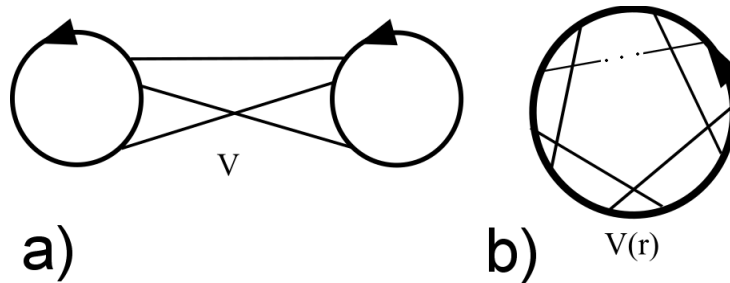


Рис. 3. Препятствия V и $V(r)$

3. Критерии высотности атома

В данном разделе будем считать, что поверхность P^2 ориентируема и на ней фиксирована ориентация, а у соответствующего f -графа метки на всех хордах предполагаются равными $+1$.

Теорема K_1 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома [15]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f -граф не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть дан высотный атом, а F — его f -граф. Тогда по теореме 1 существует ориентированное вложение R f -графа F в плоскость.

Любой под- f -граф L этого f -графа является ориентированно вложимым в плоскость. Действительно, множество окружностей и хорд L является подмножеством окружностей и соответственно хорд в R , причем любые окружности, соединенные хотя бы одним ребром в R , лежат одна в другой тогда и только тогда, когда они имеют противоположную ориентацию. Это означает, что L ориентированно вложим в плоскость.

Лемма 1. *Любой f -граф, f -гомеоморфный ориентированно вложимому f -графу в плоскость, также является ориентированно вложимым в плоскость.*

Доказательство. Пусть f -граф G ориентированно вложим в плоскость. Покажем, что операцией подразбиения неориентированного ребра этого f -графа мы получим ориентированно вложимый f -граф.

Рассмотрим ориентированное вложение R f -графа G в плоскость и произвольное неориентированное ребро e этого f -графа. В середину ребра e всегда можно вставить окружность так, чтобы полученный f -граф оставался планарным. На рисунке 4а, б, с, д показана ориентация добавляемой окружности, чтобы полученный f -граф оставался не только планарным, но и ориентированно вложимым в плоскость.

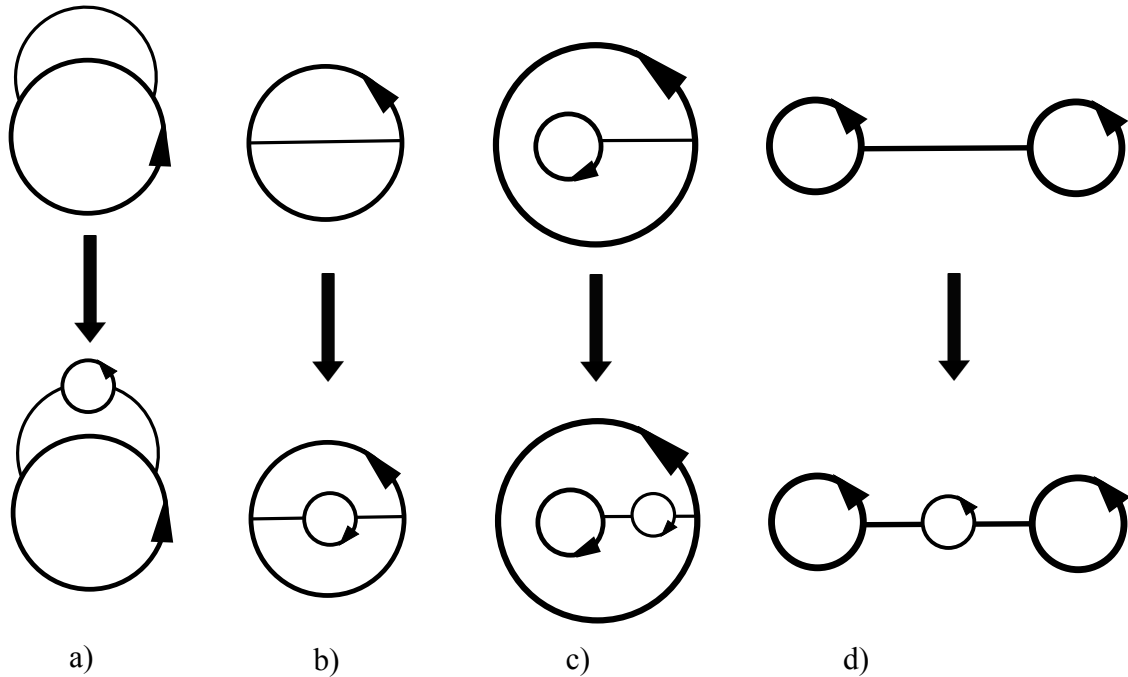


Рис. 4. Вставка окружности в ребро e

Так, на рисунке 4а ребро e является внутренней хордой f -графа G и лежит вне окружности h во вложении R , на которую оно опирается. Так как добавленная окружность и окружность h лежат вне друг друга, то их ориентации должны совпадать. На рисунке 4б ребро e является внутренней хордой f -графа G и лежит внутри окружности h во вложении R , на которую оно опирается. На рисунке 4с ребро e является внешней хордой, соединяющей две окружности, лежащие одна в другой. На рисунке 4д ребро e является внешней хордой, соединяющей две окружности, которые лежат вне друг друга.

Теперь покажем, что обратной операцией к подразбиению неориентированного ребра f -графа G мы получим ориентированно вложимый f -граф.

Рассмотрим удаляемую окружность O ориентированного вложения R этого f -графа в плоскость. Из нее выходят две внешние хорды l_1, l_2 . На рисунке 5а окружность O , отмеченная серым цветом, лежит внутри другой окружности O_1 , с которой соединена внешними хордами, причем внешние хорды лежат вне окружности O . Случай, когда окружности O и O_1 лежат вне друг друга, рассматривается аналогично (действительно, вместо вложения f -графа G в плоскость мы можем рассмотреть его вложение в сферу, тогда случаи, когда обе хорды l_1, l_2 и окружность O лежат одновременно внутри или одновременно снаружи окружности O_1 , станут полностью аналогичны друг другу). Удалим одну полуокружность окружности O и снимем ориентацию второй по-

луокружности. Тогда новое неориентированное ребро полученного f -графа состоит из двух внешних хорд и неориентированной второй полуокружности окружности O . Такой f -граф, очевидно, останется ориентированно вложимым в плоскость.

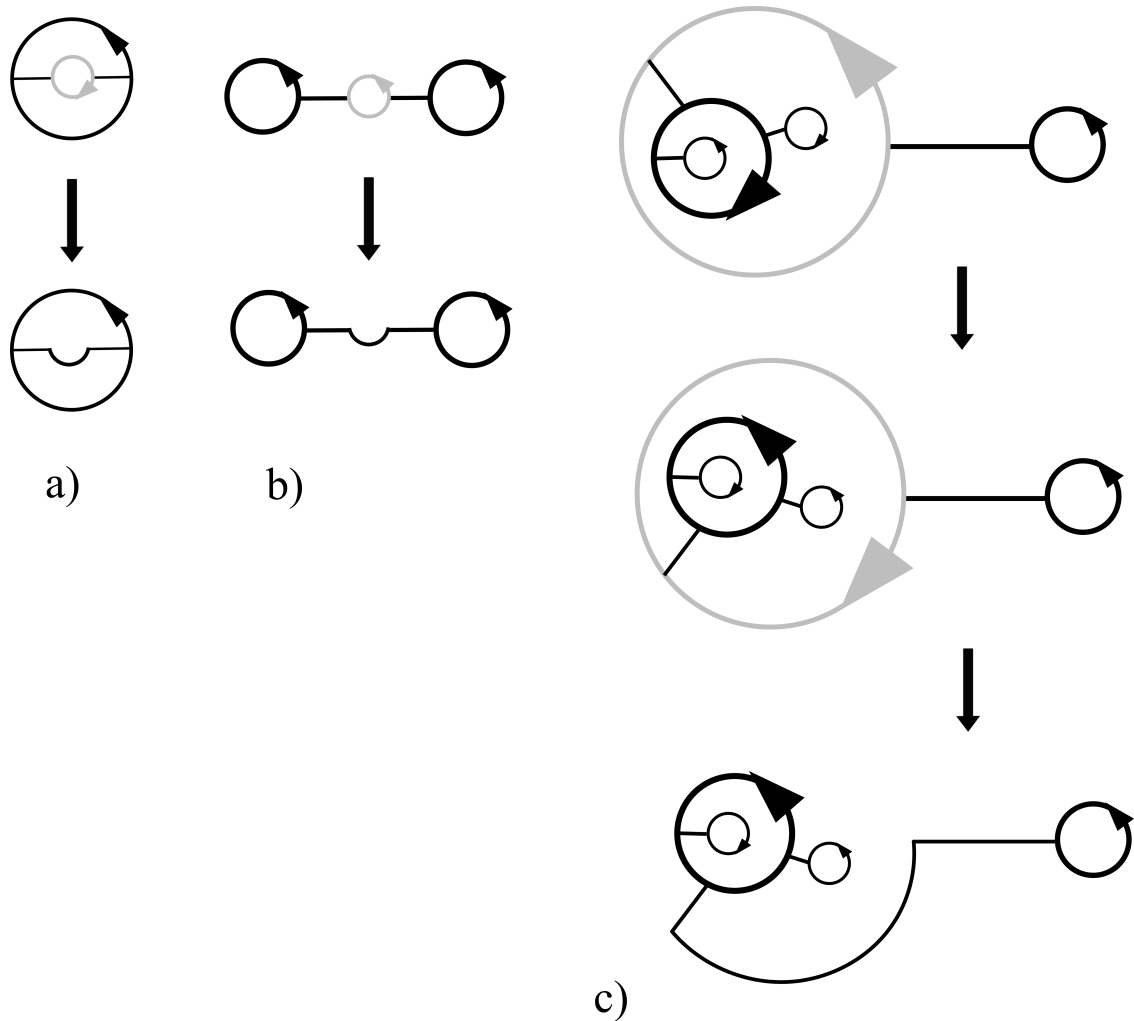


Рис. 5. Преобразование окружности O и хорд l_1, l_2 в неориентированное ребро

На рисунке 5b,c показаны два случая расположения внешних хорд и окружностей O_1 и O_2 , с которыми соединена окружность O , отмеченная серым цветом. На рисунке 5b окружности O_1 и O_2 лежат вне друг друга, а хорды l_1 и l_2 лежат вне окружности O . Тогда новое неориентированное ребро f -графа получим уже рассмотренным способом. Оно состоит из двух внешних хорд и неориентированной второй полуокружности окружности O .

Пусть окружность O_1 лежит внутри окружности O_2 , а хорды l_1 и l_2 лежат вне окружности O . Тогда инверсией относительно окружности O_2 данный случай сводится к рассмотренному, в котором окружности O_1 и O_2 лежат вне друг друга.

На рисунке 5c окружность O_1 лежит внутри окружности O , а окружность O_2 лежит вне. Тогда если получить неориентированное ребро рассмотренным способом, окружности O_1 и O_2 будут лежать вне друг друга, но иметь противоположную ориентацию. Чтобы этого не допустить, изменим вложение R на такое, при котором окружность O вместе с лежащей внутри нее частью f -графа G заменена на ее зеркальный образ. Преобразуя окружность O и хорды l_1, l_2 в неориентированное ребро, мы получим ориентированно вложимый f -граф.

Пусть окружность O_1 лежит внутри окружности O , а окружность O лежит внутри окружности O_2 . Тогда инверсией относительно окружности O_2 данный случай сводится к рассмотренному, в котором окружность O_1 лежит внутри окружности O , а окружность O_2 лежит вне.

Случай, когда хорды l_1 и l_2 лежат внутри окружности O , сводится к случаю, когда l_1 и l_2 лежат вне, инверсией относительно окружности O . Лемма доказана. ■

Из леммы 1 следует, что f -граф F не содержит под- f -граф, f -гомеоморфный не ориентированно вложимому в плоскость.

Докажем, что f -граф, представляющий собой препятствие V или препятствие из серии $V(r), r \geq 1$, не является ориентированно вложимым в плоскость.

Поскольку атом с f -графом V имеет двойственный f -граф $V(1)$, то ориентированная вложимость V эквивалентна ориентированной вложимости $V(1)$. Таким образом, достаточно рассмотреть f -графы серии $V(r), r \geq 1$.

Лемма 2. *Каждый f -граф из серии $V(r), r \geq 1$, содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$.*

Доказательство. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ можно реализовать на плоскости в виде окружности и трех внутренних хорд, показанных пунктирной линией (рис. 6, а). На рис. 6, б представлено препятствие $V(r)$ с выделенным, гомеоморфным $K_{3,3}$ подграфом, ребра которого изображены жирными и пунктирными линиями.

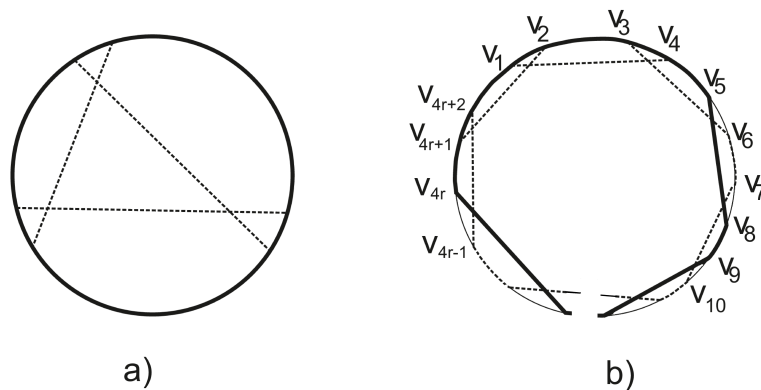


Рис. 6. Выделение подграфа в $V(r)$, гомеоморфного $K_{3,3}$

Лемма доказана. ■

Из леммы 2 и теоремы Понтрягина–Куратовского следует, что каждый f -граф из серии $V(r), r \geq 1$, в плоскость невложим. Тем более не существует ориентированного вложения $V(r), r \geq 1$, в плоскость.

Таким образом, f -граф F не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть f -граф F атома не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$. Покажем, что F ориентированно вложим в плоскость.

Если ориентированный граф является циклом, все вершины которого помечены буквами, то назовем его *меченым циклом*. При этом буквы могут повторяться. Меченый ориентированный цикл, состоящий из r вершин, — это то же самое, что циклическое

слово длины r в алфавите \mathcal{X} из n , $n \leq r$, букв x_1, \dots, x_n , в котором буквы могут повторяться. Такие слова рассматриваются с точностью до циклических перестановок входящих в них букв, произвольной перенумерации переменных x_1, \dots, x_n и замены алфавита.

Далее через S_{x_i} , $x_i \in \mathcal{X}$, будем обозначать множество всех вершин x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, на меченом ориентированном цикле, где \mathcal{X} — алфавит, а n — его размер.

Определение. Буквы a и b , соответствующие некоторым вершинам меченого цикла, назовем *зацепленными*, если существуют две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , $a_i \in S_a, b_i \in S_b, i = 1, 2$, которые мы встречаем последовательно $(\dots a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2)$ при циклическом обходе.

Определение. Меченый ориентированный цикл назовем *оснащаемым*, если множество его вершин можно разбить на два класса, причем буквы любых двух вершин из одного класса не зацеплены и вершины, обозначенные одной и той же буквой, принадлежат одному классу. Фиксированное разбиение на два класса назовем *оснащением* ориентированного цикла.

Определение. *Хордовой диаграммой* назовем меченый ориентированный цикл, в котором каждая буква встречается ровно два раза. Оснащаемую хордовую диаграмму назовем *d-диаграммой*.

Замечание. Хордовую диаграмму можно также эквивалентно определить как f -граф, состоящий из одного ориентированного цикла.

Определение. *Графом пересечений* $\Gamma(O)$ меченого ориентированного цикла O назовем неориентированный граф, вершины которого (v_i) находятся во взаимно-однозначном соответствии с множествами S_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$, и две вершины которого $(v_k$ и $v_l)$ соединены ребром в том и только том случае, когда буквы соответствующих множеств $(S_{x_k}$ и $S_{x_l})$ зацеплены.

Графом пересечений $\Gamma(H)$ f -графа H , состоящего из одного ориентированного цикла, будем называть граф пересечений хордовой диаграммы, соответствующей H .

Существует полное описание графов, представимых как графы пересечений хордовых диаграмм (см. [17]). Графы пересечений содержат довольно много информации о своих хордовых диаграммах. С.В. Чмутов, С.В. Дужин и С.К. Ландо выдвинули [18] гипотезу о том, что класс эквивалентности хордовых диаграмм можно определить их графом пересечений; они доказали гипотезу в случае, когда граф пересечений является деревом. В статье [19] гипотеза была доказана для более общего случая, когда граф пересечений $\Gamma(H)$ хордовой диаграммы H униклический, т.е. $\pi_1(\Gamma(H)) = \mathbb{Z}$. В частности, верно следующее утверждение: f -графы, имеющие один ориентированный цикл (хордовые диаграммы), изоморфны, если их графы пересечений совпадают и представляют собой единственный цикл. Окончательно точку в обсуждениях о связи инвариантных хордовых диаграмм и их графов пересечений поставили С.В. Чмутов и С.К. Ландо в статье [20].

Исследуем теперь меченые ориентированные циклы, имеющие циклический граф пересечений.

Лемма 3. Пусть граф пересечений некоторого меченого ориентированного цикла O представляет собой замкнутый цикл K (имеющий $n \geq 3$ вершин). Тогда из каждого множества S_{x_i} можно выделить подмножество S'_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$, состоящее из двух вершин, такое, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,n}$, совпадает с K .

Доказательство. Меченый ориентированный цикл O с k вершинами имеет следующую запись: $(i_1 i_2 \dots i_k)$, где вершины i_1, i_2, \dots, i_k расположены именно в этом порядке

при циклическом обходе.

Также цикл O можно представить как ориентированную окружность с вершинами i_1, i_2, \dots, i_k . Пусть a, b, d_1, d_2 — некоторые вершины цикла O , причем вершины d_1 и d_2 лежат на разных дугах, на которые вершины a и b разбивают окружность. Пусть Z — произвольное непустое подмножество множества вершин цикла O . Далее будем писать, что вершины множества Z ограничены на цикле O вершинами a и b (соответственно a и d_1) в виде $(a \dots z \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$, если каждая вершина z множества Z лежит на дуге окружности, ограниченной a и b и содержащей вершину d_1 (соответственно на дуге окружности, ограниченной a и d_1).

Будем доказывать индукцией по n — количеству вершин $K = \Gamma(O)$.

База индукции. Пусть $n = 3$ и вершины цикла O обозначены буквами a, b, c . Тогда граф пересечений $\Gamma(O)$ цикла O представляет собой замкнутый цикл, имеющий три вершины v_a, v_b, v_c , т.е. треугольник. Как и выше, обозначим через S_a (соответственно S_b, S_c) множество всех вершин цикла O с одинаковыми буквами a (соответственно b, c), причем вершине v_a (соответственно v_b, v_c) соответствует множество S_a (соответственно S_b, S_c). Вершины v_a и v_b графа пересечений соединены ребром, следовательно, существуют две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , $a_i \in S_a, b_i \in S_b, i = 1, 2$, расположенных на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$. Разберем все случаи расположения вершин из множества S_c на цикле O .

Если существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots c_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_2 \dots)$ или $(a_1 \dots c_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots c_2 \dots b_2 \dots)$, то утверждение леммы при $n = 3$ доказано (граф пересечений каждой из хордовых диаграмм $(a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2)$ и $(a_1 c_1 b_1 a_2 c_2 b_2)$ представляет собой треугольник).

Осталось рассмотреть следующие случаи.

1. Вершины множества S_c ограничены a_1 и b_1 в виде $(a_1 \dots c \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$.
2. Вершины множества S_c ограничены b_1 и a_2 в виде $(a_1 \dots b_1 \dots c \dots a_2 \dots b_2 \dots)$.
3. Вершины множества S_c ограничены a_2 и b_2 в виде $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots c \dots b_2 \dots)$.
4. Вершины множества S_c ограничены b_2 и a_1 в виде $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c \dots)$.
5. Вершины множества S_c ограничены a_1 и a_2 , причем вершина b_1 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$.
6. Вершины множества S_c ограничены b_1 и b_2 , причем вершина a_2 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots c_1 \dots a_2 \dots c_2 \dots b_2 \dots)$.
7. Вершины множества S_c ограничены a_2 и a_1 , причем вершина b_2 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots b_1 \dots a_2 \dots c_1 \dots b_2 \dots c_2 \dots)$.
8. Все вершины из множества S_c расположены между b_1 и b_2 , причем вершина a_1 принадлежит той же дуге, что и вершины множества S_c , а также существует пара (c_1, c_2) , расположенная на цикле O в циклической последовательности $(a_1 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$.

Остановимся на случае 1 (случаи 2–4 аналогичны). Вершины v_a и v_c графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром, следовательно, существуют пара (c_1, c_2) и буква a_3 , расположенные в последовательности $(a_1 \dots c_1 \dots a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots)$. Далее вершину a_1 на цикле O рассматривать не будем. Тогда (т.е. если поменять обозначение вершины a_3 на a_1) мы пришли к случаю 8 (случаи 5–7 аналогичны случаю 8).

Так как вершины v_c и v_b графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром, то возможны следующие подслучаи.

1.1. Существует вершина b_3 , ограниченная c_1 и a_3 : $(a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots b_3 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 c_2 b_1 a_2 c_1 b_3)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.2. Существует вершина b_3 , ограниченная a_3 и c_2 в виде $(a_3 \dots b_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_2, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 b_3 c_2 a_2 b_2 c_1)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.3. Существуют вершины b_3 и c_3 , ограниченные c_2 и b_1 в виде $(a_3 \dots c_2 \dots b_3 \dots c_3 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_2, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_3\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 b_3 c_3 a_2 b_2 c_1)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

1.4. Существуют вершины b_3 и c_3 , ограниченные b_2 и c_1 в виде $(a_3 \dots c_2 \dots b_1 \dots a_2 \dots b_2 \dots c_3 \dots b_3 \dots c_1 \dots)$. Выделим из множества S_a подмножество $\{a_2, a_3\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_3\}$, из S_c — подмножество $\{c_2, c_3\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(a_3 c_2 b_1 a_2 c_3 b_3)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой треугольник.

Пусть не существует вершины из множества S_b , лежащей на дуге, ограниченной b_1 и b_2 и содержащей вершину a_3 . Тогда дуга окружности, на которой лежат все вершины множества S_b не пересекается с дугой, на которой лежат все вершины множества S_c . Это невозможно, поскольку вершины v_c и v_b графа пересечений $\Gamma(O)$ соединены ребром.

Таким образом, утверждение леммы при $n = 3$ полностью доказано.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы верно при $n = k, k \geq 3$. Докажем, что оно верно при $n = k + 1$. Пусть вершины цикла O помечены буквами a, b, c, d и т.д. Тогда граф пересечений $\Gamma(O)$ представляет собой замкнутый цикл, имеющий $k + 1$ вершину v_a, v_b, v_c, v_d и т.д. Не ограничивая общности, полагаем, что вершина v_a соединена ребром с v_d и v_b , а вершина v_b соединена ребром с v_a и v_c . Как и выше, обозначим через S_a (соответственно S_b, S_c, S_d) множество всех вершин цикла O с одинаковыми буквами a (соответственно b, c, d), причем вершине v_a (соответственно v_b, v_c, v_d) соответствует множество S_a (соответственно S_b, S_c, S_d). Теперь обозначим букву b буквой a , получим цикл O' . Через S'_a будем обозначать множество всех вершин цикла O' , помеченных буквой a . Тогда граф пересечений $\Gamma(O')$ цикла O' представляет собой замкнутый цикл, имеющий k вершин v_a, v_c, v_d и др., и для $\Gamma(O')$ выполняется утверждение леммы по предположению индукции. То есть существуют двухэлементные подмножества S'_a, S'_c, S'_d, \dots множеств S'_a, S_c, S_d, \dots соответственно, такие, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_a, S'_c, S'_d, \dots\}$, совпадает с $\Gamma(O')$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть вершины v_c и v_d графа $\Gamma(O')$ соединены ребром, т.е. $k = 3$ и $\Gamma(O)$ представляет собой четырехугольник. Тогда существуют a_{i_1}, a_{i_2} из множества S'_a, c_1, c_2 из множества S_c, d_1, d_2 из множества S_d , расположенные на цикле O' в циклическом порядке $(a_{i_1} \dots d_1 \dots c_1 \dots a_{i_2} \dots d_2 \dots c_2 \dots)$. Вернем исходное буквенное обозначение всем вершинам на цикле O' . Поскольку в графе $\Gamma(O)$ вершина v_a не соединена с v_c , а v_b — с v_d , то вершины a_{i_1}, a_{i_2} не могут одновременно принадлежать множеству S_a (или S_b). Рассмотрим случай, когда вершина a_{i_1} является элементом множества S_a , обозначим ее a_1 , а a_{i_2} является элементом множества S_b , обозначим ее b_1 . Случай, когда a_{i_1} является элементом S_b , а a_{i_2} — элементом S_a , рассматривается аналогично. Так как v_a не соединена ребром с v_c , то каждая вершина a из множества S_a ограничена c_1 и

c_2 в виде $(c_2 \dots a \dots c_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Также каждая вершина b из множества S_b ограничена d_1 и d_2 в виде $(c_2 \dots a_1 \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$. Так как v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, заключаем, что существуют a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b , ограниченные c_1 и d_1 в виде $(c_2 \dots a_1 \dots d_1 \dots b_2 \dots a_2 \dots c_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Таким образом, из множества S_a выделяется подмножество $\{a_1, a_2\}$, из S_b — подмножество $\{b_1, b_2\}$, из S_c — подмножество $\{c_1, c_2\}$, из S_d — подмножество $\{d_1, d_2\}$. Тогда граф пересечений хордовой диаграммы $(c_2 a_1 d_1 b_2 a_2 c_1 b_1 d_2)$, образованной из указанных подмножеств, представляет собой четырехугольник.

Случай 2. Пусть вершины v_c и v_d графа $\Gamma(O')$ не соединены ребром, т.е. $k \geq 4$. Тогда существуют a_{i_1}, a_{i_2} из множества $S_{a'}$; c_1, c_2 из множества S_c ; d_1, d_2 из множества S_d , расположенные на цикле O' в циклическом порядке $(c_1 \dots a_{i_1} \dots c_2 \dots d_1 \dots a_{i_2} \dots d_2 \dots)$. Вернем исходное буквенное обозначение всем вершинам на цикле O' . Поскольку в графе $\Gamma(O)$ вершина v_a не соединена с v_c , а v_b — с v_d , то вершины a_{i_1}, a_{i_2} не могут одновременно принадлежать множеству S_a (или S_b). Тогда возможны следующие подслучаи.

Подслучай 2.1. Вершина a_{i_1} является элементом множества S_a , обозначим ее a , а a_{i_2} является элементом множества S_b , обозначим ее b_1 . Так как вершина v_a не соединена ребром с v_c в графе $\Gamma(O)$, то вершины множества S_a ограничены c_1 и c_2 в виде $(c_1 \dots a \dots c_2 \dots d_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Так как v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, то существуют вершины a_1, a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b , расположенные на цикле O в циклической последовательности $(c_1 \dots a_1 \dots b_2 \dots a_2 \dots c_2 \dots d_1 \dots b_1 \dots d_2 \dots)$. Но такое расположение противоречит тому, что v_b не соединена с v_d в графе $\Gamma(O)$.

Подслучай 2.2. Вершина a_{i_1} является элементом множества S_b , обозначим ее b_1 , а a_{i_2} является элементом множества S_a , обозначим ее a_1 . Заметим, что так как v_a не соединена ребром с v_c , то не существует вершины a из множества S_a , ограниченной c_1 и c_2 в виде $(c_1 \dots a \dots c_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots)$. Также заметим, что не существует вершины b из множества S_b , ограниченной d_1 и d_2 в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots d_1 \dots b \dots d_2 \dots)$. Учитывая эти замечания и то, что v_a соединена ребром с v_b в графе $\Gamma(O)$, заключаем, что существует a_2 из множества S_a и b_2 из множества S_b , ограниченные c_2 и d_1 (или d_2 и c_1) в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots a_2 \dots b_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots)$ (соответственно в виде $(c_1 \dots b_1 \dots c_2 \dots d_1 \dots a_1 \dots d_2 \dots b_2 \dots a_2 \dots)$).

Рассмотрим граф пересечений $\Gamma(U)$ хордовой диаграммы U , образованной из $\{a_1, a_2\}$, $\{b_1, b_2\}$, $S' \setminus S'_a$. Вершина графа $\Gamma(U)$, соответствующая множеству $\{a_1, a_2\}$, соединена только с двумя вершинами, одна из которых соответствует множеству $\{b_1, b_2\}$, а другая — множеству S'_d . Вершина графа $\Gamma(U)$, соответствующая множеству $\{b_1, b_2\}$, соединена также только с двумя вершинами, одна из которых соответствует множеству $\{a_1, a_2\}$, а другая — множеству S'_c . Вершины графа $\Gamma(U)$, соответствующие элементам множества $S' \setminus S'_a$, имеют степень два. Таким образом, $\Gamma(U)$ совпадает с $\Gamma(O)$. Лемма доказана. ■

Отметим, что утверждение леммы 3 перестает быть верным, если граф K не является замкнутым циклом. Примером служит следующий меченый ориентированный цикл \tilde{O} : $(d_1, a_1, c_1, d_2, a_2, c_2, b_1, a_3, b_2)$. Его граф пересечений $\Gamma(\tilde{O})$ не является замкнутым циклом. Каждое из множеств S_b, S_c, S_d состоит из двух вершин, а множество S_a состоит из трех. Выделить две вершины из множества S_a можно тремя способами. Граф пересечений каждого из следующих трех ориентированных циклов $(d_1, a_1, c_1, d_2, c_2, b_1, b_2)$, $(d_1, c_1, d_2, a_2, c_2, b_1, b_2)$, $(d_1, c_1, d_2, c_2, b_1, a_3, b_2)$ не совпадает с $\Gamma(\tilde{O})$.

Опишем процедуру снабжения вершин произвольного f -графа буквами.

Для каждой окружности A f -графа сделаем следующее. Разными буквами пометим все внутренние хорды окружности A . Концам каждой хорды припишем ту же букву, что и у хорды. Если на окружности A остались вершины, не помеченные буквами, то

поступим таким образом. После удаления окружности A вместе с внутренними хордами и вершинами внешних хорд, хотя бы один конец которых принадлежит A , f -граф разбивается на $m \geq 1$ непустых связных компонент. Обозначим эти компоненты разными буквами (при этом обозначения внутренних хорд и компонент должны быть попарно разными). Теперь для каждой компоненты сделаем следующее. Одна компонента соединена с окружностью A ребрами. Пометим вершины этих ребер на окружности A той же буквой, что и у компоненты. В конечном итоге получим из A окружность, все вершины которой обозначены буквами.

f -Граф назовем *меченым*, если все его вершины помечены буквами указанным образом (вообще говоря, неоднозначным, так как метки на вершинах разных окружностей вводятся независимо друг от друга, т.е. могут повторяться у разных окружностей). Далее будем рассматривать только меченые f -графы.

Лемма 4. *Если f -граф не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$, то каждый его меченый ориентированный цикл оснащаем.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ориентированный цикл A f -графа и построим граф пересечений $\Gamma(A)$.

Предположим, что $\Gamma(A)$ содержит цикл нечетной длины. Если циклов несколько, выберем среди них наименьший по числу звеньев и выделим его в графе пересечений. Заметим, что в $\Gamma(A)$ не существует ребра, соединяющего две несмежные вершины выделенного цикла C (иначе получим, что существует цикл нечетной длины в $\Gamma(A)$, у которого звеньев меньше). Теперь будем рассматривать только те множества вершин с одинаковыми буквами на цикле A , которым соответствуют вершины цикла C . По лемме 2 из каждого множества S_{x_i} (соответствующего некоторой вершине цикла C) можно выделить подмножество S'_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, r$, состоящее из двух вершин, такое, что граф пересечений хордовой диаграммы, образованной из $S' = \{S'_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,r}$, совпадает с C . Это означает, что в самом f -графе существует под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$. Противоречие с условием леммы.

Итак, граф пересечений $\Gamma(A)$ не содержит цикла нечетной длины. А значит, является двудольным. То есть множество вершин графа $\Gamma(A)$ можно разбить на два класса таким образом, что каждое ребро графа соединяет некоторую вершину из одного класса с некоторой вершиной из другого класса. Из двудольности $\Gamma(A)$ следует существование оснащения ориентированного цикла A . Лемма доказана. ■

Вернемся к рассмотрению f -графа F . Пусть F состоит из одного ориентированного цикла A , который по лемме 4 оснащаем (т.е. цикл A является d -диаграммой). Зафиксируем какое-либо оснащение цикла и рассмотрим его реализацию на плоскости без самопересечений. А именно: заметим, что любые буквы из одного класса зацепленными не являются. Тогда все хорды f -графа F , концы которых лежат в одном классе, можно изобразить на плоскости непересекающимися криволинейными отрезками без самопересечений внутри цикла. Аналогично все хорды f -графа F , концы которых лежат в другом классе, можно изобразить на плоскости непересекающимися и без самопересечений вне цикла. Получим ориентированное вложение F в плоскость.

Далее будем считать, что F содержит $\ell \geq 2$ ориентированных циклов. Зафиксируем оснащение на каждом ориентированном цикле. Один класс из определения оснащения пометим числом 0, второй класс пометим 1. Тогда все вершины f -графа F разбиваются на классы 0 и 1.

Хвостом вершины в f -графе назовем полуребро хорды (т.е. неориентированного ребра), содержащее данную вершину. Хвост назовем *внешним* (*внутренним*), если он лежит на внешней (соответственно внутренней) хорде f -графа. В произвольном неори-

ентированном графе под хвостами вершины будем понимать содержащие ее полуребра.

Замкнутой цепью назовем f -граф, состоящий из $s \geq 1$ ориентированных циклов и циклически соединяющих хорд, как на рис. 7,а. При $s = 1$ замкнутая цепь состоит из одного ориентированного цикла с внутренней хордой.

Построим для f -графа F дерево T следующим образом. Если в графе F есть замкнутая цепь, то выберем произвольную хорду, входящую в цепь, и *разделим* ее: выделим на хорде две вершины (см. рис.7,б), обозначим их красным цветом, а часть хорды, соединяющую красные вершины, удалим (см. рис. 7,с). Повторяем предыдущий шаг для полученного графа, пока не получим граф, не содержащий замкнутых цепей. Далее каждый ориентированный цикл стянем в точку (см. рис. 7,д). Получим дерево T , при этом для каждой вершины дерева естественным образом определен ориентированный циклический порядок ее хвостов.

Далее под циклическим порядком вершины дерева будем понимать ориентированный циклический порядок ее хвостов.

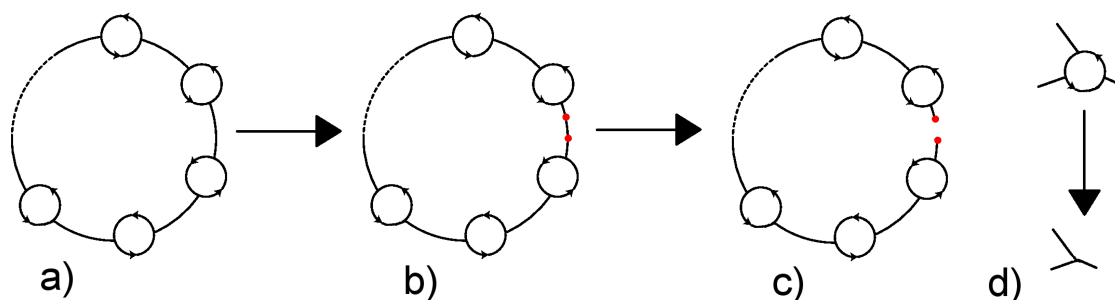


Рис. 7. Разделение хорды, входящей в замкнутую цепь

Если две красные вершины лежали на одной внешней (внутренней) хорде в F , то такие вершины назовем *out-идентичными* (соответственно *in-идентичными*). Будем говорить, что вершины *идентичны*, если они являются *out-идентичными* или *in-идентичными*.

Лемма 5. Любое дерево с заданным циклическим порядком его вершин (см. выше) можно изобразить с учетом этого порядка без самопересечений на плоскости внутри окружности, причем вершины дерева будут лежать на окружности, а ребра представлять собой прямые отрезки.

Замечание. Вложение дерева с учетом циклического порядка его вершин состоит в следующем. Обозначим через U указанную реализацию дерева внутри окружности. Для каждой вершины v в U ориентированный циклический порядок полуребер в вершине v , задаваемый вложением и ориентацией полуребер против часовой стрелки, должен совпадать с циклическим порядком дерева в вершине v .

Доказательство. Индукция по N — числу вершин дерева. При $N = 2$ (т.е. для простого ребра) утверждение леммы очевидно.

Пусть лемма верна при $N = \kappa$. Рассмотрим дерево с $N = \kappa + 1$ числом вершин. В любом дереве существует висячая вершина (т.е. вершина степени 1). Выделим ребро в нашем дереве, которому принадлежит висячая вершина, и обозначим буквой l вершину-конец ребра, отличную от висячей. Очевидно, что степень вершины l больше или равна двум.

Удалим висячую вершину. Получится дерево с $N = \kappa$ вершинами, которое можно вложить в плоскость указанным образом. Рассмотрим такое вложение. Обозначим через X множество замкнутых связных областей, на которые окружность и вложенное в

него дерево разбивают плоскость. Отметим, что все элементы множества X являются выпуклыми.

1. Рассмотрим случай, когда вершина l после удаления висячей вершины стала висячей. Поскольку в дереве нет циклов, то существует замкнутая область, которая является элементом множества X и границей которой являются ребра дерева, в том числе ребро с концом l , и некоторая дуга окружности. Соединим отрезком произвольную внутреннюю точку дуги и вершину l . Очевидно, этот отрезок будет находиться внутри области, а значит, не будет пересекаться с другими отрезками. Получим искомое вложение в плоскость дерева с $N = \kappa + 1$ числом вершин.

2. Теперь рассмотрим случай, когда степень вершины l до удаления висячей вершины была больше двух. Тогда существуют два ребра: одно предшествует удаленному, другое следует за удаленным в соответствии с циклическим порядком вершины l .

Предположим, что существует область — элемент множества X , в границу которой входят предшествующее и последующее ребра. Поскольку в дереве нет циклов, в границу этой области входит некоторая дуга окружности, внутреннюю точку которой можно соединить отрезком с вершиной l , что даст искомое вложение.

Пусть в множестве X не существует замкнутой области с границей, содержащей предшествующее и последующее ребра. Тогда рассматриваем область, границей которой являются ребра дерева, в том числе предшествующее (или последующее) ребро. Данная область аналогична рассмотренной из п. 1. Она содержит в качестве границы некоторую дугу окружности. Соединив отрезком произвольную внутреннюю точку дуги и вершину l , в итоге получим искомое вложение. Лемма доказана. ■

Определение. *Препятствием* V^1 назовем граф, состоящий из трех ребер l_1, l_2, l_3 и двух вершин, на которых задан ориентированный циклический порядок: (l_1, l_2, l_3) на одной вершине и такой же на второй (рис. 6,а).

Пусть T_1 — описанное вложение дерева T в плоскость; E — окружность, на которой лежат вершины дерева T_1 . Если дерево T_1 не содержит красных вершин, то искомое вложение f -графа F в плоскость получается из T_1 заменой каждой вершины ориентированным циклом. Далее считаем, что дерево T_1 содержит красные вершины.

Получим из T_1 связный граф G следующим образом: соединим ребром идентичные вершины дерева T_1 . Отметим, что каждая пара идентичных вершин в графе G лежит на некотором цикле. Также ясно, что произвольная не красная вершина на каком-либо цикле в G имеет лежащие на этом цикле хвосты, которые помечены одной буквой и поэтому принадлежат одному классу.

Пусть существуют красные вершины A, B, A_1, B_1 дерева T_1 , лежащие на E в этом циклическом порядке, причем вершина A идентична A_1 , а вершина B идентична B_1 . Соединим A с A_1 и B с B_1 путями в дереве T_1 .

Если эти пути в дереве пересекаются по некоторому пути u , то в графе G выделяется препятствие V^1 . Вершинами V^1 будут концы u . На рис. 8,б показан пример, как выделяется препятствие V^1 в графе G . Пунктиром обозначена окружность E . Существование препятствия V^1 в графе G означает, что исходный f -граф F содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V , а это противоречит условию. Следовательно, пути в дереве T_1 , соединяющие A с A_1 и B с B_1 , пересекаются по точке. Эту точку назовем *точкой пересечения* и обозначим буквой O . Путь в дереве, соединяющий A с A_1 , будем обозначать через AA_1 , а соединяющий B с B_1 — через BB_1 .

Предположим, что существует путь u_1 в графе G , соединяющий AA_1 и BB_1 . И этот путь точку пересечения не содержит. Буквой K (соответственно L) обозначим конец пути u_1 , лежащий на AA_1 (соответственно на BB_1). Через k_1 (соответственно l_1) обо-

значим хвост вершины K (соответственно L), лежащий на пути u_1 . Рассмотрим два пути γ_1, γ_2 в графе G , соединяющие K и O : путь γ_1 лежит на BB_1 и не содержит B и B_1 , путь γ_2 проходит через вершины B и B_1 . Через k_2 (соответственно k_3) обозначим хвост вершины K , лежащий на γ_1 (соответственно γ_2). Хвосты l_2 и l_3 вершины L определяются аналогично хвостам k_2 и k_3 . Хвосты k_i и l_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, могут четырьмя способами образовывать циклический порядок на вершинах K и L :

- 1) (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_3, l_2) (рис. 8, *c*);
- 2) (k_1, k_3, k_2) и (l_1, l_3, l_2) (рис. 8, *d*);
- 3) (k_1, k_3, k_2) и (l_1, l_2, l_3) (рис. 8, *e*);
- 4) (k_1, k_2, k_3) и (l_1, l_2, l_3) .

Четвертый случай аналогичен второму. На рис. 8, *c, d, e* путь u_1 изображен пунктиром. Во всех четырех случаях в графе G выделяется препятствие V^1 . На рисунке 8, *f, g, h* ребра препятствия V^1 выделены жирными пунктирными линиями, а вершинами V^1 являются O и L .

Существование препятствия V^1 в графе G означает, что исходный f -граф F содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V , что противоречит условию.

Таким образом, при удалении точки пересечения из графа G вершины A и B (также A_1 и B_1) не могут лежать в одной компоненте связности. Также класс хвостов точки пересечения, лежащих на AA_1 , отличается от класса хвостов этой точки, лежащих на BB_1 . Иначе на ориентированном цикле в f -графе F , соответствующем точке пересечения, существовали бы две пары вершин (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , идущих по циклу в порядке $(a_1 b_1 a_2 b_2)$ и принадлежащих одному классу. Это противоречит существованию оснащения каждого ориентированного цикла f -графа F . Здесь буквой a (b) обозначены хвосты точки пересечения, лежащие на AA_1 (BB_1) и соответствующие хвостам вершины на ориентированном цикле в f -графе F . Отметим также, что путь AA_1 (BB_1) лежит на некотором цикле в G . Поэтому не существует вершины на AA_1 (BB_1) с внешними хвостами на AA_1 (BB_1) из разных классов.

Вернемся к рассмотрению дерева T_1 и вершин A, B, A_1, B_1 .

Вершину в T_1 назовем *особой*, если она имеет хотя бы два внешних хвоста, лежащие в разных классах. Заметим, что точка пересечений AA_1 и BB_1 является особой, если вершина A out-идентична вершине A_1 , а вершина B out-идентична вершине B_1 .

В зависимости от наличия особых вершин в дереве T_1 рассмотрим два случая. И в каждом случае докажем, что существует ориентированное вложение f -графа F в плоскость, причем для каждого ориентированного цикла будет верно следующее:

хорды с вершинами на ориентированном цикле лежат одновременно внутри или вне этого цикла тогда и только тогда, когда они входят в один класс (относительно вершин на цикле).

1. Пусть в дереве T_1 нет особых вершин. Тогда все внешние хвосты произвольной не красной вершины дерева помечены одним классом. Припишем каждой не красной вершине дерева тот же класс, что и у ее внешних хвостов. Распределим красные вершины дерева T_1 по классам K_1 и K_2 следующим образом.

Очевидно, что каждая красная вершина является концом некоторого ребра, второй конец которого красным не является. Рассмотрим каждое ребро дерева T_1 с одним красным концом. Если класс хвоста не красного конца отличен от класса самого конца, то красную вершину ребра определим в класс K_2 , иначе определим ее в класс K_1 . Отметим, что идентичные вершины определены в один класс, причем все out-идентичные вершины принадлежат классу K_1 . В класс K_2 попадают, очевидно, только in-идентичные вершины.

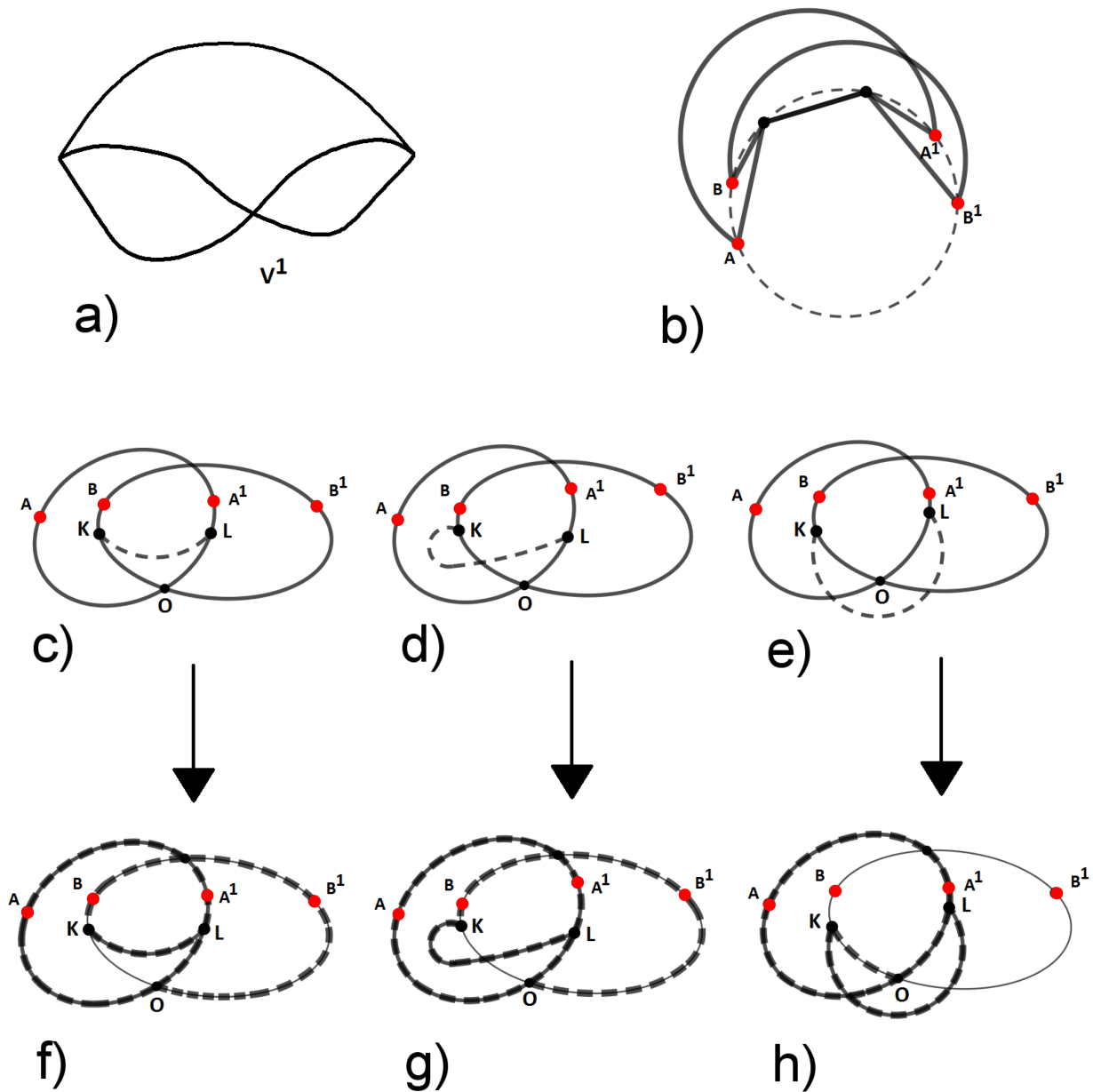


Рис. 8. Выделение препятствия V^1 в графе G

Пусть вершины A, B, A_1, B_1 попали в один класс. Докажем, что такое невозможно. Для этого рассмотрим следующие варианты.

1.1. Вершина A out-идентична вершине A_1 , а вершина B out-идентична вершине B_1 . Тогда в дереве T_1 есть особая вершина, что противоречит условию.

1.2. Вершина A out-идентична вершине A_1 , а вершина B in-идентична вершине B_1 . (Случай, когда A in-идентична вершине A_1 , а вершина B out-идентична вершине B_1 , рассматривается аналогично.) Тогда класс точки пересечения AA_1 и BB_1 совпадает с классом хвостов a_1 и a_2 . Но, как мы ранее выяснили, класс хвостов b_1 и b_2 отличен от класса хвостов a_1 и a_2 . Поэтому вершины B и B_1 имеют класс K_2 . Так как A out-идентична вершине A_1 , то A и A_1 имеют класс K_1 . Получили противоречие с предположением, что A, B, A_1, B_1 попали в один класс.

1.3. Вершина A in-идентична вершине A_1 , а вершина B in-идентична вершине B_1 .

Класс точки пересечения AA_1 и BB_1 совпадает либо с классом хвостов a_1 и a_2 , либо с классом хвостов b_1 и b_2 . Для определенности будем считать, что класс точки пересечения совпадает с классом хвостов a_1 и a_2 . Далее по аналогии с п. 1.2 приходим к противоречию с предположением, что A, B, A_1, B_1 попали в один класс.

Таким образом, любые четыре вершины A, A_1, B, B_1 из одного класса, где A идентична A_1 , а B идентична B_1 , лежат на E в этом циклическом порядке. Значит, в каждом классе идентичные вершины можно соединить вне окружности E непересекающимися криволинейными отрезками. Соединим их в T_1 и заменим каждую вершину (не красную) ориентированной против часовой стрелки окружностью (рис. 9).

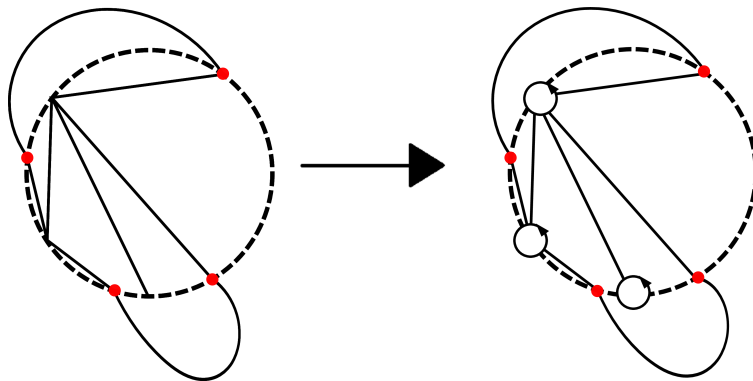


Рис. 9. Замена вершин ориентированными циклами

Поясним, что мы получили исходный f -граф (с метками на всех хордах $+1$) и его погружение в плоскость такое, что все окружности ориентированы одинаково и против часовой стрелки. При этом выбор ориентации "добавленных" окружностей существен (при других выборах ориентации метки на некоторых хордах будут -1 , что противоречит нашей договоренности в начале раздела).

Заметим, что если существуют две пересекающиеся хорды в полученном f -графе, то на каждой из них выделены красные вершины, причем класс вершин на одной хорде отличен от класса вершин на другой. Пересечения хорд устраним следующим образом. Каждую внутреннюю хорду полученного f -графа, на которой выделены красные вершины из класса K_2 , переведем внутрь соответствующего цикла с помощью инверсии.

В итоге получим искомое ориентированное вложение f -графа F в плоскость. Заметим, что в этом вложении все ориентированные циклы лежат вне друг друга.

2. Пусть в дереве T_1 есть особые вершины. Индукцией по n — числу особых вершин — докажем, что существует указанное вложение f -графа F в плоскость.

База индукции. Пусть $n = 1$. Разобьем на два класса множество вершин дерева T_1 , исключая особую вершину w , следующим образом. Существует единственный путь, соединяющий произвольную вершину v дерева с особой. Определим вершину v в тот же класс, в котором и хвост особой вершины, лежащий на этом пути.

Идентичные вершины попадут в один класс (иначе в графе G существовал бы цикл с вершиной w , хвосты которой, лежащие на цикле, имели разные классы).

Деревом T_1^1 (соответственно T_1^2) назовем поддерево дерева T_1 , множество вершин которого состоит из w и всех вершин класса 0 (соответственно 1).

Тогда вершина w не является особой относительно T_1^1 (соответственно T_1^2). Из T_1^1 и T_1^2 получим ориентированное вложение некоторых f -графов (см. случай 1), ориентированные циклы которых лежат вне друг друга. Эти f -графы имеют один общий ориентированный цикл (которому соответствует w), причем все хорды f -графов лежат

вне этого цикла. Инверсией переведем один из f -графов внутрь этого цикла. Тем самым получим искомое ориентированное вложение f -графа F в плоскость.

Шаг индукции. Пусть при $n = k$ существует ориентированное вложение f -графа F в плоскость. Рассмотрим случай, когда $n = k+1$. Выберем произвольную особую вершину w дерева T_1 .

Аналогично описанному в базе индукции определим деревья T_1^1 и T_1^2 . Тогда вершина w не является особой относительно T_1^1 (T_1^2). Значит, из T_1^1 и T_1^2 по предположению индукции можно получить ориентированные вложения двух f -графов. Эти f -графы имеют один общий ориентированный цикл (которому соответствует w). Если оба f -графа реализованы одновременно внутри или вне общего цикла, применим инверсию (относительно этого цикла) к одному из них. Тем самым получим искомое ориентированное вложение f -графа F в плоскость.

Таким образом, f -граф F ориентированно вложим в плоскость. Следовательно, по теореме 1 атом с соответствующим f -графом F является высотным. Достаточность доказана. ■

Утверждение 2 (В.А. Трифонова, минимальность списка препятствий V и $V(r), r \geq 1$). *Препятствие V и серия препятствий $V(r), r \geq 1$ образуют минимальное (по включению) множество препятствий, для которого выполнено свойство из теоремы K_1 .*

Замечание. Минимальность списка препятствий означает, что для любого собственного подмножества этого множества препятствий не выполнено свойство из теоремы K_1 . Это равносильно выполнению следующего условия: одно препятствие нельзя перевести в другое с помощью операции взятия под- f -графа и последующего применения f -гомеоморфизма.

Из условия минимальности списка следует (с учетом критерия K_1) следующее свойство: под- f -граф любого из препятствий, не совпадающий с препятствием, соответствует высотному атому.

Доказательство.

У препятствия V есть только два под- f -графа, не совпадающие с этим препятствием: один из них состоит из двух окружностей и одной внешней хорды, другой состоит из двух окружностей и двух внешних хорд.

Заметим, что у f -гомеоморфных f -графов существует естественная биекция между множествами окружностей, число вершин у которых отлично от двух. Число окружностей у препятствия V и у любого его под- f -графа два. А число окружностей у каждого из препятствий $V(r), r \geq 1$, только одно, причем число вершин на окружности у каждого из этих препятствий больше двух. Таким образом, препятствие V нельзя перевести в препятствие $V(r), r \geq 1$, с помощью операции взятия под- f -графа и последующего применения f -гомеоморфизма. Аналогично можно показать, что препятствие $V(r), r \geq 1$, нельзя перевести в препятствие V с помощью операции взятия под- f -графа и последующего применения f -гомеоморфизма.

Препятствия $V(r), r \geq 1$ попарно не изоморфны, поскольку число вершин на их окружностях попарно различно. Графы пересечений препятствий $V(k)$ и $V(l), k \neq l$, представляют собой циклы соответственно из $2k+1$ и $2l+1$ вершин. Взятие под- f -графа у препятствия $V(k)$ может уменьшить количество внутренних хорд этого препятствия, что приведет к удалению вершин у его графа пересечений. Заметим, что цикл $2k+1$ нельзя привести к циклу $2l+1$ удалением вершин. Пусть граф пересечений некоторого под- f -графа препятствия $V(k)$ не является циклом. Тогда необходимо добавить внутренние хорды к окружности L этого под- f -графа, чтобы граф пересечений полученно-

го f -графа представлял собой цикл. Однако операции f -гомеоморфизма не добавляют новых внутренних хорд к L . Следовательно препятствие $V(k)$ нельзя перевести в препятствие $V(l)$ с помощью операции взятия под- f -графа и последующего применения f -гомеоморфизма. ■

Следствием из теоремы K_1 является

Теорема K_2 (В.А. Трифонова, критерий высотности атома [15]). *Атом является высотным тогда и только тогда, когда его f -граф не содержит подграфа, гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$, и не содержит под- f -графа, f -гомеоморфного препятствию V .*

Доказательство. Если f -граф F атома содержит подграф, гомеоморфный полному двудольному графу $K_{3,3}$, то по теореме Понтрягина–Кураатовского такой f -граф в плоскость невложим. Тем более не существует ориентированного вложения F в плоскость.

Пусть атом высотным не является. Рассмотрим его f -граф. По теореме 2 этот f -граф содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$. Но любое препятствие из этой серии содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ (лемма 2). Теорема доказана. ■

4. Новое доказательство гипотезы В.А.Васильева

В данном разделе приводится новое доказательство гипотезы В.А. Васильева [21] о критерии планарности графа с вершинами степени 4 и дополнительной крестовой структурой. Впервые гипотеза была доказана В.О.Мантуровым [22].

Гипотеза (В.А. Васильев [22]). *Если 4-валентный граф с крестовой структурой в вершинах не вложим в плоскость с сохранением этой структуры, то у него найдутся два цикла, не имеющие общих ребер и имеющие ровно одну точку перекрестья¹.*

Здесь приводится наше новое доказательство, опирающееся на теорему K_1 , доказанную в предыдущем разделе.

Замечание. Мы будем рассматривать только связные и конечные графы; петли и кратные ребра допускаются.

Пусть дан граф, все вершины которого имеют степень 4, и задана некоторая вершина на нем. Назовем *крестовой структурой полуребер* в этой вершине любое разбиение четырех входящих в нее полуребер на две пары. При этом назовем *крестовой структурой графа* крестовую структуру полуребер в каждой его вершине. Ребра из каждой пары будем называть *противоположными*. Графы с крестовой структурой будем называть *крестовыми*.

Понятие противоположности будет важно при вложениях крестовых графов в поверхность: будем говорить, что граф вложим в двумерную поверхность *с сохранением крестовой структуры*, если существует такое вложение, что полуребра, противоположные в вершине, являются противоположными на поверхности. Любой четырехвалентный граф, вложенный в поверхность, естественным образом наследует из этой поверхности крестовую структуру. Будем называть не противоположные полуребра, инцидентные одной вершине, *соседними*.

Крестовый граф называется *X-планарным*, если его можно вложить в плоскость с сохранением крестовой структуры.

¹В этом виде (более точно, в виде критерия) гипотеза сформулирована в статье В.О.Мантурова [22], а в работе В.А.Васильева [21] гипотеза сформулирована (как теорема Мантурова) для 4-валентных графов с крестовой структурой, имеющих лишь одну уникальную окружность.

Общая вершина двух путей на крестовом графе, не имеющих общих ребер, называется *вершиной перекрестья*, если один из этих путей последовательно проходит по полуребрам из одной пары, выходящим из этой вершины, а второй путь последовательно проходит по полуребрам из другой пары.

Теорема (В.О. Мантуров, критерий планарности графов с крестовой структурой). *Крестовый граф X -планарен тогда и только тогда, когда он не содержит двух несамопересекающихся циклов без общих ребер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.*

Заметим, что в формулировке теоремы слово "несамопересекающихся" можно опустить. Также не накладывается никаких ограничений на количество (нетрансверсальных) пересечений двух циклов. Далее мы будем называть *препятствием Васильева* два цикла без общих ребер, имеющие единственную точку перекрестья.

Доказательство необходимости. Предположим, что в X -планарном крестовом графе есть два цикла C_1 и C_2 , имеющие ровно одну вершину A перекрестья. Рассмотрим вложение такого графа в плоскость с сохранением крестовой структуры. Цикл C_1 делит плоскость на две части. Поскольку только вершина A является для циклов C_1 и C_2 точкой перекрестья, то в вершине A цикл C_2 переходит из одной части в другую, оставаясь в остальных общих вершинах в той же части. Такого вложения быть не может, получим противоречие.

Доказательство достаточности. Пусть крестовый граф Γ не является X -планарным. Покажем, что в нем содержатся два несамопересекающихся цикла без общих ребер, имеющих ровно одну вершину перекрестья.

Нам понадобится следующая теорема:

Теорема 2 (В.О. Мантуров, критерий высотности атома [2]). *Атом $X = (P^2, K)^\#$ является высотным тогда и только тогда, когда его остов K является X -планарным.*

Замечание. Отношение противоположности в крестовой структуре графа K определяется в соответствии с расположением ребер на поверхности P^2 .

Любой атом может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

1. Остов (четырёхвалентный граф);
2. Крестовая структура и
3. С-структура (в каждой вершине выделены две пары *соседних* полуребер, которые образуют границы чёрных колец).

Снабдим произвольным образом С-структурой граф Γ . Получим атом X .

Тогда по теореме 2 атом X не высотный, поскольку его остов Γ не X -планарен. Возникают два случая:

- 1) Атом X не ориентируемый;
- 2) Атом X ориентируемый. Тогда из теоремы K_1 следует, что его f -граф содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r)$, $r \geq 1$.

Рассмотрим первый случай.

Напомним, что замкнутой цепью мы называли f -граф без меток, состоящий из $s \geq 1$ окружностей и циклически соединяющих хорд (см.рис. 10). При $s = 1$ замкнутая цепь состоит из одной окружности с внутренней хордой. *Препятствием O* назовем замкнутую цепь с метками ± 1 на неориентированных ребрах, причем количество меток -1 нечетно.

Определение. Назовем два f -графа *эквивалентными*, если один из другого можно получить последовательностью следующих операций. Разрешается заменять ориентацию всех ребер какого-то цикла и одновременно изменять метки на всех неориен-

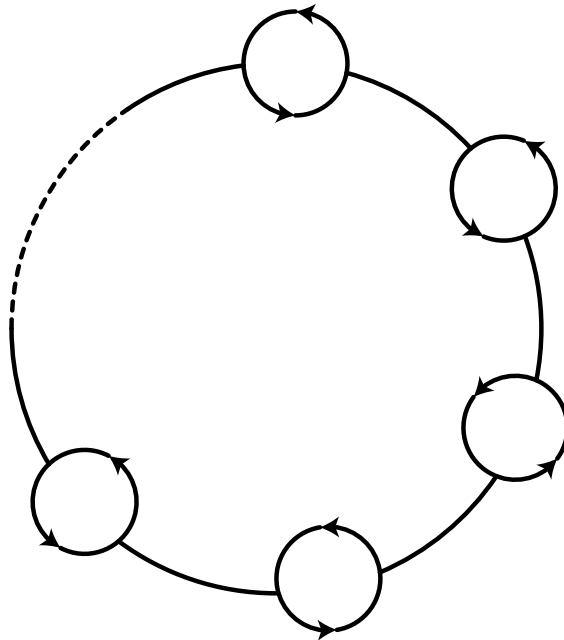


Рис. 10. Замкнутая цепь

тированных ребрах, инцидентных этому циклу, на противоположные (если при этом оба конца неориентированного ребра не принадлежат данному циклу). Если оба конца неориентированного ребра принадлежат данному циклу, то метка на этом ребре не меняется.

В работе А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1] показано взаимно-однозначное соответствие между эквивалентными f -графами и изоморфными атомами. В частности, все f -графы, эквивалентные f -графу с метками $+1$ на всех неориентированных ребрах, задают ориентируемые атомы.

Лемма (критерий ориентируемости атома). *Атом ориентируем тогда и только тогда, когда его f -граф G не содержит под- f -графа, представляющего собой препятствие O .*

Доказательство.

Докажем необходимость утверждения леммы. Пусть атом ориентируем. Возьмем естественную ориентацию поверхности P^2 и тогда все метки в полученном f -графе G будут равны $+1$. Заметим, что замена ориентации на окружностях препятствия O не меняет четность количества меток -1 . Поэтому любой f -граф, эквивалентный f -графу G , не содержит под- f -графа, представляющего собой препятствие O . Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть f -граф G не содержит под- f -графа, представляющего собой препятствие O .

Если G состоит только из одной окружности и внутренних хорд, то все метки на хордах равны $+1$. Очевидно, что атом с таким f -графом ориентируем. Стянем каждую окружность f -графа в точку (см.рис. 11). Получим граф Y с метками на ребрах. (При построении графа Y не учитывается ориентация окружностей).

Рис. 11. Стягивание окружности в точку

Рассмотрим его остовное дерево T . Заметим, что путем замены всех меток ребер, инцидентных какой-то вершине дерева, на противоположные, мы все-

гда сможем получить дерево T с метками $+1$ на всех ребрах. Выберем такой набор ориентаций окружностей f -графа, что все метки на ребрах дерева T равны $+1$. Получим f -граф G' , эквивалентный f -графу G . Рассмотрим непересекающийся цикл, образованный произвольным ребром e графа Y вне дерева T и некоторыми ребрами дерева. Ребро e имеет метку $+1$, поскольку иначе данный цикл бы содержал единственную метку -1 , что означало бы существование препятствия O в f -графе G . Ввиду произвольности выбора ребра e заключаем, что все ребра графа Y имеют метки $+1$. Это означает, что все метки f -графа G' равны $+1$. Поскольку f -графы G и G' эквивалентны, то они задают ориентируемые атомы. Достаточность доказана. ■

В работе А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [1] описан алгоритм построения атома по его f -графу. Из данного алгоритма ясно, как по f -графу восстановить остов атома. На рис. 12 показано поведение остова атома в зависимости от меток на неориентированных ребрах f -графа. Остов показан красным цветом. Вершина остова (см.рис. 12а) лежит на ребре с меткой $+1$. Из вершины выходят четыре линии, которые проходят вдоль ребра с меткой и вдоль ориентированных ребер окружностей. На рис. 12b из вершины выходят четыре линии, две из которых проходят вдоль ребра с меткой, делая перекрутку на этом ребре. На рис. 12c показан f -граф с двумя неориентированными ребрами, меченными $+1$ и -1 , а также соответствующий f -графу остов.

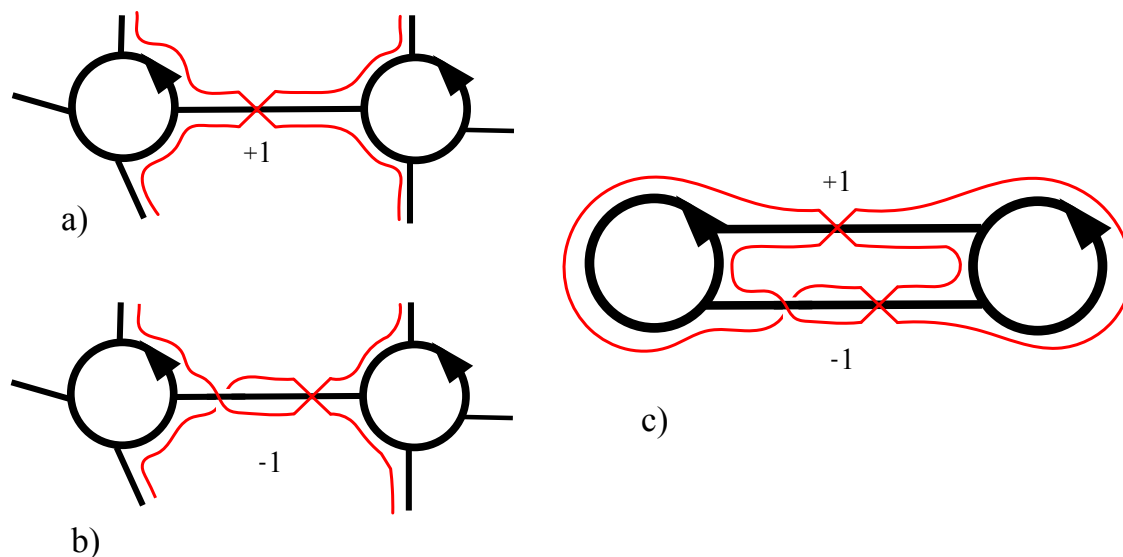


Рис. 12. Восстановление остова атома по его f -графу

Мы рассматриваем случай, когда атом X не ориентируемый. Тогда по лемме его f -граф G содержит под- f -граф, представляющий собой препятствие O . Рассмотрим случай, когда препятствие O есть f -граф G . Восстановим остов Γ по f -графу. Выберем вершину A остова на произвольном ребре с меткой -1 . Поскольку количество -1 на неориентированных ребрах препятствия O нечетно, то существуют два цикла (препятствия Васильева) графа Γ , имеющих ровно одну вершину перекрестья (вершину A). Эти циклы могут пересекаться в других вершинах графа Γ , отличных от A , и тогда каждый из этих циклов проходит по соседним полуредрам точек пересечения. Например, на рис. 13 показано препятствие O , состоящее из пяти окружностей и имеющее метку -1 на трех неориентированных ребрах. Красным и синим цветом показаны два цикла - препятствия Васильева, точка перекрестья выделена на одном ребре с меткой -1 и отмечена буквой A .

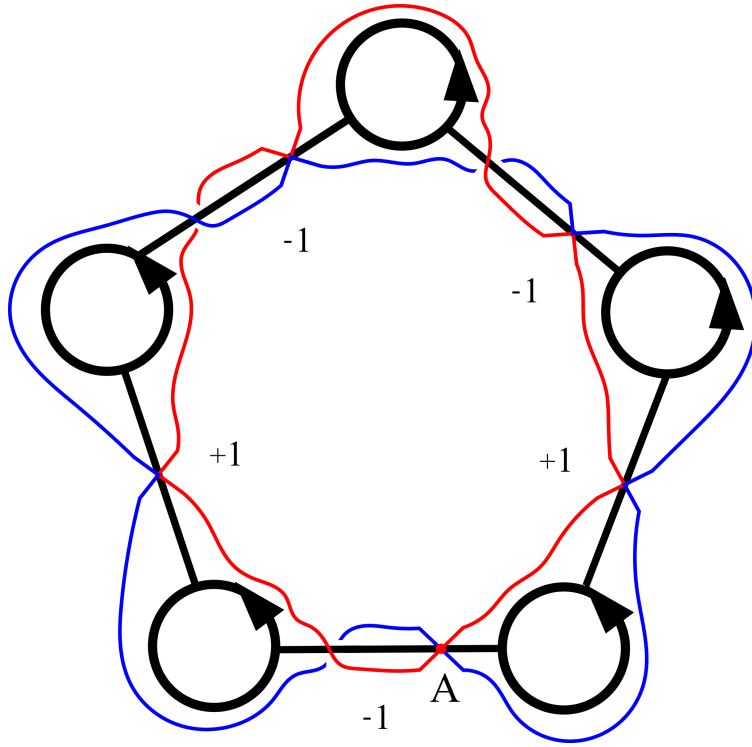


Рис. 13. Препятствие Васильева по препятствию O

Пусть f -граф G не является препятствием O , а содержит его в качестве под- f -графа. Нетрудно показать, что добавление неориентированных ребер и окружностей к O не мешает существованию препятствия Васильева. В этом случае циклы могут самопересекаться и иметь более сложное строение. Пример показан на рис. 14.

Таким образом мы показали, что остов любого неориентируемого атома содержит препятствие Васильева. Первый случай рассмотрен.

Рассмотрим второй случай, когда атом X ориентируемый и не высотный. Поскольку мы исследуем только остов атома X , а все эквивалентные f -графы задают изоморфные остовы соответствующих атомов, будем считать, что все метки на ребрах f -графа G равны $+1$.

Из теоремы K_1 следует, что f -граф G содержит под- f -граф, f -гомеоморфный препятствию V или препятствию из серии $V(r), r \geq 1$.

Так как атом с f -графом V имеет двойственный f -граф $V(1)$, то остовы, восстановленные по V и $V(1)$ совпадают. На рис. 15 показано препятствие Васильева для f -графов серии $V(r), r \geq 1$.

Аналогично рассмотренному случаю нетрудно показать, что добавление неориентированных ребер (с метками $+1$) и окружностей к каждому f -графу серии $V(r), r \geq 1$, не мешает существованию препятствия Васильева. Отличие от первого случая лишь в том, что с помощью операции подразделения неориентированного ребра к внутренним хордам каждого из этих f -графов могут быть добавлены окружности.

Таким образом, если атом ориентируемый и не высотный, то его остов содержит препятствие Васильева. Второй случай рассмотрен. ■

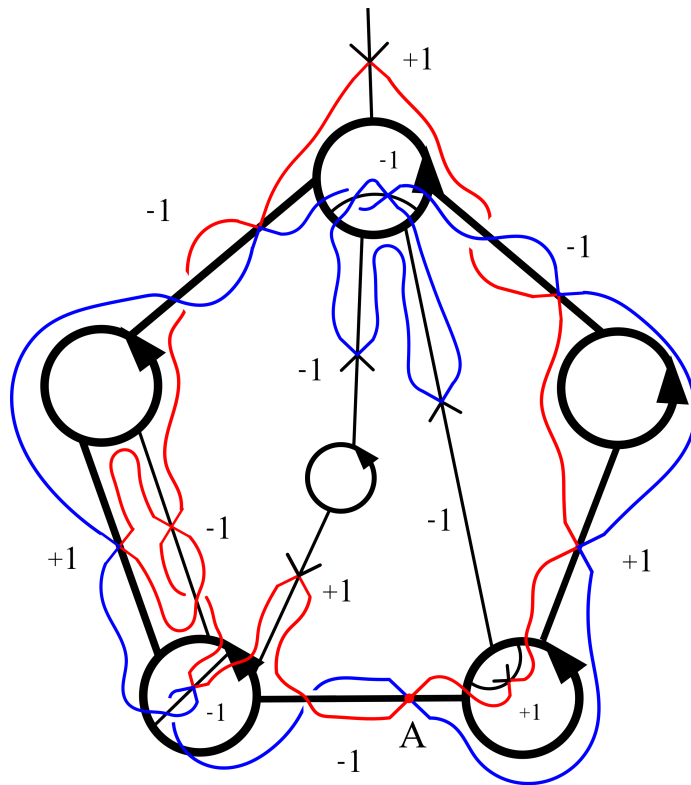


Рис. 14. Препятствие Васильева по f -графу G

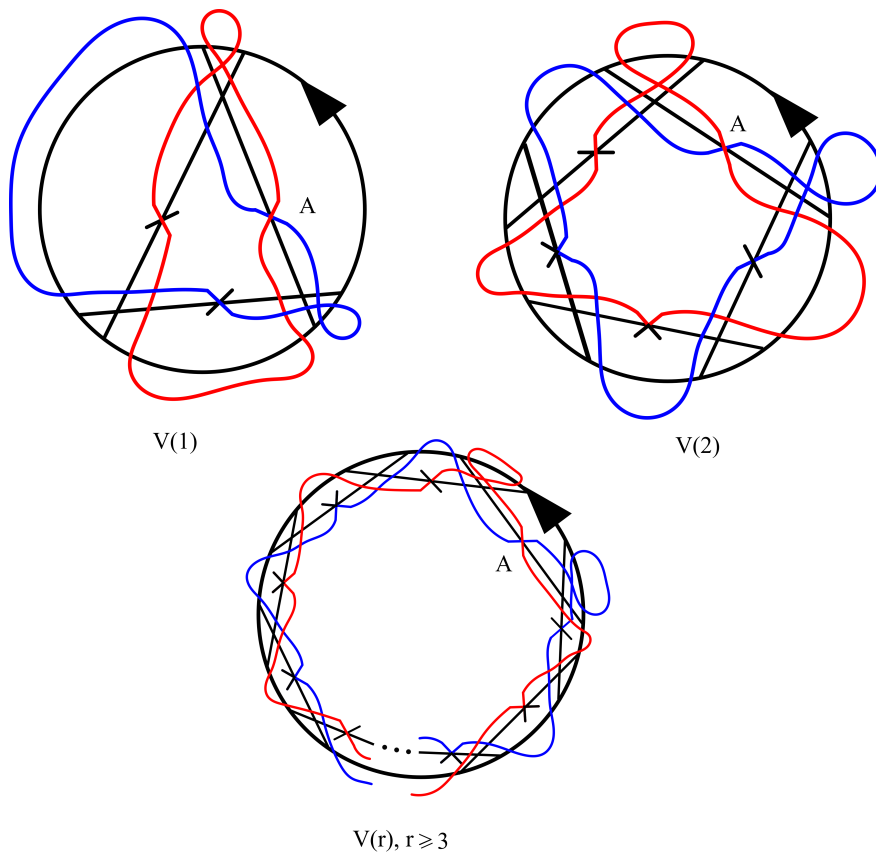


Рис. 15. Препятствие Васильева для f -графов серии $V(r), r \geq 1$

Список литературы

- [1] *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [2] *Мантуров В.О.* Бифуркации, атомы и узлы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2000. №1. 3–8.
- [3] *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, №6. 1276–1307.
- [4] *Фоменко А.Т.* Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. **22**, вып. 4. 38–51.
- [5] *Фоменко А.Т.* Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, вып. 1. 145–173.
- [6] *Фоменко А.Т.* Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **55**, №4. 747–779.
- [7] *Фоменко А.Т.* Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях // Функц. анализ и его прил. 1991. **25**, вып.4. 23–35.
- [8] *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, №3. 546–575.
- [9] *Plyutko D.P., Manturov V.O.* Virtual knots: the state of the art. Series on knots and everything. Vol.51. Singapore: World Scientific, 2012.
- [10] *Никонов И. М.* Высотные атомы с транзитивной на вершинах группой симметрий // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. №6. 17–25.
- [11] *Трифонов В.А.* Высотные частично симметричные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. №2. 33–41.
- [12] *Волчанецкий Н. В., Никонов И. М.* Максимально симметричные высотные атомы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. №2. 3–6.
- [13] *Кудрявцева Е. А.*, Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Матем. сб., **190**:3 (1999), 29–88.
- [14] *Samelson H.*, Orientability of hypersurfaces in \mathbb{R}^n // Proc. Am. Math. Soc. 22, 301-302 (1969).
- [15] *Трифонов В.А.*, Критерии высотности атома // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2020, №3, 12–24.
- [16] *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. **205**. 131–140.

- [17] *Bouchet A.* Circle graph obstructions // J. Combin. Theory. Ser. B. 1994. **60**. 107–144.
- [18] *Chmutov S., Duzhin S., Lando S.* Vassiliev knot invariants II. Intersection graph conjecture for trees, singularities and bifurcations // Adv. Sov. Math. 1994. **21**. 127–134.
- [19] *Mellor B.* The intersection graph conjecture for loop diagrams // J. Knot Theory Ramifications. 2000. **9**. 187–211.
- [20] *Chmutov S., Lando S.* Mutant knots and intersection graphs // Algebr. and Geom. Topol. 2007. **7**, 1579–1598.
- [21] *Васильев В. А.* Инварианты и когомологии первого порядка для пространств вложений самопересекающихся кривых в \mathbb{R} // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, №5. С. 3–52.
- [22] *Мантуров В. О.* Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, №5. С. 169–178.