МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. Вернадского»
(ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»)
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ (ФИЛИАЛ) В Г. ЯЛТЕ

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

Кафедра математики, теории и методики обучения математике

Ференчук Ирина Ивановна

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

Выпускная квалификационная работа

Обучающейся	IV курса
Направления подготовки	44.04.01 «Педагогическое образование»
Навравленность	«Математика в профессиональном образовании»
Форма обучения	очная

Научный руководитель:
Профессор кафедры математики, теории и методики обучения математике, канд. физ.-мат. наук, доцент, Почетный доктор наук РАЕ, профессор РАЕ — **С.К. Гирлин**

К ЗАЩИТЕ ДОПУСКАЮ:
Заведующий кафедрой
Кандидат физ.-мат.наук, доцент — **Е.П. Линник**

Ялта, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Непосредственно к рассматриваемому вопросу качества получаемого образования относится интересное высказывание директора Центра русских исследований Московского гуманитарного университета, академика Международной академии в Инсбруке (Австрия) А.И. Фурсова. Считаем важным и нужным привести его, несмотря на величину объема этого цитирования: «Недавно, когда хоронили Сергея Петровича Капицу, очень много вспоминали, в частности, одну из его фраз, которую он написал в 2009 году: "Мы добились, чего хотели. Мы создали страну идиотов". Из уст С.П. Капицы это звучало довольно жёстко. Как можно отнестись к этим словам Сергея Петровича? По мнению А. Фурсова, если вспомнить, что "идиот" по-гречески - это человек, который живёт так, как будто окружающего мира не существует, то действительно в результате того обеднения образовательных программ, которое произошло за последние 10 лет в школе, да, мы создаём идиотов. Если в школе сокращаются часы на базовые предметы, если в новом госстандарте планируется слить русский язык и литературу, если планируется вместо химии, биологии и физики создать некое естествознание в виде упрощённой версии, да, С.П. Капица был прав. Насколько известно, вы - человек, не жалующий реформу образования в том виде, в котором она проводится.

Как пояснил гость в студии, её невозможно жаловать, потому что её объективный результат-это уничтожение образования, это превращение образования в некий набор очень поверхностных дисциплин. Ну и это очень напоминает американскую систему образования.

Американцы сильно упростили свою систему образования в 70-е - 80-е годы. В этом отношении, то, что делается в России последние десять лет, это повторение американского опыта. И это притом, что сейчас американцы воют от того, какое у них образование в школе, что школьники мало что знают. Россия идёт тем же путём, утрачивая те достижения, которые были в стране. Слов нет, советскую систему образования нужно было менять, хотя для своего времени она была одной из лучших в мире. Неслучайно её копировали. Но реформировать - не значит ломать.

Чем тогда можно объяснить, что американские университеты считаются лучшими в мире и занимают верхние строчки во всевозможных рейтингах, если в США так плохо с образованием?

А. Фурсов считает, что тому есть несколько причин. У американцев как бы двухуровневое образование в школе. Он может об этом судить лично, поскольку у него сын учился в американской школе, когда они жили в Америке. Система там такая. Если ученик учится плохо, это ничего, хорошо. Если ученик учится хорошо, то это очень хорошо. Кроме того, если ребёнок демонстрирует, особенно в последних классах школы, хорошие знания, то его начинают продвигать. Школа заключает с ним договор о том, что если ученик наберёт энное количество баллов, начнёт читать дополнительную литературу и сдаст определённым образом то, что он должен сдать, тогда ученик сам выбирает университет, в котором он будет учиться и за его учёбу будут платить. Подобным образом рекрутируются из неэлитарных слоёв те люди, которые будут продвигаться наверх. Не в верхние 2 процента, но в следующие 8 процентов. Это одна сторона дела.

Во-вторых, в американских университетах учится очень много людей из других стран, а приезжают далеко не худшие. То есть, здесь есть реальное противоречие между уровнем американской школы и уровнем американского университета. Хотя уж очень преувеличивать уровень американских университетов, тоже не стоит.

Вообще сегодня во всём мире университеты, даже такие известные, как Оксфорд и Кембридж, становятся просто скрытой формой безработицы для среднего класса. Гость в студии знаком с американскими университетами не понаслышке, читал лекции в Йельском, Колумбийском, Нью-Йоркском университетах и видел студентов, которые просто учились 10, 15 или даже 20 лет, потому что им было комфортно учиться. Это некое такое времяпрепровождение. Системе это выгодно вот чем. Чем люди будут ходить бунтовать, лучше пусть они тратят энергию на обучение, ничего не делают, потихонечку курят травку и т.д. То есть, университеты в США в массе своей выполняют некую социальную функцию. А элиту готовят совсем в других учебных заведениях, где, например, запрещены тесты, которые категорически не приветствуются. Потому что, что такое тестовая система? Тестовая система отучает человека делать самую важную вещь - ставить проблему, ставить вопрос. Более того, она не учит отвечать на вопрос, она учит выбирать из того, что тебе уже дано. То есть, на самом деле под видом обучения проводится социальная дрессура. Молодой человек привыкает к тому, что он сам не ставит проблему, а выбирает из того, что ему предлагается. Пролаял три раза - получи кусочек сахара или кусочек мяса. Если вспомнить того же Сергея Петровича Капицу, то он как-то сказал, что математика-это предмет, который русские профессора преподают китайским студентам в американских университетах.

Гость в студии согласился полностью с этим выражением. Когда он приехал в Америку и его сын пошёл в американскую школу, а в России сын перешёл из 8 в 9 класс, то в Америке он на математику ходил не в 9-й класс, а в 11-й, и ему там было очень просто учиться. Впрочем, то же касается и химии. То есть, в России был создан такой задел образования в послевоенный период, что вот его уже 10 лет пытаются разломать, а всё никак не получается. Какой же мощной должна была быть образовательная система, что при всех усилиях не получается её сломать» [30].

Существуют много ответов на извечный вопрос: Что такое математика?

От вышеприведенного шутливого определения, который дал профессор С. Капица до весьма серьезных. Подчеркивается, что математика – дедуктивная и структурная наука. Однако при изучении математики, с нашей точки зрения, недооценивается ее индуктивная составляющая. Как отмечает известный математик и педагог профессор МФТИ Л.Д. Кудрявцев [29, с. 98-

99] : «Индуктивные методы изложения материала, при которых происходит последовательное обобщение понятий, представляются более благоприятствующими активному усвоению материала учащимися. Именно в этом смысле и понимается предпочтение индуктивного метода перед дедуктивным. Что же касается затраченного времени, то если считать не по числу лекционных часов, а по числу часов, затраченных учащимися на усвоение материала, то вряд ли оно окажется большим, чем при преподавании, основанном на дедуктивном методе. К сожалению, встречаются преподаватели математики, которые любят увлекаться формализмом, абстракциями, излагая при этом материал как нечто данное свыше, непонятно как придуманное кем-то. Это обычно дает большую экономию во времени при изложении материала, однако, как правило, совершенно неоправданно с точки зрения его активного усвоения».

Для повышения качества получаемого математического образования была предложена в 2004 г. профессором С.К. Гирлиным иллюстративно-репрезентативная технология изучения математики. Как утверждается в [1], «суть репрезентативного метода (вначале он назывался наглядным) заключается в том, что доказательное размышление или доказательство справедливости какого-либо свойства элементов из некоторого класса элементов проводится с использованием некоторых конкретно выбранных элементов (представителей) из рассматриваемого класса элементов. При этом свойствами выбранных элементов, не присущими всем элементам рассматриваемого класса, нельзя пользоваться. Это означает, например, что действия или операции над выбранными представителями не должны выполняться (так как результат выполнения присущ только выбранным представителям), а должны лишь указываться (то есть фактически должен указываться алгоритм, приводящий к решению задачи – требуемому доказательству). Количество выбранных представителей определяется лишь поставленной целью использования репрезентативного размышления (доказательства): сделать размышление для нашей интуиции более понятным и наглядным, подкрепляя дедуктивное размышление индуктивным. Иллюстративный метод на примере представителей рассматриваемого класса математических объектов может позволить обнаружить некоторые новые свойства, характерные не для всех объектов класса, а только лишь для объектов из некоторого подкласса. А это может помочь сформулировать и доказать новую теорему. Кроме того, иллюстративно-репрезентативный метод может позволить заметить, что исследуемое свойство объектов справедливо для более широкого класса объектов и сформулировать новую теорему».

Сочетание иллюстративного и репрезентативного методов называется иллюстративно-репрезентативным (ИР) методом или ИР-методом.

Студентами Гуманитарно-педагогической академии (филиал) Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (в г. Ялте) под руководством профессора Гирлина С.К. было написан ряд статей, включающих доказательства с помощью ИР-методов теорем математического анализа и теории дифференциальных уравнений. Это, например, введение индуктивным способом и ИР-методом определений понятий дифференцируемости функции и связи с непрерывностью, доказательство формулы интегрирования по частям, теорема Римана о сумме условно сходящегося ряда с действительными членами, теорема о структуре общего решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше первого, теоремы теории интегральных уравнений вольтерровского типа и математической теории развития (новой науки, недавно созданной работами академика В.М. Глушкова, профессоров В.В. Иванова и С.К. Гирлина). Кроме того, получены в классической области математики (математическом анализе) новые формулы – аналоги формул дифференциальных теорем о среднем Лагранжа и Коши, а также новые формулы - аналоги формул интегральных теорем о среднем [15-20]. За последние 8 лет 16 студентов Гуманитарно-педагогической академии, применявшие в своих конкурсных работах ИР-метод, победили в семи международных и двух всероссийских конкурсах научных работ.

Нельзя здесь не упомянуть и мнение известного математика Н. Бейли [4, с. 315-316]: «В отношении повседневных методов управления стоит изучить опыт применения вычислительной машины для обработки медицинской документации в детской больнице на 260 мест в г. Акрон. Одна из основных причин, побудивших ускорить обработку и передачу документации, состояла в том, что стало ясно, какую значительную часть своего времени медицинский персонал тратит на оформление различных бумаг (графиков, диаграмм, записей результатов клинического обследования, лабораторных анализов, врачебных назначений, касающихся медикаментов и диеты), на составление распорядка работы клиники, расписаний работы операционных и т. д. В некоторых случаях высококвалифицированные медицинские сестры тратили до 40 % своего времени на выполнение, по существу, канцелярской работы. Существовавшая система не позволяла им уделять достаточное внимание больным и находиться непосредственно у их постели столько времени, сколько требуется.

К счастью, выписка счетов и вся бухгалтерская работа в этой больнице уже была ранее автоматизирована и производилась с помощью вычислительной машины. Эту машину связали с 14 периферийными устройствами ввода и вывода данных, расположенными в различных сестринских постах и специальных отделениях больницы. В результате всю информацию, обычно накапливаемую в разных местах в виде записей, отыскание и обработка которых поглощала массу времени, можно было хранить в центральной вычислительной машине и в случае надобности получать практически мгновенно. Это не только резко сократило время, необходимое для записи и поиска информации, но и позволило установить более эффективный контроль, что крайне важно при обращении с лекарствами и при обработке рецептов. Кроме того, с помощью специально разработанной программы на центральной вычислительной машине могут решаться такие сложные и трудоемкие задачи, как распределение ежедневных обязанностей персонала или составление графика пользования операционными. Экономия только на одном распределении обязанностей персонала оказалась весьма значительной: ранее этой работой занимались две старшие медицинские сестры по 8 часов в сутки каждая, а вычислительная машина выполнила ее за 7 минут.

Нет необходимости перечислять все те разнообразные задачи, которые решает вычислительная машина в этой больнице. Главное состоит в том, что автоматизация такого рода работы вполне возможна, и вместо удаления человека из сферы медицинского обслуживания, о чем твердят некоторые скептики, достигается как раз обратный результат, поскольку врачи и медицинские сестры освобождаются от чисто канцелярской и технической работы.

Приведенный пример показывает, какой выигрыш может получить такая сложная система, как современная больница, при внедрении автоматических методов обработки данных. Однако одна эта мера недостаточна для улучшения деятельности существующих систем. Необходимо исследовать свойства и возможности новых форм организации. По ряду причин во многих случаях практически невозможно экспериментально проверить большое число вариантов. Поэтому необходим метод, который позволял бы предварительно осуществлять теоретическую проверку новых идей, чтобы лишь наиболее перспективные из них подвергались практическим испытаниям. Методы моделирования наилучшим образом подходят для решения задач такого рода».

Очевидно, что все вышесказанное относительно эффективности функционирования больницы можно отнести и на счет повышения эффективности деятельности любой системы образования. Общеизвестно. что педагоги как средней, так и высшей школы чрезмерно загружены канцелярской работой, всевозможными отчетами вместо того, чтобы заниматься своей главной работой – преподаванием и научными исследованиями. Таким образом, эффективность функционирования системы образования можно резко повысить, автоматизировав многие производственные процессы, перейдя на безбумажную документацию и отказавшись от совершенно ненужных, кроме администрации (в целях облегчения ей контроля над педагогами), многочисленных ежемесячных отчетов. Этот способ повышения эффективности функционирования системы образования очень важен, но в настоящей работе не рассматривается. Обычно эффективность работы системы образования находится с помощью обработки статистических данных, однако эту эффективность можно вычислять и математическим способом [20]. В данной работе нас интересует другой важный способ – оптимальное распределение ресурсов системы образования в целях повышения эффективности ее функционирования с использованием математического и компьютерного моделирования.

Как пишет академик Г.И. Марчук в предисловии к [24], «в настоящее время в связи с интенсивным развитием вычислительной техники и соответствующего математического обеспечения метод моделирования трудных задач при помощи ЭВМ стал одним из главных приемов теоретических и прикладных исследований. Различные проблемы для развивающихся систем – важный класс таких задач. К числу развивающихся систем относятся экономические системы в целом, отдельные отрасли и предприятия, научные организации, вычислительные центры, экологические системы, популяции, отдельные виды животных и растений, организм человека, различные органы и подсистемы организма, клетки животных и растений и т.д.» [24, с. 5].

Как отмечено в [7, с. 12]: «Никакая научная картина мира невозможна без математики. В своей наивной натурфилософии древние греки впервые в истории осознали могущество человеческого разума, признали необходимость и возможность исследования природы. Закон и порядок существуют в природе, и математика есть ключ к их пониманию. Математика способна открывать истины о природе. Хотя путь познания мира человеком долог и труден, это не значит, что человечество мучительно изобретает или придумывает знания. Да, люди создают знания и развивают науку, но знания о реально существующем мире – мире, живущем и меняющемся по объективным законам. Задача науки – открывать эти законы».

Математическая модель (в общем смысле) представляет собой набор символических математических объектов и отношений между ними. Математическая модель будет воспроизводить выбранные стороны исследуемой системы, если будут установлены правила соответствия, которые связывают конкретные объекты и отношения системы с определенными математическими объектами и отношениями. По широко известному определению академика Амосова Н.М., «модель - это система, отражающая другую систему».

Математическая теория развивающихся систем [9, 36-39] впервые была применена для моделирования системы образования (СО) американским (ранее – советским) известным математиком В.В. Ивановым [38, с. 234-235]. В дальнейшем эта модель Иванова В.В. была уточнена и обобщена его учеником - Гирлиным С.К. (в частности, было учтено перераспределение не только внутренних, но и внешних ресурсов, поступающих в СО извне) [2, 3, 9, 11, 13,14].

Актуальность выбранной темы. Проблема повышения качества образования во все времена является весьма актуальной, в особенности это справедливо в настоящее время на фоне явного ухудшения качества получаемого математического образования.

Объектом исследования является среднее и высшее образование.

Предметом исследования является проблема повышения качества получаемого образования.

Цель работы состоит в изучении известных математических моделей СО и постановке математической оптимизационной задачи повышения качества получаемого образования с помощью перераспределения имеющихся ресурсов системы образования, предложив новый (ранее не рассматривающийся) критерий оптимизации.

Задачи работы:

- изучить имеющуюся научную и методологическую литературу по рассматриваемым вопросам;
- изучить имеющиеся аналитические решения задачи прогноза функционирования двухпродуктовой СО;
- изучить имеющиеся математические интегральные модели двухпродуктовой, многопродуктовой и континуальной СО, методы решения систем модельных уравнений и неравенств, постановки различных оптимизационных задач и некоторые методы их аналитического решения;
- предложив новый критерий оптимизации поставить оптимизационную задачу повышения эффективности функционирования двухпродуктовой СО;
- провести компетентностный анализ полученных результатов и предложить направление дальнейших исследований.

Предмет исследования позволил сформулировать цель исследования – изучить особенности применения репрезентативного метода обучения математике в рамках современной образовательной системы и разработать программу по внедрению данного метода в образовательный процесс.

Научная новизна исследования заключается в выборе нового критерия оптимизации для математической постановки задачи оптимального распределения ресурсов с целью повышения качества получаемого образования.

Теоретическая значимость исследования заключается в систематизации и обобщении методического материала, связанного с математическим описанием динамики СО и исследовании различных задач оптимизации функционирования СО.

Практическая значимость данной работы заключается в том, что предложенные в исследовании материалы могут быть полезны для планирования деятельности СО.

В ходе решения поставленной проблемы использовались следующие методы исследования: теоретические – анализ научной и методической литературы по исследуемой проблеме, методы функционального анализа – в частности метод неподвижной точки, метод Бернулли решения линейных дифференциальных уравнений, а также широко известные методы математики – аналогия и индукция.

Апробация результатов исследования и публикации. Некоторые результаты данной квалификационной работы получили апробацию в ряде докладов на семинарах кафедры математики, теории и методики обучения математики ГПА (ф.) КФУ им. В.И. Вернадского. Некоторые результаты автора ВКР, относящиеся к рассматриваемой теме исследования, опубликованы в 6 научных статьях [15-20] и были представлены на 4-х Международных конкурсах (на которых автор победил с дипломом 1 степени).

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю работы – Гирлину Сергею Константиновичу, а также за внимание и оказанные консультации – специалистам Кафедры математики, теории и методики обучения математике Института экономики и управления Гуманитарно-педагогической академии (филиал) ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского» в г. Ялте.

РАЗДЕЛ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

1.1. Двухпродуктовая модель системы образования

Любую систему можно рассматривать в качестве развивающейся системы (РС), если в ней можно выделить хотя бы одну подсистему самосовершенствования, основной функцией которой является само существование и развитие системы [24]. Каждую СО: школу, университет, СО Крыма, СО РФ и т.д., можно считать развивающейся системой.

В качестве подсистемы самосовершенствования СО можно выделить как в частном случае экономической системы подсистему, основной функцией которой является создание новых рабочих мест (РМ) для сотрудников СО (не только педагогов, но и сотрудников администрации, бухгалтеров, вахтеров, библиотекарей и т. п.). РМ по К. Марксу называется совокупность трудовых функций, локализованная в определенном пространстве и времени, выполняемая одним рабочим в течение определенной календарной единицы времени (рабочей смены, трудовой недели, месяца или года), причем выполняемые функции должны быть обеспечены материально, информационно и энергетически.

Продукты деятельности СО, обеспечивающие выполнение этой основной функции (внутренней для системы), будут называться продуктами первого рода. Продукты, обеспечивающие выполнение основной (внешней по отношению к системе) функции, будут называться продуктами второго рода.

В СО продукты первого рода-это новые рабочие места для сотрудников СО, которые производят новые РМ от сотрудников СО, а также выполняют свою основную функцию - выпуск квалифицированных специалистов для определенных областей специализации. Продуктами второго рода являются РМ от выпускников СО.

РМ не понимается как конкретный сотрудник, но как совокупность трудовых функций, выполняемых одним сотрудником в единицу времени (рабочая смена, неделя, месяц и т. д.), и выполнение этих трудовых функций должно быть обеспечено материально, энергично и информативно.

Следует отметить, что описание многих процессов с использованием интегральных уравнений вольтеровского типа имеет некоторые преимущества при описании тех же процессов с использованием дифференциальных уравнений. В 1959 и 1973 годах академик Л.В. Канторович, изучая однопродуктовую экономическую модель, пришел к необходимости ввести функцию в нижнем пределе интеграла вольтеровского типа [28].

Независимо от него, в 1977 году в математическом исследовании макроэкономической задачи академик В. Глушков представил новый класс динамических моделей, который представляет собой описание управляемых динамических систем с использованием интегральных уравнений вольтеровского типа. Характерной особенностью уравнений Глушкова является наличие функций в нижних пределах интегралов. Основным фундаментальным результатом этого исследования было следующее: для максимизации производства потребительских товаров за достаточно большой период планирования, доказана необходимость в начале периода планирования увеличения доли числа рабочих мест в подсистеме самосовершенствования (т. е. в группе А, производственной группе средств производства) и только в последнем сегменте времени планирования необходимо максимизировать долю рабочих мест в группе Б (т. е. в производственной группе предметов потребления).

На основе разделения ресурсов развивающейся системы на внутренние и внешние (поступающие в систему извне) В.В. Ивановым и С.К. Гирлиным были предложены, а позже уточнены уравнения развивающейся системы, в которых, в отличие от уравнений Глушкова, используются функции более широкого класса (кусочно-непрерывные), позволяющие ставить и решать задачи, которые в рамках моделей Глушкова не могут быть поставлены (например, задачи моделирования возникающих РС, при оптимальном распределении не только внутренних ресурсов, но и внешних, поступающих из внешней среды).

Впервые модели Глушкова для описания функционирования СО предложил Иванов В.В. [37].

В [10,12] Гирлин С.К. предложил для этой же цели применить более широкий класс моделей.

Одна из основных характеристик интегральных моделей В.М. Глушкова заключается в том, что вся развивающаяся система, описываемая этими моделями, делится на две подсистемы: одна из них выполняет внутреннюю функцию, которая состоит в улучшении самой системы, а вторая выполняет внешнюю (основную) функцию системы. Соответственно, все обобщенные продукты (элементы) системы подразделяются на продукты первого и второго типов: материальное, энергетическое и информационное обеспечение внутренних и внешних функций называются продуктами первого и второго рода соответственно.

Гирлин С.К. и Антонюк Ю.Ю. предложили построение интегральной модели системы образования, которая учитывает процессы обучения и самообучения работников и учеников системы образования, а также непосредственное воздействие внешней среды на эту систему.

В статье [2] под рабочим местом (РМ) работника системы образования (СО) или студента представляется совокупность трудовых (учебных) функций, для выполнения которых на протяжении любого данного календарного периода необходима трудовая (учебная) деятельность одного работника СО или студента в течение полного (установленного законом) рабочего (учебного) времени за этот период, причем совокупность этих функций берется вместе с соответствующим обеспечением этих функций – материальным, энергетическим и информационным.

Главным является понятие функции, выполняемой на РМ, а не его расположение в пространстве. Основной характеристикой РМ является показатель эффективности выполнения возложенных на него функций.

Если рассмотреть группу работников СО, как развивающуюся систему (РС) [9,10,24,37], то можно выделить две подсистемы: подсистему самосовершенствования А, в которой частью РМ работников СО создаются новые, более эффективные РМ работников СО (в результате самообучения), и подсистему В, в которой другой частью РМ работников СО выполняется внешняя функция системы – обучение студентов (при этом создаются РМ студентов). Каждой единице РМ работников СО (усредненной за единицу времени), появившейся в момент времени τ, поставим в соответствие в момент времени $t, t \geq \tau$, два показателя ее эффективности (квалификации или технологии): функции $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$, характеризующие умения и способности единицы РМ работников СО, появившейся в момент τ, в единицу времени, начиная с момента t, производить в результате самообучения и обучения соответственно новые РМ работников СО и новые РМ студентов. Новыми РМ работников СО или студентов называются здесь такие РМ, для которых их показатели эффективности $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$, $t \geq \tau$, не убывают с ростом τ и не возрастают с ростом t (например, возрастание по τ функции $\alpha(t,\tau)$ означает, что вследствие применения новых технологий самообучения РМ работников СО, появившиеся позже момента τ, обладают более высоким показателем эффективности по сравнению с РМ, появившимися в момент τ, а убывание по t означает, что вследствие научно-технического прогресса РМ, появившиеся в момент τ, с течением времени t обладают все более низким показателем эффективности, т.е. технологически устаревают). Если обозначить через $a(t)$ максимальный момент времени, ранее которого появившиеся в СО РМ работников СО не участвуют в производстве новых РМ в момент времени t, т.е. $a(t)$- временная граница ликвидации устаревших РМ в подсистеме А, начиная с момента t. Аналогично можно рассмотреть группу студентов как РС, в которой подсистемы А и В совпадают, так как новые более эффективные РМ студентов, появившиеся в результате самообучения студентов, и являются внешней функцией системы. Каждой единице РМ студентов (усредненной за единицу времени), появившейся в момент времени τ, поставим в соответствие в момент времени $t, t \geq \tau$, показатель ее эффективности (квалификации или технологии) - функцию $\gamma(t,\tau)$, характеризующую умения и способности единицы РМ студентов, появившейся в момент τ, в единицу времени, начиная с момента t, производить в результате самообучения новые РМ студентов. Предлагаемые в работе уравнения, описывающие процесс самообучения студентов, являются более общими по сравнению с предложенными в [38], так как с добавлением в уравнения правых частей $f(t)$ появляется возможность учета непосредственного воздействия внешних для рассматриваемого процесса факторов (например, в результате поступления извне нового более производительного информационного обеспечения процесса обучения появляются новые более эффективные РМ работников СО и студентов соответственно); кроме того, благодаря введению распределительной функции $x(t)$ возможны постановки новых оптимизационных задач [9, с. 119-169]. Уравнения предлагаемой модели (их можно вывести аналогично [11]) имеют вид:

$$m(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha(t,\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau + x(t) f(t),$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau)) m(\tau) d\tau + (1 - x(t) f(t),$$

$$n(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau) n(\tau) d\tau + c(t),$$

$$0 \leq x, y \leq 1, \quad 0 \leq a(t) \leq \tau \leq t, \quad a(t_0) = 0,\ t \in [t_0, T],\ 0 < t_0 < T < +\infty,$$

на начальном отрезке $[0,t_0]$ предполагается заданной начальная предыстория: функцию $m(\tau)=m_0(\tau)$ $\tau\in[0,t_0]$, считаем заданной (известную на предыстории функцию обозначаем той же буквой с индексом «0»).

В качестве примеров продуктов первого и второго рода можно привести соответственно рабочие места и продукты потребления в макроэкономической системе. Если же внутренних и внешних функций в системе несколько, то имеет смысл рассматривать многопродуктовые РС.

Выше была представлена интегральная модель системы образования, учитывающая процессы обучения и самообучения работников образования и студентов, а также непосредственное воздействие на систему образования внешней среды (например, другой системы образования).

Периодические и колебательные решения дифференциально-разностных модельных уравнений запаздывающего типа можно найти в работе [2]. Полученные решения могут быть использованы при решении различных оптимизационных задач [11].

1.2. Многопродуктовая и континуальная модель системы образования

Ранее было представлено математическое описание функционирования двухпродуктовой РС, где относительно рассматриваемого объекта моделирования (типа РС) взято только две его функции: первая (внутренняя), обеспечивающая его существование, и вторая (внешняя), являющаяся результатом его взаимодействия с внешней средой [9].

В том случае, если продуктов (как первого, так и второго рода) несколько, то имеет смысл рассматривать многопродуктовую (n-продуктовую) РС. Модель такой системы описывает процесс появления (создания в системе и поступления в нее извне) r_1 обобщенных продуктов первого и r_2 обобщенных продуктов второго рода, причем суммарное число обобщенных продуктов равно n.

По аналогии с [9,стр.91-95] введем n- продуктовую модель (для удобства записи положив $r_1 = r_2 = r,\ \ n = 2r$):

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^{r} \int_{a_j(t)}^{t} \alpha_{ij}(t,\tau) y_{ij}(\tau) m_j(\tau) d\tau + x_i(t) f(t),$$

$$c_s(t) = \sum_{j=1}^{r} \int_{a_j(t)}^{t} \beta_{sj}(t,\tau)(1 - y_{sj}(\tau)) m_j(\tau) d\tau + x_{r+s}(t) f(t),$$

$$P(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \int_{a_j(t)}^{t} y_{ij}(\tau) m_j(\tau) d\tau,$$

$$0 \le \sum_{j=1}^{r} y_{ij}(\tau) \le 1, \quad a_j(t) \le \tau \le t,\ \min_{1 \le j \le r} a_j(t_0) = 0,$$

$$t \ge t_0 \ge 0, \quad i, j, s = \overline{1, r}.$$

Здесь m_i - скорость появления i-ч новых продуктов первого рода, идущих на выполнение внутренних функций, на развитие системы;. c_s- скорость появления s-х новых продуктов второго рода, идущих на выполнение внешних функций системы; $y_{ij} m_j$ и $(1 - y_{ij}) m_j$ - доли скоростей j -х продуктов первого рода, идущих на создание i-х продуктов первого и второго рода соответственно; α_{ij}, β_{ij} - продуктивности создания соответственно i-х продуктов первого рода и s-х продуктов второго рода с помощью соответствующих j-х продуктов первого рода; $P(t)$ - объем функционирующих в момент t продуктов первого рода; $a_j(t)$ - временная граница ликвидации устаревших (с низкой эффективностью) j-х продуктов первого рода в подсистемах А и Б; на промежутке времени $[0, t_0)$ функции $m_j(\tau) \equiv m_{j0}(\tau)$ и $y_j(\tau) \equiv y_{j0}(\tau)$ предполагаются заданными; $i, j, s = \overline{1, r}$, $r \ge 2$..

Для моделирования многих процессов (например, в системе образования) необходимо рассматривать очень большое число продуктов первого и второго рода. В этом случае целесообразно рассиатривать континуум продуктов и вводить так называемые континуальные модели. Суть континуальных моделей В.М. Глушкова состоит в том, что осуществляется упорядочивание бесконечного числа номеров продуктов, выполняющих внутренние и внешние функции. Все эти номера располагаются на некотором отрезке $[0,U]$, причем продукту с наименьшим номером на этом отрезке ставится в соответствие число 0, а продукту с наибольшим номером – число U (в дальнейшем продукт будет отождествляться с его номером $u \in [0,U]$).

Будем считать, что в системе продукты появляются в результате как поступления извне в систему уже созданных продуктов, так и воссоздания продуктов в самой системе, и что появление некоторого нового продукта $u_1 \le U$ зависит лишь от уже появившихся ранее продуктов $u < u_1$ и никак на него не влияют еще не появившиеся продукты $u_1 < u \le U$.

Предполагается, что одновременно с возрастанием u (при котором происходит появление новых продуктов) происходит процесс ликвидации ненужных продуктов по закону $b(t,u)$. В частности, начиная с некоторого момента времени t_i, процесс ликвидации ненужных продуктов может прекращаться, в этом случае для $t \ge t_i$ функция $b(t,u) = u_i = const$, где u_i - наименьший из существующих в момент t_i продуктов. Далее будет рассматриваться случай, когда $b(t,u) = u_0 = const$ в области $G_1 = \{(t,u) : t_0 \le t \le T, u_0 \le u \le U\}$. Обозначим $G = \{(t,u) : 0 \le t \le T, 0 \le u \le U\}$.

Уравнения континуальной модели РС имеют вид:

$$m(t,u) = \int\limits_{a(t,u)}^{t} d\tau \int\limits_{u_0}^{u} \alpha(t,u;\tau,\nu) y(u;\tau,\nu) m(\tau,\nu) d\nu +$$

$$+ x(t,u) F(t,u),\ c(t,u) = \int\limits_{a(t,u)}^{t} d\tau \int\limits_{u_0}^{u} \beta(t,u;\tau,\nu)(1 - y(u;\tau,\nu)) m(\tau,\nu) d\nu +$$

$$+(1 - x(t) F(t,u),$$

$$P(t,u) = \int\limits_{a(t,u)}^{t} d\tau \int\limits_{u_0}^{u} m(\tau,\nu) d\nu,$$

где $x(t,u)F(t,u)$ - скорость изменения (по u) скорости (по t) поступления извне в систему $u-$х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций РС; $(1-x(t,u))F(t,u)$ - скорость изменения (по u) скорости (по t) поступления извне в систему $u-$х продуктов второй группы, предназначенных для выполнения внешних функций РС; $0 \le x(t,u) \le 1$; $m(t,u)$- скорость изменения (по u) скорости (по t) появления $u-$х продуктов первой группы, предназначенных для выполнения внутренних функций РС ($m(t,u)=0$ для $t>t_0$ и $u<u_0$); $y(u;\tau,\nu)$- доля ν-х продуктов $m(\tau,\nu)$, идущих в момент τ на воссоздание в момент t продуктов $m(t,u)$, $0 \le y(u;\tau,\nu) \le 1$; $c(t,u)$- скорость изменения (по u) скорости (по t) появления $u-$х продуктов второй группы, являющихся результатом выполнения внешних функций РС; $P(t,u)$ - общее количество $u-$х продуктов первой группы, функционирующих в РС в момент времени t; $\alpha(t,u;\tau,\nu)$- показатель эффективности создания u-го продукта первой группы в момент времени t, выполняющего в РС внутренние функции (иначе говоря, это количество u-го продукта типа $m(t,u)$, создаваемого в единицу времени в расчете на единицу всех продуктов типа $y(u;\tau,\nu)m(\tau,\nu)$ для $\nu \le u$); $\beta(t,u;\tau,\nu)$ - показатель эффективности создания u-го продукта второй группы в момент времени t, выполняющего в РС внешние функции (иначе говоря, это количество u-го продукта типа $c(t,u)$, создаваемого в единицу времени в расчете на единицу всех продуктов типа $(1-y(u;\tau,\nu))m(\tau,\nu)$ для $\nu \le u$); $a(t,u)$- временная граница ликвидации неэффективных технологий создания $u-$х продуктов первой и второй групп (иначе говоря, $[a(t,u),t]$ - временной промежуток, на котором создаются u-е продукты первой и второй групп для их использования в момент времени t, причем $0 \le a(t,u) \le t$); на промежутке $[0,t_0)$ известна так называемая начальная предыстория: на этом временном промежутке начальной предыстории $m(t,u) \equiv m_0(t,u)$ и $y(u;\tau,\nu) \equiv y_0(u;\tau,\nu)$- заданные функции (заданные на

предыстории функции обозначаются теми же буквами с индексом "0"), причем $0 = \min_u a^{-1}(t_0, u)$; все функции по определению считаются неотрицательными, а функции F, m и c - приведенными к одной размерности; t_0 - момент начала моделирования (прогнозирования динамики) РС, $t_0 \geq \min_u a^{-1}(t_0, u) = 0$; $0 \leq u_0 \leq u \leq U$, $0 \leq t_0 \leq t \leq T < +\infty$.

Замечание. Если положить в уравнениях n- продуктовой $(n \geq 2)$ и континуальной моделей соответственно $f(t) \equiv 0$ и $F(t,u) \equiv 0$, то получаются уравнения В.М. Глушкова. Предложенные модели являются дальнейшим развитием моделей Глушкова, причем очень важным новшеством здесь является не только введение в уравнения функции f или F (скорости поступления в РС внешних ресурсов), но и введение функции x, перераспределяющей внешние ресурсы между подсистемами РС. Функция x (аналогично введенной Глушковым функции y, перераспределяющей между подсистемами РС внутренние ресурсы) является мощным управляющим фактором развития системы.

1.3. Постановка различных задач оптимального управления системой образования

В рамках модели возможны различные постановки задач (зависимости от того, какие функции модели заданы, а какие неизвестны). Если модель замкнута (число неизвестных равно числу уравнений), что возможно осуществить при помощи введения некоторых принципов структурно функциональной организации, то задача определения динамики РС сводится к решению соответствующей системы нелинейных интегральных уравнений с запаздыванием. Одним из таких принципов является экстремальный, объясняющий наличие тех значений параметров и характеристик РС, которые обеспечивают их эффективную структурно-функциональную организацию.

Приведем примеры его применения при моделировании системы образования (СО).

Рабочее место (РМ) работника СО определим как локализованную в производственном пространстве и времени определенную совокупность трудовых функций, для выполнения которых на протяжении любого данного календарного периода необходима трудовая деятельность одного работника этой системы в течение полного, установленного законом, рабочего времени за этот период, причем совокупность этих функций берется вместе с соответствующим обеспечением этих функций – материальным, энергетическим и информационным. Под совокупностью трудовых функций понимается часть общего процесса труда, выделяемая определенными средствами труда и соответствующая этим средствам производственная задача. Эти определения основываются на фундаментальном определении «простого процесса труда», данного К. Марксом. Подчеркнем, что главным в определении РМ является понятие функции, выполняемой на РМ, а не расположение РМ в пространстве. Основной характеристикой РМ является показатель эффективности выполнения возложенных на него функций.

Рассмотрев СО как двухпродуктовую развивающуюся систему (РС), выделим две подсистемы: подсистему самосовершенствования А, в которой частью РМ создаются новые, более эффективные РМ, и подсистему Б, в которой другой частью РМ выполняется основная внешняя функция СО – выпуска в единицу времени дипломированных специалистов. Каждой единице РМ (усредненной за единицу времени), появившейся в момент времени τ, поставим в соответствие в момент времени $t, t \geq \tau$, два показателя ее эффективности (квалификации): функции $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$, характеризующие умения и способности единицы РМ, появившейся в момент τ, в единицу времени, начиная с момента t, производить соответственно новые РМ и новые технологии. Новыми РМ называются здесь такие РМ, для которых их показатели эффективности $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$, $t \geq \tau$, не убывают с ростом τ и не возрастают с ростом t (например, возрастание по τ функции $\alpha(t,\tau)$ означает, что вследствие применения новых технологий РМ, появившиеся позже момента τ, обладают более высоким показателем эффективности по сравнению с РМ, появившимися в момент τ, а убывание по t означает, что вследствие научно-технического прогресса РМ, появившиеся в момент τ, с течением времени t обладают все более низким показателем эффективности, т.е. технологически устаревают).

Уравнения базовой (простейшей) модели двухпродуктовой СО имеют вид:

$$m(t) = \int_{a(t)}^{t} \alpha(t,\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau + x(t) f(t),$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^{t} \beta(t,\tau)(1 - y(\tau)) m(\tau) d\tau + (1 - x(t)) f(t), \qquad (1.1)$$

$$P(t) = \int_{a(t)}^{t} m(\tau) d\tau ,$$

$$N(t) = \lambda(t) m(t) + c(t),$$

$$a(t_0) = 0, \;\; 0 \le x, y \le 1, \;\; 0 \le a(t) \le t, \;\; t \ge t_0 \ge 0,$$

где $m(t)$ и $c(t)$- скорости появления в ЭС в момент времени t соответственно новых РМ (продуктов первого рода РС) и продуктов второго рода РС; $f(t)$ - скорость поступления в СО в момент t внешнего ресурса (f, m и c предполагаются одной размерности); $x(t)\, f(t)$ и $(1-x(t)) f(t)$ - скорости поступления в ЭС в момент t продуктов соответственно первого и второго родов, $0 \le x \le 1$; $y(\tau)\, m(\tau)$ и $(1-y(\tau))m(\tau)$- доли $m(\tau)$, используемые в дальнейшем соответственно в подсистемах А и Б, $0 \le \tau \le t, 0 \le y \le 1$; $P(t)$- общее количество РМ, участвующих в производстве в момент t; $a(t)$- временная граница ликвидации (сворачивания) устаревших (с низкой производительностью) РМ в подсистемах А и Б: РМ, появившиеся ранее момента $a(t)$, в момент t в производстве не участвуют, а оставшиеся стопроцентно используются, $0 \le a(t) \le t$; $\alpha(t,\tau)$- скорость создания (производительность труда) в подсистеме А в момент времени t новых РМ одним РМ, появившимся в момент τ; $\beta(t,\tau)$- скорость создания (производительность труда) в подсистеме Б в момент времени t новых предметов потребления одним РМ, появившимся в момент τ; $\lambda(t)$ - фондовооруженность (цена) новых РМ, созданных в момент t; $N(t)$ - выпуск обобщенного продукта СО в момент t; на отрезке $[0,t_0]$ заданы функции $y(\tau) \equiv y_0(\tau)$ и $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$ (известные на начальной предыстории $[0,t_0]$ функции обозначаем теми же буквами, но с индексом «0»); t_0 - момент начала моделирования СО (СО является возникающей, если $t_0 = 0$); все рассматриваемые функции по определению неотрицательны.

Одной из важнейших задач моделирования динамики СО является задача оптимизации, под которой обычно понимается достижение требуемой цели при заданных средствах, а также нахождение необходимых средств для достижения этой цели.

Поставим, например, пять таких оптимизационных задач [9, с. 113-117].

Задача А. При заданных и непрерывных в своих областях определений функций $\alpha, \beta, f, P, \lambda, y_0, m_0$ найти на $[t_0,T]$, $t_0 < T < +\infty$, непрерывные функции m, a, c, N (зависящие от x, y) и кусочно-непрерывные функции x, y, доставляющие максимум функционалу

$$I(x,y) \equiv J_1(x,y) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt \qquad (1.2)$$

с учетом уравнений и неравенств модели (1.1).

Решение этой оптимизационной задачи можно интерпретировать как достижение рекорда внешней функции СО на заданном временном (плановом) периоде $T - t_0$ за счет выбора наилучшего и сбалансированного распределения внутренних (с помощью функции y) и внешних (с помощью функции x)

ресурсов системы между подсистемами А и Б (длительность прохождения студентами учебной практики в школе). Можно назвать поставленную задачу также задачей максимизации выпуска специалистов на плановом интервале $[t_0, T]$ при заданной динамике трудовых ресурсов. В некоторых частных случаях эта задача для замкнутой РС с начальной предысторией решена в [22] (для $x \equiv 0$) и в [15].

Задача Б. При заданных и непрерывных в своих областях определений функций $\alpha, \beta, f, c, \lambda, y_0, m_0$ найти на $[t_0, T], t_0 < T < +\infty$, непрерывные функции m, a, P, N (зависящие от x, y) и кусочно-непрерывные функции x, y, доставляющие минимум функционалу

$$J_2(x, y) = \int_{t_0}^{T} P(t)dt \quad (1.3)$$

с учетом уравнений и неравенств модели (1.1).

Эта задача интерпретируется как задача минимизации трудовых затрат на плановом интервале $[t_0, T]$ при заданной динамике выпуска специалистов.

Задача В. При заданных и непрерывных в своих областях определений функций $\alpha, \beta, f, P, \lambda, N, y_0, m_0$ найти на $[t_0, T], t_0 < T < +\infty$, непрерывные функции m, a, c, N (зависящие от x, y) и кусочно-непрерывные функции x, y, доставляющие максимум функционалу (1.2) с учетом соотношений (1.1).

Эту задачу можно назвать задачей максимизации выпуска специалистов при заданной динамике трудовых ресурсов и выпуске национального дохода.

Задача Г. При заданных и непрерывных в своих областях определений функций $\alpha, \beta, f, c, \lambda, N, y_0, m_0$ найти на $[t_0, T], t_0 < T < +\infty$, непрерывные функции m, a, P (зависящие от x, y) и кусочно-непрерывные функции x, y, доставляющие минимум функционалу (1.3) с учетом соотношений (1.1).

Эта задача интерпретируется как задача минимизации трудовых затрат на плановом интервале $[t_0, T]$ при заданной динамике выпуска национального дохода и специалистов.

Задача Д. При заданных и непрерывных в своих областях определений функций $\alpha, \beta, f, P, y_0, m_0$ найти непрерывные функции m, a, c (зависящие от x, y) и кусочно-непрерывные функции x, y, доставляющие с учетом уравнений и неравенств (1.1) минимум функционалу

$$J_3(x,y) = T - t_0,$$

причем

$$\int_{t_0}^{T} m(t)dt \in M^*, \int_{t_0}^{T} c(t)dt \in C^*, \quad P(T) \in P^*, \qquad (1.4)$$

где M^*, C^*, P^* - заданные множества значений.

Решение этой оптимизационной задачи можно интерпретировать как достижение желаемой цели, задаваемой соотношениями (1.4), за минимальное время.

Положим в уравнениях (1.1) $a(t) \equiv 0$, $\alpha(t,\tau) \equiv \alpha(\tau)$, $\beta(t,\tau) \equiv \beta(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, $t_0 \le t \le T < +\infty$, и рассмотрим следующую систему уравнений относительно неизвестных функций $m(t)$, $c(t)$:

$$m(t) = \int_0^t \alpha(\tau) y(\tau) m(\tau) d\tau + x(t) f(t), \qquad (1.5)$$

$$c(t) = \int_0^t \beta(\tau)(1 - y(\tau)) m(\tau)\, d\tau + (1 - x(t)) f(t), \quad (1.6)$$

где заданы неотрицательные непрерывные в своих областях определений функции $f(t)$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $y(t)$, $0 \le y(t) \le 1$, и кусочно-непрерывные функции $x(t)$, $m(\tau) \equiv m_0(\tau)$, $y(\tau) \equiv y_0(\tau)$, $0 \le y_0(\tau) \le 1$, $0 \le \tau \le t_0 < T < +\infty$, $0 \le s \le t$, $t \in [t_0, T]$.

Теорема [9]. Если заданы неотрицательные непрерывные в своих областях определений функции $f(t)$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $y(t)$, $0 \le y(t) \le 1$, и кусочно-непрерывные функции $x(t)$, $m_0(\tau)$, $y_0(\tau)$, причем функция $m_0(\tau)$ ограничена, $0 \le x(t) \le 1$, $0 \le y_0(\tau) \le 1$, $\tau \in [0, t_0)$, $0 \le s \le t$, $t_0 \le t \le T < +\infty$, то система уравнений (1.5), (1.6) имеет на $[t_0, T]$ единственное решение

$$m(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\, y(\tau) x(\tau)\, f(\tau) \exp(\int_{\tau}^{t} \alpha(s)\, y(s)\, ds) d\tau +$$

$$+m^{*} \exp(\int_{t_0}^{t} \alpha(s) y(s) ds) + x(t)\, f(t), \tag{1.7}$$

$$c(t) = m^{*} \int_{t_0}^{t} \beta(\tau)(1 - y(\tau)) \exp(\int_{t_0}^{\tau} \alpha(s) y(s) ds)\, d\tau +$$

$$+c^{*} + (1 - x(t))\, f(t) + \int_{t_0}^{t} x(\tau)\, f(\tau)[\beta(\tau)(1 - y(\tau)) +$$

$$+\alpha(\tau) y(\tau) \int_{\tau}^{t} \beta(u)(1 - y(u)) \exp(\int_{\tau}^{u} \alpha(s) y(s) ds) du] d\tau, \tag{1.8}$$

где

$$m^{*} = \int_{0}^{t_0} \alpha(\tau) y_0(\tau) m_0(\tau) d\tau \,, c^{*} = \int_{0}^{t_0} \beta(\tau)(1 - y_0(\tau)) m_0(\tau)\, d\tau \,,$$

причем $m(t)$, $c(t)$ кусочно-непрерывны на $[t_0, T]$.

Доказательство. Обозначив $k(t) = \alpha(t) y(t)$,

$$n(t) = m(t) - x(t)\, f(t), \quad F(t) = k(t)[m^{*} + \int_{t_0}^{t} k(\tau) x(\tau)\, f(\tau) d\tau], \quad N(t) = \int_{t_0}^{t} k(\tau) n(\tau) d\tau$$

и разбив область интегрирования $[0, t]$ на два подотрезка $[0, t_0]$ и $[t_0, t]$, уравнение (1.5) можно записать в виде линейного дифференциального уравнения

$$N'(t) - k(t) N(t) = F(t), \tag{1.9}$$

где $k(t)$ и $F(t)$ известные и непрерывные на $[t_0, T]$ функции. Уравнение (9) с начальным условием $N(t_0) = 0$ легко решить на $[t_0, T]$, например, методом Эйлера, умножив обе части равенства на $\exp[-\int_{t_0}^{t} k(u) du]$ и проинтегрировав обе части полученного равенства от t_0 до t. В результате находим решение

$$N(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\exp[\int_{\tau}^{t} k(u)du]d\tau$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям, для $t \in [t_0, T]$ получим (интегрируя по частям)

$$m(t) = x(t)f(t) + m^* + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\alpha(s)y(s)ds} \alpha(\tau)y(\tau)[m^* + \int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)x(u)f(u)du]d\tau =$$

$$= x(t)f(t) + m^* + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{t} [m^* + \int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)x(u)f(u)du]de^{\int_{\tau}^{t}\alpha(s)y(s)ds} =$$

$$= x(t)f(t) + m^* + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$-[(m^* + \int_{t_0}^{\tau} \alpha(u)y(u)x(u)f(u)du)e^{\int_{\tau}^{t}\alpha(s)y(s)ds}\Big|_{t_0}^{t} -$$

$$-\int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\alpha(s)y(s)ds} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau] = x(t)f(t) + m^* +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau - m^* - \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+m^* e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)y(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\alpha(s)y(s)ds} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau =$$

$$= m^* e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)y(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t}\alpha(s)y(s)ds} \alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau + x(t)f(t).$$

Т. о., получили равенство (1.7). Разбивая область интегрирования в уравнении (1.6) на подотрезки $[0,t_0]$, $[t_0,t]$ и подставляя в уравнение найденную функцию $m(t)$, получаем

$$c(t)=(1-x(t))f(t)+\int_{t_0}^{t}x(\tau)\beta(\tau)(1-y(\tau))f(\tau)d\tau+c^*+$$

$$+m^*\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)(1-y(\tau))\exp(\int_{t_0}^{\tau}\alpha(s)y(s)ds)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\beta(\tau)(1-y(\tau))d\tau\int_{t_0}^{\tau}\alpha(u)y(u)x(u)f(u)\exp(\int_{u}^{\tau}\alpha(s)y(s)ds)du\ .$$

Изменив в правой части последнего равенства порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}\beta(\tau)(1-y(\tau))\alpha(u)y(u)x(u)f(u)\exp(\int_{u}^{\tau}\alpha(s)y(s)ds)du=$$

$$=\int_{t_0}^{t}du\int_{u}^{t}\beta(\tau)(1-y(\tau))\alpha(u)y(u)x(u)f(u)\exp(\int_{u}^{\tau}\alpha(s)y(s)ds)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\alpha(u)y(u)x(u)f(u)du\int_{u}^{t}\beta(\tau)(1-y(\tau))\exp(\int_{u}^{\tau}\alpha(s)y(s)ds)d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau)y(\tau)x(\tau)f(\tau)d\tau\int_{\tau}^{t}\beta(u)(1-y(u))\exp(\int_{\tau}^{u}\alpha(s)y(s)ds)du$$

и выполнив тождественные преобразования, получаем равенство (1.8). Очевидно, найденные функции $m(t), c(t)$ кусочно-непрерывны на $[t_0,T]$ (каждая из них является суммой кусочно-непрерывной и непрерывной функций). Теорема доказана.

Так как в условиях теоремы для любой заданной кусочно-непрерывной функции $x(t),\ \ 0\le x(t)\le 1,$ и любой заданной непрерывной функции $y(t)$, $0\le y(t)\le 1,$ система (5), (6) однозначно разрешима при $t_0\le t<T<+\infty,$ то можно в условиях теоремы поставить следующие оптимизационные задачи.

Задача 1. Среди всех заданных непрерывных на $[t_0, T]$ функций $y(t)$, $0 \le y(t) \le 1$, найти такую функцию $y(t)$ (и соответствующие ей функции $m(t)$, $c(t)$), которая бы доставляла максимум функционалу

$$I(y) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt .$$

Задача 2. Среди всех заданных кусочно-непрерывных на $[t_0, T]$ функций $x(t)$, $0 \le x(t) \le 1$, найти такую функцию $x(t)$ (и соответствующие ей функции $m(t)$, $c(t)$), которая бы доставляла максимум функционалу

$$I(x) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt .$$

Задача 3**.** Среди всех заданных кусочно-непрерывных функций $x(t)$, $0 \le x(t) \le 1$, и всех заданных непрерывных функций $y(t)$, $0 \le y(t) \le 1$, $t \in [t_0, T]$, найти такие функции $x(t)$, $y(t)$ (и соответствующие им функции $m(t)$, $c(t)$), которые бы доставляли максимум функционалу

$$I(x, y) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt .$$

Выводы к первому разделу

Таким образом, повышение эффективности и качества среднего и высшего образования всегда было и остается насущной проблемой в педагогической теории и практике. Практика эффективного применения математической теории развивающихся систем при моделировании экономических, технических, биологических и других систем предполагает возможность использования полученных результатов для моделирования задач управления качеством получаемого образования, в частности обучения и самообразования студентов.

Новые технологии для создания РМ с определенной скоростью, характеризующие эффективность функционирования СО, ранее находились в результате статистической обработки данных, а предложенные модели позволяют их находить в результате решения системы интегральных или дифференциальных уравнений.

Моделирование РС позволяет более подробно описать их основные структуры и функции (как нормальные, так и патологические).

РАЗДЕЛ 2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Постановка оптимизационной задачи повышения качества образования

Рассмотрим уравнения (1) подраздела 1.3. В.В. Иванов предложил задавать удельные производительности $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$ в виде функций следующего вида [38, с. 233]:

$$\alpha(t,\tau)=\alpha_0(\tau)\exp(\alpha(\tau-t)),\ \ \beta(t,\tau)=\beta_0(\tau)\exp(\beta(\tau-t)),$$

где $\alpha = const > 0,\ \ \beta = const > 0.$

Положим $a(t_0)=0,\ \ a(t)\equiv t_0>0,\ \ \alpha_0(\tau)\equiv\alpha_0=const\geq 0,\ \ \beta_0(\tau)\equiv\beta_0=const\geq 0.$ Тогда рассматриваемая система уравнений и неравенств (1.1) перепишется в виде

$$n(t)=\alpha_0\int_{t_0}^{t} y(\tau)n(\tau)d\tau+\varphi_1(t),$$

$$k(t)=\beta_0\int_{t_0}^{t}(1-y(\tau))k(\tau)d\tau+\varphi_2(t),$$

$$P(t)=\int_{t_0}^{t} n(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

$$\varphi_1(t)=x(t)f(t)e^{\alpha t}+\alpha_0\int_{0}^{t_0} e^{\alpha\tau}y_0(\tau)m_0(\tau)d\tau,$$

$$\varphi_2(t)=(1-x(t))f(t)e^{\beta t}+\beta_0\int_{0}^{t_0} e^{\alpha\tau}y_0(\tau)m_0(\tau)d\tau,$$

где $n(t)=m(t)e^{\alpha t},\ \ k(t)=c(t)e^{\beta t},\ \ 0\leq x(\tau),y(\tau)\leq 1,\ \ 0<t_0\leq\tau<t\leq T,$ функции $y(\tau),m(\tau)$ будем считать заданными на начальной предыстории $[0,t_0]$ и обозначать с нижним индексом «0».

Положив $\alpha + \beta = \gamma = const > 0$ (величину γ можно интепретировать как некий ресурс, выделяемый для управления перераспределением общего ресурса γ между подсистемами А и Б СО с целью увеличения удельной производительности $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$ соответственно).

Поставим следующую оптимизационную задачу: для заданных положительных непрерывно дифференцируемых на $[t_0, T]$ функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, заданной и непрерывной на начальной предыстории $[0, t_0]$ функции $y_0(\tau)m_0(\tau)$, заданной величитны $\gamma = const > 0$ найти такую величину α, $0 \le \alpha \le \gamma$, которая бы максимизировала функционал

$$I(\alpha) = \int_{t_0}^{T} c(t)dt \tag{2.2}$$

с учетом $c(t) \ge c^*(t) > 0$, и ограничений, задаваемых равенствами и неравенствами (2.1), где $c^*(t)$ - заданная дифференцируемая функция на $[t_0, T]$, которую можно интерпретировать как минимально допустимое количество качественно подготовленных выпускников СО (определяемых, например, на выпускных экзаменах и защитах выпускных квалификационных работ).

2.2. Законы развития и ожидаемое решение поставленной оптимизационной задачи

При моделировании макроэкономической системы академик В.М. Глушков использовал систему нелинейных интегральных уравнений Вольтеровского типа, содержащую неизвестные функции не только в подынтегральных выражениях, но и в нижних пределах интегралов.

Введение функции в нижние пределы интегралов имело важный экономический смысл: эта функция интерпретировалась как временная граница для исключения устаревших технологий создания изделий производственной системы.

Предложенный математический аппарат впоследствии был применен для моделирования многих других систем: экологических, биологических, медицинских, биофизических, системы образования (как в данной работе), и других.

Теоретические исследования и многочисленные приложения привели к созданию теории РС. Дальнейшее развитие и обобщение моделей РС привело к созданию Гирлиным С.К. новой науки, которая получила название «Математика развития» (12 февраля 2018 года она была включена в «реестр новых научных направлений» № 0008, а Гирлину С,К. Российская Академия Естествознания присвоила почетное звание «Основатель научного направления»). В рамках этой науки Гирлин С.К. открыл три фундаментальных закона развития [9]. Эти законы могут быть сформулированы следующим образом.

Первый закон оптимального развития («закон альтруизма»)

Если величина планируемого времени достаточно мала, то искомый оптимум функционала достигается при максимально возможном (в силу ограничений задачи) использовании в подсистеме Б внутренних и внешних ресурсов для реализации основной функции системы.

Второй закон оптимального развития («закон разумного эгоизма»)

Если величина планируемого времени достаточно велика, то искомый оптимум функционала достигается при существенных долях внутренних и внешних ресурсов, поступающих в подсистему самосовершенствования на внутренние потребности системы на большей начальной части отрезка планируемого времени и максимально возможного использования в подсистеме Б внутренних и внешних ресурсов для реализации основной функции системы в конце ее. Этот закон был логически выведен из теорем при достаточно общих предположения: учитывалось лишь возрастание функции $a(t)$ по переменной t, возрастание функций $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$ по переменной τ и убывание по переменной t (что можно интерпретировать как веру в существование научно-технического прогресса: с течением времени появляются новые, все более эффективные, технологии производства продуктов первого и второго рода, а устаревшие, неэффективные, технологии ликвидируются).

Третий закон оптимального развития («закон иерархии приоритетов»)

Если величина планируемого времени достаточно велика, искомый оптимум функционала достигается при следующих приоритетах распределения внутренних и внешних ресурсов между подсистемами РС.

В случае достаточно большого времени планирования прежде всего на достаточно большом начальном временном промежутке приоритетным является подсистема А саморазвития системы, причем прежде всего должны развиваться новые технологии создания технологий вида $\alpha(t,\tau)$ и $\beta(t,\tau)$. Затем в конце отрезка времени планирования подсистема Б имеет приоритет, на котором производятся продукты второго рода, обеспечивающие выполнение основной функции системы.

Прежде чем приступить к решению поставленной оптимизационной задачи необходимо доказать, что система уравнений и неравенств (2.1) с учетом предполагаемых ограничений имеет единственное решение. Это легко показать, если свести первое уравнение системы интегральных уравнений (продифференцировав обе его части) к линейному дифференциальному уравнению, а затем, определив с помощью метода Бернулли функцию $n(t)$ и подставив ее в (2.1), найти все требуемые остальные функции.

Ожидаемый результат от решения поставленной оптимизационной задачи: в случае достаточно малого промежутка времени планирования (горизонта планирования) максимум рассматриваемого функционала (2.2) достигается, если все имеющиеся ресурсы γ направить на повышение удельной производительности - технологии $\beta(t,\tau)$, т.е. при ограничении $c(t) > 0$ максимум рассматриваемого функционала (2.2) должен достигаться при минимально возможном значении константы α, т. е. при $\alpha = 0,$ а в случае достаточно большого горизонта времени планирования для максимизации функционала (2.2) необходимо все имеющиеся ресурсы γ направить в начале временного отрезка на увеличение производительности - функции $\alpha(t,\tau)$ (в подсистеме А самосовершенствования СО), положив $\alpha = \gamma,$ $\beta = 0,$ и лишь в самом конце этого временного промежутка направить ресурсы на увеличение производительности - функции $\beta(t,\tau)$ (в подсистеме Б - основной подсистеме СО) при минимально возможном значении константы $\alpha,$ т. е при $\alpha = 0,$ $\beta = \gamma.$

Выводы ко второму разделу

Предложена математическая оптимизационная задача повышения качества получаемого образования с помощью перераспределения имеющихся ресурсов системы образования между ее подсистемами, используя новый (ранее не рассматривающийся) критерий оптимизации.

На основании открытых и сформулированных Гирлиным С.К. законов развития любых динамических систем и процессов сформулирована гипотеза: ожидаемый результат решения оптимизационной задачи. Предполагается, что решение поставленной задачи соответствует третьему закону развития («закону иерархии приоритетов»).

ВЫВОДЫ

В последние десятилетия благодаря научно-технической революции наука стала непосредственной производительной силой общества. Поэтому имеет смысл рассматривать науку как одну из отраслей экономики.

Фундаментальная экономическая концепция - это «рабочее место» (РМ), основанное на фундаментальном определении К. Маркса «простой рабочий процесс»: рабочее место понимается как «расположенное в производственном пространстве и во времени - средством труда и его организацией - определенный набор рабочих функций, которые должны быть выполнены и которые в течение определенного календарного периода требуют трудовой деятельности работника в течение всего периода работы (установленного законом) для этого периода».

«Под общими трудовыми функциями понимается часть общего рабочего процесса, выделенная с помощью специальных средств труда, и производственная задача, соответствующая этим средствам».

В связи с ухудшением качества получаемого математического образования проблема повышения качества образования во все времена является весьма актуальной.

Уравнения академика В.М. Глушкова, моделирующие динамику развивающейся системы (РС), применялись для описания функционирования учебного заведения или любой системы образования. В предложенной там модели часть ранее созданных в единицу времени рабочих мест работников учебного заведения по новейшей технологии воссоздает в единицу времени новые рабочие места работников учебного заведения, другие их части используются: 1) для создания самой вышеуказанной технологии, 2) для создания других новейших технологий, применяемых для осуществления выпуска в единицу времени закончивших полный образовательный курс (дипломированных специалистов), 3) для осуществления главной (внешней) функции учебного заведения – выпуска в единицу времени дипломированных специалистов.

Эта модель с заданной начальной предысторией предусматривает сворачивание устаревших технологий, применяемых работниками учебного заведения, однако в ней никак не учитывается непосредственное воздействие на деятельность учебного заведения внешних (для рассматриваемого процесса) факторов и не рассматриваются важнейшие вопросы получения образования, связанные с качеством (или эффективностью) подготовки дипломированных специалистов и сворачиванием устаревших технологий, применяемых учениками учебного заведения при самостоятельном усвоении переданных им знаний.

В дальнейшем была предпринята попытка построить математическую теорию обучения в системе образования с учетом вышеизложенных вопросов качества подготовки дипломированных специалистов (для чего понадобилось вводить понятие нового рабочего места не только для работников, но и для учеников учебного заведения) и влияния внешней среды.

Однако в исследуемых уравнениях не учитывалось непосредственное воздействие внешней среды на РС. Поэтому возникают постановки более общих задач.

Одной из важнейших задач моделирования СО является задача оптимизации, под которой обычно понимается достижение требуемой цели при заданных средствах, а также нахождение необходимых средств для достижения этой цели.

В данной работе поставлена новая оптимизационная задача перераспределения ресурсов между производством технологии - функции альфа (показателя эффективности СО в подсистеме А) и производством технологии - функции бетта (показателя эффективности СО в подсистеме Б) с учетом ограничения, связывающего эти функции. Воспользовавшись открытыми Гирлиным С.К. законов развития любых систем указана гипотеза: предполагаемый результат решения поставленной оптимизационной задачи.

В случае подтверждения сформулированной гипотезы возможно поставить и решить более общую и более сложную оптимизационную задачу, заменив условие заданности констант γ, α и β на условие заданности положительных функций $\gamma(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Дальнейшие исследования поставленной проблемы должны проводиться педагогами – методистами (для решения задач идентификации - получения модельных функций, предполагаемых в нашей работе заданными), математиками – специалистами в области разностных уравнений и численных методов, программистами (для компьютерного моделирования динамики СО, так как сложность задачи не позволяет решать ее в общем случае аналитически).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Анишева М.О., Гирлин С.К. Доказательство формулы интегрирования по частям репрезентативным методом // Проблемы современного педагогического образования. Сер.: Педагогика и психология.- Сб. статей: Вып. 51, Ч. 1 . - Ялта: РИО ГПА, ФГАОУ ВО КФУ им. Вернадского в г. Ялте, 2016. - С. 14-23.

2. Антонюк Ю.Ю., Гирлин С.К. Интегральная модель системы образования и колебательные решения ее уравнений // Международный студенческий научный вестник, № 2, Ч.4.– 2015.- С. 429-431.

3. Безбородов В.К., Вареникова И.А., Михайлова М.Е. и др. Модель процесса самообучения студентов при прохождении ими учебной практики // Студентська практика – ключ до майбутньої професії. Економічні науки: Матеріали міжнародної студентської науково-практичної конференції (Ялта, 26-28 жовтня 2007 р.). – Ялта: РВВ КГУ, 2007. – С.100-102.

4. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. – М.: Мир, 1970.– 326 с.

5. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 156 с.

6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - К.: Наук. думка, 1986. - 543 с.

7. Вечтомов Е.М. Математика: основные математические структуры: учеб. пособие для СПО / Е.М. Вечтомов. – 2-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 296 с. (Серия: Профессиональное образование).

8. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

9. Гирлин С.К. Лекции по интегральным уравнениям; Учебное пособие для студентов математических специальностей / Гирлин С.К. – Ялта; РИО КГУ, 2012. – 168 с.

10. Гирлин С.К. Моделирование возникающих развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. - № 10. – С. 65-67.

11. Гирлин С.К. О построении математической теории обучения в системе образования // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Сер.: Педагогіка і психологія. - Зб. статей: Вип..8.Ч.2 - Ялта: РВВ КГУ, 2005.- С.220-228.

12. Гирлин С.К., Иванов В.В. Моделирование взаимодействия развивающихся систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. - № 1. – С. 58-60.

13. Гирлин С.К., Михайлова М.Е. Основная идея и результаты моделирования задачи управления качеством учебного процесса // Професіоналізм педагога в контексті європейського вибору України: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Ялта, 18-22 вересня 2008 р.). - Ч. ІІІ. - Ялта: РВВ КГУ, 2009. - С. 42-45.

14. Гирлин С.К., Михайлова М.Е., Протачук И.А. Решения одной системы интегральных уравнений вольтерровского типа // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Сер.: Педагогіка і психологія.- Зб. статей: Вип. 17, Ч. 1.- Ялта: РВВ КГУ, 2008. - С. 64-71 .

15. Гирлин С.К., Ференчук И.И., Кожан Г.И. Математическая иллюстрация доказательств // Студент года 2017: Сб. статей III Международного научно-практического конкурса. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2017. – С.14-19.

16. Гирлин С.К., Ференчук И.И. Сочетание индуктивного и дедуктивного рассуждений при введении математических понятий и доказательстве их свойств / Сб. статей VI Международного научно-исследовательского конкурса «Достижения вузовской науки 2018». – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2018. – С. 12-16.

17. Гирлин С.К., Ференчук И.И. Об аналогах дифференциальных теорем о среднем // Электронный мультидисциплинарный научный журнал с порталом международных научно-практических конференций «Интернетнаука». 2017. № 5. - С.35-46. ISSN 2414-0031. Доступно на: <https://internetnauka.ru/index.php/journal/article/view/455>. Дата доступа: 03 янв. 2018.

18. Гирлин С.К., Ференчук И.И. Технология иллюстративно-репрезентативного обучения математике // Педагогическое мастерство: Сб. статей Международного научно-практического конкурса.- Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2018. – С. 40-45.

19. Гирлин С.К., Архангельская С.С., Ференчук И.И. Об аналогах интегральных теорем о среднем / Сб. статей XX Международной научно-практической конференции “European Scientific Conference”. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2020. – С. 15-19.

20. Гирлин С.К., Ференчук И.И. О вычислении эффективности функционирования системы образования / Сб. мат-лов III Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (21-23 мая 2018 г., Ялта). – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2018. – С. 101-104.

21. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. – 1977. - № 2. – С. 3-6.

22. Глушков В.М., Иванов В.В. Моделирование оптимизации распределения рабочих мест между отраслями производства А и Б // Кибернетика. – 1977.- № 6.- С. 117-131.

23. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Методологические вопросы применения математических методов в биологии. - К.: Изд. ИК АН УССР, 1979. - 65 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики: 79-60).

24. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

25. Иванов В.В., Вугинштейн А.Э. О континуальных моделях развивающихся систем // Дифференц. уравнения.- 1985. - Т. XXI, № 3.- С. 473-484.

26. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский и др. - М.: Наука, 1968. – 448 с.

27. Канторович Л.В., Горьков Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Докл. АН СССР. – 1959. – 129, № 4. – С. 732-736.

28. Канторович Л.В., Жиянов В.И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // Там же. – 1973. – 211, № 6. – С. 1280-1283.

29. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. – 544 с.

30. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию).- М.- Наука, 1975. - 304 с.

31. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 216 с.

32. Кривошея С.А., Перестук М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння. – К.: Либідь, 2004.-408 с.

33. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. – М.: Наука. – 1977. – 112 с.

34. Справочное пособие по математическому анализу, ч.1. Введение в анализ, производная, интеграл // И.И. Ляшко, Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. – Киев: Вища школа, 1978.- 696 с.

35. Фурсов А. Реформа образования как угроза власти.- Беседа на Радио России / Источник: http://park.futurerussia.ru/extranet/blogs/fursov

36. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наук. думка, 1991. – 220 с.

37. Girlin S.K., Ivanov V.V. Mathematical Theory of Development. A Course of Lectures: Учебное пособие для студентов математических специальностей / Girlin S.K., Ivanov V.V. – Simferopol: PP “ARIAL”, 2014. – 140 p.

38. Ivanov V.V. Model development and optimization. – Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publishers, 1999. – 249 p.

39. Ivanov V.V., Ivanova N.V. Mathematical Models of the Cell and Cell Associated Objects.- Amsterdam: Elsevier, 2006.– 333 p.