



ФЕДЕРАЛЬНОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ЦЕНТРАЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЛЕОПольДОВА
САВЬИЧЕВСКОГО

« 11 » 06 2020 г.

Зав. каф. Общей и
теоретической физики
д.ф.-м.н. С.А. Тарасенко

**РЕЗОНАНСНОЕ РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ПРИ
СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ**

Магистерская диссертация

Направление 03.04.02 Физика

Сизых Георгий Константинович

Научный руководитель

д.ф.-м.н., проф.

Рецензент

к.ф.-м.н., доц.

Студент гр. 603

С.П. Рошупкин

А.Н. Литвинов

Г.К. Сизых

Санкт-Петербург, 2020



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
АКАДЕМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Ж.И. АЛФЕРОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАПРАВЛЕНИЕ 03.04.02 Физика
ПРОФИЛЬ Физика

**ЗАДАНИЕ на выполнение диссертации на соискание академической
степени магистра**

студенту
Сизых Георгию Константиновичу

**Тема МД: РЕЗОНАНСНОЕ РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР
ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ**

Срок сдачи студентом МД: 14.06.2020.

Содержание МД:

1. Провести обзор литературы резонансных процессов квантовой электродинамики во внешнем поле.
2. Получить амплитуду процесса резонансного рождения электрон-позитронных пар при столкновении электронов с лазерной волной в случае произвольных интенсивностей лазерной волны.
3. Детально проанализировать резонансную кинематику данного процесса для каналов «а» и «б».
4. Упростить амплитуду процесса в случае циркулярно-поляризованной волны слабой интенсивности.
5. Получить выражение для оценки резонансной дифференциальной вероятности (в единицу времени) процесса.

Объем МД: 57 страниц, 7 прил., 0 таблиц, 12 рис.

Дата выдачи задания 1 февраля 2020 г.

Руководитель: Сергей Павлович Рощупкин

Задание принял к исполнению _____

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. РЕЗОНАНСНЫЕ ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	6
§ 1.1. Основные параметры, характеризующие процессы во внешнем электромагнитном поле.....	6
§ 1.2. Картина Фарри.....	7
§ 1.3. Функции Волкова.....	8
§ 1.4. Резонансы Олейника во внешнем электромагнитном поле.....	9
ГЛАВА 2. АМПЛИТУДА ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ.....	11
§ 2.1. Общий вид амплитуды.....	11
§ 2.2. Преобразование амплитуды.....	13
§ 2.3. Амплитуда процесса в поле циркулярно-поляризованной электромагнитной волны.....	17
ГЛАВА 3. КИНЕМАТИКА РЕЗОНАНСНОГО РОЖДЕНИЯ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ В СЛУЧАЕ СЛАБЫХ ПОЛЕЙ.....	18
§ 3.1. Кинематика в слабом поле.....	18
§ 3.2. Кинематика стимулированного лазерным полем комптон-эффекта.....	20
§ 3.3. Кинематика стимулированного лазерным полем процесса Брейта-Уилера.....	25
§ 3.4. Ограничение параметров стимулированного лазерным полем процесса Брейта-Уилера.....	30
§ 3.5. Амплитуда в слабом циркулярно-поляризованном поле.....	41
ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ) ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ В СЛУЧАЕ СЛАБЫХ ПОЛЕЙ.....	43
§ 4.1. Общий вид дифференциальной вероятности.....	43
§ 4.2. Дифференциальная вероятность (в единицу времени) канала «а».....	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	48
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	49
Приложение А: малость углов между направлениями распространения частиц и 3-импульса начального электрона.....	58
Приложение Б: вычисление пороговой энергии.....	59
Приложение В: упрощение функции H	61
Приложение Г: преобразование действий.....	62
Приложение Д: преобразование аргументов специальных функций.....	65
Приложение Е: вещественность параметров γ	66
Приложение Ж: фазы каналов «а» и «б».....	68

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) во внешнем поле вызвала интерес у исследователей с самого своего зарождения. Год спустя после написания Дираком [1] квантового релятивистского уравнения для частиц со спином $s = 1/2$ Оскар Кляйн обнаружил парадокс [2], связанный с туннелированием электрона под сколь угодно высокий потенциальный барьер. Эта находка вызвала бурные обсуждения касательно её природы. Швингером также было предсказано [3] рождение заряженных частиц неоднородным стационарным электрическим полем напряжённости порядка $E_{cr} \sim 10^{16}$ В/см. Общепринятая интерпретация парадокса Клейна спустя 40 лет после его открытия была дана Никишовым [4] на основе результатов Швингера и послужила первым стимулом к изучению поведения частиц во внешнем поле.

Создание электромагнитных полей такой мощности, чтобы нелинейные эффекты, связанные с наличием этого поля, могли быть экспериментально обнаружены, долгое время не представлялось возможным. В последнее время, однако, в области лазерных систем произошёл ряд прорывов. В частности, создание технологии сжатия лазерного импульса [5] позволило реализовать лазеры с интенсивностями порядка $I \sim 10^{18}$ Вт/см. В электромагнитных полях такой интенсивности вероятность неупругих квантовоэлектродинамических процессов возрастает, что позволяет этим процессам быть доступными для наблюдения. С помощью новой технологии когерентного фокусирования [6] предполагается возможность достижения швингеровского предела $I \sim 10^{29}$ Вт/см, при котором процесс образования электрон-позитронных пар (ЭПП) происходит настолько интенсивно, что поле, создаваемое этими парами, становится сравнимым по величине с внешним полем, и встаёт вопрос о применимости КЭД для полей большей интенсивности [7].

Для исследования области применимости КЭД относительно величины внешнего поля необходимо тщательное изучение соответствующих процессов.

Кроме этой, достаточно формальной, стороны вопроса исследование процессов КЭД во внешнем поле позволит лучше понять поведение лазерной плазмы – вещества, образующегося в результате воздействия интенсивного лазерного излучения на конденсированную среду. Лазерная плазма обладает множеством перспективных применений, одним из которых является создание моноэнергетичных пучков релятивистских электронов [8,9]. Также процессы с образованием ЭПП, возможно, являются ключом к объяснению наличия аномальных потоков позитронов в излучении пульсаров [10,11].

Особый интерес представляют резонансные процессы, то есть такие, когда промежуточные частицы выходят на массовую поверхность. Впервые наличие резонансов в процессах КЭД второго порядка по постоянной тонкой структуры во внешнем поле обнаружил Олейник [12,13]. Система частица+внешнее обладает дискретным спектром квазиэнергий и в определённых условиях, когда происходит переход с одного из таких состояний в другое, возникает резонанс, связанный с выходом виртуальной частицы на массовую поверхность. Вероятность таких процессов значительно превышает вероятность нерезонансных [14-19]. Некоторые резонансные процессы КЭД во внешнем поле были рассмотрены в работах [20-67]. Для таких процессов также характерно наличие зависимости энергий конечных частиц от их углов вылета. Эти особенности делают резонансные особенно привлекательными с точки зрения эксперимента: резонансный характер понижает требования к источникам внешнего поля, а наличие взаимосвязей между энергиями и углами вылета частиц облегчает идентификацию процессов.

На данный момент детально изучены процессы КЭД первого порядка во внешнем поле [68]. Процессы же второго порядка обладают гораздо большей вариативностью и к тому же, как было упомянуто выше, допускают резонансный характер протекания. Эти два фактора делают процессы КЭД второго порядка во внешнем поле богатой областью для исследований.

Процессы образования ЭПП во внешнем электромагнитном поле изучаются с 1969 года (см., например, [69-73]). В частности, процесс рождения пар в столкновениях электронов с лазерной волной рассматривался в работах [74-78]. В этих работах был изучен процесс рождения электрон-позитронных пар при взаимодействии электронов с лазерными волнами произвольной интенсивности и при взаимодействии со скрещенными полями, получены амплитуды процесса и численно найдены сечения, однако аспекту, связанному с резонансным протеканием процесса, не было уделено должного внимания. Данная работа нацелена на то, чтобы устранить этот пробел.

ГЛАВА 1. РЕЗОНАНСНЫЕ ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 1.1. Основные параметры, характеризующие процессы во внешнем электромагнитном поле

Процессы, протекающие во внешнем электромагнитном поле, можно классифицировать по значениям следующих 2 параметров.

Нелинейные эффекты в таких процессах определяются классическим релятивистски-инвариантным параметром

$$\eta = \frac{|e|F\lambda}{mc^2}, \quad (1.1.1)$$

численно равным отношению работы поля по перемещению частицы на её комптоновской длине волны к её энергии покоя. Здесь e и m - заряд и масса частицы, F - напряжённость электрического поля, а λ - приведённая комптоновская длина волны частицы.

В данной работе изучаются процессы только с участием фотонов, электронов и позитронов, поэтому в качестве заряда будет выступать заряд электрона, который мы будем считать отрицательным $e < 0$. В соответствии с этим положительный параметр η примет следующий вид.

$$\eta = -\frac{eF\lambda}{mc^2} > 0 \quad (1.1.2)$$

В квантовых процессах возникает учитывающий передачу импульса между рассеивающимися частицами квантовый параметр многофотонности Бункина-Фёдорова

$$\chi = \frac{eFv\omega^{-1}}{\hbar\omega} = \eta \frac{mcv}{\hbar\omega}, \quad (1.1.3)$$

численно равный отношению работы поля на расстоянии, проходимым электроном за характерное время осцилляций, к энергии фотона. Здесь v -

скорость частицы. При рассмотрении слабых электромагнитных полей, когда $\eta \ll 1$, величина параметра χ не влияет на особенности протекания процессов.

§ 1.2. Картина Фарри

S-матричный подход к изучению процессов КЭД при наличии внешнего поля модифицируется в картине, предложенной Фарри [79]. Суть этого подхода излагается в текущем параграфе.

Лагранжиан квантовой электродинамики при наличии внешнего поля можно записать в виде суммы трёх слагаемых:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{int} \quad (1.2.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ \mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{int} &= -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi (A_\mu^{cl} + A_\mu) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

- соответственно, лагранжианы дираковского и электромагнитного полей и лагранжиан взаимодействия. A_μ^{cl} - 4-вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля, а A_μ - 4-вектор-потенциал, описывающий вакуумные флуктуации электромагнитного поля.

Идея Фарри состоит в том, чтобы вместо задачи о дираковских частицах, взаимодействующих с внешним полем и вакуумными флуктуациями электромагнитного поля, решать задачу о взаимодействии некоторых других частиц, представляющих собой дираковские частицы во внешнем поле, уже только с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Математически, этому соответствует следующий переход.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi & \mathcal{L}_e &= \bar{\psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu^{cl}) - m] \psi \\
\mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} & \rightarrow & \mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_{\text{int}} &= -e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi (A_\mu^{cl} + A_\mu) & \mathcal{L}_{\text{int}} &= -e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Если теперь найти решения уравнения Дирака с внешним электромагнитным полем A_μ^{cl} , то для учёта взаимодействия с вакуумными флуктуациями можно будет пользоваться стандартными правилами Фейнмана, используя новые решения вместо решений свободного уравнения Дирака.

Наибольший интерес к изучению представляют такие потенциалы, для которых уравнение Дирака может быть решено аналитически. В данной работе исследуется внешний потенциал плоской монохроматической электромагнитной волны. Решение уравнения Дирака с таким потенциалом впервые было найдено Волковым [80] в 1937 году.

§ 1.3. Функции Волкова

Рассмотрим уравнение Дирака

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu^{cl}) - m] \psi = 0, \tag{1.3.1}$$

где A_μ^{cl} - 4-вектор-потенциал плоской электромагнитной волны.

Его решение [81, с. 178] имеет следующий вид.

$$\Psi_p(x) = \left[1 + \frac{e}{2(kp)} \hat{k} \hat{A}(\varphi) \right] \frac{u_p}{\sqrt{2E}} e^{iS} \tag{1.3.2}$$

Здесь

$$S = -px - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{e}{(kp)} \left[(pA(\varphi')) - \frac{e}{2} A^2(\varphi') \right] d\varphi' \tag{1.3.3}$$

- классическое действие для электрона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны [82, с. 149], а $\varphi = kx$ - фаза волны.

Для функций (1.3.2) компоненты 4-импульса больше не являются хорошими квантовыми числами, однако таковыми являются [81, с. 179] компоненты квазиимпульса

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \overline{A^2}}{2(kp)} k^\mu \quad (1.3.4)$$

Здесь $\overline{A^2}$ - средний по времени квадрат 4-потенциала внешнего поля.

Потенциал плоской монохроматической электромагнитной волны может быть записан в следующем виде.

$$A(\varphi) = \frac{F}{\omega} [e_x \cos \varphi + \delta e_y \sin \varphi] \quad (1.3.5)$$

Здесь $\varphi = \omega(t - z)$ - фаза волны, e_x и e_y - 4-вектора поляризации, а δ - параметр эллиптичности.

С учётом (1.3.5) и (1.1.1) из (1.3.4) следует, что

$$p^\mu - q^\mu \propto \eta^2 k^\mu \quad (1.3.6)$$

Это обстоятельство позволяет считать, что в случае слабых полей ($\eta \ll 1$) приближённо (с точностью до η^2) выполняется закон сохранения обычного 4-импульса.

§ 1.4. Резонансы Олейника во внешнем электромагнитном поле

В статье 1967 Олейником было показано наличие резонансов в процессах второго порядка во внешнем поле, которые в дальнейшем получили название резонансов Олейника [12, 13]. Их появление объясняется наличием в системе «частица + внешнее поле» дискретных энергетических уровней. Возникновение резонансов происходит в тех случаях, когда виртуальная частица выходит на массовую поверхность. Резонансные бесконечности могут быть устранены, если вместо «голого» пропагатора использовать «одетый», тогда на месте этих бесконечностей в сечении процесса останутся острые пики.

Резонансы Олейника – уникальная черта, присущая процессам КЭД второго порядка во внешнем поле. Благодаря их наличию вероятность данных процессов может существенно превышать вероятность нерезонансных процессов, что делает резонансные процессы доступными для наблюдения на современных лазерных установках.

Первым экспериментом по наблюдению нелинейных эффектов КЭД во внешнем поле является эксперимент 1996 года [83], целью которого было исследование нелинейного комптон-эффекта. В эксперименте пучок электронов энергией 46.6 ГэВ пропускали через область лазерного (Nd:YAG) поля интенсивности 10^{18} Вт/см^2 , что соответствует $\eta = 0.6$ (см. (1.1.1)), и детектировали рассеянные электроны. Однако помимо электронов детектор также зарегистрировал наличие позитронов после прохождения пучком электронов области лазерного поля. Данная работа представляет собой попытку объяснить наличие позитронов в этом эксперименте путём исследования одного из возможных механизмов их образования при взаимодействии электронов с лазерным полем.

ГЛАВА 2. АМПЛИТУДА ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ

§ 2.1. Общий вид амплитуды

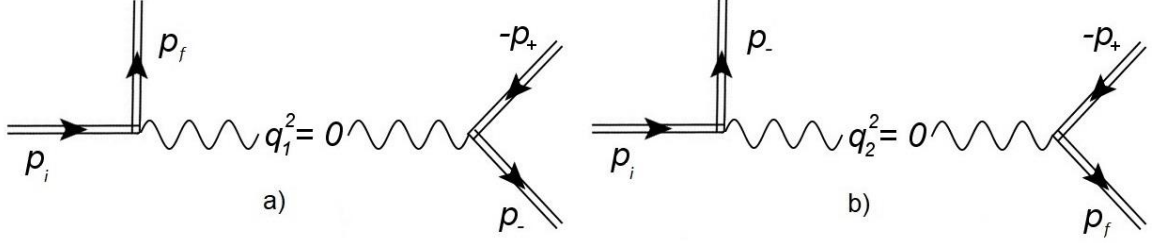


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана резонансного рождения электрон-позитронных пар при столкновении электронов с лазерной волной. а) – канал «а», б) – канал «б».

Запишем общий вид амплитуды процессов, изображённых при помощи диаграмм на рис. 1.

$$S = -i(-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\Psi}_{p_-}(x_2) \gamma^\nu \Psi_{-p_+}(x_2) D_{\mu\nu}(x_2 - x_1) \bar{\Psi}_{p_f}(x_1) \gamma^\mu \Psi_{p_i}(x_1) - (p_f \leftrightarrow p_-) \quad (2.1.1)$$

Здесь Ψ обозначает волковские функции частиц (см. § 1.2)

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{p_-}(x_2) &= \frac{\bar{u}_{p_-}}{\sqrt{2E_-}} \left[1 + \frac{e}{2(kp_-)} \hat{A}(\varphi_2) \hat{k} \right] e^{-iS_{p_-}} \\ \Psi_{-p_+}(x_2) &= \left[1 - \frac{e}{2(kp_+)} \hat{k} \hat{A}(\varphi_2) \right] \frac{v_{-p_+}}{\sqrt{2E_+}} e^{iS_{-p_+}} \\ \bar{\Psi}_{p_f}(x_1) &= \frac{\bar{u}_{p_f}}{\sqrt{2E_f}} \left[1 + \frac{e}{2(kp_f)} \hat{A}(\varphi_1) \hat{k} \right] e^{-iS_{p_f}} \\ \Psi_{p_i}(x_1) &= \left[1 + \frac{e}{2(kp_i)} \hat{k} \hat{A}(\varphi_1) \right] \frac{u_{p_i}}{\sqrt{2E_i}} e^{iS_{p_i}} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

4-вектор потенциал имеет следующий вид.

$$A(\varphi) = \frac{F}{\omega} [e_x \cos \varphi + \delta e_y \sin \varphi] = \frac{F}{2\omega} (\varepsilon_- e^{i\varphi} + \varepsilon_+ e^{-i\varphi}) \quad (2.1.3)$$

$$\varphi = \omega(t - z)$$

$$\begin{aligned} e_i &= (0, \mathbf{e}_i) & \mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 &= -1 & (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y) &= 0 \\ \varepsilon_\pm &= e_x \pm i\delta e_y & \varepsilon_\pm^2 = \varepsilon_\mp^2 &= -(1 - \delta^2) & (\varepsilon_- \varepsilon_+) &= -(1 + \delta^2) \end{aligned}$$

Здесь F и ω - напряжённость и частота волны, δ - параметр эллиптичности, e_i и ε_i - вещественные и комплексные вектора поляризации, соответственно.

Во избежание путаницы ещё раз подчеркнём, что $e < 0$. Стоит также отметить, что индекс " $-p_+$ " у волковской функции позитрона отражает тот факт, что последняя получается из волковской функции электрона формальной заменой знака 4-импульса.

В (2.1.2) действие для электрона имеет следующий вид [82, с. 149]:

$$S_p(x) = -px - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{e}{(kp)} \left[(pA(\varphi')) - \frac{e}{2} A^2(\varphi') \right] d\varphi' \quad (2.1.4)$$

Формальной заменой знака импульса получаем действие для позитрона:

$$S_{-p_+}(x) = p_+x - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{e}{(kp_+)} \left[(p_+A(\varphi')) + \frac{e}{2} A^2(\varphi') \right] d\varphi' \quad (2.1.5)$$

Запишем также выражение для фотонного пропагатора.

$$D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(q) e^{-iqx} \quad (2.1.6)$$

$$D_{\mu\nu}(q) = -\frac{4\pi i g_{\mu\nu}}{q^2 + i0}$$

С учётом (2.1.2) - (2.1.5) амплитуда (2.1.1) может быть записана в следующем виде.

$$S = \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{1}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \int d^4q_1 \frac{1}{q_1^2 + i0} (\bar{u}_{p_-} M^\nu v_{-p_+}) g_{\mu\nu} (\bar{u}_{p_f} M'^\mu u_{p_i}) - (p_f \leftrightarrow p_-, q_1 \rightarrow q_2) \quad (2.1.7)$$

Здесь введены следующие обозначения.

$$M^\nu = \int d^4x_2 H^\nu(\varphi_2) \exp(iS_{-p_-, (-p_+), -q_1}(x_2)) \quad (2.1.8)$$

$$M'^\mu = \int d^4x_1 H'^\mu(\varphi_1) \exp(iS_{-p_f, p_i, +q_1}(x_1)) \quad (2.1.9)$$

$$H^\nu = \left[1 + \frac{e}{2(kp_-)} \hat{A}(\varphi_2) \hat{k} \right] \gamma^\nu \left[1 - \frac{e}{2(kp_+)} \hat{k} \hat{A}(\varphi_2) \right] \quad (2.1.10)$$

$$H'^\mu = \left[1 + \frac{e}{2(kp_f)} \hat{A}(\varphi_1) \hat{k} \right] \gamma^\mu \left[1 + \frac{e}{2(kp_i)} \hat{k} \hat{A}(\varphi_1) \right] \quad (2.1.11)$$

$$S_{-p_-(-p_+), -q_1}(x_2) = -S_{p_-}(x_2) + S_{-p_+}(x_2) - q_1 x_2 \quad (2.1.12)$$

$$S_{-p_f, p_i, +q_1}(x_1) = -S_{p_f}(x_1) + S_{p_i}(x_1) + q_1 x_1 \quad (2.1.13)$$

§ 2.2. Преобразование амплитуды

Можно показать (см. Приложение В), что функции H и H' преобразуются к следующему виду.

$$H^\nu(\varphi_2) = a^\nu + b_-^\nu e^{i\varphi_2} + b_+^\nu e^{-i\varphi_2} + c^\nu (e^{2i\varphi_2} + e^{-2i\varphi_2}) \quad (2.2.1)$$

$$H'^\mu(\varphi_1) = a'^\mu + b_-'^\mu e^{i\varphi_1} + b_+'^\mu e^{-i\varphi_1} + c'^\mu (e^{2i\varphi_1} + e^{-2i\varphi_1}) \quad (2.2.2)$$

Здесь обозначено:

$$\left. \begin{aligned} a^\nu &= \gamma^\nu - (1 + \delta^2) \eta^2 \frac{m^2}{4(kp_-)(kp_+)} \hat{k} k^\nu \\ b_\pm^\nu &= \eta \left[\frac{m}{4(kp_+)} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_\pm - \frac{m}{4(kp_-)} \hat{\varepsilon}_\pm \hat{k} \gamma^\nu \right] \\ c^\nu &= -(1 - \delta^2) \eta^2 \frac{m^2}{8(kp_-)(kp_+)} \hat{k} k^\nu \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} a'^\mu &= \gamma^\mu + (1 + \delta^2) \eta^2 \frac{m^2}{4(kp_f)(kp_i)} \hat{k} k^\mu \\ b_\pm'^\mu &= -\eta \left[\frac{m}{4(kp_i)} \gamma^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_\pm + \frac{m}{4(kp_f)} \hat{\varepsilon}_\pm \hat{k} \gamma^\mu \right] \\ c'^\mu &= (1 - \delta^2) \eta^2 \frac{m^2}{8(kp_f)(kp_i)} \hat{k} k^\mu \end{aligned} \right\} (2.2.3)$$

, а $\eta = -\frac{eF}{m\omega}$ - классический релятивистски-инвариантный параметр (см. §

1.3.).

Также можно показать, что действия $S_{-p_-(-p_+), -q_1}(x_2)$ и $S_{-p_f, p_i, +q_1}(x_1)$ приводятся к следующему виду (см. Приложение Г).

$$S_{-p_-(-p_+), -q_1}(x_2) = -d_{p_+p_-} + (\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1) x_2 + \gamma_{p_+p_-} \sin(\varphi_2 - \chi_{p_+p_-}) + \beta_{p_+p_-} \sin 2\varphi_2 \quad (2.2.4)$$

$$S_{-p_f, p_i, +q}(x_1) = -d_{p_i p_f} - (\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1)x_1 + \gamma_{p_i p_f} \sin(\varphi_1 - \chi_{p_i p_f}) + \beta_{p_i p_f} \sin 2\varphi_1 \quad (2.2.5)$$

Выражение для констант d , γ , β и χ см. в приложении Г: (8.1.10) и (8.1.13)

. Введя кинематические инварианты

$$u = \frac{((kp_+) + (kp_-))^2}{4(kp_+)(kp_-)} = \frac{(x_- + x_+)^2}{4x_- x_+}, \quad (2.2.6)$$

$$u_1 = \frac{(kp_+) + (kp_-)}{2m^2} = \varepsilon_i(x_- + x_+)$$

$$v = \frac{(kp_i) + (kp_f)}{(kp_f)} = \frac{1 + x_f}{x_f}, \quad (2.2.7)$$

$$v_1 = \frac{2(kp_i)}{m^2} = 4\varepsilon_i$$

можно записать параметры γ в виде (см. Приложение Д)

$$\begin{aligned} \gamma_{p_+ p_-} &= -2\eta \sqrt{\frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)} \\ \gamma_{p_i p_f} &= -2\eta \sqrt{\frac{v}{v_1} \left(1 - \frac{v}{v_1}\right)} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Отметим также вещественность параметров γ (см. Приложение Е).

Теперь можно подставить выражения (2.2.1) и (2.2.4) в (2.1.8). Сделаем это, сразу выделяя периодическую часть:

$$M^v = e^{-id_{p_+ p_-}} \int d^4 x_2 \exp[i(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1)x_2] \cdot G^v(\varphi_2) \quad (2.2.9)$$

Здесь $G(\varphi)$ - 2π -периодическая функция:

$$G^v(\varphi_2) = H^v(\varphi_2) \exp\left(i\left[\gamma_{p_+ p_-} \sin(\varphi_2 - \chi_{p_+ p_-}) + \beta_{p_+ p_-} \sin 2\varphi_2\right]\right) \quad (2.2.10)$$

Разложим $G^v(\varphi_2)$ в ряд:

$$G^v(\varphi_2) = \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} H_{-l_2}^v \exp(-il_2 \varphi_2) \quad (2.2.11)$$

Коэффициенты разложения выглядят следующим образом.

$$\begin{aligned}
H_{l_2}^v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdot G^v(\varphi_2) \exp(-il_2\varphi_2) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdot H^v(\varphi_2) \exp\left(i\left[\gamma_{p_+p_-} \sin(\varphi_2 - \chi_{p_+p_-}) + \beta_{p_+p_-} \sin 2\varphi_2 - l_2\varphi_2\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdot \left(a^v + b_-^v e^{i\varphi_2} + b_+^v e^{-i\varphi_2} + c^v (e^{2i\varphi_2} + e^{-2i\varphi_2})\right) \times \\
&\quad \times \exp\left(i\left[\gamma_{p_+p_-} \sin(\varphi_2 - \chi_{p_+p_-}) + \beta_{p_+p_-} \sin 2\varphi_2 - l_2\varphi_2\right]\right) = \\
&= a^v L_{l_2}(\gamma_{p_+p_-}, \beta_{p_+p_-}, \chi_{p_+p_-}) + b_-^v L_{l_2-1}(\gamma_{p_+p_-}, \beta_{p_+p_-}, \chi_{p_+p_-}) + b_+^v L_{l_2+1}(\gamma_{p_+p_-}, \beta_{p_+p_-}, \chi_{p_+p_-}) + \\
&\quad + c^v \left[L_{l_2-2}(\gamma_{p_+p_-}, \beta_{p_+p_-}, \chi_{p_+p_-}) + L_{l_2+2}(\gamma_{p_+p_-}, \beta_{p_+p_-}, \chi_{p_+p_-})\right]
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Функции L имеют вид:

$$\begin{aligned}
L_{l_2}(\gamma_{p_+p_-}, \beta_{p_+p_-}, \chi_{p_+p_-}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \exp\left(i\left[\gamma_{p_+p_-} \sin(\varphi_2 - \chi_{p_+p_-}) + \beta_{p_+p_-} \sin 2\varphi_2 - l_2\varphi_2\right]\right) = \\
&= \exp(-il_2\chi_{p_+p_-}) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \exp(2in'\chi_{p_+p_-}) J_{l_2-2n'}(\gamma_{p_+p_-}) J_{n'}(\beta_{p_+p_-})
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

С учётом (2.2.9) - (2.2.13) M^μ принимает вид:

$$\begin{aligned}
M^v &= e^{-id_{p_+p_-}} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} H_{-l_2}^v \int d^4x_2 \exp\left[i(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1 - l_2k)x_2\right] = \\
&= (2\pi)^4 e^{-id_{p_+p_-}} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} H_{-l_2}^v \delta^{(4)}(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1 - l_2k)
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Таким образом введённый индекс l_2 по смыслу соответствует числу поглощённых во второй вершине фотонов внешнего поля.

Аналогично действуем со штрихованными амплитудами.

$$\begin{aligned}
M'^\mu &= e^{-id_{p_i p_f}} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H'_{-l_1}{}^\mu \int d^4x_1 \exp\left[-i(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1 + l_1k)x_1\right] = \\
&= (2\pi)^4 e^{-id_{p_i p_f}} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H'_{-l_1}{}^\mu \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1 + l_1k)
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Здесь

$$H_{l_1}^{\prime\mu} = a^{\prime\mu} L_{l_1}(\gamma_{p_i p_f}, \beta_{p_i p_f}, \chi_{p_i p_f}) + b^{\prime\mu} L_{l_1-1}(\gamma_{p_i p_1}, \beta_{p_i p_1}, \chi_{p_i p_1}) + b_+^{\prime\mu} L_{l_1+1}(\gamma_{p_i p_1}, \beta_{p_i p_1}, \chi_{p_i p_1}) + c^{\prime\mu} \left[L_{l_1-2}(\gamma_{p_i p_1}, \beta_{p_i p_1}, \chi_{p_i p_1}) + L_{l_1+2}(\gamma_{p_i p_1}, \beta_{p_i p_1}, \chi_{p_i p_1}) \right] \quad (2.2.16)$$

Здесь l_1 - число поглощённых в первой вершине фотонов внешнего поля.

С учётом (2.1.7) - (2.2.16) амплитуда процесса примет вид:

$$S = \frac{e^2}{16\pi^3} \frac{1}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \int d^4 q_1 \frac{1}{q_1^2 + i0} (\bar{u}_{p_-} M^\nu v_{-p_+}) g_{\mu\nu} (\bar{u}_{p_f} M^{\prime\mu} u_{p_i}) - (p_f \leftrightarrow p_-, q_1 \rightarrow q_2) =$$

$$= 16\pi^5 e^2 \frac{1}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \int d^4 q_1 \frac{1}{q_1^2 + i0} \left[\bar{u}_{p_-} e^{-id_{p_+ p_-}} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} H_{\mu; -l_2} \delta^{(4)}(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1 - l_2 k) v_{-p_+} \right] \times$$

$$\times \left[\bar{u}_{p_f} e^{-id_{p_i p_f}} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H_{-l_1}^{\prime\mu} \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1 + l_1 k) u_{p_i} \right] - (p_f \leftrightarrow p_-, q_1 \rightarrow q_2) \quad (2.2.17)$$

Возьмём интеграл по q_1 , воспользовавшись δ -функцией.

$$S = 16\pi^5 e^2 e^{-id_{p_+ p_-} - id_{p_i p_f}} \frac{1}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - l_2 k)^2} \left[\bar{u}_{p_-} H_{\mu; -l_2} v_{-p_+} \right] \times$$

$$\times \left[\bar{u}_{p_f} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H_{-l_1}^{\prime\mu} \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - \tilde{p}_+ - \tilde{p}_- + \{l_2 + l_1\} k) u_{p_i} \right] - (p_f \leftrightarrow p_-) \quad (2.2.18)$$

Введём число $l = l_1 + l_2$ поглощённых в процессе квантов поля, и поменяем переменные суммирования: $\{l_1, l_2\} \rightarrow \{l, l_2\}$.

$$S = 16\pi^5 e^2 e^{-id_{p_+ p_-} - id_{p_i p_f}} \frac{1}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - l_2 k)^2} \left[\bar{u}_{p_-} H_{\mu; -l_2} v_{-p_+} \right] \times$$

$$\times \left[\bar{u}_{p_f} H_{-(l-l_2)}^{\prime\mu} \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - \tilde{p}_+ - \tilde{p}_- + lk) u_{p_i} \right] - (p_f \leftrightarrow p_-) \quad (2.2.19)$$

Ещё одним важным обстоятельством является тот факт, что закон сохранения 4-импульса (ЗС4И) может быть выполнен только при условии поглощения хотя бы 1 фотона в каждой вершине, что соответствует $l_1, l_2 > 0$ или $l_2 > 0, l > 1$.

Теперь можно записать амплитуду процесса в виде суммы по парциальным амплитудам:

$$S = \sum_{l=2}^{\infty} S_l \quad (2.2.20)$$

$$S_l = 16\pi^5 e^2 e^{-id_{p_+p_-} - id_{p_i p_f}} \frac{1}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \sum_{l_2=1}^{\infty} \frac{\delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - \tilde{p}_+ - \tilde{p}_- + lk)}{(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - l_2 k)^2} \times \quad (2.2.21)$$

$$\times \left[\bar{u}_{p_-} H_{\mu, -l_2} v_{-p_+} \right] \left[\bar{u}_{p_f} H'^{\mu}_{-(l-l_2)} u_{p_i} \right] - (p_f \leftrightarrow p_-)$$

Амплитуда, представленная в виде (2.2.20) интересна своим чётким физическим смыслом: каждое слагаемое в этой сумме соответствует определённому числу поглощённых фотонов внешнего поля.

§ 2.3. Амплитуда процесса в поле циркулярно-поляризованной электромагнитной волны

Циркулярно-поляризованной электромагнитной волне соответствует единичное значение параметра эллиптичности волны:

$$\delta = 1 \quad (2.3.1)$$

В этом случае второй аргумент специальных функций L оказывается равным нулю:

$$\begin{aligned} \beta_{p_+p_-} &= 0 \\ \beta_{p_i p_f} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Специальные функции L связаны с функциями Бесселя следующим соотношением [84, 85].

$$L_n(a, 0, b) = \exp(-inb) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \exp(2in'b) J_{n-2n'}(a) J_{n'}(0) = \exp(-inb) J_n(a) \quad (2.3.3)$$

Второе равенство в (2.3.3) верно в силу $J_{n'}(0) = \delta_{n'0}$ для любых целых n' .

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} L_{l_2}(\gamma_{p_+p_-}, 0, \chi_{p_+p_-}) &= \exp(-il_2 \chi_{p_+p_-}) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \exp(2in' \chi_{p_+p_-}) J_{l_2-2n'}(\gamma_{p_+p_-}) J_{n'}(0) = \\ &= \exp(-il_2 \chi_{p_+p_-}) J_{l_2}(\gamma_{p_+p_-}) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$L_l(\gamma_{p_i p_f}, 0, \chi_{p_i p_f}) = \exp(-il_1 \chi_{p_i p_f}) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \exp(2in' \chi_{p_i p_f}) J_{l-2n'}(\gamma_{p_i p_f}) J_{n'}(0) = \exp(-il_1 \chi_{p_i p_f}) J_l(\gamma_{p_i p_f}) \quad (2.3.5)$$

В этом случае коэффициенты H_l и H'_l для циркулярно-поляризованных волн примут следующий вид.

$$\begin{aligned} H_{l_2}^{\nu} &= a^{\nu} \exp(-il_2 \chi_{p_+ p_-}) J_{l_2}(\gamma_{p_+ p_-}) + b_-^{\nu} \exp(-i(l_2 - 1) \chi_{p_+ p_-}) J_{l_2-1}(\gamma_{p_+ p_-}) + \\ &\quad + b_+^{\nu} \exp(-i(l_2 + 1) \chi_{p_+ p_-}) J_{l_2+1}(\gamma_{p_+ p_-}) \\ H_{l_1}^{\mu} &= a^{\mu} \exp(-il_1 \chi_{p_i p_f}) J_{l_1}(\gamma_{p_i p_f}) + b_-^{\mu} \exp(-i(l_1 - 1) \chi_{p_i p_f}) J_{l_1-1}(\gamma_{p_i p_f}) + \\ &\quad + b_+^{\mu} \exp(-i(l_1 + 1) \chi_{p_i p_f}) J_{l_1+1}(\gamma_{p_i p_f}) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

ГЛАВА 3. КИНЕМАТИКА РЕЗОНАНСНОГО РОЖДЕНИЯ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ В СЛУЧАЕ СЛАБЫХ ПОЛЕЙ

§ 3.1. Кинематика в слабом поле

Процесс резонансного рождения электрон-позитронных пар в столкновении ультрарелятивистских электронов с лазерной волной во втором порядке теории возмущений описывается двумя диаграммами Фейнмана (см. рис. 1). В условиях резонанса промежуточный фотон выходит на массовую поверхность (то есть для него выполняется правильный закон дисперсии $q_0^2 = 0$), и процесс рождения электрон-позитронных пар при столкновении электронов с лазерной волной эффективно распадается на последовательно идущие стимулированный лазерным полем комптон-эффект и стимулированный лазерным полем процесс Брейта-Уилера (см. рис. 2).

В этой работе рассматривается кинематика процесса в слабом поле. Слабые поля определяются условием $\eta \ll 1$, поэтому с точностью до η^2 вместо закона сохранения квазиимпульсов волковских функций можно пользоваться

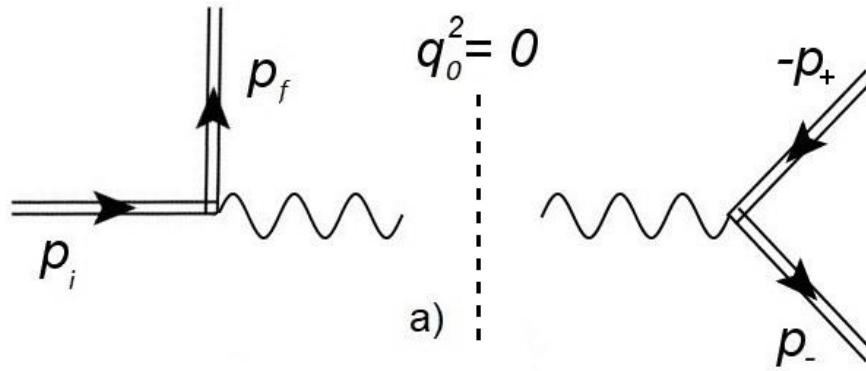


Рис. 2. Диаграмма Фейнмана процесса резонансного рождения электрон-позитронных пар при столкновении электронов с лазерной волной для канала «а». В резонансе процесс эффективно распадается на последовательно протекающие стимулированный лазерным полем комптон-эффект и стимулированный лазерным полем процесс Брейта-Уилера. При этом промежуточный фотон, 4-импульс которого здесь обозначен за q_0 , выходит на массовую поверхность.

законом сохранения 4-импульса (ЗС4И) для обычных кинематических импульсов частиц (см. (1.3.6)). Также в слабых полях многофотонные процессы подавлены, поэтому в дальнейшем рассматриваются процессы с участием 1 фотона из внешнего поля в каждой вершине.

Все частицы, участвующие в процессе, являются ультрарелятивистскими. Далее будет показано, что энергия начального электрона ограничена снизу пороговым значением, имеющим порядок $\varepsilon_{thr} \sim 100 \text{ ГэВ}$, а энергии конечных частиц имеют порядок энергии начального электрона. Это обстоятельство также накладывает свои ограничения на кинематику процесса. Как будет показано, в силу ультрарелятивизма частицы не могут рассеиваться и рождаться под большими углами, поэтому все конечные частицы распространяются в узком конусе относительно направления распространения начального электрона.

Отметим также, что достаточно исследовать кинематику только одного из каналов. Кинематика для второго канала тогда получится заменой индексов ($f \leftrightarrow -$). С учётом этого замечания далее в этой главе рассматривается только канал «а».

§ 3.2. Кинематика стимулированного лазерным полем комптон-эффекта

Изучение кинематики базируется на законах сохранения импульса и энергии частиц, участвующих в процессе. Запишем ЗС4И в первой вершине (см. рис. 2, первая вершина).

$$p_i + k = p_f + q_0 \quad (3.2.1)$$

Здесь k - 4-импульс фотона лазерного поля.

После возведения (3.2.1) в квадрат и использования резонансного условия $q_0^2 = 0$ получим

$$p_i k = p_f q_0 \quad (3.2.2)$$

Подставив q_0 из (3.2.1) в (3.2.2), запишем уравнение на энергию конечного электрона.

$$p_i k = p_i p_f - m^2 + p_f k \quad (3.2.3)$$

Введём углы θ_f и θ_i между направлениями 3-импульсов фотона поля и конечного и начального электронов, соответственно, а также θ_{fi} - угол между направлениями 3-импульсов конечного и начального электронов. Также введём 4-вектора n вида $n_j = (1, \mathbf{n}_j)$, где \mathbf{n}_j - единичный вектор, направленный по 3-импульсу соответствующей частицы. При этом $(1 - \cos \theta_j) = (n n_j)$, где n - соответствующий 4-вектор фотона внешнего поля.

Распишем скалярные произведения в (3.2.3).

$$\begin{aligned} p_i k &= E_i \omega (1 - \cos \theta_i) = E_i \omega (n n_i) \\ p_f k &= E_f \omega (1 - \cos \theta_f) = x_f E_i \omega (n n_f) \approx x_f E_i \omega (n n_i) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$p_f p_i = E_f E_i \left(1 - |\bar{v}_f| |\bar{v}_i| \cos \theta_{fi} \right) \cong E_f E_i \left(\frac{m^2}{2E_f^2} + \frac{m^2}{2E_i^2} + \frac{\theta_{fi}^2}{2} \right) = x_f \frac{m^2}{2} \left(1 + \frac{1}{x_f^2} + \frac{E_i^2}{m^2} \theta_{fi}^2 \right) \quad (3.2.5)$$

Здесь E_f и E_i обозначают соответственно энергии конечного и начального электронов, а ω обозначает энергию фотона лазерного поля. Символом x с соответствующим индексом обозначается энергия частицы в единицах энергии начального электрона, например, $x_f = \frac{E_f}{E_i}$.

В (3.2.5) мы воспользовались разложением скорости ультрарелятивистского электрона по степеням квадрата массы $v \approx 1 - \frac{m^2}{2E^2}$. Также в (3.2.4) и (3.2.5) использован тот факт, что все частицы, кроме фотона лазерного поля, в данном процессе движутся в узком конусе относительно направления движения начального электрона, и, как следствие, углы между этими частицами малы (см. Приложение А), поэтому можно пользоваться разложением косинуса в ряд по степеням угла $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Поделим (3.2.3) на $2m^2$ и подставим туда скалярные произведения (3.2.4), (3.2.5).

$$\frac{\omega(nn_i)}{2m^2} E_i = \frac{x_f}{4} \left(1 + \frac{1}{x_f^2} + 4E_i^2 \frac{\theta_{fi}^2}{4m^2} \right) - \frac{1}{2} + x_f \frac{\omega(nn_i)}{2m^2} E_i \quad (3.2.6)$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \omega_{thr} &= \frac{2m^2}{\omega(nn_i)} \\ \varepsilon_i &= \frac{E_i}{\omega_{thr}} \\ \delta_{fi} &= \frac{\omega_{thr} \theta_{fi}^2}{2m} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

С учётом (3.2.7) уравнение (3.2.6) можно преобразовать к виду

$$x_f^2 (1 + 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2 \delta_{fi}^2) - 2(1 + 2\varepsilon_i)x_f + 1 = 0 \quad (3.2.8)$$

Запишем решения (3.2.8).

$$x_f = \frac{1 + 2\varepsilon_i \pm 2\varepsilon_i \sqrt{(1 - \delta_{fi}^2)}}{1 + 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2 \delta_{fi}^2} \quad (3.2.9)$$

Из вида решения (3.2.9) можно сделать 2 вывода. Во-первых, каждому значению параметра δ_{fi} , кроме $\delta_{fi} = 1$, соответствует 2 значения x_f . Во-вторых, параметр δ_{fi} принимает значения из отрезка

$$\delta_{fi} \in [0, 1] \quad (3.2.10)$$

Решения (3.2.9) уравнения (3.2.8) изображены на рис. 3.

Есть, однако, одно важное обстоятельство, которое возникает при рассмотрении процесса, протекающего во второй вершине диаграммы. Дело в том, что процесс рождения электрон-позитронной пары при взаимодействии промежуточного фотона с фотоном лазерного поля протекает порогово. Это означает, что для возможности протекания процесса во второй вершине и, как следствие, всего процесса в целом промежуточный фотон должен обладать

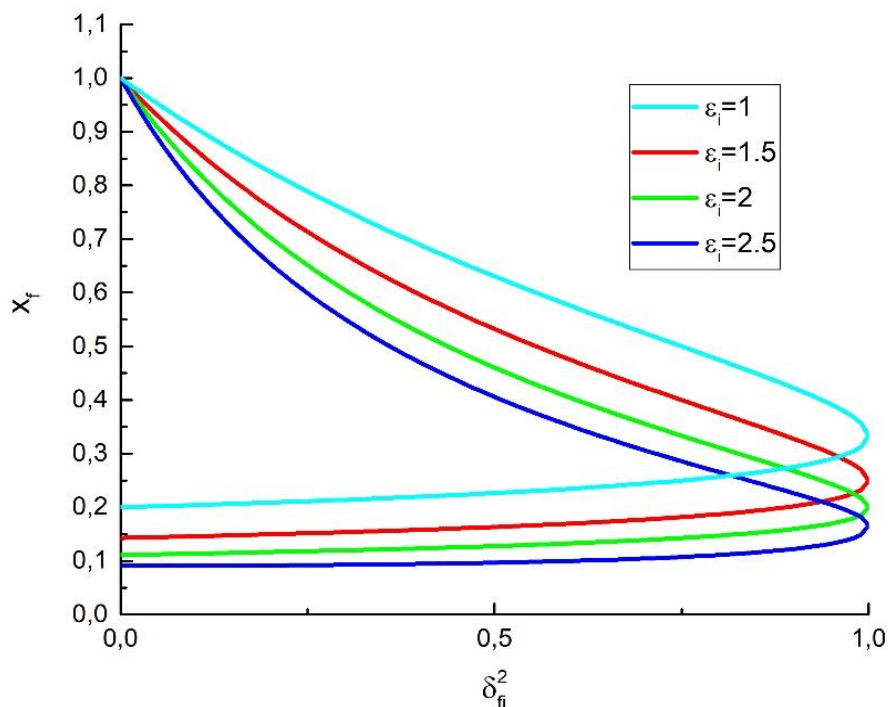


Рис. 3. Зависимость энергии конечного электрона от параметра δ_{fi}^2 при разных значениях энергии начального электрона ε_i .

энергией, выше некоторой минимальной энергии. Это, в свою очередь, накладывает ограничение сверху на энергию конечного электрона, поскольку в первой вершине энергия начального электрона делится между конечным электроном и промежуточным фотоном.

Для существования возможности протекания исследуемого процесса энергия конечного электрона должна удовлетворять следующему условию (см. Приложение Б):

$$x_f \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon_i} \quad (3.2.11)$$

С учётом этого обстоятельства зависимости энергии конечного электрона, изображённые на рис. 3, преобразуются так, как это изображено на рис. 4 и рис. 5. Теперь, с учётом ограничения (3.2.11), при некоторых значениях энергии начального электрона энергия конечного электрона определяется углом его вылета однозначно, а при других значениях энергии начального электрона на

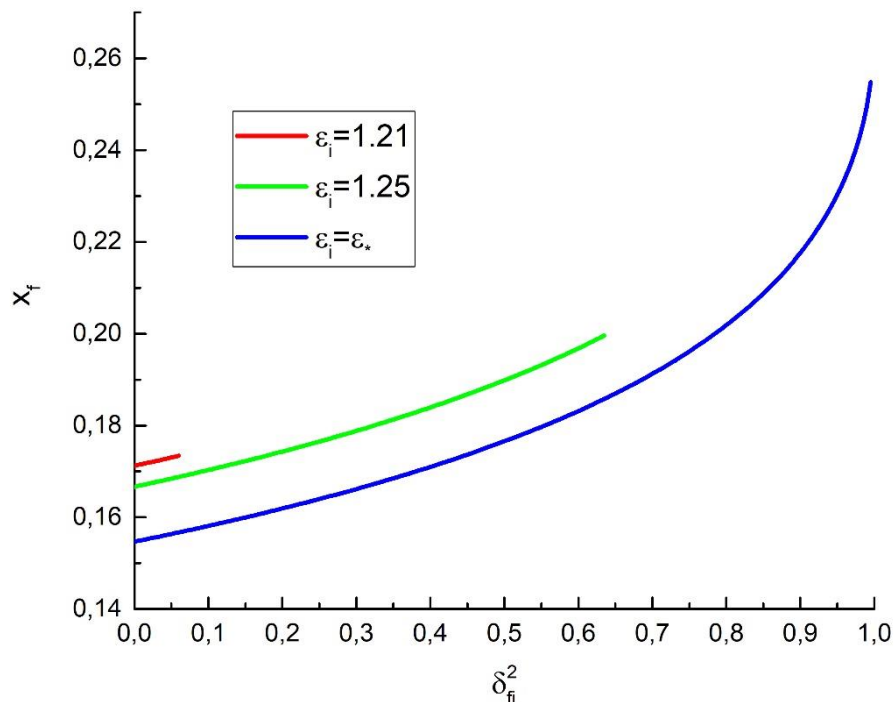


Рис. 4. Энергия конечного электрона при различных значениях энергии начального электрона $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{thr}, \varepsilon_*]$.

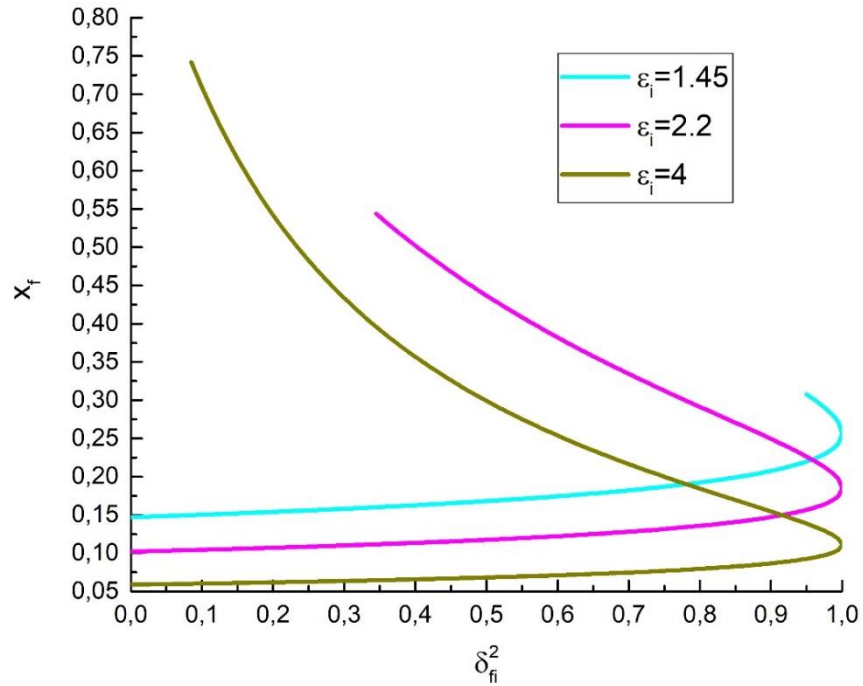


Рис.5. Энергия конечного электрона при различных, больших, значениях энергии начального электрона $\varepsilon_i > \varepsilon_*$.

зависимости $\varepsilon_f(\delta_{fi}^2)$ есть участки, где энергия может принимать 2 значения при одном и том же угле вылета конечного электрона. Эти 2 области энергии начального электрона разделяет значение

$$\varepsilon_* = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1.366 \quad (3.2.12)$$

Как видно из рисунков 4 и 5, при значениях энергии начального электрона, меньших ε_* , энергия конечного электрона при любом значении параметра δ_{fi}^2 определяется однозначно. При бóльших энергиях начального электрона для некоторых (малых) значений параметра δ_{fi}^2 энергия конечного электрона также определяется однозначно, а при остальных (больших) значениях конечный электрон может обладать одной из 2 возможных энергий. Кроме того, чтобы мог быть выполнен 34СИ, конечный электрон не может также обладать и слишком маленькой энергией. Из рис. 3 видно, что наименьшей энергией конечный электрон обладает при $\delta_{fi}^2 = 0$ при выборе меньшей энергии (отрицательная

ветвь) из 2 решений. Поэтому решения могут существовать только в том случае, если это минимальное значение энергии конечного электрона не превосходит верхнюю границу $x_f = 1 - \frac{1}{\varepsilon_i}$. Из этих соображений можно получить значение пороговой энергии начального электрона в процессе:

$$\varepsilon_{thr} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,207 \quad (3.2.13)$$

Перейдём теперь к исследованию кинематики электрона и позитрона пары.

§ 3.3. Кинематика стимулированного лазерным полем процесса Брейта-Уилера

Запишем ЗС4И во второй вершине (см. рис 2, вторая вершина).

$$q_0 + k = p_- + p_+ \quad (3.3.1)$$

После возведения (3.3.1) в квадрат и использования резонансного условия $q_0^2 = 0$ получим

$$q_0 k = m^2 + p_- p_+ \quad (3.3.2)$$

Подставив q_0 из (3.3.1) в (3.3.2), запишем уравнение на энергию позитрона электрон-позитронной пары:

$$p_- k + p_+ k = m^2 + p_- p_+ \quad (3.3.3)$$

Выразим p_+ из общего ЗС4И для всего процесса

$$p_- + p_+ = p_i - p_f + 2k \quad (3.3.4)$$

и подставим в (3.3.3):

$$p_i k - p_f k = p_i p_- - p_f p_- + 2p_- k \quad (3.3.5)$$

Аналогично тому, как это сделано в (3.2.4) и (3.2.5), запишем скалярные произведения:

$$\begin{aligned} p_i k &= E_i \omega (n n_i) \\ p_- k &= x_- E_i \omega (n n_i) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} p_i p_- &= E_i E_- \left(\frac{m^2}{2E_i^2} + \frac{m^2}{2E_-^2} + \frac{\theta_{-i}^2}{2} \right) = x_- \frac{m^2}{2} \left(1 + \frac{1}{x_-^2} + \frac{E_i^2 \theta_{-i}^2}{m^2} \right) \\ p_f p_- &= E_f E_- \left(\frac{m^2}{2E_f^2} + \frac{m^2}{2E_-^2} + \frac{\theta_{f-}^2}{2} \right) = x_f x_- \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{x_f^2} + \frac{1}{x_-^2} + \frac{E_i^2 \theta_{f-}^2}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Здесь, как и ранее, введены следующие обозначения.

$$\begin{aligned} x_f &= \frac{E_f}{E_i} \\ x_- &= \frac{E_-}{E_i} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} \theta_{-i} &= \angle(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}_i) \\ \theta_{f-} &= \angle(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_-) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Угол θ_{f-} здесь надо понимать как обозначение для следующего выражения.

$$\theta_{f-}^2 = \theta_{f_i}^2 + \theta_{-i}^2 - 2\theta_{f_i}\theta_{-i} \cos(\varphi_{f_i} - \varphi_{-i}) \quad (3.3.10)$$

В (3.3.10) φ_{f_i} и φ_{-i} - азимутальные углы 3-импульсов конечного электрона и позитрона, отсчитанные, например, от проекции 3-импульса лазерного поля на плоскость, перпендикулярную 3-импульсу начального электрона.

Также в (3.3.6) мы снова воспользовались приближением $(n n_f) \approx (n n_-) \approx (n n_i)$.

Подставив в (3.3.5) скалярные произведения (3.3.6), (3.3.7) и поделив на $2m^2$ получим

$$\varepsilon_i - x_f \varepsilon_i = x_- \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x_-^2} + 4\varepsilon_i^2 \frac{\omega_{thr}^2 \theta_{-i}^2}{4m^2} \right) - x_f x_- \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x_f^2} + \frac{1}{x_-^2} + 4\varepsilon_i^2 \frac{\omega_{thr}^2 \theta_{f-}^2}{4m^2} \right) + 2x_- \varepsilon_i \quad (3.3.11)$$

Введём обозначения, аналогичные (3.2.7).

$$\begin{aligned}\delta_{-i}^2 &= \frac{\omega_{thr}^2 \theta_{-i}^2}{4m^2} \\ \delta_{f-}^2 &= \frac{\omega_{thr}^2 \theta_{f-}^2}{4m^2}\end{aligned}\tag{3.3.12}$$

Обозначение δ_{f-}^2 , как и θ_{f-}^2 , надо понимать в следующем смысле.

$$\delta_{f-}^2 = \delta_{fi}^2 + \delta_{-i}^2 - 2\delta_{fi}\delta_{-i}\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})\tag{3.3.13}$$

В новых обозначениях уравнение (3.3.11) можно привести к следующему виду.

$$\left(1 + 4\varepsilon_i^2 \delta_{-i}^2 - \frac{1}{x_f} - 4\varepsilon_i^2 \delta_{f-}^2 x_f + 8\varepsilon_i\right) x_-^2 - 4\varepsilon_i(1-x_f)x_- + (1-x_f) = 0\tag{3.3.14}$$

Обозначим за D дискриминант уравнения (3.3.14).

$$D = 16\varepsilon_i^2(1-x_f)^2 - 4(1-x_f)\left(1 + 4\varepsilon_i^2 \delta_{-i}^2 - \frac{1}{x_f} - 4\varepsilon_i^2 \delta_{f-}^2 x_f + 8\varepsilon_i\right)\tag{3.3.15}$$

Наконец, запишем решения – энергии электрона пары.

$$x_- = \frac{4\varepsilon_i(1-x_f) \pm \sqrt{D}}{2\left(1 + 4\varepsilon_i^2 \delta_{-i}^2 - \frac{1}{x_f} - 4\varepsilon_i^2 \delta_{f-}^2 x_f + 8\varepsilon_i\right)}\tag{3.3.16}$$

Здесь x_f также надо понимать не как независимую переменную, а как функцию переменных δ_{fi}^2 и ε_i (см. (3.2.9)).

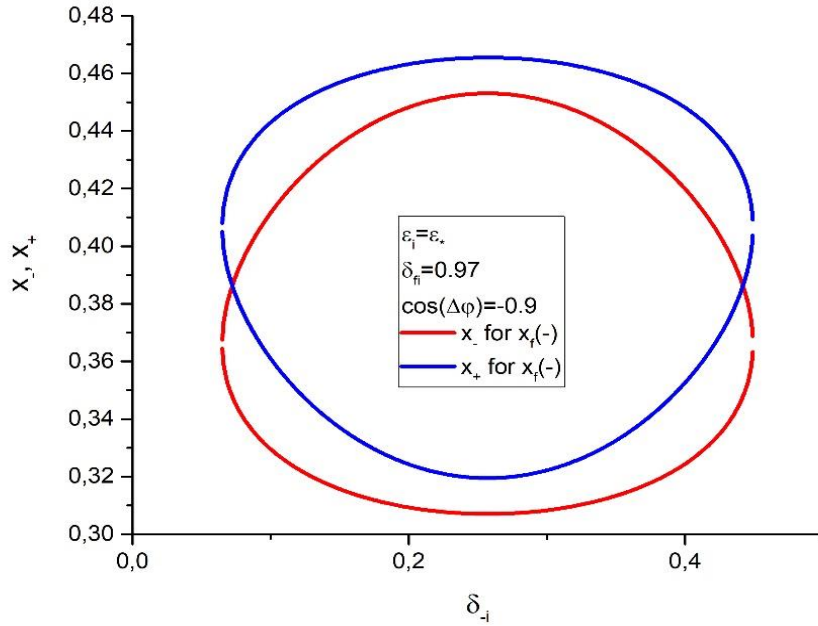


Рис. 6. Энергии электрона (красный) и позитрона (синий) пары как функции параметра δ_{-i} при энергии начального электрона $\varepsilon_i = \varepsilon_*$, $\delta_{fi} = 0.97$, энергии конечного электрона $x_f(0.97) \approx 0.23$ и $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = -0.9$.

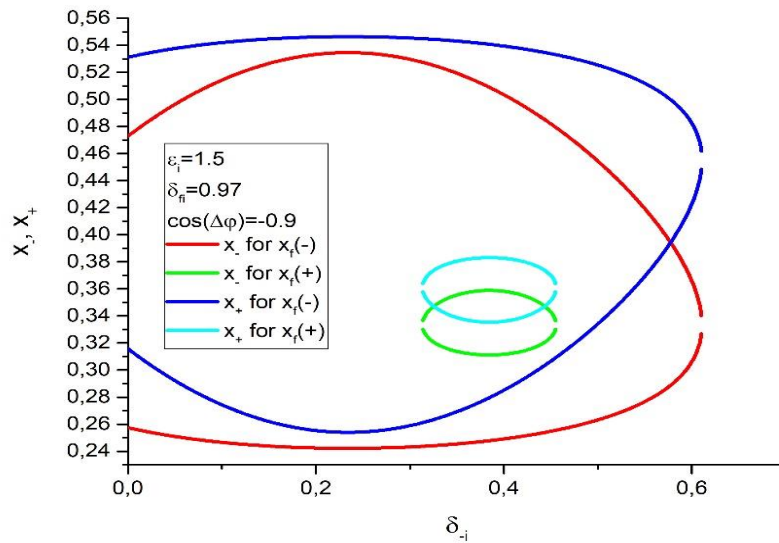


Рис. 7. Энергии электрона (красный) и позитрона (синий) пары как функции параметра δ_{-i} при энергии конечного электрона с нижней ветви энергии $x_f(0.97; -) \approx 0.21$ и энергии электрона (зелёный) и позитрона (бирюзовый) пары как функции параметра δ_{-i} при энергии конечного электрона с верхней ветви энергии $x_f(0.97; +) \approx 0.31$ при энергии начального электрона $\varepsilon_i = \varepsilon_*$, $\delta_{fi} = 0.97$, и $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = -0.9$.

Энергию позитрона $x_+ = \frac{E_+}{E_i}$ можно найти, воспользовавшись общим

законом сохранения энергии (ЗСЭ):

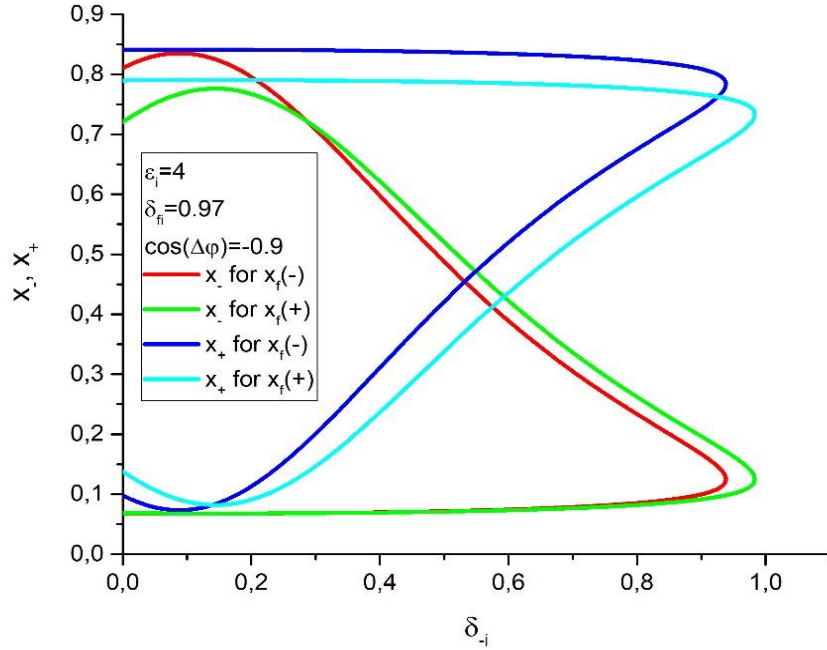


Рис. 8. Энергии электрона (красный) и позитрона (синий) пары как функции параметра δ_{-i} при энергии конечного электрона с нижней ветви энергии $x_f(0.97; -) \approx 0.09$ и энергии позитрона (зелёный) и электрона (бирюзовый) пары как функции параметра δ_{-i} при энергии конечного электрона с верхней ветви энергии $x_f(0.97; +) \approx 0.14$ при энергии начального электрона $\varepsilon_i = 4$, $\delta_{fi} = 0.97$, и $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = -0.9$.

$$x_+ \approx 1 - x_f - x_- \quad (3.3.17)$$

Из (3.3.17) и (3.3.16) с учётом выражений для x_f и D получаем:

$$x_+ = 1 - x_f - \frac{4\varepsilon_i(1 - x_f) \pm \sqrt{D}}{2 \left(1 + 4\varepsilon_i^2 \delta_{-i}^2 - \frac{1}{x_f} - 4\varepsilon_i^2 \delta_{f-}^2 x_f + 8\varepsilon_i \right)} \quad (3.3.18)$$

Энергии электрона и позитрона пары как функции параметра δ_{-i} изображены на рисунках 6, 7 и 8. На них можно последовательно проследить за тем, как меняется картина при увеличении энергии начального электрона. При небольшой энергии начального электрона (рис. 6) частицы пары не могут вылететь не только под большим углом, но также и под слишком маленьким, т.е. существует интервал углов вылета, начинающийся не с нулевого угла. Кроме того, на этом же рисунке видно, что для небольших энергий начального электрона может существовать только по 2 ветви энергии для каждой из частиц

пары. На рисунке 7, после небольшого увеличения энергии начального электрона у частиц пары появилась возможность вылететь на нулевой угол, а также появились 2 дополнительные ветви энергии частиц пары. Их появление связано с наличием второй ветви энергии конечного электрона, реализация которой становится возможной при увеличении энергии начального электрона. В целом, поведение этих двух дополнительных ветвей энергии для каждой из частиц пары напоминает поведение двух первых ветвей энергии с отставанием по энергии. На рисунке 8, при ещё большей энергии начального электрона, энергии электрона пары как функции параметра δ_{-i} начинают напоминать зависимости энергии конечного электрона от параметра δ_{fi} .

Проанализируем далее, при каких значениях параметров ε_i , δ_{fi} , δ_{-i} и $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ вообще могут существовать решения (3.3.16).

§ 3.4. Ограничение параметров стимулированного лазерным полем процесса Брейта-Уилера

Для существования решений (3.3.16) необходимо потребовать

$$D \geq 0, \quad (3.4.1)$$

где D даётся формулой (3.3.15).

С учётом (3.3.13) условие (3.4.1) примет вид

$$4\varepsilon_i^2(1-x_f)\delta_{-i}^2 + 8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{fi} \cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})\delta_{-i} + \left[1 - \frac{1}{x_f} - 4\varepsilon_i^2 x_f \delta_{fi}^2 + 8\varepsilon_i - 4\varepsilon_i^2(1-x_f) \right] \leq 0 \quad (3.4.2)$$

Решим (3.4.2) относительно угла δ_{-i} .

Запишем дискриминант D_2 соответствующего неравенству (3.4.2) уравнения.

$$D_2 = 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) - 16\varepsilon_i^2 (1 - x_f) \left[1 - \frac{1}{x_f} - 4\varepsilon_i^2 x_f \delta_{fi}^2 + 8\varepsilon_i - 4\varepsilon_i^2 (1 - x_f) \right] \quad (3.4.3)$$

Выражение (3.4.3) можно упростить, если воспользоваться уравнением на энергию конечного электрона (3.2.8):

$$D_2 = 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) - 16\varepsilon_i^2 (1 - x_f) \left[(2\varepsilon_i + 1)^2 x_f - (2\varepsilon_i - 1)^2 \right] \quad (3.4.4)$$

Левая часть (3.4.2) равна нулю в двух точках:

$$\delta_{-i}^{(1,2)} = \frac{-8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{fi} \cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) \pm \sqrt{D_2}}{8\varepsilon_i^2 (1 - x_f)} \quad (3.4.5)$$

Поскольку параметр δ_{-i} положительный, возможны 3 ситуации:

1. В случае $D_2 < 0$ решений (3.4.5) нет, а значит неравенство (3.4.2) не может быть выполнено, и, следовательно, процесс идти не может.
2. Если $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) \geq 0$, то при $D_2 < 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ неотрицательных решений (3.4.5) нет, а при $D_2 \geq 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ есть одно такое решение.
3. Если $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) < 0$, то при $0 < D_2 < 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ неотрицательных решений два, а при $D_2 \geq 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ есть одно неотрицательное решение.

Таким образом необходимо сравнить D_2 с двумя величинами: 0 и $64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$.

Начнём со сравнения D_2 с 0.

Решим уравнение $D_2 = 0$ относительно $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$:

$$64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) - 16\varepsilon_i^2 (1 - x_f) \left[(2\varepsilon_i + 1)^2 x_f - (2\varepsilon_i - 1)^2 \right] = 0 \quad (3.4.6)$$

Его решения имеют следующий вид.

$$\cos(\varphi_{\bar{f}_i} - \varphi_{-i}) = \pm \sqrt{\frac{(1-x_f) \left[(2\varepsilon_i + 1)^2 x_f - (2\varepsilon_i - 1)^2 \right]}{4\varepsilon_i^2 x_f^2 \delta_{\bar{f}_i}^2}} \quad (3.4.7)$$

Для существования этих решений необходимо потребовать

$$\frac{(1-x_f) \left[(2\varepsilon_i + 1)^2 x_f - (2\varepsilon_i - 1)^2 \right]}{4\varepsilon_i^2 x_f^2 \delta_{\bar{f}_i}^2} \geq 0, \quad (3.4.8)$$

что эквивалентно неравенству

$$x_f \geq \left(\frac{2\varepsilon_i - 1}{2\varepsilon_i + 1} \right)^2 \quad (3.4.9)$$

Рассмотрим для начала положительную ветвь x_f (см. (3.2.9)):

$$x_f = \frac{1 + 2\varepsilon_i + 2\varepsilon_i \sqrt{(1 - \delta_{\bar{f}_i}^2)}}{1 + 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2 \delta_{\bar{f}_i}^2} \quad (3.4.10)$$

Для (3.4.10) неравенство (3.4.9) эквивалентно (с учётом $\delta_{\bar{f}_i} \in [0,1]$) следующей системе.

$$\left[\begin{array}{l} \delta_{\bar{f}_i}^2 \leq \frac{8(-1 - 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2)}{(2\varepsilon_i - 1)^4} \\ \delta_{\bar{f}_i}^2 \geq \frac{3 + 12\varepsilon_i - 4\varepsilon_i^2}{2\varepsilon_i(2\varepsilon_i - 1)^2} \\ \delta_{\bar{f}_i}^2 < \frac{3 + 12\varepsilon_i - 4\varepsilon_i^2}{2\varepsilon_i(2\varepsilon_i - 1)^2} \end{array} \right. \quad (3.4.11)$$

Для отрицательной ветви x_f

$$x_f = \frac{1 + 2\varepsilon_i - 2\varepsilon_i \sqrt{(1 - \delta_{\bar{f}_i}^2)}}{1 + 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2 \delta_{\bar{f}_i}^2} \quad (3.4.12)$$

Получим систему

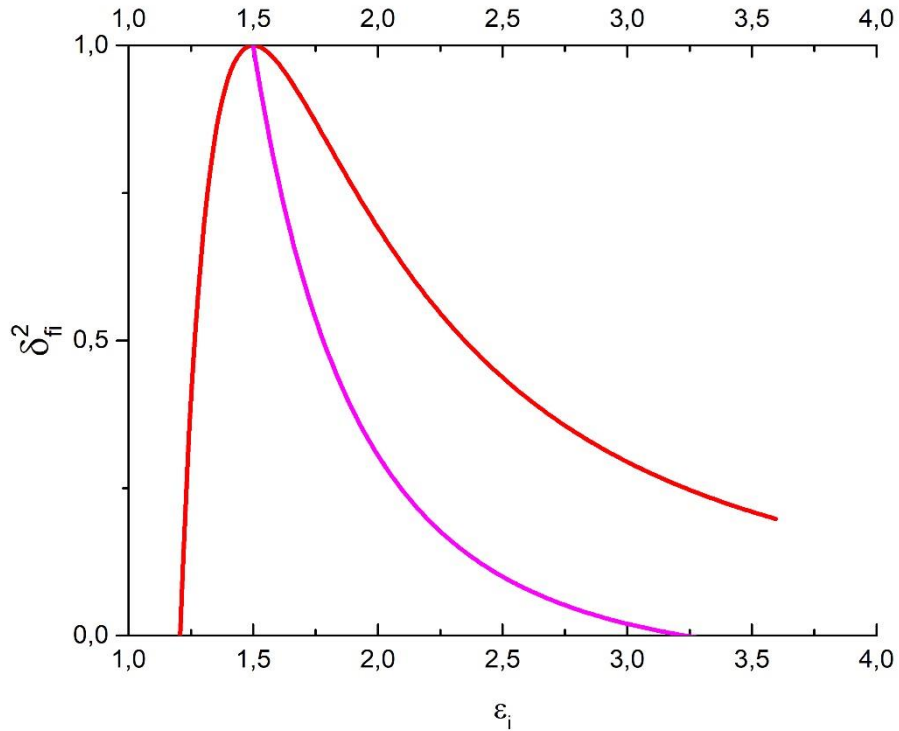


Рис. 9. Условия существования решений (3.4.7). Красная кривая соответствует первому неравенству в системах (3.4.11) и (3.4.13), а фиолетовая – второму.

$$\begin{cases} \delta_{fi}^2 \geq \frac{8(-1-4\varepsilon_i+4\varepsilon_i^2)}{(2\varepsilon_i-1)^4} \\ \delta_{fi}^2 \leq \frac{3+12\varepsilon_i-4\varepsilon_i^2}{2\varepsilon_i(2\varepsilon_i-1)^2} \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Системы (3.4.11) и (3.4.13) изображены на рисунке 9. Красной кривой соответствует первое условие из каждой системы, а фиолетовой – второе. Красная и фиолетовая кривые пересекаются в точке (1.5,1). Напомним, что положительная ветвь x_f существует в области $\varepsilon_i \geq \varepsilon_*$. Согласно этому рисунку, для положительной ветви x_f в области энергий $\varepsilon_i \in [\varepsilon_*, 1.5]$ для любого угла δ_{fi}^2 и в области энергий $\varepsilon_i > 1.5$ для углов δ_{fi}^2 , находящихся под красной кривой процесс может идти только для модуля значения косинуса, большего определённого, а при $\varepsilon_i > 1.5$ в области над красной кривой – для любого значения косинуса. Для отрицательной ветви x_f при энергиях начального электрона $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{thr}, 1.5]$ в области над красной кривой процесс может идти только для модуля значения

косинуса, большего определённого, а при $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{thr}, 1.5]$ в области под красной кривой или при $\varepsilon_i > 1.5$ процесс может идти при любом значении косинуса.

Кроме условия (3.4.8) необходимо также учесть область значений косинуса $|\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})| \leq 1$, что соответствует

$$\frac{(1-x_f) \left[(2\varepsilon_i + 1)^2 x_f - (2\varepsilon_i - 1)^2 \right]}{4\varepsilon_i^2 x_f^2 \delta_{fi}^2} \leq 1 \quad (3.4.14)$$

Условие (3.4.14) с учётом (3.2.8) преобразуется к виду

$$x_f \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon_i}, \quad (3.4.15)$$

с чем мы уже встречались в § 3.2.

Рассмотрим положительную ветвь x_f . Для неё условие (3.4.15) в области $\varepsilon_i \geq \varepsilon_*$ сводится к неравенству

$$\delta_{fi}^2 \geq \frac{-1 - 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2}{4(\varepsilon_i - 1)^2 \varepsilon_i^2} \quad (3.4.16)$$

Для отрицательной ветви x_f условие (3.4.15) эквивалентно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{fi}^2 > \frac{1 + 4\varepsilon_i - 2\varepsilon_i^2}{4\varepsilon_i^2 (\varepsilon_i - 1)} \\ \delta_{fi}^2 \leq \frac{1 + 4\varepsilon_i - 2\varepsilon_i^2}{4\varepsilon_i^2 (\varepsilon_i - 1)} \\ \delta_{fi}^2 \leq \frac{-1 - 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2}{4(\varepsilon_i - 1)^2 \varepsilon_i^2} \end{array} \right. \quad (3.4.17)$$

Неравенства (3.4.16), (3.4.17) в дополнение к неравенствам (3.4.11) и (3.4.13) изображены на рисунке 10.

Согласно этому рисунку, для отрицательной ветви x_f на участке $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{thr}, \varepsilon_*]$ допустимая область параметров находится под зелёной кривой (то есть при небольших энергиях максимальный угол δ_{fi} для отрицательной ветви x_f ограничен сверху и меньше 1, что мы уже видели в § 3.2), при $\varepsilon_i > \varepsilon_*$ угол δ_{fi} для отрицательной ветви x_f может быть любым из отрезка $\delta_{fi} \in [0, 1]$. Для положительной ветви x_f на отрезке $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{thr}, \varepsilon_*]$ вообще нет допустимых областей параметров, при которых процесс может идти, а для $\varepsilon_i > \varepsilon_*$ эта область находится над зелёной кривой. Как и ранее, для положительной ветви x_f в области параметров под красной кривой процесс может идти только для модуля значения косинуса, большего определённого, а над красной кривой – для любого значения косинуса. Для отрицательной ветви x_f процесс может идти при любом значении косинуса.

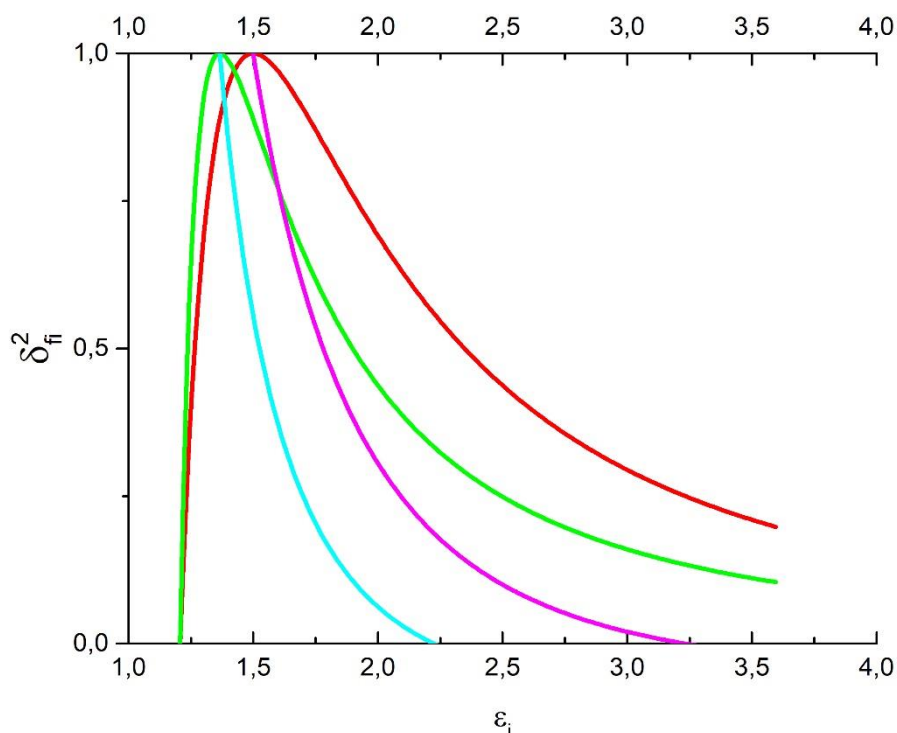


Рис. 10. Условия существования решений (3.4.7) а также условие (3.4.14). Красная кривая соответствует первому неравенству в системах (3.4.11) и (3.4.13), а фиолетовая – второму. Зелёная кривая соответствует неравенству (3.4.16), а фиолетовая – первому неравенству в (3.4.17).

Теперь сравним D_2 с величиной $64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$. Для этого необходимо решить уравнение

$$D_2 = 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) \quad (3.4.18)$$

Оно эквивалентно уравнению

$$x_f = \frac{(2\varepsilon_i - 1)^2}{(2\varepsilon_i + 1)^2}, \quad (3.4.19)$$

соответствующее неравенству (3.4.9), которое было разобрано в предыдущем случае.

Теперь можно проанализировать 3 различных ситуации по отношению к параметру δ_{-i} , о которых шла речь в начале этого параграфа.

1. $D_2 < 0$.

Как показано выше, это условие эквивалентно условию на косинус (3.4.7). Для положительной ветви x_f поверхность (3.4.7) а также плоскости $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = \{-1, 0, 1\}$ изображены на рисунке 11. Синие плоскости соответствуют равенствам $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{+i}) = \pm 1$, зелёная - $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{+i}) = 0$. Пересечения красной поверхности и синих плоскостей соответствуют зелёной кривой в области $\varepsilon_i \geq \varepsilon_*$ (см. Рис. 10), а пересечению этой поверхности с зелёной плоскостью соответствует красная кривая с рисунка 10 в области $\varepsilon_i > 1.5$. В области внутри красной поверхности $D_2 < 0$. Области, являющиеся внутренностью части пространства, ограниченной изображённой на рисунке красной поверхностью, и до пересечения с плоскостями $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{+i}) = \pm 1$ соответствуют неравенству $D_2 < 0$, где решений уравнения (3.3.14) нет.

Для отрицательной ветви x_f поверхность (3.4.7) а также плоскости $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = \{-1, 0, 1\}$ изображены на рисунке 12. Так же, как и в предыдущем

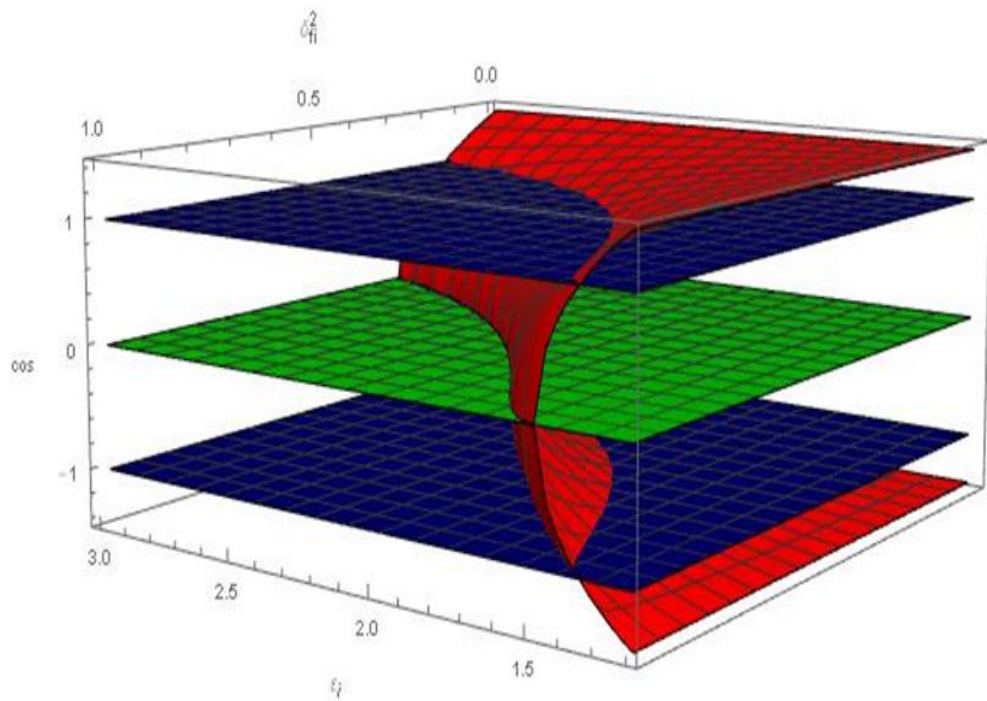


Рис. 11. Поверхность (красный), соответствующая (3.4.7) для положительной ветви x_f . Также изображены плоскости

случае: внутри области, ограниченной красной поверхностью и синими плоскостями $D_2 < 0$ и решений нет.

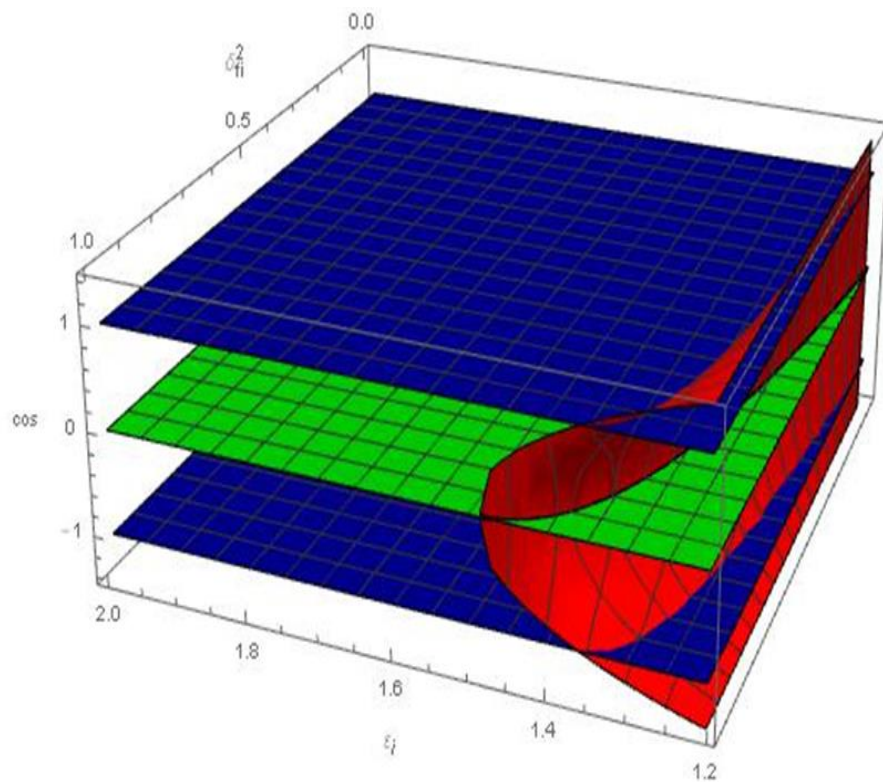


Рис. 12. Поверхность (красный), соответствующая (3.4.7) для отрицательной ветви x_f . Также изображены плоскости $\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = \pm 1$.

2. Рассмотрим $\cos(\varphi_{i_1} - \varphi_{+i}) > 0$.

Для $\cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) > 0$ и положительной ветви x_f энергии электрона пары существуют в области углов

$$\delta_{-i} \in [0, \frac{-8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{\bar{i}} \cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) + \sqrt{D_2}}{8\varepsilon_i^2 (1-x_f)}] \quad (3.4.20)$$

Это область углов δ_{-i} соответствует области энергий $\varepsilon_i > 1.5$ для углов $\delta_{\bar{i}}^2$, находящихся над красной кривой на рисунка 10.

Для случая $\cos(\varphi_{i_1} - \varphi_{+i}) > 0$ и отрицательной ветви x_f энергии электрона пары существуют в области углов

$$\delta_{-i} \in [0, \frac{-8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{\bar{i}} \cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) + \sqrt{D_2}}{8\varepsilon_i^2 (1-x_f)}] \quad (3.4.21)$$

Эта область углов δ_{-i} соответствует области энергий $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{thr}, 1.5]$ в области под красной кривой или области $\varepsilon_i > 1.5$.

Косинус $\cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i})$ в этом случае может принимать любые положительные значения.

3. Рассмотрим $\cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) < 0$.

Для этого случая справедливо то же, что и в случае $\cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) > 0$, но, кроме этого, появляется и новая особенность. При $0 < D_2 < 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{\bar{i}}^2 \cos^2(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i})$, то есть в граничной области, где поверхность

$\cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) = \pm \sqrt{\frac{(1-x_f)[(2\varepsilon_i+1)^2 x_f - (2\varepsilon_i-1)^2]}{4\varepsilon_i^2 x_f^2 \delta_{\bar{i}}^2}}$ лежит между -1 и 1, в области

параметров снаружи этой границы энергии электрона пары лежат в интервале

$$\delta_{-i} \in [\frac{-8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{\bar{i}} \cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) - \sqrt{D_2}}{8\varepsilon_i^2 (1-x_f)}, \frac{-8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{\bar{i}} \cos(\varphi_{\bar{i}} - \varphi_{-i}) + \sqrt{D_2}}{8\varepsilon_i^2 (1-x_f)}] \quad (3.4.22)$$

Это область углов δ_{-i} соответствует области над зелёной кривой на рисунке 10 для $\varepsilon_i \in [\varepsilon_*, 1.5]$ и области между красной и зелёной кривыми для $\varepsilon_i > 1.5$ для положительной ветви x_f и области между красной и зелёной кривыми для $\varepsilon_i \in [\varepsilon_{hr}, 1.5]$ для отрицательной ветви x_f .

Завершим анализ ограничений на параметры процесса нахождением интервала изменения угла δ_{-i} .

Найдём максимальное значение величины

$$\delta_{-i}^{(2)} = \frac{-8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{fi} \cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) + \sqrt{D_2}}{8\varepsilon_i^2 (1 - x_f)} \quad (3.4.23)$$

Очевидно, выражение (3.4.23) принимает наибольшее значение при условии

$$\cos(\varphi_{fi} - \varphi_{-i}) = -1, \quad (3.4.24)$$

поэтому далее интересуемся максимумом выражения

$$\delta'_{-i} = \frac{8\varepsilon_i^2 x_f \delta_{fi} + \sqrt{D'_2}}{8\varepsilon_i^2 (1 - x_f)}, \quad (3.4.25)$$

где

$$D'_2 = 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 - 16\varepsilon_i^2 (1 - x_f) \left[(2\varepsilon_i + 1)^2 x_f - (2\varepsilon_i - 1)^2 \right] \quad (3.4.26)$$

С учётом (3.2.8) выражение (3.4.25) преобразуется к виду

$$\delta'_{-i} = \frac{2\varepsilon_i x_f \delta_{fi} + \sqrt{(2\varepsilon_i x_f - 1)^2 + (2\varepsilon_i - 1)^2 - 2(1 - x_f)}}{2\varepsilon_i (1 - x_f)} \quad (3.4.27)$$

Рассмотрим отрицательную ветвь x_f .

Заметим, что максимум выражения (3.4.27) достигается, когда δ_{fi} и x_f принимают наибольшие значения, что в случае отрицательной ветви x_f выполняется одновременно (см. Рис. 4).

В этом случае мы выбираем

$$\begin{aligned} \delta_{fi} &= 1 \\ x_f &= \frac{1}{1+2\varepsilon_i} \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

После подстановки (3.4.28) в (3.4.27) получаем

$$\delta_{-i}'' = \frac{1}{2\varepsilon_i} \left[1 + \sqrt{(2\varepsilon_i - 1)^2 - 3} \right], \quad (3.4.29)$$

Которое принимает максимальное значение $\delta_{-i}'' = 1$ при $\varepsilon_i \rightarrow \infty$.

Таким образом в случае отрицательной ветви x_f угол электрона пары ограничен отрезком

$$\delta_{-i} \in [0, 1] \quad (3.4.30)$$

Рассмотрим теперь положительную ветвь x_f .

Можно показать, что выражение (3.4.27) для положительной ветви x_f максимизируется, когда угол δ_{fi} принимает наименьшее возможное значение. В то же время понятно, что в случае $D_2 \geq 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ максимальный угол δ_{-i} будет бóльшим, чем в случае $D_2 < 64\varepsilon_i^4 x_f^2 \delta_{fi}^2 \cos^2(\varphi_{fi} - \varphi_{-i})$ (см. (3.4.5)). С учётом этих двух требований получим, что максимум δ_{-i} достигается на кривой

$$\delta_{fi}^2 = \frac{8(-1 - 4\varepsilon_i + 4\varepsilon_i^2)}{(2\varepsilon_i - 1)^4} \quad (3.4.31)$$

Подставляя (3.4.31) в (3.4.27), получим функцию ε_i , монотонно возрастающую с ростом ε_i . Предел этой функции при $\varepsilon_i \rightarrow \infty$ даёт результат $\sqrt{2}$.

Таким образом, для положительной ветви x_f угол δ_{-i} может принимать значения из отрезка

$$\delta_{f_i} \in [0, \sqrt{2}] \quad (3.4.32)$$

§ 3.5. Амплитуда в слабом циркулярно-поляризованном поле

Преобразуем амплитуду, полученную в третьем параграфе главы 2, для случая слабой циркулярно-поляризованной волны. Слабое поле соответствует следующему соотношению.

$$\eta \ll 1 \quad (3.5.1)$$

В этом случае вторым слагаемым в выражении для коэффициентов a (см. (2.2.3)) можно пренебречь:

$$\begin{aligned} a^\nu &\approx \gamma^\nu \\ a'^\mu &\approx \gamma^\mu \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Это не единственное упрощение в случае слабого. В силу соотношения (3.5.1) можно разложить функции Бесселя в (2.3.6) по малому параметру η , поскольку аргументы функций Бесселя $\gamma_{p_+, p_-}, \gamma_{p_i, p_f} \sim \eta$ (см. (2.2.8)). Выполним это разложение в амплитудах M и M' (см. (2.2.14), (2.2.15)).

$$\begin{aligned} M^\nu &= (2\pi)^4 e^{-id_{p_+, p_-}} \sum_{l_2=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &\gamma^\nu L_{-l_2}(\gamma_{p_+, p_-}, 0, \chi_{p_+, p_-}) + \\ &+ b_-^\nu L_{-l_2-1}(\gamma_{p_+, p_-}, 0, \chi_{p_+, p_-}) + \\ &+ b_+^\nu L_{-l_2+1}(\gamma_{p_+, p_-}, 0, \chi_{p_+, p_-}) \end{aligned} \right) \delta^{(4)}(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1 - l_2 k) \\ M'^\mu &= (2\pi)^4 e^{-id_{p_i, p_f}} \sum_{l_1=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &\gamma^\mu L_{-l_1}(\gamma_{p_i, p_f}, 0, \chi_{p_i, p_f}) + \\ &+ b_-'^\mu L_{-l_1-1}(\gamma_{p_i, p_f}, 0, \chi_{p_i, p_f}) + \\ &+ b_+'^\mu L_{-l_1+1}(\gamma_{p_i, p_f}, 0, \chi_{p_i, p_f}) \end{aligned} \right) \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1 + l_1 k) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (3.5.3) в отдельности.

$$\begin{aligned}
\sum_{l_2=1}^{\infty} \gamma^{\nu} L_{-l_2}(\gamma_{p_+p_-}, 0, \chi_{p_+p_-}) &= \sum_{l_2=1}^{\infty} \gamma^{\nu} \exp(il_2 \chi_{p_+p_-}) J_{-l_2}(\gamma_{p_+p_-}) \approx -\gamma^{\nu} e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} \\
\sum_{l_2=1}^{\infty} b_-^{\nu} L_{-l_2-1}(\gamma_{p_+p_-}, 0, \chi_{p_+p_-}) &= \sum_{l_2=1}^{\infty} b_-^{\nu} \exp(i(l_2+1)\chi_{p_+p_-}) J_{-l_2-1}(\gamma_{p_+p_-}) \approx b_-^{\nu} e^{2i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}^2}{8} \approx 0 \quad (3.5.4) \\
\sum_{l_2=1}^{\infty} b_+^{\nu} L_{-l_2+1}(\gamma_{p_+p_-}, 0, \chi_{p_+p_-}) &= \sum_{l_2=1}^{\infty} b_+^{\nu} \exp(i(l_2-1)\chi_{p_+p_-}) J_{-l_2+1}(\gamma_{p_+p_-}) \approx b_+^{\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l_1=1}^{\infty} \gamma^{\mu} L_{-l_1}(\gamma_{p_i p_f}, 0, \chi_{p_i p_f}) &= \sum_{l_1=1}^{\infty} \gamma^{\mu} \exp(il_1 \chi_{p_i p_f}) J_{-l_1}(\gamma_{p_i p_f}) \approx -\gamma^{\mu} e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} \\
\sum_{l_1=1}^{\infty} b_-^{\mu} L_{-l_1-1}(\gamma_{p_i p_f}, 0, \chi_{p_i p_f}) &= \sum_{l_1=1}^{\infty} b_-^{\mu} \exp(i(l_1+1)\chi_{p_i p_f}) J_{-l_1-1}(\gamma_{p_i p_f}) \approx b_-^{\mu} e^{2i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}^2}{8} \approx 0 \quad (3.5.5) \\
\sum_{l_1=1}^{\infty} b_+^{\mu} L_{-l_1+1}(\gamma_{p_i p_f}, 0, \chi_{p_i p_f}) &= \sum_{l_1=1}^{\infty} b_+^{\mu} \exp(i(l_1-1)\chi_{p_i p_f}) J_{-l_1+1}(\gamma_{p_i p_f}) \approx b_+^{\mu}
\end{aligned}$$

В (3.5.4) и (3.5.5) главный вклад вносят функции Бесселя с малым индексом, поэтому в суммах по индексам l_1 и l_2 остаётся по 1 слагаемому. Таким образом,

$$\begin{aligned}
M^{\nu} &\approx (2\pi)^4 e^{-id_{p_+p_-}} \left(-\gamma^{\nu} e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} + b_+^{\nu} \right) \delta^{(4)}(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1 - k) \\
M^{\mu} &\approx (2\pi)^4 e^{-id_{p_i p_f}} \left(-\gamma^{\mu} e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} + b_+^{\mu} \right) \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1 + k)
\end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Подставив теперь (3.5.6) в (2.2.17) и проинтегрировав по 4-импульсу промежуточного фотона с помощью δ -функции, получим окончательное выражение для амплитуды процесса в поле слабой циркулярно-поляризованной электромагнитной волны.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{16\pi^5 e^2 e^{-id_{p_+p_-} - id_{p_i p_f}}}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \left(\bar{u}_{p_-} \left(-\gamma_{\mu} e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} + b_{+;\mu} \right) v_{-p_+} \right) \left(\bar{u}_{p_f} \left(-\gamma^{\mu} e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} + b_+^{\mu} \right) u_{p_i} \right) \times \\
&\quad \times \frac{1}{(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f + k)^2} \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - \tilde{p}_+ - \tilde{p}_- + 2k) - (p_f \leftrightarrow p_-)
\end{aligned} \quad (3.5.7)$$

ГЛАВА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (В ЕДИНИЦУ ВРЕМЕНИ) ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ ПАР ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ С ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНОЙ В СЛУЧАЕ СЛАБЫХ ПОЛЕЙ

§ 4.1. Общий вид дифференциальной вероятности

Оценим величину дифференциальной вероятности (в единицу времени) процесса резонансного рождения электрон-позитронных пар при столкновении электронов с лазерной волной.

Вероятность перехода в конкретное состояние определяется квадратом модуля амплитуды $|S|^2$. Далее везде полагается $V=1$. Запишем выражение для дифференциальной вероятности перехода в элементарный фазовый объём:

$$dw_{i \rightarrow f} = w_{i \rightarrow f} dv = |S|^2 dv \quad (4.1.1)$$

Здесь

$$dv = \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_-}{(2\pi)^3} \quad (4.1.2)$$

Рассмотрим квадрат модуля амплитуды $|S|^2$. Согласно (3.5.7)

$$|S|^2 = \left[\frac{16\pi^5 e^2 e^{-id_{p_+p_-} - id_{p_i p_f}}}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \left(\bar{u}_{p_-} \left(-\gamma_\mu e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} + b_{+;\mu} \right) v_{-p_+} \right) \left(\bar{u}_{p_f} \left(-\gamma^\mu e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} + b'_+{}^\mu \right) u_{p_i} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{(p_i - p_f + k)^2} \delta^{(4)}(p_i - p_f - p_+ - p_- + 2k) - (p_f \leftrightarrow p_-) \right] \times \\ \times \left[\frac{16\pi^5 e^2 e^{-id_{p_+p_-} - id_{p_i p_f}}}{\sqrt{E_f E_- E_i E_+}} \left(\bar{u}_{p_-} \left(-\gamma_\mu e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} + b_{+;\mu} \right) v_{-p_+} \right) \left(\bar{u}_{p_f} \left(-\gamma^\mu e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} + b'_+{}^\mu \right) u_{p_i} \right) \right]^* \\ \times \frac{1}{(p_i - p_f + k)^2} \delta^{(4)}(p_i - p_f - p_+ - p_- + 2k) - (p_f \leftrightarrow p_-) \quad (4.1.3)$$

Фазы канала «а» и канала «б» совпадают (см. Приложение Ж), поэтому общая фаза $e^{-id_{p_+p_-} - id_{p_i p_f}}$ при взятии модуля исчезнет.

С учётом (4.1.3) квадрат модуля амплитуды примет следующий вид.

$$\begin{aligned}
|S|^2 &= \frac{2^4 \pi^6 e^4}{E_f E_- E_i E_+} \delta^{(4)}(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - \tilde{p}_+ - \tilde{p}_- + 2k) \times \\
&\times \left(\left(\bar{u}_{p_-} \left(-\gamma_\mu e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} + b_{+;\mu} \right) v_{-p_+} \right) \left(\bar{u}_{p_f} \left(-\gamma^\mu e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} + b'^\mu_+ \right) u_{p_i} \right) \frac{1}{(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f + k)^2} - (p_f \leftrightarrow p_-) \right) \times \\
&\times \left(\left(\bar{u}_{p_-} \left(-\gamma_\nu e^{i\chi_{p_+p_-}} \frac{\gamma_{p_+p_-}}{2} + b_{+;\nu} \right) v_{-p_+} \right) \left(\bar{u}_{p_f} \left(-\gamma^\nu e^{i\chi_{p_i p_f}} \frac{\gamma_{p_i p_f}}{2} + b'^\nu_+ \right) u_{p_i} \right) \frac{1}{(\tilde{p}_i - \tilde{p}_f + k)^2} - (p_f \leftrightarrow p_-) \right)^*
\end{aligned}
\tag{4.1.4}$$

§ 4.2. Дифференциальная вероятность (в единицу времени) канала «а»

Дифференциальная вероятность для неполяризованных электронов и позитронов имеет вид

$$dw_a = \frac{1}{32\pi^3} \alpha^2 \eta^4 \frac{E_i^3}{E_f E_- E_+} G V_C U_{BW} \frac{\delta^{(4)}(p_i - p_f - p_+ - p_- + 2k)}{|(p_i - p_f + k)|^2} d^3 p_f d^3 p_+ d^3 p_- \tag{4.2.1}$$

В (4.2.1) G - некоторая функция 4-импульсов частиц, амплитуда которой имеет порядок ~ 1 , а функции V_C и U_{BW} имеют порядок ~ 1 и выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
V_C &= \frac{1}{(1+v)^2} \left[2 + \frac{v^2}{1+v} - \frac{4v}{v_1} \left(1 - \frac{v}{v_1} \right) \right] \\
U_{BW} &= \frac{1}{u\sqrt{u(u-1)}} \left[2u - 1 + \frac{2u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right) \right]^2,
\end{aligned}
\tag{4.2.2}$$

где v, v_1, u, u_1 - кинематические инварианты (2.2.6), (2.2.7).

В условиях резонанса знаменатель в (4.2.1) обращается в ноль. Для устранения резонансного знаменателя необходимо провести процедуру Брейта-Вигнера [86]. Для этого введём мнимую добавку к энергии начального электрона:

$$E_i \rightarrow E'_i = E_i - i\Gamma \quad (4.2.3)$$

В этом случае резонансный знаменатель примет следующий вид.

$$|q_0|^4 = 4E_i^2 (1-x_f)^2 \left(\frac{4m^4 \varepsilon_i^4 x_f^2}{E_i^2 (1-x_f)^2} [\delta_{fi}^2 - \delta_{res}^2]^2 + \Gamma^2 \right), \quad (4.2.4)$$

где

$$\delta_{res}^2 = \frac{x_f^2 (1+4\varepsilon_i) - 2(1+2\varepsilon_i) + 1}{4\varepsilon_i^2 x_f^2} \quad (4.2.5)$$

и

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2} W_C \quad (4.2.6)$$

Здесь W_C - полная вероятность комптон-эффекта [68]:

$$W_C = \frac{\alpha m^2}{32\pi E_i} \eta^2 W', \quad (4.2.7)$$

где

$$W' = \left[\left(1 - \frac{4}{v_1} - \frac{8}{v_1^2} \right) \ln(1+v_1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{v_1} - \frac{1}{2(1+v_1)^2} \right] \quad (4.2.8)$$

Таким образом дифференциальная вероятность (в единицу времени) с учётом (4.2.4) принимает следующий вид:

$$dw_a = \frac{1}{32\pi^3} \alpha^2 \eta^4 \frac{E_i}{E_f E_- E_+} G V_C U_{BW} \frac{\delta^{(4)}(p_i - p_f - p_+ - p_- + 2k)}{4(1-x_f)^2 \left(\frac{4m^4 \varepsilon_i^4 x_f^2}{E_i^2 (1-x_f)^2} [\delta_{fi}^2 - \delta_{res}^2]^2 + \Gamma^2 \right)} d^3 p_f d^3 p_+ d^3 p_- \quad (4.2.9)$$

Проинтегрируем (4.2.9) по $d^3 p_+$ и по $d|p_-| \approx dE_-$:

$$dw_a = \frac{1}{32\pi^3} \alpha^2 \eta^4 \frac{E_i}{E_f E_- E_+} G V_C U_{BW} \frac{E_f^2 dE_f \sin(\theta_{fi}) d\theta_{fi} d\varphi_f E_-^2 \sin(\theta_{-i}) d\theta_{-i} d\varphi_-}{4(1-x_f)^2 \left(\frac{4m^4 \varepsilon_i^4 x_f^2}{E_i^2 (1-x_f)^2} [\delta_{fi}^2 - \delta_{res}^2]^2 + \Gamma^2 \right)} \quad (4.2.10)$$

Здесь под E_+ и E_- нужно понимать следующие величины:

$$E_+ = \sqrt{(p_i - p_f - p_- + 2k)^2 + m^2} \quad (4.2.11)$$

$$E_- = E_i - E_f - E_+ + 2\omega$$

Дифференциалы в (4.2.10) с учётом малости углов вылета могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\begin{aligned} E_f^2 dE_f \sin(\theta_{fi}) d\theta_{fi} d\varphi_f E_-^2 \sin(\theta_{-i}) d\theta_{-i} d\varphi_- = \\ = \frac{4m^4 E_i^5}{\omega_{thr}^4} x_f^2 x_-^2 dx_f d\delta_{fi}^2 d\delta_{-i}^2 d\varphi_f d\varphi_- \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Теперь дифференциальная вероятность примет вид

$$dw_a = \frac{1}{32\pi^3} \alpha^2 \eta^4 \frac{m^4 E_i^3}{\omega_{thr}^4} \frac{x_f x_-}{x_+ (1-x_f)^2} G V_C U_{BW} \frac{dx_f d\delta_{fi}^2 d\delta_{-i}^2 d\varphi_f d\varphi_-}{\left(\frac{4m^4 \varepsilon_i^4 x_f^2}{E_i^2 (1-x_f)^2} [\delta_{fi}^2 - \delta_{res}^2]^2 + \Gamma^2 \right)} \quad (4.2.13)$$

Вероятность достигает своего максимума в резонансе, когда $\delta_{fi}^2 = \delta_{res}^2$. В этом случае с учётом (4.2.6) и (4.2.7) получаем

$$dw_a^{\max} = \frac{128}{\pi \alpha^2} \left[\alpha^2 \frac{E_i^5}{\omega_{thr}^4} \frac{x_f x_-}{x_+ (1-x_f)^2} \frac{G V_C U_{BW}}{W'^2} dx_f d\delta_{fi}^2 d\delta_{-i}^2 d\varphi_f d\varphi_- \right] \quad (4.2.14)$$

Формула (4.2.14) представляет собой искомую дифференциальную вероятность (в единицу времени) процесса рождения электрон-позитронных пар в столкновениях электронов с лазерной волной.

Дифференциальное сечение процесса получается из дифференциальной вероятности в единицу времени делением на плотность потока налетающих частиц, который для одного начального ультрарелятивистского электрона равен единице:

$$j = 1 \tag{4.2.15}$$

Поэтому дифференциальное сечение процесса резонансного рождения электрон-позитронных пар при столкновении электронов с лазерной волной, формально совпадает с выражением (4.2.14):

$$d\sigma_a^{\max} = \frac{128}{\pi\alpha^2} \left[\alpha^2 \frac{E_i^5}{\omega_{thr}^4} \frac{x_f x_-}{x_+ (1-x_f)^2} \frac{GV_c U_{BW}}{W'^2} \right] dx_f d\delta_{fi}^2 d\delta_{-i}^2 d\varphi_f d\varphi_- \tag{4.2.16}$$

Согласно (4.2.14), резонансная дифференциальная вероятность (в единицу времени) исследуемого процесса по предварительным оценкам превышает дифференциальную вероятность нерезонансного процесса на четыре-пять порядков. Более точные оценки требуют также вычисления дифференциальной вероятности нерезонансного процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам изучения процесса резонансного рождения электрон-позитронных пар в столкновениях электронов с лазерной волной можно сделать следующие выводы:

1. Показано, что резонансный процесс имеет место с пороговой энергией начального электрона. Пороговая энергия существенно зависит от числа поглощённых фотонов лазерной волны. Максимальное значение пороговой энергии определяется поглощением одного фотона волны. В области оптических частот максимальная пороговая энергия имеет порядок $10^2 - 10^3$ ГэВ. Резонансный процесс имеет место, когда энергия начальных электронов превышает пороговую энергию.
2. Рождающаяся ультрарелятивистские электрон-позитронная пара и конечный электрон летят в узком конусе вдоль импульса начального электрона, причём данный узкий конус лежит вдали от направления распространения лазерной волны.
3. Энергия электрон-позитронной пары существенно зависит от угла вылета конечного электрона и может принимать до четырёх возможных значений. Показано, что угол вылета конечного электрона изменяется от нуля до некоторого максимального значения, которое определяется энергией начального электрона (в единицах пороговой энергии).
4. Получена оценка резонансной дифференциальной вероятности (в единицу времени) исследуемого процесса, которая превышает нерезонансную дифференциальную вероятность на четыре-пять порядков порядка.

По теме работы был сделан доклад на конференции Неделя науки СПбПУ, 2019 [53]. Также, работа будет представлена на конференциях RUSGRAV-17 и ICLO 2020.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1]. P.A.M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron // Proc. R. Soc. A 1928, 117, 610.
- [2]. O. Klein. Die reflexion von elektronen an einem potentialsprung nach der relativistischen dynamik von Dirac // Z. Phys., 1929, 53, 157—165.
- [3]. J. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev., 1951, 82, 664.
- [4]. А.И. Никишов. Образование пар постоянным внешним полем // ЖЭТФ, 1969, 57, 1210-1216.
- [5]. D. Strickland, G. Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses // Opt. Commun., 1985, 56, no.3, pp. 219–221.
- [6]. S. Gordienko, A. Pukhov, O. Shorokhov, T. Baeva. Coherent Focusing of High Harmonics: A New Way Towards the Extreme Intensities // Phys. Rev. Lett., 2005, 94, no.10, 103903, 4 pp.
- [7]. N. Bohr. Faraday lecture. Chemistry and the quantum theory of atomic constitution // J. Chem. Soc., 1932, pp. 349–384.
- [8]. J. Faure, Y. Glinec, A. Pukhov *et al.* A laser–plasma accelerator producing monoenergetic electron beams // *Nature*, 2004, **431**, 541–544
- [9]. S. Mangles, C. Murphy, Z. Najmudin *et al.* Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser–plasma interactions // *Nature*, 2004, **431**, 535–538.
- [10]. Adriani, O., Barbarino, G., Bazilevskaya, G. *et al.* An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5–100 GeV // *Nature*, 2009, **458**, 607–609.
- [11]. D. Hooper, B. Pasquale, D.S. Pasquale. Pulsars as the sources of high energy cosmic ray positrons // JCAP, 2009, 01, 025.

- [12]. V. Oleinik. Resonance effects in the field of an intense laser beam // JETP, 1967, 25, 697.
- [13]. V. Oleinik. Resonance effects in the field of an intense laser ray // JETP, 1968, 26, 1132.
- [14]. A.A. Lebed, E.A. Padusenko, S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov. Resonant parametric interference effect in spontaneous bremsstrahlung of an electron in the field of a nucleus and two pulsed laser waves // Phys. Rev. A, 2018, 97, 043404.
- [15]. S.P. Roshchupkin, A.I. Voroshilo Resonant and Coherent Effects of Quantum Electrodynamics in the Light Field - Kiev: Naukova Dumka, 2008.
- [16]. K. Krajewska. Electron–Positron Pair Creation and Oleinik Resonances // Laser Physics, 2011, 21, 1275-1287.
- [17]. N.R. Larin, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant photoproduction of high-energy electron-positron pairs in the field of a nucleus and a weak electromagnetic wave // Phys. Rev. A, 2019, 100, 052502.
- [18]. A. Dubov, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant high-energy bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons in the field of a nucleus and a weak electromagnetic wave // Laser Phys. Lett., 2020, 17, 045301.
- [19]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, V.N. Nedoreshta. Resonant two-photon annihilation of an electron-positron pair in a pulsed electromagnetic wave // Phys. Rev. A, 2016, 94, 032128.
- [20]. A. Dubov, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant Laser-Assisted Process of Ultrarelativistic Electrons Bremsstrahlung in the Field of a Nucleus // Plasma Physics Reports, 2020, 46, pp. 252–258.
- [21]. O.I. Denisenko, S.P. Roshchupkin. Resonant Scattering of an Electron by a Positron in the Field of a Light Wave // Laser Physics, 1999, 9, pp. 1108–1112.

- [22]. S.P. Roshchupkin. Resonant Effects in Collisions of Relativistic Electrons in the Field of a Light Wave // Laser Physics, 1996, 6, pp. 837–858.
- [23]. S.P. Roshchupkin. Resonant electron-electron scattering in the field of a light wave: the general relativistic case // Laser Physics, 1994, 4, pp. 139-147.
- [24]. O.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin. Resonant two-photon emission of an electron in the field of an electromagnetic wave // Problems of Atomic Science and Technology, 2007, 3, pp. 221-224.
- [25]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, V.N. Nedoreshta. Resonant two-photon annihilation of electron-positron pair in the pulsed linear polarized wave field // LFNМ, 2016, September 13-15, p. 27.
- [26]. O.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, O.I. Denisenko. Resonant scattering of a photon by an electron in the laser field // LFNМ, 2004, September 6-9, p. 272.
- [27]. A.A. Lebed', E.A. Padusenko, S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov. Resonant Laser-modified Electron-Electron Scattering by a Strong Bichromatic Pulsed Field // LFNМ, 2016, September 13-15, p. 21.
- [28]. S. Starodub, S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov. The superstrong repulsion of electrons in intense pulsed laser fields // LFNМ, 2016, September 13-15, p. 12.
- [29]. S.P. Roshchupkin. Quantum Electrodynamics in the Strong Pulsed Laser Fields // Problems of Atomic Science and Technology, 2013, 3, 48.
- [30]. Н.Р. Ларин, С.П. Рошчупкин. Резонансная кинематика в процессе фоторождения электрон-позитронной пары в поле ядра и плоской электромагнитной волны // Неделя Науки СПбПУ, 2018, Ноябрь 19-24, сс. 350-352.
- [31]. S.P. Roshchupkin. Resonance effects at e^-e^+ pair photoproduction in the field of a plane electromagnetic wave // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij, 1983, 26, pp. 12-15.

- [32]. S.P. Roshchupkin. Resonant Spontaneous Bremsstrahlung of an Electron in the Field of the Nucleus and Two Light Waves // *Laser Physics*, 2002, 12, pp. 498-503.
- [33]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin. Resonant scattering of a photon by an electron in the field of a circularly polarized electromagnetic wave // *Laser Physics Letters*, 2005, 2, pp. 184-189.
- [34]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, O.I. Denisenko. Resonant scattering of a photon by an electron in the field of an elliptically polarized electromagnetic wave // *CAOL*, 2005, September 12-17, p. 117.
- [35]. O.I. Denisenko, S.P. Roshchupkin. Resonant two-photon annihilation of an electron-positron pair in the laser field // *QEDSP*, 2006, September 19-23, pp. 96-97.
- [36]. S.P. Roshchupkin. Resonant effects in the scattering of relativistic electron by a nucleus in the field of a light wave // *CPNPAE*, 2006, May 29 – June 3, pp. 112-113.
- [37]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, O.I. Denisenko. Resonance of exchange amplitude of Compton effect in the circularly polarized laser field // *Eur. Phys. J. D*, 2007, 41, pp. 433–440.
- [38]. A.A. Lebed', S.P. Roshchupkin. Resonant bremsstrahlung of an electron scattered by a nucleus in a pulsed light field // *Phys. Rev. A*, 2010, 81, 033413.
- [39]. O.I. Denisenko, S.P. Roshchupkin. Resonant two-photon annihilation of an electron-positron pair in the laser field // *LFNM*, 2008, October 2-4, p. 148.
- [40]. V.N. Nedoreshta, A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin. Resonance scattering of the electron on the muon in the field of plane electromagnetic wave // *6th Conference on Physics of High Energy, Nuclear Physics and Accelerators*, 2008, February 25-29, pp. 80-81.

- [41]. V.N. Nedoreshta, A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin. Resonant scattering of an electron by a muon in the field of light wave // *Eur. Phys. J. D*, 2008, 48, p. 451.
- [42]. A. Dubov, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant high-energy bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons in the field of a nucleus and a weak electromagnetic wave // *Laser Physics Letters*, 2020, 17, 045301.
- [43]. N.R. Larin, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant production of electron-positron pairs by a hard gamma-ray on a nucleus in an external electromagnetic field // *Modern Physics Letters*, 2020, 35, 2040025-1.
- [44]. A. Dubov, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant emission of hard gamma-quanta at scattering of ultrarelativistic electrons on a nucleus within the external light field // *Modern Physics Letters A*, 2020, 35, 2040024-1.
- [45]. D.V. Doroshenko, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant annihilation and production of high-energy electron-positron pairs in an external electromagnetic field // *Modern Physics Letters A*, 2020, 35, 2040023-1.
- [46]. А. Дубов, В.В. Дубов, С.П. Рощупкин. Резонансный лазерно-модифицированный процесс тормозного излучения ультрарелятивистских электронов в поле ядра в лазерной плазме // *Физика Плазмы*, 2019, 24, сс. 206-212.
- [47]. D.V. Doroshenko, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant laser-assisted process of the electron-positron pairs annihilation and production.
- [48]. S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov, N.R. Larin, D.V. Doroshenko. New aspects of resonant effects in laser-modified Quantum Electrodynamics processes // *CAOL*, 2019, September 6-8, p. 192.
- [49]. V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. Resonant spontaneous bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons in the field of a nucleus and a laser wave // *PIERS-Spring*, 2019, June 17-20, p. 4226.

- [50]. S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov, N.R. Larin. Resonant production of an ultrarelativistic electron-positron pair by a gamma quantum in the field of a nucleus and a laser wave // PIERS-Spring, 2019, June 17-20, p. 4214.
- [51]. S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov, D.V. Doroshenko. Resonance of the annihilation channel of a laser-assisted electron-positron scattering // PIERS-Spring, 2019, June 17-20, p. 4220.
- [52]. A. Dubov, V.V. Dubov, S.P. Roshchupkin. The appearances of the resonant spontaneous emission of ultrarelativistic electrons in the field of a nucleus and a laser // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2019, 1236, p. 012073.
- [53]. Г.К. Сизых, В.В. Дубов, С.П. Рошчупкин. Резонансная кинематика рождения электрон-позитронных пар в столкновениях электронов с лазерной волной // Неделя Науки СПбПУ, 2019, Ноябрь 18-23, сс. 200-204.
- [54]. А.А. Пустынцев, В.В. Дубов, С.П. Рошчупкин. Кинематика резонансного процесса Брейта-Уилера в поле лазерной волны // Неделя Науки СПбПУ, 2019, Ноябрь 18-23, сс. 242-244.
- [55]. Д.В. Дорошенко, В.В. Дубов, С.П. Рошчупкин. Резонансная кинематика в процессе аннигиляции электрон-позитронной пары с рождением электрон-позитронной пары в сильном поле плоской монохроматической волны // Неделя Науки СПбПУ, 2019, Ноябрь 18-23, сс. 234-235.
- [56]. А.В. Дубов, С.П. Рошчупкин. Резонансная кинематика в процессе спонтанного тормозного излучения электрона на ядре в поле плоской электромагнитной волны // Неделя Науки СПбПУ, 2018, Ноябрь 19-24, сс. 352-355.
- [57]. Д.В. Дорошенко, С.П. Рошчупкин. Резонансная кинематика в процессе аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары в поле

плоской монохроматической волны // Неделя Науки СПбПУ, 2018, Ноябрь 19-24, сс. 347-349.

- [58]. S.P. Roshchupkin, V.V. Dubov. Resonant processes of quantum electrodynamics in a pulsed laser field // PIERS-Spring, 2017, May 22-25, 2215.
- [59]. V.N. Nedoreshta, S.P. Roshchupkin, A.I. Voroshilo. Resonance of the exchange amplitude of a photon by an electron scattering in a pulsed laser field // Phys. Rev. A, 2015, 91, p. 062110.
- [60]. V.N. Nedoreshta, A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin. Resonant scattering of a photon by an electron in the moderately-strong-pulsed laser field // Phys. Rev. A, 2013, 88, p. 052109.
- [61]. E.A. Padusenko, S.P. Roshchupkin, A.A. Lebed'. Resonance interference scattering of a lepton by a lepton in the bichromatic pulsed laser field // LFNM, 2013, September 11-13, p. 58.
- [62]. A.A. Lebed', S.P. Roshchupkin. Resonant electron-positron pair photoproduction on a nucleus in a pulsed light field // J. Exp. Theor. Phys., 2011, 113, p. 46.
- [63]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, V.N. Nedoreshta. Resonant pair production under scattering of an electron in the field of an electromagnetic wave // 3rd International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics, 2011, August 29 – September 2, pp. 82-83.
- [64]. O.I. Denisenko, S.P. Roshchupkin. Resonance annihilation of ultrarelativistic electron pair in the light field // 3rd International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics, 2011, August 29 – September 2, p. 85.
- [65]. А.А. Лебедь, С.П. Рощупкин. Резонансное фоторождение электрон-позитронной пары на ядре в импульсном световом поле // ЖЭТФ, 2011, 140, с. 56.

- [66]. E.A. Padusenko, S.P. Roshchupkin. Resonant scattering of a lepton by a lepton in the pulsed light field // *Laser Phys.*, 2010, 20, pp. 2080–2091.
- [67]. A.I. Voroshilo, S.P. Roshchupkin, V.N. Nedoreshta. Resonance of direct amplitude of process of scattering of a photon by an electron in the pulsed laser field // *LFNM*, 2010, September 12-14, p. 226.
- [68]. V.I. Ritus, A.I. Nikishov Quantum electrodynamics phenomena in the intense field: *Trudy FIAN vol. 111*, ed V L Ginzburg. - Moscow: Nauka, 1979.
- [69]. Ф.В. Бункин, И.И. Тугов. О возможности рождения электронно-позитронных пар в вакууме при фокусировке лазерного излучения // *Докл. АН СССР*, 1969, 187, №3, с. 541–544.
- [70]. A. Di Piazza, A.I. Milstein. Quasiclassical approach to high-energy QED processes in strong laser and atomic fields // *Phys. Lett. B*, 2012, 717, p. 224.
- [71]. A.I. Titov, H. Takabe, B. Kampfe, A. Hosaka. Enhanced subthreshold electron-positron production in short laser pulses // *Phys. Rev. Lett.*, 2012, 108, 240406.
- [72]. K. Krajewska, J.Z. Kaminski. Breit-Wheeler process in intense short laser pulses // *Phys. Rev. A*, 2012, 86, 052104.
- [73]. D.L. Burke et al. Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, 79, 1626.
- [74]. V. Dinu, G. Torgrimsson. Trident pair production in plane waves: Coherence, exchange, and spacetime inhomogeneity // *Phys. Rev. D*, 2018, 97, 036021.
- [75]. H. Hu, C. Müller, C.H. Keitel. Complete QED Theory of Multiphoton Trident Pair Production in Strong Laser Fields // *Phys. Rev. Lett.*, 2010, 105, 080401.

- [76]. A. Ilderton. Trident Pair Production in Strong Laser Pulses // Phys. Rev. Lett., 2011, 106, 020404.
- [77]. B. King, H. Ruhl. Trident pair production in a constant crossed field // arXiv:1303.1356 [hep-ph].
- [78]. F. Mackenroth, A. Di Piazza. Nonlinear trident pair production in an arbitrary plane wave: A focus on the properties of the transition amplitude // Phys. Rev. D, 2018, 98, 116002.
- [79]. W.H. Furry. On bound states and scattering in positron theory // Phys. Rev., 1951, 81, 115.
- [80]. D.M. Volkov. Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung // Zeit. Phys., 1935, 94, 250.
- [81]. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский Квантовая электродинамика – Москва: Наука, 1989.
- [82]. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теория поля – Москва: Физматлит, 2006.
- [83]. C. Bula et al. Observation of Nonlinear Effects in Compton Scattering // Phys. Rev. Lett., 1996, 76, 3116.
- [84]. S.P. Roshchupkin. The interference effect in the scattering of an electron by a nucleus in the field of two plane electromagnetic waves // ZETF, 1994, 106, 102-118.
- [85]. S.P. Roshchupkin, V.A. Tsybul'nik, A.N. Chmirev. The Probability of Multiphoton Processes in Quantum-Electrodynamic Phenomena in a Strong Light Field // Laser Physics, 2000, 10, 1256-1272.
- [86]. G. Breit, E. Wigner. Capture of Slow Neutrons // Phys. Rev., 1936, 49, p. 519.

Приложение А: малость углов между направлениями распространения частиц и 3-импульса начального электрона

Покажем, что $\theta_i \approx \theta_f$.

Согласно (3.2.3) - (3.2.5),

$$E_i \omega (1 - \cos \theta_i) - E_f \omega (1 - \cos \theta_f) + m^2 = E_f E_i \left(1 - \frac{|\vec{v}_f| |\vec{v}_i|}{c^2} \cos \theta_{fi} \right) \quad (5.1.1)$$

Если утверждение насчёт углов неверно, и угол θ_{fi} не является малым, то равенство (5.1.1) не может быть удовлетворено в силу того, что в правой части равенства стоит величина порядка $E_i^2 \gg m^2$, а в левой – порядка $E_i \omega \ll E_i^2$ или порядка $m^2 \ll E_i^2$. Это доказывает справедливость соотношения $\theta_{fi} \ll 1$, откуда также непосредственно следует $\theta_i \approx \theta_f$.

Аналогичные рассуждения можно провести для ЗСИ во второй вершине. Тогда можно записать $\theta_i \approx \theta_f \approx \theta_+ \approx \theta_-$.

Приложение Б: вычисление пороговой энергии

Запишем ЗСИ во второй вершине.

$$q_0 + k = p_- + p_+ \quad (6.1.1)$$

Пользуясь резонансным условием, получим:

$$q_0 k = m^2 + p_- p_+ \quad (6.1.2)$$

Выразив p_- из (6.1.1) и подставив в (6.1.2), получим:

$$q_0 k = q_0 p_+ + p_+ k \quad (6.1.3)$$

Запишем скалярные произведения.

$$\begin{aligned} q_0 k &= \omega \omega_o (n n_i) \\ p_+ k &= E_+ \omega (n n_i) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

$$q_0 p_+ = \omega_0 E_+ \left(\frac{m^2}{2E_+^2} + \frac{\theta_{0+}^2}{2} \right) \quad (6.1.5)$$

Здесь мы воспользовались примерными равенствами $(n n_0) \approx (n n_+) \approx (n n_i)$ (см. Приложение А), а также ввели угол θ_{0+} между направлениями распространения промежуточного фотона и позитрона.

Поделим (6.1.3) на $2m^2$ и подставим туда скалярные произведения (6.1.4), (6.1.5):

$$\frac{\omega_0}{\omega_{thr}} = \frac{\omega_0}{E_i} \frac{E_+}{E_i} \left(\frac{E_i^2}{4E_+^2} + \frac{E_i^2}{\omega_{thr}^2} \frac{\omega_{thr}^2 \theta_{0+}^2}{4m^2} \right) + \frac{E_+}{\omega_{thr}} \quad (6.1.6)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\omega_0}{E_i} \\ \delta_{o+}^2 &= \frac{\omega_{thr}^2 \theta_{0+}^2}{4m^2} \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

С учётом этих обозначений (6.1.6) можно записать в виде:

$$\left(\varepsilon_i + \varepsilon_i^2 \delta_{o+}^2 x_0\right) x_+^2 - \varepsilon_i x_0 x_+ + \frac{x_0}{4} = 0 \quad (6.1.8)$$

Для существования решений уравнения (6.1.8) необходимо потребовать:

$$D_0 = \varepsilon_i^2 x_0^2 - x_0 \left(\varepsilon_i + \varepsilon_i^2 \delta_{o+}^2 x_0\right) \geq 0 \quad (6.1.9)$$

Отсюда получаем:

$$x_0 \geq \frac{1}{\varepsilon_i (1 - \delta_{o+}^2)} \quad (6.1.10)$$

Из (6.1.10) получаем нижнюю границу на энергию промежуточного фотона в условиях резонанса:

$$x_0 \geq \frac{1}{\varepsilon_i} \quad (6.1.11)$$

Таким образом, для возможности протекание процесса, необходимо, чтобы энергия промежуточного фотона равнялась хотя бы $\frac{1}{\varepsilon_i}$. Это означает, что энергия конечного электрона x_f не может превышать величину $1 - \frac{1}{\varepsilon_i}$ в силу ЗСЭ.

Приложение В: упрощение функции H

Воспользуемся выражением для вектор-потенциала поля A (2.1.3), чтобы преобразовать выражение для H (2.1.10).

$$\begin{aligned}
 H^\nu &= \left[1 + \frac{e}{2(kp_-)} \hat{A}(\varphi) \hat{k} \right] \gamma^\nu \left[1 - \frac{e}{2(kp_+)} \hat{k} \hat{A}(\varphi) \right] = \\
 &= \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \hat{k} \right] \gamma^\nu \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp_+)} \hat{k} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right] = \\
 &= \gamma^\nu - \eta \frac{m}{4(kp_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \hat{k} \gamma^\nu + \eta \frac{m}{4(kp_+)} \gamma^\nu \hat{k} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) - \eta^2 \frac{m^2}{16(kp_-)(kp_+)} \times \\
 &\quad \times \left[(\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-) e^{2i\varphi} + (\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+) e^{-2i\varphi} + (\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-) + (\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+) \right]
 \end{aligned}
 \tag{7.1.1}$$

Это выражение можно упростить, воспользовавшись свойствами векторов поляризации:

$$\begin{aligned}
 \hat{\varepsilon}_- \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- &= \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ = 2k^\nu \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ = -2k^\nu \hat{\varepsilon}_+^2 \hat{k} = 2(1 - \delta^2) k^\nu \hat{k} \\
 \hat{\varepsilon}_- \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ &= 2k^\nu \hat{\varepsilon}_- \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ = -2k^\nu \hat{\varepsilon}_- \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} = 2(1 + \delta^2) k^\nu \hat{k} \\
 \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- &= 2k^\nu \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \hat{\varepsilon}_- = -2k^\nu \hat{\varepsilon}_+ \hat{\varepsilon}_- \hat{k} = 2(1 + \delta^2) k^\nu \hat{k} \\
 \hat{\varepsilon}_- \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \gamma^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- &= 4(1 + \delta^2) k^\nu \hat{k}
 \end{aligned}
 \tag{7.1.2}$$

Теперь сразу можно записать

$$H^\nu(\varphi_2) = a^\nu + b_-^\nu e^{i\varphi_2} + b_+^\nu e^{-i\varphi_2} + c^\nu (e^{2i\varphi_2} + e^{-2i\varphi_2})
 \tag{7.1.3}$$

, где коэффициенты a^ν , b_\pm^ν и c^ν даются левыми формулами в (2.2.3).

Проделав замену ($\nu \rightarrow \mu, p_f \rightarrow p_-, p_i \rightarrow -p_+$), получим выражение для H'^μ :

$$H'^\mu(\varphi_1) = a'^\mu + b_-'^\mu e^{i\varphi_1} + b_+'^\mu e^{-i\varphi_1} + c'^\mu (e^{2i\varphi_1} + e^{-2i\varphi_1})
 \tag{1.4}$$

, где коэффициенты a'^ν , $b_\pm'^\nu$ и c'^ν даются правыми формулами в (2.2.3).

Приложение Г: преобразование действий

Для преобразования действий нам потребуются вычислить сперва скалярное произведение $(p_- A(\varphi'))$ а также квадрат A^2 :

$$\begin{aligned} (p_- A(\varphi')) &= \frac{F}{\omega} \left[(p_- e_x) \cos \varphi' + \delta (p_- e_y) \sin \varphi' \right] \\ A^2 &= -\frac{F^2}{\omega^2} (\cos^2(\varphi) + \delta^2 \sin^2(\varphi)) = -\frac{F^2}{2\omega^2} (1 + \delta^2) - \frac{F^2}{2\omega^2} (1 - \delta^2) \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

Распишем (2.1.12) с учётом (2.1.4) и (2.1.5).

$$\begin{aligned} S_{p_-}(x_2) &= -p_- x_2 - \int_{\varphi_{20}}^{\varphi_2} \frac{e}{(kp_-)} \left[(p_- A(\varphi')) - \frac{e}{2} A^2(\varphi') \right] d\varphi' = \\ &= -p_- x_2 - \int_{\varphi_{20}}^{\varphi_2} \frac{1}{(kp_-)} \left[-\eta m \left[(p_- e_x) \cos \varphi' + \delta (p_- e_y) \sin \varphi' \right] + \frac{\eta^2 m^2}{4} \left((1 + \delta^2) + (1 - \delta^2) \cos(2\varphi') \right) \right] d\varphi' \\ &= -p_- x_2 + \frac{\eta m}{(kp_-)} \left[(p_- e_x) (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_{20}) - \delta (p_- e_y) (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_{20}) \right] - \\ &\quad - \frac{\eta^2 m^2}{4(kp_-)} (1 + \delta^2) (\varphi_2 - \varphi_{20}) - \frac{\eta^2 m^2}{8(kp_-)} (1 - \delta^2) (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_{20}) \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Введя новые обозначения, запишем $S_{p_-}(x_2)$ в виде:

$$S_{p_-}(x_2) = -d_{p_-} - (\tilde{p}_- x_2) + (b_{p_-} \sin \varphi_2 - y_{p_-} \cos \varphi_2) + \beta_{p_-} \sin 2\varphi_2 \quad (8.1.3)$$

, где

$$\begin{aligned} d_{p_-} &= \frac{\eta m}{(kp_-)} \left[(p_- e_x) \sin \varphi_{20} - \delta (p_- e_y) \cos \varphi_{20} \right] - \frac{\eta^2 m^2}{4(kp_-)} (1 + \delta^2) \varphi_{20} - \frac{\eta^2 m^2}{8(kp_-)} (1 - \delta^2) \sin 2\varphi_{20}, \\ \tilde{p}_- &= p_- + \frac{1}{4} (1 + \delta^2) \eta^2 \frac{m^2}{(kp_-)} k, \quad b_{p_-} = \eta \frac{m}{(kp_-)} (p_- e_x), \quad y_{p_-} = \eta \frac{m}{(kp_-)} \delta (p_- e_y) \\ \beta_{p_-} &= -\eta^2 \frac{m^2}{8(kp_-)} (1 - \delta^2) \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Прделаем аналогичные операции с действием для позитрона.

$$\begin{aligned}
S_{-p_+}(x_2) &= p_+ x_2 - \int_{\varphi_{+0}}^{\varphi_+} \frac{e}{(kp_+)} \left[(p_+ A(\varphi')) + \frac{e}{2} A^2(\varphi') \right] d\varphi' = \\
&= p_+ x_2 - \int_{\varphi_{+0}}^{\varphi_+} \frac{1}{(kp_+)} \left[-\eta m \left[(p_+ e_x) \cos \varphi' + \delta (p_+ e_y) \sin \varphi' \right] - \frac{\eta^2 m^2}{4} \left((1 + \delta^2) + (1 - \delta^2) \cos(2\varphi') \right) \right] d\varphi' \\
&= p_+ x_2 + \frac{\eta m}{(kp_+)} \left[(p_+ e_x) (\sin \varphi_+ - \sin \varphi_{+0}) - \delta (p_+ e_y) (\cos \varphi_+ - \cos \varphi_{+0}) \right] + \\
&\quad + \frac{\eta^2 m^2}{4(kp_+)} (1 + \delta^2) (\varphi_+ - \varphi_{+0}) + \frac{\eta^2 m^2}{8(kp_+)} (1 - \delta^2) (\sin 2\varphi_+ - \sin 2\varphi_{+0})
\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Введя схожие с предыдущим случаем обозначения, запишем $S_{-p_+}(x_2)$ в виде:

$$S_{-p_+}(x_2) = -d_{p_+} + (\tilde{p}_+ x_2) + (b_{p_+} \sin \varphi_2 - y_{p_+} \cos \varphi_2) - \beta_{p_+} \sin 2\varphi_2 \tag{8.1.6}$$

$$\begin{aligned}
d_{p_+} &= \frac{\eta m}{(kp_+)} \left[(p_+ e_x) \sin \varphi_{+0} - \delta (p_+ e_y) \cos \varphi_{+0} \right] + \frac{\eta^2 m^2}{4(kp_+)} (1 + \delta^2) \varphi_{+0} + \frac{\eta^2 m^2}{8(kp_+)} (1 - \delta^2) \sin 2\varphi_{+0}, \\
\tilde{p}_+ &= p_+ + \frac{1}{4} (1 + \delta^2) \eta^2 \frac{m^2}{(kp_+)} k, \quad b_{p_+} = \eta \frac{m}{(kp_+)} (p_+ e_x), \quad y_{p_+} = \eta \frac{m}{(kp_+)} \delta (p_+ e_y) \\
\beta_{p_+} &= -\eta^2 \frac{m^2}{8(kp_+)} (1 - \delta^2)
\end{aligned} \tag{8.1.7}$$

Аналогично записываются и оставшиеся 2 электронных действия:

$$\begin{aligned}
S_{p_f}(x_1) &= -d_{p_f} - (\tilde{p}_f x_1) + (b_{p_f} \sin \varphi_1 - y_{p_f} \cos \varphi_1) + \beta_{p_f} \sin 2\varphi_1 \\
S_{p_i}(x_1) &= -d_{p_i} - (\tilde{p}_i x_1) + (b_{p_i} \sin \varphi_1 - y_{p_i} \cos \varphi_1) + \beta_{p_i} \sin 2\varphi_1
\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

Далее, согласно (2.1.12), (8.1.3) и (8.1.6),

$$\begin{aligned}
S_{-p_-,(-p_+),-q}(x_2) &= -\left(-d_{p_-} - (\tilde{p}_- x_2) + (b_{p_-} \sin \varphi_2 - y_{p_-} \cos \varphi_2) + \beta_{p_-} \sin 2\varphi_2 \right) + \\
&\quad + \left(-d_{p_+} + (\tilde{p}_+ x_2) + (b_{p_+} \sin \varphi_2 - y_{p_+} \cos \varphi_2) - \beta_{p_+} \sin 2\varphi_2 \right) - q_1 x_2 = \\
&= -\left(d_{p_+} - d_{p_-} \right) + (\tilde{p}_+ + \tilde{p}_-) x_2 + \left((b_{p_+} - b_{p_-}) \sin \varphi_2 - (y_{p_+} - y_{p_-}) \cos \varphi_2 \right) - (\beta_{p_+} + \beta_{p_-}) \sin 2\varphi_2 - q_1 x_2
\end{aligned} \tag{8.1.9}$$

Введём следующие обозначения.

$$d_{p_+p_-} = d_{p_+} - d_{p_-}, \beta_{p_+p_-} = -(\beta_{p_+} + \beta_{p_-}), Q_{p_+p_-} = \frac{p_+}{(kp_+)} - \frac{p_-}{(kp_-)} \quad (8.1.10)$$

$$\gamma_{p_+p_-} = -\eta m \sqrt{(Q_{p_+p_-} e_x)^2 + \delta^2 (Q_{p_+p_-} e_y)^2}, \operatorname{tg} \chi_{p_+p_-} = \delta \frac{(Q_{p_+p_-} e_y)}{(Q_{p_+p_-} e_x)}$$

Тогда действие $S_{-p_-,(-p_+),-q}(x_2)$ может быть записано в следующем виде.

$$S_{-p_-,(-p_+),-q}(x_2) = -d_{p_+p_-} + (\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - q_1)x_2 + \gamma_{p_+p_-} \sin(\varphi_2 - \chi_{p_+p_-}) + \beta_{p_+p_-} \sin 2\varphi_2 \quad (8.1.11)$$

Аналогично,

$$S_{-p_f,p_i,+q_1}(x_1) = -\left(-d_{p_f} - (\tilde{p}_f x_1) + (b_{p_f} \sin \varphi_1 - y_{p_f} \cos \varphi_1) + \beta_{p_f} \sin 2\varphi_1\right) +$$

$$+ \left(-d_{p_i} - (\tilde{p}_i x_1) + (b_{p_i} \sin \varphi_1 - y_{p_i} \cos \varphi_1) + \beta_{p_i} \sin 2\varphi_1\right) + q_1 x_1 = -(d_{p_i} - d_{p_f}) - \quad (8.1.12)$$

$$- (\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1)x_1 + (b_{p_i} - b_{p_f}) \sin \varphi_1 - (y_{p_i} - y_{p_f}) \cos \varphi_1 + (\beta_{p_i} - \beta_{p_f}) \sin 2\varphi_1$$

$$d_{p_i p_f} = d_{p_i} - d_{p_f}, \beta_{p_i p_f} = \beta_{p_i} - \beta_{p_f}, Q_{p_i p_f} = \frac{p_i}{(kp_i)} - \frac{p_f}{(kp_f)} \quad (8.1.13)$$

$$\gamma_{p_i p_f} = -\eta m \sqrt{(Q_{p_i p_f} e_x)^2 + \delta^2 (Q_{p_i p_f} e_y)^2}, \operatorname{tg} \chi_{p_i p_f} = \delta \frac{(Q_{p_i p_f} e_y)}{(Q_{p_i p_f} e_x)}$$

$$S_{-p_f,p_i,+q}(x_1) = -d_{p_i p_f} - (\tilde{p}_i - \tilde{p}_f - q_1)x_2 + \gamma_{p_i p_f} \sin(\varphi_1 - \chi_{p_i p_f}) + \beta_{p_i p_f} \sin 2\varphi_1 \quad (8.1.14)$$

Приложение Д: преобразование аргументов специальных функций

В этом приложении приводится несколько более подробное изложение преобразования аргументов, чем в монографии Никишова и Ритуса [68].

Рассмотрим параметр $\gamma_{p_+p_-}$. Согласно (8.1.10)

$$\gamma_{p_+p_-} = -\eta m \sqrt{(\mathcal{Q}_{p_+p_-} e_x)^2 + (\mathcal{Q}_{p_+p_-} e_y)^2} \quad (9.1.1)$$

$$\mathcal{Q}_{p_+p_-} = \frac{p_+}{(kp_+)} - \frac{p_-}{(kp_-)}$$

Заметим, что $(\mathcal{Q}_{p_+p_-} k) = 0$. Отсюда из вида $k = (\omega, 0, 0, \omega)$ следует, что $(\mathcal{Q}_{p_+p_-})_0 = (\mathcal{Q}_{p_+p_-})_3$ и

$$(\mathcal{Q}_{p_+p_-} e_x)^2 + (\mathcal{Q}_{p_+p_-} e_y)^2 = (\mathcal{Q}_{p_+p_-})_1^2 + (\mathcal{Q}_{p_+p_-})_2^2 + (\mathcal{Q}_{p_+p_-})_3^2 - (\mathcal{Q}_{p_+p_-})_0^2 = -(\mathcal{Q}_{p_+p_-})^2 \quad (9.1.2)$$

Раскроем квадрат в (9.1.2).

$$-(\mathcal{Q}_{p_+p_-})^2 = -\left(\frac{p_+}{(kp_+)} - \frac{p_-}{(kp_-)}\right)^2 = -\frac{m^2}{(kp_+)^2} - \frac{m^2}{(kp_-)^2} + 2\frac{(p_+p_-)}{(kp_+)(kp_-)} \quad (9.1.3)$$

Воспользуемся ЗСИ во второй вершине.

$$q_1 + k = p_+ + p_- \quad (9.1.4)$$

Возводя в квадрат (9.1.4) и пользуясь резонансным условием, получим

$$(p_+p_-) = (kq_1) - m^2 \quad (9.1.5)$$

Подставим (p_+p_-) из (9.1.5) в (9.1.3).

$$\begin{aligned} -(\mathcal{Q}_{p_+p_-})^2 &= -\frac{m^2}{(kp_+)^2} - 2\frac{m^2}{(kp_+)(kp_-)} - \frac{m^2}{(kp_-)^2} + 2\frac{(kq_1)}{(kp_+)(kp_-)} = \\ &= -\frac{m^2}{(kp_+)^2} \left(\frac{(kp_-) + (kp_+)}{(kp_-)}\right)^2 + 2\frac{(kq_1)}{(kp_+)(kp_-)} = -\frac{m^2}{(kp_+)^2} \frac{(kq_0)^2}{(kp_-)^2} + 2\frac{(kq_1)}{(kp_+)(kp_-)} \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

Запишем выражение (9.1.6) через инварианты (2.2.6), (2.2.7):

$$-(Q_{p_+p_-})^2 = -\frac{4u^2}{m^2u_1^2} + \frac{4u}{m^2u_1} = \frac{4}{m^2} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \quad (9.1.7)$$

С учётом (9.1.2) и (9.1.7) можно переписать (9.1.1) в следующем виде.

$$\gamma_{p_+p_-} = -2\eta \sqrt{\frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)} \quad (9.1.8)$$

Аналогичный вывод можно проделать для параметра $\gamma_{p_i p_j}$.

Приложение Е: вещественность параметров γ

Покажем вещественность параметра $\gamma_{p_+p_-}$.

Из ЗСИ во второй вершине (3.3.1) следует

$$(kp_-) = (q_1 p_+) \quad (10.1.1)$$

Тогда можно записать инвариант u в следующем виде.

$$u = \frac{(kq_1)^2}{4(kp_+)(kp_-)} \quad (10.1.2)$$

Раскроем скалярные произведения в (10.1.2).

$$\begin{aligned} (kq_1) &= W\omega(nn_i) \\ (kp_+) &= E_+\omega(nn_i) \\ (q_1 p_+) &= WE_+ \left(\frac{m^2}{2E_+^2} + \frac{\theta_{1+}^2}{2} \right) = \frac{m^2 W}{2E_+} \left(1 + \frac{E_+^2 \theta_{1+}^2}{m^2} \right) = \frac{m^2}{2\tilde{x}_+} (1 + \tilde{\delta}_{1+}^2) \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{x}_+ &= \frac{E_+}{W} \\ \tilde{\delta}_{1+}^2 &= \frac{E_+^2 \theta_{1+}^2}{m^2} \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Подставим (10.1.3) в (10.1.2).

$$u = \frac{W^2 \omega^2 (nn_i)^2}{4E_+ \omega (nn_i) \frac{m^2}{2\tilde{x}_+} (1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)} = \frac{W \omega (nn_i)}{2\tilde{x}_+ \frac{m^2}{\tilde{x}_+} (1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)} = \frac{W}{\omega_{thr} (1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)} = \frac{\varepsilon_1}{(1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)} \quad (10.1.5)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = \frac{W}{\omega_{thr}} \quad (10.1.6)$$

Рассмотрим теперь u_1 .

$$u_1 = \frac{(kq_1)}{2m^2} = \frac{W \omega (nn_i)}{2m^2} = \varepsilon_1 \quad (10.1.7)$$

Из (10.1.5) и (10.1.7) видно, что подкоренное выражение в первом равенстве в (2.3.2) не может быть отрицательным:

$$\frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right) = \frac{1}{(1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)} \left(1 - \frac{1}{(1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)} \right) = \frac{\tilde{\delta}_{1+}^2}{(1 + \tilde{\delta}_{1+}^2)^2} > 0 \quad (10.1.8)$$

Таким образом вещественность параметра $\gamma_{p_+p_-}$ показана. Более того, в силу кинематики процесса параметр $\tilde{\delta}_{1+}^2$ не может отклоняться от 1 слишком существенно, поэтому выражение в (10.1.8) порядка 1, а значит $\gamma_{p_+p_-}$ действительно имеет порядок малости η .

Аналогичные рассуждения можно провести и для параметра $\gamma_{p_i p_f}$.

Приложение Ж: фазы каналов «а» и «б»

В амплитуду канала «а» вошёл фазовый множитель (см. (3.5.7)):

$$-\left(d_{p_+p_-} + d_{p_i p_f}\right) = -\left(d_{p_+} - d_{p_-} + d_{p_i} - d_{p_f}\right) \quad (11.1.1)$$

При замене ($p_f \leftrightarrow p_-$) получится фаза канала «б», которая, как видно из (11.1.1) (с учётом (8.1.4) и (8.1.7)) совпадёт с фазой канала «а».