

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций

Работа допущена к защите
Директор Высшей
инженерно-физической школы
_____ В.В. Журихина
« ____ » _____ 2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
РЕЗОНАНСНОЕ РОЖДЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ
ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ПРИ АННИГИЛЯЦИИ
ЭЛЕКТРОННОЙ ПАРЫ В СЛАБОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ
ПОЛЕ

по направлению подготовки 03.04.02 – Физика
профиль 03.04.02_03 – Физика ядра и элементарных частиц

Выполнил
Студент группы 3440302/80301

Д.В. Дорошенко

Научный руководитель
профессор ВИФШ, д. ф.-м.н.

С.П. Рощупкин

Консультант по
нормоконтролю

С.В. Жарко

Санкт-Петербург

2020

РЕФЕРАТ

На 66 с., 3 рисунка, 1 таблицу.

АННИГИЛЯЦИОННАЯ АМПЛИТУДА, ВИРТУАЛЬНАЯ ЧАСТИЦА, ЛАЗЕРНОЕ ПОЛЕ, ЭЛЕКТРОН, ПОЗИТРОН, ПРОПАГАТОР, РЕЗОНАНС, РЕЗОНАНС ОЛЕЙНИКА, СЕЧЕНИЕ, ФУНКЦИЯ ВОЛКОВА

Данная работа содержит теоретическое исследование процесса резонансного рождения ультрарелятивистских электрон-позитронных пар при аннигиляции электронной пары в слабом электромагнитном поле. При этом поле учитывается классически. Получена амплитуда процесса для произвольных интенсивностей и поляризации. Показано, что процесс имеет резонансное протекание при ультрарелятивистских энергиях начальной электрон-позитронной пары, малом угле между электроном и позитроном и превышении их комбинационной энергии порогового значения. Обнаружено, что для каждого угла вылета конечного позитрона существует от одного до двух значений энергии конечного электрона (позитрона). Получена резонансная амплитуда рождения ультрарелятивистских электрон-позитронных пар при аннигиляции электронной пары в слабом электромагнитном поле циркулярной поляризации. Изучение данного процесса представляет серьёзный интерес в связи с тем, что резонансное сечение процесса значительно превышает соответствующее сечение без поля (сечение Баба).

THE ABSTRACT

66 pages, 3 pictures, 1 table.

ANNIHILATION AMPLITUDE, VIRTUAL PARTICLE, LASER FIELD, ELECTRON, POSITRON, PROPAGATOR, RESONANCE, OLEINIK'S RESONANCE, CROSS SECTION, VOLKOV FUNCTION

This work contains theoretical study of resonant ultrarelativistic electron-positron pair production in electron pair annihilation in the field of weak electromagnetic field process. Field is considered classical. The amplitude of process for arbitrary intensity and polarization is received. It is shown that the resonance take place only at ultra-relativistic energies of electron-pair, small angle between electron and positron and when certain combination of initial electron and positron energies excess the threshold energy. It is found that there are from one to two energies of final electron (positron) for each fixed emission angle of final positron. Resonant amplitude of ultrarelativistic electron-positron pair production in electron pair annihilation in the field of weak electromagnetic field of circular polarization is received. Study of this process is of great interest because the resonant cross section in the weak field may significantly exceed corresponding cross section without field (Bhabha cross section).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Обзор КЭД во внешнем поле	8
1.1. Параметры процесса	8
1.2. Решение уравнения Дирака для электрона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны (функция Волкова)	11
1.3. Функция Грина фотона (пропагатор фотона)	14
1.4. Специальные функции L	15
Глава 2. Амплитуда процесса рождения электрон-позитронной пары при аннигиляции электроной пары в электромагнитном поле произвольной интенсивности и поляризации	18
Глава 3. Резонанс.....	33
3.1. Резонансная кинематика.....	33
3.2. Амплитуда процесса в случае резонансная и циркулярной поляризации ...	44
Глава 4. Оценка резонансного сечения.....	50
Заключение	57
Список использованных источников	59

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) – область физики, обладающая одной из самых высоких точностей среди всех физических теорий. Именно с такой точностью совпадают предсказания КЭД и результаты экспериментов по измерению, к примеру, Лэмбовского сдвига [38] и аномального магнитного момента [66]. КЭД описывает и объясняет процессы и взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем и между собой посредством обмена виртуальными частицами. Основной вклад в создание этой концепции внесли Вернер Гейзенберг, Поль Дирак, Хидэки Юкава и Ричард Фейнман. Все процессы с участием виртуальных частиц могут быть отображены с помощью удобных для вычисления и физически наглядных диаграмм Фейнмана.

КЭД, помимо уже упомянутых аномального магнитного момента мюона и электрона и Лэмбовского сдвига, позволила объяснить энергетические уровни водорода, рассеяние и взаимодействие частиц в электромагнитном поле, рядом с нейтронными звёздами. Первые работы, посвящённые процессам КЭД во внешних полях, были выполнены О. Клейном [39], Ф. Заутером [65] и Ю. Швингером [66]. Эти поля должны быть настолько сильными, чтобы не меняться при прохождении интересующих процессов. При этом обычно они являются вполне классическими.

В связи с изобретением лазеров и дальнейшим их развитием появилась возможность создавать сильные электромагнитные поля. Высокие интенсивности и напряжённости полей являются определяющим шагом для исследований в ранее недоступных областях не только в квантовой электродинамике, но и в других направлениях физики. Такой большой интерес и применение вызваны уникальными свойствами лазеров.

Так, например, для получения высокомоощного излучения в случае малой энергии импульса достаточно создать импульс малой длительности. А чтобы

получить вдобавок и высокую интенсивность, необходимо сфокусировать этот пучок. Поэтому производство импульсов малой длительности – одна из ключевых задач лазерной физики на данный момент.

Другим важным свойством является монохроматичность. Она означает, что отношение разброса лазерного излучения к основной частоте излучения много меньше единицы: $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1$. В случае непрерывного лазера эта величина обычно $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-8}$ и тогда спектр описывается дельта-функцией Дирака.

Благодаря когерентности появляется возможность фокусировать излучение в пятно диаметром порядка длины волны: $d \sim \lambda \sim 1$ мкм. В случае большой интенсивности преобладают многофотонные процессы (например, [64]), поэтому вместо обычного понятия пространственно-временной когерентности лазерного излучения нужно использовать когерентность высших порядков [9].

Обращаясь непосредственно к применению лазеров, необходимо отметить некоторые исследования с их участием, такие как эксперименты с релятивистской плазмой [10], ультрарелятивистскими электронными пучками при взаимодействии с ультракороткими импульсами [23, 25], получении пучков жёсткого рентгеновского и гамма-излучения при взаимодействии с пучками электронов [20].

Процессы КЭД в поле плоской монохроматической волны изучаются достаточно давно – одной из первых работ является монография А.И. Никишова и В.И. Ритуса [11]. В ней обобщены выводы по результатам исследования процессов первого порядка по постоянной тонкой структуры. При этом были изучены и процессы более высоких порядков, чем первый [1-3, 5, 6, 10, 11, 14 - 17, 19, 34-36, 47]. Следует отметить и следующие важные обзоры – процессов рассеяния электрона на атоме [35], исследования резонансных и когерентных эффектов КЭД в световом поле [17], изучение процессов в сильных полях [36] и

рассмотрение резонансных процессов в поле плоской монохроматической волны [59].

Процессы второго порядка могут протекать как резонансно, так и не резонансно [12, 13, 22, 29-33, 40-46, 49-51, 53-56, 60-63, 68-70]. Резонанс Олейника [12, 13] (или просто резонанс) означает, что промежуточная виртуальная частица выходит на массовую оболочку, становясь реальной, в связи с тем, что в лазерном поле становятся возможными процессы первого порядка по постоянной тонкой структуры. Таким образом, процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры сводится к двум последовательным процессам первого порядка.

Изучаемый в этой работе процесс – резонансное рождение ультрарелятивистских электрон-позитронных пар при аннигиляции электронной пары в слабом электромагнитном поле – тоже относится к этой категории. Результаты этого исследования были опубликованы и представлены в [7, 8, 27, 28, 57, 59]. Также в работе [26] детально изучен рассеивательный канал того же процесса. Здесь же речь пойдёт об аннигиляционном канале.

ГЛАВА 1. ОБЗОР КЭД ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Вероятности протекания процессов в КЭД рассчитываются с помощью методов квантовых переходов. Вместо волновых функций электронов и позитронов используются точные решения Волкова [4] уравнения Дирака для электрона и позитрона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны. Оно будет получено ниже в этой главе в случае электрона. Для взаимодействия частиц с полем излучённых фотонов используется теория возмущений, а взаимодействие частиц с полем волны учитывается точно.

Используемый метод оказывается полуклассическим, так как падающая электромагнитная волна рассматривается классически, а другие частицы квантовомеханически. Соответствие между полуклассическим и полным квантовомеханическим методом было исследовано в работе [37] и оказалось, что их результаты совпадают если, падающий пучок находится в когерентном состоянии. Если это не соблюдается, то необходимо, чтобы полное число фотонов было много больше единицы и ряды по степеням плотности фотонов сходились.

1.1. Параметры процесса

Рассмотрим основные параметры, характеризующие процессы квантовой электродинамики в лазерном поле. За счёт них определяется количество фотонов внешнего лазерного поля, которые вынужденно излучаются или поглощаются электронами в процессе. Мы заострим внимание на двух таких характерных параметрах. Важно отметить, что они вместе не всегда играют решающую роль – это зависит от типа процесса.

Первый параметр – классический релятивистски-инвариантный параметр [52]:

$$\eta = \frac{eF}{m\omega}$$

Он определяет нелинейные эффекты. Из-за того, что в нём нет постоянной Планка, его можно считать классическим. Классический релятивистски-инвариантный параметр имеет смысл отношение работы поля над частицей на длине волны к энергии частицы. Когда он много меньше единицы, он отображает скорость осцилляции частицы в поле. Также для импульсного поля он характеризует интенсивность лазерной волны в пике импульса. Отсюда можно найти связь напряжённости и данным параметром:

$$F = \frac{m\omega}{e}\eta = 5,2 \cdot 10^{10} \eta \frac{B}{см} \quad (1.1)$$

Согласно формуле (1.1) $\eta \sim 1$ в области оптических частот ($\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$) для полей с напряженностью порядка $F \sim 10^{10} \dots 10^{11} \frac{B}{см}$.

В случае большей части процессов первого порядка, связанных с излучением или поглощением электроном фотона в поле лазера, η оказывается основным параметром, определяющим многофотонные. В одном случае - $\eta \ll 1$ (слабое поле) наиболее вероятны однофотонные процессы, в другом случае $\eta \geq 1$ (сильное поле) вероятнее многофотонные процессы.

Второй параметр – квантовый (там наличествует постоянная Планка), возникает в квантовых процессах с передачей импульса между рассеивающимися частицами в поле лазерной волны. Он был впервые в работе Ф.Н. Бункина и М.В. Фёдорова в 1965 г. [24]:

$$\gamma = \eta \frac{mcv}{\hbar \omega}$$

Его смысл – отношение работы поля на расстоянии, проходимым электроном за характерное время осцилляций, к энергии фотона.

В области оптических частот ($\hbar \omega \sim 1 \text{ эВ}$) можно получить:

$$\gamma = \frac{mc\nu}{\hbar\omega}\eta = 5 \cdot 10^5 \nu\eta \quad (1.2)$$

Когда интенсивность слабая ($\eta \sim 10^{-5}$) и энергии релятивистская, то $\gamma \gtrsim 1$, как видно из (1.2). Такой интенсивности отвечает напряженность лазерного поля в оптическом диапазоне: $F \sim 10^5 \div 10^6 \frac{B}{см}$.

Параметр Бункина-Федорова является основным параметром многофотонности в одноимённой области, которая соответствует довольно широкой кинематической области углов рассеяния. Когда параметр $\gamma \ll 1$, мы имеем однофотонное приближение (поле является слабым); $\gamma \gtrsim 1$ - многофотонные процессы становятся существенны (поле сильное).

Важно отметить, что, фиксируя интенсивность, мы получаем разные значения этих двух параметров многофотонности. Часто исследуют область умеренно сильных полей, в которой они принимают значения $\eta \ll 1$ и $\gamma \gtrsim 1$.

В релятивистском случае и в случае эллиптической поляризации (кроме циркулярной поляризации и дипольного приближения) лазерной волны возникает квантовый параметр β [28], который имеет вид:

$$\beta = (1 - \delta^2)\eta^2 \frac{|\mathbf{p}|c}{\hbar\omega} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 = (1 - \delta^2) \left(\frac{eF}{E\omega} \right) \left(\frac{eF\nu\omega^{-1}}{\hbar\omega} \right)$$

$$\beta = (1 - \delta^2) \left(\frac{mc^2}{E} \right) \eta\gamma$$

Физический смысл определяется произведением двух параметров η и γ . Параметр β становится порядка единицы в лазерных полях с напряженностью порядка $F \sim 10^7 \div 10^8 \frac{B}{см}$.

Эксперименты по верификации КЭД в лазерных полях были начаты в 1996 году [23]. В настоящий момент есть несколько работающих и проектирующихся

систем, исследующих такие процесса процессы КЭД. Рассмотрим некоторые важнейшие характеристики современных систем в таблице.

Основные характеристики современных лазерных систем

Лазерная система	Длительность импульса, фс	Пиковая интенсивность (при оптических частотах), $\frac{Вт}{см^2}$
PHELIX (The Petawatt High-energy Laser for Heavy Ion Experiments) (Германия) [21]	500	$2 \cdot 10^{20}$
Vulcan (Великобритания)	500	10^{21}
Vulcan 10 (Великобритания)	30	10^{23}
ELI (Extreme Light Infrastructure) (Румыния)	15	10^{24}
XCELS (Exawatt Center for Extreme Light Studies) (Россия)	10	10^{26}

1.2. Решение уравнения Дирака для электрона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны (функция Волкова)

Точное решение уравнения Дирака в поле плоской электромагнитной волны было получено Д. В. Волковым в 1937 г. [52]. Пусть электрон в поле плоской электромагнитной волны распространяется вдоль оси z . Тогда её 4-потенциал может быть представлен в следующем виде

$$A(\varphi) = \frac{F}{\omega} (e_x \cos(\varphi) + \delta e_y \sin(\varphi)), \quad (1.3)$$

где $e_x = (0, 1, 0, 0)$, $e_y = (0, 0, 1, 0)$, $\varphi = kx = k^\mu x_\mu$, $A = (0, \vec{A})$, δ - параметр эллиптичности волны, F - напряженность электрического поля, ω - угловая частота волны. Важно отметить, что мы отсюда и далее будем использовать релятивистскую систему единиц $\hbar = c = 1$. Этот 4-потенциал удовлетворяет калибровке Лоренца:

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial \varphi} = 0.$$

Это условие можно записать также и другим образом

$$kA = 0$$

Будем искать решение следующего уравнения

$$\left([\hat{p} - eA]^2 - m^2 - \frac{i}{2} e F_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \right) \psi = 0, \quad (1.4)$$

где $\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu - \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu)$, $F_{\mu\nu} = k_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial \varphi} - k_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial \varphi}$ - тензор электромагнитного поля. Раскрытие уравнения (1.4) даёт

$$\left(-\partial^2 - 2ieA\partial + e^2 A^2 - m^2 - ie\hat{k}\tilde{\gamma}_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial \varphi} \right) \psi = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$\psi = U(\varphi) e^{-ipx},$$

где p - постоянный 4-вектор. Наложим дополнительное условие на этот вектор:

$$p^2 = m^2.$$

Это допустимо, потому что можно прибавить к p любой вектор вида ck (c – константа), и ψ не изменится за счёт переобозначения $U(\varphi)$. С учётом

$$\partial^\mu U = k^\mu \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \partial_\mu \partial^\mu U = k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{получаем уравнение на } U(\varphi):$$

$$2i(pk) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \left(-2e(pA) + e^2 A^2 - ie\hat{k}\tilde{\gamma}_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial \varphi} \right) U = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$U(\varphi) = \exp \left(-i \int_0^{kx} \left(\frac{e}{(kp)} (pA) - \frac{e^2 A^2}{2(kp)} \right) d\varphi' + \frac{e\hat{k}A}{2(kp)} \right) \frac{u}{\sqrt{2E}}.$$

Здесь u – произвольный постоянный биспинор. Так как $(\hat{k}A)^2 = \hat{k}A\hat{k}A = \hat{k} \left[2(kA) - \hat{k}A \right] A = -\hat{k}^2 A^2 = -k^2 A^2 = 0$, то все слагаемые в разложении экспоненты у второго слагаемого равны нулю и

$$\exp \left(\frac{e\hat{k}A}{2(pk)} \right) = 1 + \frac{e}{2(kp)} \hat{k}A.$$

Тогда получаем:

$$U(\varphi) = \left(1 + \frac{e\hat{k}A}{2(kp)} \right) \frac{u}{\sqrt{2E}} \exp \left(-i \int_0^\varphi \left(\frac{e}{(kp)} (pA) - \frac{e^2 A^2}{2(kp)} \right) d\varphi' \right).$$

Таким образом, функция Волкова будет иметь следующий вид:

$$\psi(x) = \left(1 + \frac{e}{2(kp)} \hat{k}A \right) \frac{u}{\sqrt{2E}} e^{is}, \quad (1.5)$$

где

$$S = -(px) - \frac{e}{(kp)} \int_0^{kx} \left((pA) - \frac{e}{2} A^2 \right) d\varphi'$$

- классическое действие для электрона в поле плоской монохроматической электромагнитной волны. Представим функцию Волкова в более удобной форме. Раскроем входящие в выражение (1.3) косинус и синус:

$$A(\varphi) = \frac{F}{2\omega} \cdot \left[e_x \cdot (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) - i\delta \cdot e_y \cdot (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \right] = \\ = \frac{F}{2\omega} \left[\varepsilon_- e^{i\varphi} + \varepsilon_+ e^{-i\varphi} \right] = \eta \frac{m}{2e} \left[\varepsilon_- e^{i\varphi} + \varepsilon_+ e^{-i\varphi} \right], \quad \varepsilon_{\pm} = e_x \pm i\delta \cdot e_y.$$

Тогда (1.5) преобразуется в

$$\psi(x) = \left(1 + \eta \frac{m}{4(kp)} \left[\varepsilon_- e^{i\varphi} + \varepsilon_+ e^{-i\varphi} \right] \right) \frac{u}{\sqrt{2E}} e^{iS}$$

1.3. Функция Грина фотона (пропагатор фотона)

Пропагатор фотона – свёртка операторов 4-потенциала поля (решения уравнения Д'Аламбера), описывающая распространение виртуального фотона.

Реальные частицы подчиняются следующему соотношению:

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2,$$

Тогда как для виртуальных это не выполняется:

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \neq m^2.$$

Концепция виртуальных частиц появилась в теории возмущений квантовой теории поля. В ней полагается, что взаимодействия между наблюдаемыми (детектируемыми) частицами передаются с помощью виртуальных. На диаграммах Фейнмана такие частицы изображаются внутренними линиями.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \underbrace{\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)} | 0 \rangle &= \langle 0 | T(\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)) | 0 \rangle = \\
&= -i g_{\mu\nu} \int \left(\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 + i\varepsilon} \right) \cdot \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = -i G_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
G_{\mu\nu}(x_1, x_2) &= g_{\mu\nu} \int \left(\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 + i\varepsilon} \right) \cdot \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}
\end{aligned}$$

Во внешнем лазерном поле виртуальная частица может выйти на массовую оболочку, то есть стать реальной. Такие процессы называются резонансами.

1.4. Специальные функции L

Рассмотрим следующие функции, возникающие при решении задач КЭД в световом поле

$$\begin{aligned}
U_1(\varphi) &= e^{iS} \\
U_2(\varphi) &= e^{i\varphi + iS} \\
U_3(\varphi) &= e^{-i\varphi + iS},
\end{aligned}$$

где

$$S = \gamma \sin(\varphi - \chi) + \beta \sin 2\varphi.$$

Видно, что функции $U_{1,2,3}(\varphi) = U_{1,2,3}(\varphi + 2\pi)$ – периодические. Поэтому мы можем разлагать их в ряд Фурье на периоде $[0, 2\pi]$.

$$U_1(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} L_l \exp(il\varphi)$$

$$U_2(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} L_{l-1} \exp(il\varphi)$$

$$U_3(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} L_{l+1} \exp(il\varphi).$$

С учётом этого коэффициенты Фурье можно представить в следующем виде:

$$L_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_1(\varphi) \exp(-il\varphi) \cdot d\varphi$$

$$L_{l-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_2(\varphi) \exp(-i(l-1)\varphi) \cdot d\varphi$$

$$L_{l+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_3(\varphi) \exp(-i(l+1)\varphi) \cdot d\varphi,$$

Где функция L_l представима интегралом вида

$$L_l \equiv L_l(\gamma, \beta, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{i[\gamma \sin(\varphi - \chi) + \beta \sin 2\varphi - l\varphi]\} \cdot d\varphi. \quad (1.6)$$

Чтобы представить функции L_l в виде рядов по функциям Бесселя целочисленного индекса, воспользуемся соотношением:

$$\exp(i\alpha \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) \exp(in\theta). \quad (1.7)$$

Умножим его на $\exp(-in'\theta)$ и проинтегрируем на интервале $[0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(\alpha \sin \theta - n'\theta)] \cdot d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(n - n')\theta] \cdot d\theta \right\} = J_{n'}(\alpha).$$

Таким образом, было получено интегральное представление функций Бесселя целочисленного индекса:

$$J_{n'}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(\alpha \sin \theta - n'\theta)] \cdot d\theta$$

Представим экспоненты из (1.6) с помощью (1.7):

$$\exp(i\gamma \sin(\varphi - \chi)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma) \exp(in(\varphi - \chi)),$$

$$\exp(i\beta \sin 2\varphi) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n'}(\beta) \exp(2in'\varphi).$$

Соберём их в месте в (1.6):

$$L_l \equiv L_l(\gamma, \beta_p, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma) J_{n'}(\beta) \exp(-in\chi) C,$$

где обозначено

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[in_0\varphi] \cdot d\varphi = \exp[i\pi n_0] \frac{\sin(\pi n_0)}{(\pi n_0)} = \begin{cases} 0, & n_0 \neq 0 \\ 1, & n_0 = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$n_0 = (n + 2n' - l)$$

В связи с (1.8) сумма по n сворачивается: $n = (l - 2n')$. Тогда универсальные функции L_l принимают вид:

$$L_l \equiv L_l(\gamma, \beta_p, \chi) = \exp(-il\chi) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \exp(2in'\chi) J_{l-2n'}(\gamma) J_{n'}(\beta_p) \quad (1.9)$$

Далее всё время будем использовать универсальные функции в виде (1.9).

ГЛАВА 2. АМПЛИТУДА ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ ПРИ АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ И ПОЛЯРИЗАЦИИ

Перейдём непосредственно к рассмотрению процесса рождения электрон-позитронной пары при аннигиляции электрон-позитронной пары в слабом электромагнитном поле, изображённого на диаграмме Фейнмана.

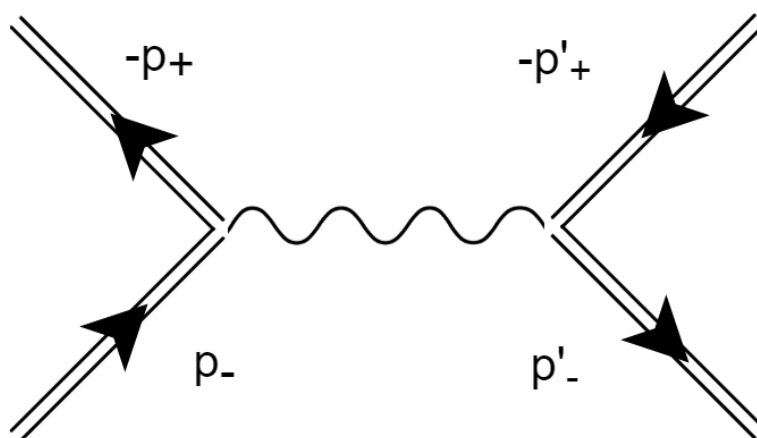


Рис. 1 Диаграмма Фейнмана процесса рождения электрон-позитронной пары при аннигиляции электрон-позитронной пары в электромагнитном поле

Электрон (с 4-импульсом p_-) аннигилирует с позитроном (с 4-импульсом $-p_+$) в вершине 1, рождает фотон (с 4-импульсом p), который в вершине 2 рождает электрон-позитронную пару (электрон p'_- и позитрон $-p'_+$). Здесь реальные частицы – электроны и позитроны, обозначены двойными линиями, соответствующими волковским функциям, а виртуальный промежуточный фотон – волнистой линией, отвечающей пропагатору фотона.

Здесь мы будем изучать его тогда, когда виртуальный фотон выходит на массовую поверхность, становится реальным и процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры распадается на два процесса первого порядка.

Амплитуда процесса определяется следующим выражением:

$$S = ie^2 \iint d^4x_1 \cdot d^4x_2 \cdot \left[\bar{\Psi}_{e^-}(x_2) \cdot \tilde{\gamma}^\mu \cdot \Psi_{e^+}(x_2) \right] \cdot G_{\mu\nu}(x_1, x_2) \cdot \left[\bar{\Psi}_{e^+}(x_1) \cdot \tilde{\gamma}^\nu \cdot \Psi_{e^-}(x_1) \right], \quad (2.1)$$

где $G_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ – пропагатор фотона, $\Psi_{e^-}(x_1)$ и $\bar{\Psi}_{e^-}(x_2)$ – функции Волкова начального и конечного электронов, а $\bar{\Psi}_{e^+}(x_1)$ и $\Psi_{e^+}(x_2)$ – функции Волкова начального и конечного позитронов. Пропагатор имеет вид

$$G_{\mu\nu}(x_1, x_2) = g_{\mu\nu} \int \left(\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 + i\varepsilon} \right) \cdot \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

Функция Волкова начального электрона ($\Psi_{e^-}(x_1)$) выглядит следующим образом

$$\Psi_{e^-}(x_1) = \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp_-)} \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right] \cdot \frac{u_1}{\sqrt{2E_-}} \cdot \exp(iS_-(x_1)) \quad (2.2)$$

$$S_-(x_1) = -(p_- x_1) - \frac{e}{(kp_-)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p_- A) - \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi'$$

Особо отметим, что здесь и далее $e = -|e|$ и, следовательно, $\eta = \frac{eF}{m\omega} < 0$. Чтобы

получить функцию Волкова для конечного электрона ($\bar{\Psi}_{e^-}(x_2)$), нужно провести операцию дираковского сопряжения $\bar{\psi}_{e^-} = \psi_{e^-}^\dagger \tilde{\gamma}_0$ (крест – эрмитово сопряжение) и переобозначения импульсов.

Здесь введены следующие обозначения

$$\hat{k} = k_\mu \tilde{\gamma}^\mu, \hat{A} = A_\nu \tilde{\gamma}^\nu, \mu = 0, 1, 2, 3; \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$\bar{\psi}_{e^-}(x_2) = \psi_{e^-}^\dagger \cdot \tilde{\gamma}^0 =$$

$$= \frac{\exp(-iS_-)}{\sqrt{2E'_-}} \left\{ \left[u_2 + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} k_\mu \cdot (\varepsilon_{-\nu} e^{i\varphi} + \varepsilon_{+\nu} e^{-i\varphi}) (\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu u_2) \right]^\dagger \tilde{\gamma}^0 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp(-iS_-)}{\sqrt{2E'_-}} \left[\begin{array}{c} u_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 + \\ + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} k_\mu \cdot (\varepsilon_{-v} e^{+i\varphi} + \varepsilon_{+v} e^{-i\varphi}) u_2^\dagger (\tilde{\gamma}^v)^\dagger (\tilde{\gamma}^\mu)^\dagger \tilde{\gamma}^0 \end{array} \right] = \\
&= \frac{\exp(-iS_-)}{\sqrt{2E'_-}} \left[\begin{array}{c} u_2^\dagger \tilde{\gamma}^0 + \\ + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} k_\mu \cdot (\varepsilon_{-v} e^{+i\varphi} + \varepsilon_{+v} e^{-i\varphi}) u_2^\dagger (\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^v \tilde{\gamma}^0) (\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^0) \tilde{\gamma}^0 \end{array} \right] = \\
&= \frac{\exp(-iS_-)}{\sqrt{2E'_-}} \left[\begin{array}{c} (u_2^\dagger \tilde{\gamma}^0) + \\ + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} k_\mu \cdot (\varepsilon_{-v} e^{i\varphi} + \varepsilon_{+v} e^{-i\varphi}) \cdot \\ \cdot (u_2^\dagger \tilde{\gamma}^0) \tilde{\gamma}^v (\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^0) \tilde{\gamma}^\mu (\tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^0) \end{array} \right] = \\
&= \frac{\exp(-iS_-)}{\sqrt{2E'_-}} \left[\begin{array}{c} \bar{u}_2 + \\ + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} k_\mu \cdot (\varepsilon_{-v} e^{i\varphi} + \varepsilon_{+v} e^{-i\varphi}) \bar{u}_2 \tilde{\gamma}^v \tilde{\gamma}^\mu \end{array} \right] = \\
&= \frac{\exp(-iS_-)}{\sqrt{2E'_-}} \bar{u}_2 \left[\begin{array}{c} 1 + \\ + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} ((\varepsilon_{-v} e^{i\varphi} + \varepsilon_{+v} e^{-i\varphi}) \tilde{\gamma}^v) (k_\mu \tilde{\gamma}^\mu) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Тогда функция Волкова для конечного электрона примет вид

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{e^-}(x_2) &= \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2E'_-}} \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \right] \exp(-iS_-(x_2)) \\
S_-(x_2) &= -(p'_- x_2) - \frac{e}{(kp'_-)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p'_- A) - \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi'
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Функцию конечного позитрона ($\Psi_{e^+}(x_2)$) получим из (2.2) заменой $p_- \rightarrow -p'_+$

$$\begin{aligned}
\Psi_{e^+}(x_2) &= \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp'_+)} \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right] \cdot \frac{v_2}{\sqrt{2E'_+}} \cdot \exp(iS_+(x_2)) \\
S_+(x_2) &= (p'_+ x_2) - \frac{e}{(kp'_+)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p'_+ A) + \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi'
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Аналогично получим и $\bar{\Psi}_{e^+}(x_1)$ – функцию начального позитрона

$$\bar{\psi}_{e^+}(x_1) = \frac{\bar{v}_1}{\sqrt{2E_+}} \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp_+)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \right] \exp(-iS_+(x_1))$$

$$S_+(x_1) = (p_+ x_1) - \frac{e}{(kp_+)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p_+ A) + \frac{e_+}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi'$$
(2.5)

Перейдём непосредственно к вычислению амплитуды. Три интеграла в (2.1) можно записать и посчитать отдельно, пользуясь тем, что это функции разных переменных:

$$S = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \cdot g_{\mu\nu} \cdot \int \frac{d^4 p}{p^2 + i\varepsilon} \cdot \int d^4 x_2 \cdot \bar{\Psi}_{e^-}(x_2) \cdot \tilde{\gamma}^\mu \cdot \Psi_{e^+}(x_2) \cdot e^{ipx_2} \cdot$$

$$\cdot \int d^4 x_1 \cdot \left[\bar{\Psi}_{e^+}(x_1) \cdot \tilde{\gamma}^\nu \cdot \Psi_{e^-}(x_1) \right] \cdot e^{-ipx_1} =$$

$$= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \cdot g_{\mu\nu} \cdot \int \frac{d^4 p}{p^2 + i\varepsilon} \cdot J_2 \cdot J_1$$
(2.6)

Первым шагом будет вычисление J_1 :

$$J_1 = \int d^4 x_1 \cdot \bar{\Psi}_{e^+}(x_1) \cdot \tilde{\gamma}^\nu \cdot \Psi_{e^-}(x_1) \cdot e^{-ipx_1}$$

Воспользуемся выражениями (2.2) и (2.5)

$$J_1 = \int d^4 x_1 \cdot \frac{\bar{v}_1 u_1}{2\sqrt{E_+ E_-}} \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp_+)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \right] \cdot \tilde{\gamma}^\nu \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp_-)} \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right] \exp(-iS_+(x_1) + iS_-(x_1) - ipx_1)$$
(2.7)

Перемножим квадратные скобки:

$$A = \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp_+)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \right] \cdot \tilde{\gamma}^\nu \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp_-)} \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right]$$

$$\begin{aligned}
A &= \tilde{\gamma}^\nu - \eta \frac{m}{4(kp_+)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu + \\
&\quad + \eta \frac{m}{4(kp_-)} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) + \\
&\quad - \eta^2 \frac{m^2}{16(kp_+)(kp_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) = \quad (2.8) \\
&= \tilde{\gamma}^\nu + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right) e^{i\varphi} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right) e^{-i\varphi} - \\
&\quad - \eta^2 \frac{m^2}{16(kp_+)(kp_-)} \left(\begin{aligned} &\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- e^{2i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ e^{-2i\varphi} + \\ &\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Упростим (2.8), используя свойства гамма-матриц, а также $\hat{k}\hat{k} = 0$, $\hat{\varepsilon}_\pm \hat{k} = -\hat{k} \hat{\varepsilon}_\pm$

$$\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- = \hat{\varepsilon}_- \hat{k} (2k^\nu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu) \hat{\varepsilon}_- = 2\hat{\varepsilon}_- \hat{k} k^\nu \hat{\varepsilon}_- = -2\hat{\varepsilon}_-^2 \hat{k} k^\nu = 2(1 - \delta^2) \hat{k} k^\nu \quad (2.9)$$

$$\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ = \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} (2k^\nu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu) \hat{\varepsilon}_+ = 2\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} k^\nu \hat{\varepsilon}_+ = -2\hat{\varepsilon}_+^2 \hat{k} k^\nu = 2(1 - \delta^2) \hat{k} k^\nu \quad (2.10)$$

$$\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ = \hat{\varepsilon}_- \hat{k} (2k^\nu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu) \hat{\varepsilon}_+ = 2\hat{\varepsilon}_- \hat{k} k^\nu \hat{\varepsilon}_+ = -2\hat{\varepsilon}_- \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} k^\nu \quad (2.11)$$

$$\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- = \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} (2k^\nu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu) \hat{\varepsilon}_- = 2\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} k^\nu \hat{\varepsilon}_- = -2\hat{\varepsilon}_+ \hat{\varepsilon}_- \hat{k} k^\nu \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- = -2(\hat{\varepsilon}_- \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{\varepsilon}_-) \hat{k} k^\nu = \\
&= -4(\varepsilon_+ \varepsilon_-) \hat{k} k^\nu = 4(1 + \delta^2) \hat{k} k^\nu
\end{aligned} \quad (2.13)$$

С учётом этого (2.8) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
A &= \tilde{\gamma}^\nu - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp_+)(kp_-)} (1 + \delta^2) \hat{k} k^\nu + \\
&\quad + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right) e^{i\varphi} + \\
&\quad + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right) e^{-i\varphi} - \\
&\quad - \eta^2 \frac{m^2}{8(kp_+)(kp_-)} (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) (1 - \delta^2) \hat{k} k^\nu = \\
&= a_1^\nu + b_{1-}^\nu e^{i\varphi} + b_{1+}^\nu e^{-i\varphi} + c_1^\nu (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) = \mathbf{H}(\varphi)
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_1^v &= \tilde{\gamma}^v - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp_+)(kp_-)} (1 + \delta^2) \hat{k}k^v \\
b_{1-}^v &= \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{(kp_+)} \right) \\
b_{1+}^v &= \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{(kp_+)} \right) \\
c_1^v &= -\eta^2 \frac{m^2}{8(kp_+)(kp_-)} (1 - \delta^2) \hat{k}k^v
\end{aligned}$$

Рассмотрим составляющие показателя экспоненты в (2.7). Начнём с позитрона

$$S_+(x_1) = (p_+ x_1) - \frac{e}{(kp_+)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p_+ A) + \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi'$$

Подставим выражение 4-вектора A :

$$A(\varphi) = \frac{F}{\omega} (e_x \cos(\varphi) + \delta e_y \sin(\varphi))$$

тогда

$$(p_+ A) = \frac{F}{\omega} \cdot \left[(p_+ e_x) \cdot \cos \varphi + \delta \cdot (p_+ e_y) \cdot \sin \varphi \right] \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
A^2 &= -\left(\frac{F}{\omega} \right)^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \delta^2 \cdot \sin^2 \varphi) = \\
&= -\frac{F^2}{2\omega^2} (1 + \delta^2) - \frac{F^2}{2\omega^2} (1 - \delta^2) \cos 2\varphi
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Проинтегрируем по углу:

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p_+ A) + \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi' = \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\frac{F}{\omega} \cdot \left[(p_+ e_x) \cdot \cos \varphi' + \delta \cdot (p_+ e_y) \cdot \sin \varphi' \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{e}{2} \left(\frac{F^2}{2\omega^2} (1 + \delta^2) + \frac{F^2}{2\omega^2} (1 - \delta^2) \cos 2\varphi' \right) \right] d\varphi'
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда действие для позитрона можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
S_+(x_1) &= (p_+ x_1) - \frac{eF}{(kp_+)\omega} \left[(p_+ e_x)(\sin\varphi - \sin\varphi_0) - \right. \\
&\quad \left. - \delta \cdot (p_+ e_y)(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \right] + \\
&+ \frac{1}{(kp_+)} \frac{e^2 F^2}{4\omega^2} \left((1 + \delta^2)(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}(1 - \delta^2)(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) \right) = \quad (2.17) \\
&= -d_+ + (\tilde{p}_+ x_1) + (b_+ \sin\varphi - y_+ \cos\varphi) + \beta_+ \sin 2\varphi,
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\tilde{p}_+ = p_+ + \frac{1}{4}(1 + \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp_+)} k$$

$$b_+ = -\eta \frac{m}{(kp_+)} (p_+ e_x)$$

$$y_+ = -\eta \frac{m}{(kp_+)} \delta (p_+ e_y)$$

$$\beta_+ = \frac{1}{8}(1 - \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp_+)}$$

Теперь рассмотрим действие для электрона

$$S_-(x_1) = -(p_- x_1) - \frac{e}{(kp_-)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p_- A) - \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi'$$

Действуя аналогично (2.14)-(2.16), интегрируем

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p_- A) - \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi' = \\
&= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\frac{F}{\omega} \cdot \left[(p_- e_x) \cdot \cos\varphi + \delta \cdot (p_- e_y) \cdot \sin\varphi \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e}{2} \left(\frac{F^2}{2\omega^2} (1 + \delta^2) + \frac{F^2}{2\omega^2} (1 - \delta^2) \cos 2\varphi' \right) \right] \cdot d\varphi'
\end{aligned}$$

и получаем финальное выражение

$$\begin{aligned}
S_-(x_1) &= -(p_- x_1) - \frac{eF}{(kp_-)\omega} \left[\frac{(p_- e_x)(\sin\varphi - \sin\varphi_0) -}{- \delta \cdot (p_- e_y)(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \right] - \\
&- \frac{1}{(kp_-)} \frac{e^2 F^2}{4\omega^2} \left((1 + \delta^2)(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}(1 - \delta^2)(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0) \right) = \quad (2.18) \\
&= -d_- - (\tilde{p}_- x) + (b_- \sin\varphi - y_- \cos\varphi) + \beta_- \sin 2\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{p}_+ = p_+ + \frac{1}{4}(1 + \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp_-)} k$$

$$b_- = -\eta \frac{m}{(kp_-)} (p_- e_x)$$

$$y_- = -\eta \frac{m}{(kp_-)} \delta (p_- e_y)$$

$$\beta_- = -\frac{1}{8}(1 - \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp_-)}$$

Найдём разницу действий электрона и позитрона с учётом (2.17) и (2.18)

$$\begin{aligned}
S_-(x_1) - S_+(x_1) &= -d_- + d_+ - (\tilde{p}_- x_1) - (\tilde{p}_+ x_1) + \\
&+ ((b_- - b_+) \sin\varphi - (y_- - y_+) \cos\varphi) + (\beta_- - \beta_+) \sin 2\varphi = \\
&= -d_1 - (\tilde{p}_- x) - (\tilde{p}_+ x) + (b_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi) + \beta_1 \sin 2\varphi = \\
&= -d_1 - (\tilde{p}_- x) - (\tilde{p}_+ x) + \gamma_1 \sin(\varphi - \chi_1) + \beta_1 \sin 2\varphi
\end{aligned}$$

При этом введём новые обозначения:

$$b_1 = \eta m \left(\frac{(p_+ e_x)}{(kp_+)} - \frac{(p_- e_x)}{(kp_-)} \right)$$

$$y_1 = \eta m \delta \left(\frac{(p_+ e_y)}{(kp_+)} - \frac{(p_- e_y)}{(kp_-)} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{8}(1 - \delta^2)\eta^2 m^2 \left(\frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right)$$

$$\gamma_1 = m\eta \sqrt{\left(\frac{(p_+ e_x)}{(kp_+)} - \frac{(p_- e_x)}{(kp_-)} \right)^2 + \left(\frac{(p_+ e_y)}{(kp_+)} - \frac{(p_- e_y)}{(kp_-)} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \chi_1 = \frac{\delta \left(\frac{(p_+ e_y)}{(kp_+)} - \frac{(p_- e_y)}{(kp_-)} \right)}{\left(\frac{(p_+ e_x)}{(kp_+)} - \frac{(p_- e_x)}{(kp_-)} \right)}$$

Таким образом, интеграл (2.7) примет вид

$$J_1 = e^{-d_1} \cdot \int d^4 x_1 \cdot \frac{\bar{v}_1 u_1}{2\sqrt{E_+ E_-}} G(\varphi) \exp(-i\tilde{p}_- x - i\tilde{p}_+ x - ipx_1), \quad (2.19)$$

где

$$G(\varphi) = H(\varphi) \exp\{i[\gamma_1 \sin(\varphi - \chi_1) + \beta_1 \sin 2\varphi]\},$$

$$H(\varphi) = a_1^v + b_{1-}^v e^{i\varphi} + b_{1+}^v e^{-i\varphi} + c_1^v (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})$$

Разложим это выражение в ряд Фурье

$$G(\varphi) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H_{l_1}^v \exp(il_1 \varphi),$$

Тогда $H_{l_1}^v$ можно выразить с помощью специальных функций L :

$$\begin{aligned} H_{l_1}^v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \exp(-il_1 \varphi) \cdot d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\varphi) \exp\{i[\gamma_1 \sin(\varphi - \chi_1) + \beta_1 \sin 2\varphi]\} \cdot d\varphi = \\ &= a_1^v L_{l_1} + b_{1-}^v L_{l_1-1} + b_{1+}^v L_{l_1+1} + c_1^v (L_{l_1+2} + L_{l_1-2}) \end{aligned}$$

В выражении (2.19) можно пронести интеграл под знак суммирования

$$\begin{aligned} J_1 &= e^{-d_1} \cdot \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H_{l_1}^v \int d^4 x_1 \cdot \frac{\bar{v}_1 u_1}{2\sqrt{E_+ E_-}} \exp(-i\tilde{p}_- x_1 - i\tilde{p}_+ x_1 - ipx_1 + il_1 kx_1) = \\ &= e^{-d_1} \cdot \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} H_{l_1}^v \int d^4 x_1 \cdot \frac{\bar{v}_1 u_1}{2\sqrt{E_+ E_-}} \exp(-iq_1 x_1) \\ & \quad q_1 = -\tilde{p}_+ - \tilde{p}_- - p + l_1 k \end{aligned} \quad (2.20)$$

Интегрируя (2.20), получаем

$$J_1 = e^{-d_1} \cdot \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{v}_1 H_{l_1}^v u_1}{2\sqrt{E_+ E_-}} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(q_1) \quad (2.21)$$

Рассмотрим второй интеграл (J_2) из (2.6)

$$J_2 = \int d^4 x_2 \cdot \bar{\Psi}_{e^-}(x_2) \cdot \tilde{\gamma}^\mu \cdot \Psi_{e^+}(x_2) \cdot e^{ipx_2}$$

Подставим Волковские функции (2.3) и (2.4)

$$J_2 = \int d^4 x_2 \cdot \frac{\bar{u}_2 v_2}{2\sqrt{E'_- E'_+}} \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \right] \cdot \tilde{\gamma}^\mu \cdot \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp'_+)} \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right] \cdot \exp(-iS_-(x_2) + iS_+(x_2) + ipx_2) \quad (2.22)$$

Вначале перемножим скобки:

$$\begin{aligned} B &= \left[1 + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \right] \cdot \tilde{\gamma}^\mu \cdot \\ &\quad \cdot \left[1 - \eta \frac{m}{4(kp'_+)} \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \right] \\ B &= \tilde{\gamma}^\mu + \eta \frac{m}{4(kp'_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu - \\ &\quad - \eta \frac{m}{4(kp'_+)} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) - \\ &\quad - \eta^2 \frac{m^2}{16(kp'_+)(kp'_-)} (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) \cdot \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \cdot (\hat{\varepsilon}_- e^{i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ e^{-i\varphi}) = \\ &= \tilde{\gamma}^\mu + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp'_+)} \right) e^{i\varphi} + \\ &\quad + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right) e^{-i\varphi} - \\ &\quad - \eta^2 \frac{m^2}{16(kp'_+)(kp'_-)} \left(\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- e^{2i\varphi} + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ e^{-2i\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

По аналогии с (2.9)-(2.13) упростим произведения свёрток 4-импульсов с гамма-матрицами

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- &= \hat{\varepsilon}_- \hat{k} (2k^\mu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu) \hat{\varepsilon}_- = 2\hat{\varepsilon}_- \hat{k} k^\mu \hat{\varepsilon}_- = -2\hat{\varepsilon}_-^2 \hat{k} k^\mu = 2(1 - \delta^2) \hat{k} k^\mu \\
\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ &= \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} (2k^\mu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu) \hat{\varepsilon}_+ = 2\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} k^\mu \hat{\varepsilon}_+ = -2\hat{\varepsilon}_+^2 \hat{k} k^\mu = 2(1 - \delta^2) \hat{k} k^\mu \\
\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ &= \hat{\varepsilon}_- \hat{k} (2k^\mu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu) \hat{\varepsilon}_+ = 2\hat{\varepsilon}_- \hat{k} k^\mu \hat{\varepsilon}_+ = -2\hat{\varepsilon}_- \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} k^\mu \\
\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- &= \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} (2k^\mu - \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu) \hat{\varepsilon}_- = 2\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} k^\mu \hat{\varepsilon}_- = -2\hat{\varepsilon}_+ \hat{\varepsilon}_- \hat{k} k^\mu \\
\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_- &= -2(\hat{\varepsilon}_- \hat{\varepsilon}_+ + \hat{\varepsilon}_+ \hat{\varepsilon}_-) \hat{k} k^\mu = \\
&= -4(\varepsilon_+ \varepsilon_-) \hat{k} k^\mu = 4(1 + \delta^2) \hat{k} k^\mu
\end{aligned}$$

Тогда (2.23) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
B &= \gamma^\mu - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp'_+)(kp'_-)} (1 + \delta^2) \hat{k} k^\mu \\
&+ \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp'_+)} \right) e^{i\varphi} + \\
&+ \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right) e^{-i\varphi} - \\
&- \eta^2 \frac{m^2}{8(kp'_+)(kp'_-)} (1 - \delta^2) (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) \hat{k} k^\mu = \\
&= a_2^\mu + b_{2-}^\mu e^{i\varphi} + b_{2+}^\mu e^{-i\varphi} + c_2^\mu (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) = H(\varphi),
\end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
a_2^\mu &= \tilde{\gamma}^\mu - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp'_+)(kp'_-)} (1 + \delta^2) \hat{k} k^\mu \\
b_{2-}^\mu &= \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp'_+)} \right) \\
b_{2+}^\mu &= \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\mu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\mu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right) \\
c_2^\mu &= -\eta^2 \frac{m^2}{8(kp'_+)(kp'_-)} (1 - \delta^2) \hat{k} k^\mu
\end{aligned}$$

Обратимся теперь к показателю экспоненты (2.22). Подставив вид 4-вектора A , аналогично (2.14) и (2.15), получим для позитрона

$$\begin{aligned}
S_+(x_2) &= (p'_+ x_2) - \frac{e}{(kp'_+)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p'_+ A) + \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi' = \\
&= -d_+ + (\tilde{p}'_+ x) + (b'_+ \sin \varphi - y'_+ \cos \varphi) + \beta'_+ \sin 2\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{p}'_+ = p'_+ + \frac{1}{4}(1 + \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp'_+)} k$$

$$b'_+ = -\eta \frac{m}{(kp'_+)} (p'_+ e_x)$$

$$y'_+ = -\eta \frac{m}{(kp'_+)} \delta (p'_+ e_y)$$

$$\beta'_+ = \frac{1}{8}(1 - \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp'_+)}$$

и для электрона

$$\begin{aligned}
S_-(x_2) &= -(p'_- x_2) - \frac{e}{(kp'_-)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[(p'_- A) - \frac{e}{2} A^2 \right] \cdot d\varphi' = \\
&= -d_- - (\tilde{p}'_- x) + (b'_- \sin \varphi - y'_- \cos \varphi) + \beta'_- \sin 2\varphi_-,
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{p}'_- = p'_- + \frac{1}{4}(1 + \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp'_-)} k$$

$$b'_- = -\eta \frac{m}{(kp'_-)} (p'_- e_x)$$

$$y'_- = -\eta \frac{m}{(kp'_-)} \delta (p'_- e_y)$$

$$\beta'_- = -\frac{1}{8}(1 - \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp'_-)}$$

Тогда разницу действия позитрона и электрона можно записать в виде

$$\begin{aligned}
S_+(x_2) - S_-(x_2) &= -d'_+ + d'_- + (\tilde{p}'_- x_2) + (\tilde{p}'_+ x_2) + \\
&+ ((b'_+ - b'_-) \sin \varphi - (y'_+ - y'_-) \cos \varphi) + (\beta'_+ - \beta'_-) \sin 2\varphi = \\
&= -d_2 + (\tilde{p}'_- x_2) + (\tilde{p}'_+ x_2) + (b_2 \sin \varphi - y_2 \cos \varphi) + \beta_2 \sin 2\varphi = \\
&= -d_2 + (\tilde{p}'_- x_2) + (\tilde{p}'_+ x_2) + \gamma_2 \sin(\varphi - \chi_2) + \beta_2 \sin 2\varphi
\end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$b_2 = \eta m \left(\frac{(p'_- e_x)}{(kp'_-)} - \frac{(p'_+ e_x)}{(kp'_+)} \right)$$

$$y_2 = \eta m \delta \left(\frac{(p'_- e_y)}{(kp'_-)} - \frac{(p'_+ e_y)}{(kp'_+)} \right)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{8} (1 - \delta^2) \eta^2 m^2 \left(\frac{1}{(kp'_-)} - \frac{1}{(kp'_+)} \right)$$

$$\gamma_2 = m \eta \sqrt{\left(\frac{(p'_- e_x)}{(kp'_-)} - \frac{(p'_+ e_x)}{(kp'_+)} \right)^2 + \left(\frac{(p'_- e_y)}{(kp'_-)} - \frac{(p'_+ e_y)}{(kp'_+)} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \chi_2 = \frac{\delta \left(\frac{(p'_- e_y)}{(kp'_-)} - \frac{(p'_+ e_y)}{(kp'_+)} \right)}{\left(\frac{(p'_- e_x)}{(kp'_-)} - \frac{(p'_+ e_x)}{(kp'_+)} \right)}$$

Подставим полученные выражения в (2.22)

$$J_2 = \int d^4 x_2 \cdot \frac{\bar{u}_2 v_2}{2\sqrt{E'_- E'_+}} G(\varphi) \exp(-d_2 + (\tilde{p}'_- x) + (\tilde{p}'_+ x) + i p x_2) \quad (2.24)$$

Здесь функция $G(\varphi)$ есть

$$G(\varphi) = H(\varphi) \exp\left\{i \left[\gamma_2 \sin(\varphi - \chi_2) + \beta_2 \sin 2\varphi \right]\right\},$$

Разложим её в ряд Фурье

$$G(\varphi) = \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} H_{l_2}^{\mu} \exp(i l_2 \varphi),$$

с коэффициентами следующего вида, которые можно выразить через специальные функции L

$$\begin{aligned}
H_{l_2}^\mu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi) \exp(-il_2\varphi) \cdot d\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\varphi) \exp\{i[\gamma_2 \sin(\varphi - \chi_2) + \beta_2 \sin 2\varphi]\} \cdot d\varphi = \\
&= a_2^\mu L_{l_2} + b_{2-}^\mu L_{l_2-1} + b_{2+}^\mu L_{l_2+1} + c_2^\mu (L_{l_2+2} + L_{l_2-2})
\end{aligned}$$

Тогда (2.24) примет вид

$$\begin{aligned}
J_2 &= e^{-d_2} \cdot \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^4 x_2 \cdot \frac{\bar{u}_2 H_{l_2}^\mu v_2}{2\sqrt{E'_- E'_+}} \cdot \exp(i\tilde{p}'_- x_2 + i\tilde{p}'_+ x_2 + ipx_2 + il_2 kx_2) = \\
&= e^{-d_2} \cdot \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \int d^4 x_2 \cdot \frac{\bar{u}_2 H_{l_2}^\mu v_2}{2\sqrt{E'_- E'_+}} \cdot \exp(-iq_2 x_2),
\end{aligned}$$

где

$$q_2 = -\tilde{p}'_- - \tilde{p}'_+ - p - l_2 k$$

Интегрируя по x_2 , получаем

$$J_2 = e^{-d_2} \cdot \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{u}_2 H_{l_2}^\mu v_2}{2\sqrt{E'_- E'_+}} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(q_2) \quad (2.25)$$

Подставим (2.21) и (2.25) в (2.6) и проинтегрируем по p

$$\begin{aligned}
S &= ie^2 \cdot g_{\mu\nu} \cdot e^{-d_0} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{u}_2 H_{l_2}^\mu v_2)(\bar{v}_1 H_{l_1}^\nu u_1)}{4\sqrt{E_+ E_- E'_- E'_+}} \cdot \\
&\quad \cdot \int \frac{d^4 p}{p^2 + i\varepsilon} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(q_1) \delta^4(q_2) = \\
&= ie^2 \cdot g_{\mu\nu} \cdot e^{-d_0} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{u}_2 H_{l_2}^\mu v_2)(\bar{v}_1 H_{l_1}^\nu u_1)}{4\sqrt{E_+ E_- E'_- E'_+}} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{(2\pi)^5 \delta^4(p'_- + p'_+ - p_- - p_+ + (l_1 + l_2)k)}{(p_- + p_+ - l_1 k)^2}
\end{aligned}$$

Введём $l = l_1 + l_2$. Тогда амплитуду можно записать как сумму парциальных амплитуд $S^{(l)}$. Здесь l – важное значение, имеющее смысл итогового количества испущенных (поглощённых) фотонов в процессе.

$$S = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(l)},$$

где парциальные амплитуды имеют вид

$$S^{(l)} = \frac{ie^2 \exp(-d_0) \cdot (2\pi)^5}{4\sqrt{E_- E_+ E'_- E'_+}} M^{(l)} \delta^{(4)}(\tilde{p}'_- + \tilde{p}'_+ - \tilde{p}_+ - \tilde{p}_- + lk) \quad (2.26)$$

Таким образом, каждая парциальная амплитуда отвечает определённому числу фотонов.

$$M^{(l)} = \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \frac{(\bar{u}_2 H_{l_2}^\nu v_2)(\bar{v}_1 H_{l_1}^\nu u_1)}{(\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- - l_1 k)^2}$$

В первой вершине

$$\begin{aligned} H_{l_1}^\nu = & \left(\tilde{\gamma}^\nu - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp_+)(kp_-)} (1 + \delta^2) \hat{k} k^\nu \right) L_{l_1} + \\ & + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right) L_{l_1-1} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right) L_{l_1+1} - \\ & - \eta^2 \frac{m^2}{8(kp_+)(kp_-)} (1 - \delta^2) \hat{k} k^\nu (L_{l_1+2} + L_{l_1-2}) \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$\tilde{p}_+ + \tilde{p}_- = p + l_1 k$$

Во второй вершине

$$\begin{aligned} H_{l_2}^\nu = & \left(\tilde{\gamma}^\nu - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp'_+)(kp'_-)} (1 + \delta^2) \hat{k} k^\nu \right) L_{l_2} - \\ & + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp'_+)} \right) L_{l_2-1} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right) L_{l_2+1} - \\ & - \eta^2 \frac{m^2}{8(kp'_+)(kp'_-)} (1 - \delta^2) \hat{k} k^\nu (L_{l_2+2} + L_{l_2-2}) \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$\tilde{p}'_- + \tilde{p}'_+ = p - l_2 k$$

ГЛАВА 3. РЕЗОНАНС

3.1. Резонансная кинематика

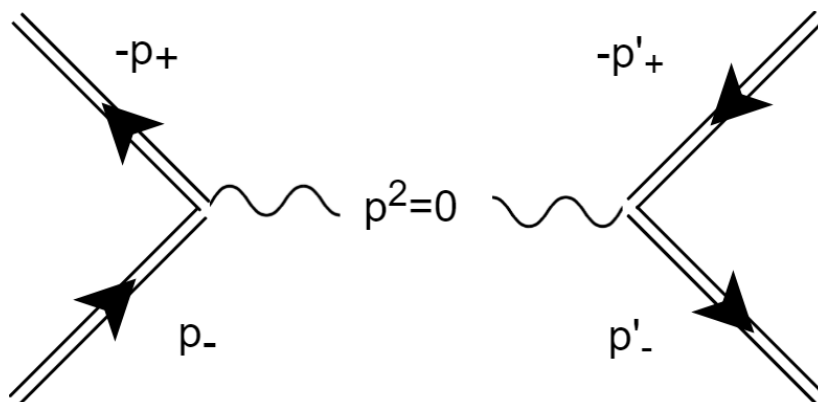


Рис. 2 Диаграмма Фейнмана резонансного процесса рождения электрон-позитронной пары при аннигиляции электрон-позитронной пары в слабом электромагнитном поле

Процесс рассеяния электрона на позитроне в электромагнитном поле описывается двумя диаграммами Фейнмана: рассеивательной и аннигиляционной. Резонансы рассеивательного канала были изучены в работах [26]. Было показано, что резонансы Олейника для рассеивательного и аннигиляционного каналов лежат в различных кинематических областях [26]. Здесь рассмотрим резонансы для аннигиляционного канала в слабом электромагнитном поле. В условиях резонанса промежуточный фотон с 4-импульсом p выходит на массовую оболочку (см. рис. 2).

$$p^2 = 0 \quad (3.1)$$

В результате этого, в первой вершине аннигиляционной диаграммы Фейнмана имеем стимулированный лазерным полем процесс однофотонной аннигиляции электронной пары, а во второй вершине – стимулированный лазерным полем процесс однофотонного рождения электронной пары (стимулированный лазерным полем процесс Брейта-Уилера). При этом законы сохранения 4-импульса в первой и второй вершинах имеют вид:

$$p_+ + p_- = p + l_1 k \quad (3.2)$$

$$p'_+ + p'_- = p + l_2 k \quad (3.3)$$

Здесь $p_{\pm} = (E_{\pm}, \mathbf{p}_{\pm})$ и $p'_{\pm} = (E'_{\pm}, \mathbf{p}'_{\pm})$ – 4-импульсы начальных и конечных позитрона и электрона. Важно заметить, что здесь вместо 4-квазиимпульсов \tilde{p} везде используются 4-импульсы p в связи с тем, что мы рассматриваем процесс в слабом поле и слагаемыми с η^2 можно пренебречь:

$$\tilde{p} = p + \frac{1}{4}(1 + \delta^2)\eta^2 \frac{m^2}{(kp)} k \approx p$$

Также была произведена замена $l_2 \rightarrow -l_2$. Найдём резонансные условия в первой вершине. Для этого возведём уравнение (3.2) в квадрат, учтя условие (3.1)

$$(p_+ + p_-)^2 = (p + l_1 k)^2$$

Учитывая $p_+^2 = p_-^2 = m^2$ и $k^2 = 0$, можно записать

$$m^2 + p_+ p_- = l_1 k p \quad (3.4)$$

Так как произведение 4-векторов положительная величина, то $l_1 \geq 1$. Из (3.2) видно, что

$$kp = kp_+ + kp_-$$

Это позволяет представить (3.4) в следующем виде:

$$m^2 + p_+ p_- = l_1 kp_+ + l_1 kp_-$$

Найдём произведения 4-векторов

$$p_+ p_- = E_+ E_- - |\mathbf{p}_+| |\mathbf{p}_-| \cos \theta_i = E_+ E_- (1 - v_+ v_- \cos \theta_i)$$

$$kp_+ = \omega n p_+ = \omega (E_+ - |\mathbf{p}_+| \cos \theta_+) = \omega E_+ (1 - v_+ \cos \theta_+)$$

$$kp_- = \omega n p_- = \omega (E_- - |\mathbf{p}_-| \cos \theta_-) = \omega E_- (1 - v_- \cos \theta_-)$$

Здесь $\theta_i = \angle(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-)$ – угол между начальными электроном и позитроном, θ_{\pm} – угол между импульсом позитрона/электрона и направлением распространения

электромагнитного поля, а само электромагнитное поле записано в виде $k = \omega n = \omega(1, \mathbf{n})$.

$$\begin{aligned} m^2 + E_+ E_- (1 - v_+ v_- \cos \theta_i) = \\ = l_1 \omega E_+ (1 - v_+ \cos \theta_+) + l_1 \omega E_- (1 - v_- \cos \theta_-) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Это равенство возможно только тогда, когда $E_{\pm} \gg m$ – энергии начальных частиц ультрарелятивистские и $\theta_i \ll 1$ – угол между направлением электрона и позитрона мал, так как левая часть пропорциональна E^2 , а правая – ωE . Напомним, что в качестве лазера мы берём оптический, поэтому $\omega \sim 1 \text{ эВ}$. Помимо этого, $\theta_{\pm} \sim 1$, что означает $\cos \theta_+ \approx \cos \theta_-$.

Для скорости частицы известно соотношение

$$v^2 = 1 - \frac{m^2}{E^2},$$

из которого следует, что у ультрарелятивистской частицы $v \sim 1$. Тогда

$$\frac{m^2}{E^2} = 1 - v^2 \approx (1 + v)(1 - v) = 2(1 - v)$$

$$v = 1 - \frac{m^2}{2E^2}$$

Косинус малого угла разлагаем в ряд Тейлора

$$\cos \theta_i \approx 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$$

Тогда (3.5) примет вид

$$m^2 + E_+ E_- \left(1 - \left(1 - \frac{m^2}{2E_+^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{2E_-^2} \right) \left(1 - \frac{\theta_i^2}{2} \right) \right) = l_1 \omega E_i (1 - \cos \theta_+)$$

Здесь введено обозначение для суммарной энергии начальной пары:

$$E_i = E_+ + E_-$$

$$m^2 + E_+ E_- \left(1 - \left(1 - \frac{m^2}{2E_+^2} - \frac{m^2}{2E_-^2} - \frac{\theta_i^2}{2} \right) \right) = 2l_1 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_+}{2}$$

$$\begin{aligned}
m^2 + E_+ E_- \left(\frac{m^2}{2E_+^2} + \frac{m^2}{2E_-^2} + \frac{\theta_i^2}{2} \right) &= 2l_1 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_+}{2} \\
m^2 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{E_-}{E_+} + \frac{E_+}{E_-} \right) + \frac{E_+ E_- m^2}{2E_i^2} \frac{E_i^2 \theta_i^2}{m^2} &= 2l_1 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_+}{2} \\
\frac{m^2}{2} \frac{E_i^2}{E_+ E_-} + \frac{E_+ E_- m^2}{2E_i^2} \delta_i^2 &= 2l_1 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_+}{2} \\
\frac{m^2}{4l_1 \omega \sin^2 \frac{\theta_+}{2}} \frac{E_i^2}{E_+ E_-} + \frac{m^2}{4l_1 \omega \sin^2 \frac{\theta_+}{2}} \frac{E_+ E_-}{E_i^2} \delta_i^2 &= E_i \\
\frac{E_i^2}{E_+ E_-} + \frac{E_+ E_-}{E_i^2} \delta_i^2 &= \frac{E_i}{E_{thr}} \\
\frac{E_i}{E_c} + \frac{E_c}{E_i} \delta_i^2 &= \varepsilon \\
\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} \delta_i^2 &= \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь обозначено:

$$\delta_i = \frac{E_i \theta_i}{m}, \quad \varepsilon = \frac{E_i}{E_{thr}}, \quad \varepsilon_c = \frac{E_c}{E_{thr}},$$

где E_{thr} - пороговая энергия процесса в первой вершине, E_c - комбинационная энергия начальной электрон-позитронной пары

$$E_{thr} = \frac{m^2}{4l_1 \omega \sin^2(\theta_+/2)}, \quad E_c = \frac{E_+ E_-}{E_i} \tag{3.7}$$

Дальнейшее преобразование (3.6) приводит к следующему условию в первой вершине:

$$\delta_i^2 = \delta_{ires}^2, \quad \delta_{ires}^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 (\varepsilon_c - 1) \geq 0 \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_c \geq 1$. То есть для резонанса аннигиляционного канала рассеяния электрона на позитроне в слабом поле существует порог для

комбинационной энергии пары $E_c \geq E_{thr}$. Также следует отметить, что за счёт параметров ε и ε_c можно установить начальный угол раствора пары в резонансе. Если $E_c = E_{thr}$, этот угол равен нулю ($\delta_i^2 = \delta_{res}^2 = 0$). Во всех других случаях $\delta_i^2 = \delta_{res}^2$ больше нуля. Пороговая энергия процесса E_{thr} определяется энергией покоя электрона, частотой волны и углом между импульсами начального позитрона (электрона) и внешней волны. В области оптических частот пороговая энергия имеет порядок величины $E_{thr} \sim 10^5 \div 10^6$ МэВ, а в области рентгеновских частот $E_{thr} \sim 10^2 \div 10^3$ МэВ.

Покажем, что, задавая параметры ε и ε_c , можно определить начальные энергии электрона и позитрона:

$$E_c = \frac{E_+ (E_i - E_+)}{E_i}$$

$$E_c = E_+ - E_+^2 \frac{1}{E_i}$$

$$E_+^2 \frac{1}{E_i} - E_+ - E_c = 0$$

Получено квадратное уравнение относительно E_+ . Его решение

$$E_+ = \frac{1}{2} E_i \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4E_c}{E_i}} \right] = \frac{1}{2} \varepsilon E_{thr} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_c}{\varepsilon}} \right]$$

Решение для энергии электрона может быть получено как $E_i - E_+$. Тогда вместе:

$$E_+ = \frac{1}{2} \varepsilon E_{thr} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_c}{\varepsilon}} \right], \quad E_- = \frac{1}{2} \varepsilon E_{thr} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_c}{\varepsilon}} \right] \quad (3.9)$$

Из выражений (3.9) следует, что два начальных характерных параметра связаны соотношением

$$\varepsilon \geq 4\varepsilon_c \geq 4 \quad (3.10)$$

В силу (3.10) возможные значения параметра ε_i лежат в интервале: $\varepsilon \geq 4$, при этом $\varepsilon_c \geq 1$ (см.). Например, при выборе $\omega = 3 \text{ эВ}$, $\theta_+ = 180^\circ$ пороговая энергия равна $E_{thr} \approx 20.83 \text{ ГэВ}$. Если зададим превышение комбинационной энергии над пороговой энергией $\varepsilon_c = 1.2$, то из соотношений (3.9) следует, что начальные энергии электронной пары могут принимать одну из двух возможных величин. При $\varepsilon = 5$ это $E_+ = 62.49 \text{ ГэВ}$ (41.66 ГэВ), $E_- = 41.66 \text{ ГэВ}$ (62.49 ГэВ) и начальный угол раствора пары равен $\delta_i^2 = 3.47$. Если $\varepsilon = 7$, тогда $E_+ = 113.73 \text{ ГэВ}$ (32.08 ГэВ), $E_- = 32.08 \text{ ГэВ}$ (113.73 ГэВ) и начальный угол раствора пары $\delta_i^2 = 6.81$.

Найдём резонансные условия для конечной пары аналогично вышеизложенному из закона сохранения 4-импульса (3.3):

$$(p'_+ + p'_-)^2 = (p + l_2 k)^2$$

$$m^2 + p'_+ p'_- = l_2 k p$$

Заметим, что $l_2 \geq 1$.

$$k p = k p'_+ + k p'_-$$

$$m^2 + p'_+ p'_- = l_2 k p'_+ + l_2 k p'_-$$

$$p'_+ p'_- = E'_+ E'_- - |\mathbf{p}'_+| |\mathbf{p}'_-| \cos \theta_f = E'_+ E'_- (1 - v'_+ v'_- \cos \theta_f)$$

$$k p'_+ = \omega n p'_+ = \omega (E'_+ - |\mathbf{p}'_+| \cos \theta_f^+) = \omega E'_+ (1 - v'_+ \cos \theta_f^+)$$

$$k p'_- = \omega n p'_- = \omega (E'_- - |\mathbf{p}'_-| \cos \theta_f^-) = \omega E'_- (1 - v'_- \cos \theta_f^-)$$

Здесь $\theta_f = \sphericalangle(\mathbf{p}'_+, \mathbf{p}'_-)$ – угол между начальными электроном и позитроном, θ'_\pm – угол между импульсом позитрона/электрона и направлением распространения электромагнитного поля.

$$\begin{aligned}
& m^2 + E'_+ E'_- (1 - v'_+ v'_- \cos \theta_f) = \\
& = l_2 \omega E'_+ (1 - v'_+ \cos \theta_f^+) + l_2 \omega E'_- (1 - v'_- \cos \theta_f^-)
\end{aligned}$$

Отсюда, как и для начальной пары видно, что электрон-позитронная пара ультрарелятивистская ($E'_\pm \gg m$), летит в узком конусе ($\theta_f \ll 1$) и $\theta_f^\pm \sim 1$.

$$m^2 + E'_+ E'_- \left(1 - \left(1 - \frac{m^2}{2E'_+{}^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{2E'_-{}^2} \right) \left(1 - \frac{\theta_f^2}{2} \right) \right) = l_2 \omega E_i (1 - \cos \theta_f^+)$$

$$m^2 + E'_+ E'_- \left(1 - \left(1 - \frac{m^2}{2E'_+{}^2} - \frac{m^2}{2E'_-{}^2} - \frac{\theta_f^2}{2} \right) \right) = 2l_2 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_f^+}{2}$$

$$m^2 + E'_+ E'_- \left(\frac{m^2}{2E'_+{}^2} + \frac{m^2}{2E'_-{}^2} + \frac{\theta_f^2}{2} \right) = 2l_2 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_f^+}{2}$$

$$m^2 + \frac{m^2}{2} \left(\frac{E'_-}{E'_+} + \frac{E'_+}{E'_-} \right) + \frac{E'_+ E'_- m^2}{2E_i^2} \frac{E_i^2 \theta_i^2}{m^2} = 2l_2 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_f^+}{2}$$

$$\frac{m^2}{2} \frac{E_i^2}{E'_+ E'_-} + \frac{E'_+ E'_- m^2}{2E_i^2} \delta_f^2 = 2l_2 \omega E_i \sin^2 \frac{\theta_f^+}{2}$$

$$\frac{m^2}{4l_2 \omega \sin^2 \frac{\theta_f^+}{2}} \frac{E_i^2}{E'_+ E'_-} + \frac{m^2}{4l_2 \omega \sin^2 \frac{\theta_f^+}{2}} \frac{E'_+ E'_-}{E_i^2} \delta_f^2 = E_i$$

$$\frac{E_i^2}{E'_+ E'_-} + \frac{E'_+ E'_-}{E_i^2} \delta_f^2 = \frac{E_i}{E'_{thr}}$$

$$\frac{E_i}{E'_c} + \frac{E'_c}{E_i} \delta_f^2 = \varepsilon'$$

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_c} + \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon'} \delta_f^2 = \varepsilon'$$

Здесь обозначено:

$$\delta_f = \frac{E_i \theta_f}{m}, \quad \varepsilon' = \frac{E_i}{E'_{thr}}, \quad \varepsilon'_c = \frac{E'_c}{E'_{thr}},$$

где E'_{thr} - пороговая энергия процесса во второй вершине, E'_c - комбинационная энергия конечной электрон-позитронной пары

$$E'_{thr} = \frac{m^2}{4l_2\omega \sin^2\left(\frac{\theta_f^+}{2}\right)}, \quad E'_c = \frac{E'_+ E'_-}{E_i} \quad (3.11)$$

Дальнейшее преобразование (3.6) приводит к следующему условию во второй вершине:

$$\delta_f^2 = \delta_{fres}^2, \quad \delta_{fres}^2 = \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'_c}\right)^2 (\varepsilon'_c - 1) \geq 0$$

Отсюда также следует наличие порога для комбинационной энергии $E'_c \geq E'_{thr}$. Особо отметим, что в общем случае E_{thr} (3.7) и E'_{thr} (3.11) не равны, однако в слабом поле, когда $l_1 = l_2 = 1$, $E_{thr} = E'_{thr}$. В этом случае для полного протекания процесса достаточно выполнить резонансные условия в первой вершине.

Рассмотрим кинематику конечной электрон-позитронной пары с помощью суммарного 4-импульса $p_i = p_+ + p_-$ и угла между суммарным импульсом и направлением вылета позитрона $\theta'_+ = \angle(\mathbf{p}'_+, \mathbf{p}_i)$. Из закона сохранения 4-импульса

$$p_- = p_i - p'_+$$

Возведём это выражение в квадрат

$$m^2 = p_i^2 - 2p_i p'_+ + m^2$$

$$p_i^2 = 2p_i p'_+$$

$$(p_+ + p_-)^2 = 2p_i p'_+$$

$$2m^2 + 2p_+ p_- = 2p_i p'_+$$

$$m^2 + p_+ p_- = p_i p'_+ \quad (3.12)$$

Найдём левую часть выражения (3.12), исходя из условий резонанса

$$m^2 + p_+ p_- = m^2 + E_+ E_- (1 - v_+ v_- \cos \theta_i)$$

$$m^2 + p_+ p_- = m^2 + E_+ E_- \left(\frac{m^2}{2E_+^2} + \frac{m^2}{2E_-^2} + \frac{\theta_i^2}{2} \right)$$

$$m^2 + p_+ p_- = m^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{E_+}{E_-} + \frac{1}{2} \frac{E_-}{E_+} + \frac{E_+ E_-}{2E_i^2} \delta_i^2 \right)$$

Используем условие (3.8)

$$m^2 + p_+ p_- = m^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{E_+}{E_-} + \frac{1}{2} \frac{E_-}{E_+} + \frac{E_+ E_-}{2E_i^2} \frac{E_i^2}{E_c^2} (\varepsilon_c - 1) \right)$$

$$m^2 + p_+ p_- = \frac{m^2}{2} \left(\frac{E_i^2}{E_+ E_-} + \frac{E_+ E_-}{E_c^2} (\varepsilon_c - 1) \right)$$

$$m^2 + p_+ p_- = \frac{m^2}{2} \left(\frac{E_i^2}{E_+ E_-} + \frac{E_i^2}{E_+ E_-} (\varepsilon_c - 1) \right)$$

$$m^2 + p_+ p_- = \frac{m^2}{2} \left(\frac{E_i^2}{E_+ E_-} \frac{E_c}{E_{thr}} \right)$$

$$m^2 + p_+ p_- = \frac{m^2}{2} \varepsilon$$

Теперь выразим правую часть выражения (3.12)

$$p_i p'_+ = E_i E'_+ \left(1 - v'_+ \frac{|\mathbf{p}_i|}{E_i} \cos \theta'_+ \right) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{p}_i^2 = (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 = \mathbf{p}_+^2 + \mathbf{p}_-^2 + 2|\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-| \cos \theta_i$$

В силу того, что $\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2$

$$\mathbf{p}_i^2 = E_+^2 + E_-^2 - 2m^2 + 2E_+ E_- v_+ v_- \cos \theta_i \quad (3.14)$$

Учтём, что

$$v_+ v_- \cos \theta_i = 1 - \frac{m^2}{2E_+^2} - \frac{m^2}{2E_-^2} - \frac{\theta_i^2}{2}$$

Тогда (3.14) переписется в виде

$$\mathbf{p}_i^2 = E_i^2 - 2m^2 - m^2 E_+ E_- \left(\frac{1}{E_+^2} + \frac{1}{E_-^2} + \frac{1}{E_i^2} \delta_i^2 \right)$$

Подставим условие (3.8), тогда

$$\mathbf{p}_i^2 = E_i^2 - m^2 E_+ E_- \left(\frac{E_i^2}{E_+^2 E_-^2} + \frac{1}{E_c^2} (\varepsilon_c - 1) \right)$$

$$\mathbf{p}_i^2 = E_i^2 - m^2 E_+ E_- \frac{1}{E_c^2} \varepsilon_c$$

$$\mathbf{p}_i^2 = E_i^2 - m^2 \varepsilon = E_i^2 \left(1 - \frac{m^2}{E_i^2} \varepsilon \right)$$

Тогда

$$|\mathbf{p}_i^2| \approx E_i \left(1 - \frac{m^2}{2E_i^2} \varepsilon \right)$$

После подстановки в (3.13)

$$p_i p'_+ = E_i E'_+ \left(1 - \left(1 - \frac{m^2}{2E_+'^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{2E_i^2} \varepsilon \right) \left(1 - \frac{\theta_+'^2}{2} \right) \right)$$

$$p_i p'_+ = E_i E'_+ \left(\frac{m^2}{2E_+'^2} + \frac{m^2}{2E_i^2} \varepsilon + \frac{\theta_+'^2}{2} \right)$$

$$p_i p'_+ = \frac{m^2}{2} x \left(\frac{1}{x^2} + \varepsilon + \delta_+'^2 \right)$$

Здесь введены обозначения

$$\delta_+^{\prime 2} = \frac{E_i \theta_+^{\prime 2}}{m}, \quad x_+^{\prime} = \frac{E_+^{\prime}}{E_i} \quad (3.15)$$

Тогда согласно (3.12)

$$\varepsilon = x_+^{\prime} \left(\frac{1}{x_+^{\prime 2}} + \varepsilon + \delta_+^{\prime 2} \right)$$

$$(\varepsilon + \delta_+^{\prime 2}) x_+^{\prime 2} - \varepsilon x_+^{\prime} + 1 = 0$$

Это квадратное уравнение относительно энергии конечного позитрона. Оно означает, что они имеют два возможных значения для каждого угла вылета позитрона (параметра $\delta_+^{\prime 2}$):

$$x'_+ = \frac{1}{2(\varepsilon + \delta_+^{\prime 2})} \left[\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon(\varepsilon - 4) - 4\delta_+^{\prime 2}} \right], \quad x'_- = 1 - x'_+.$$

Анализ неравенства для корня позволяет установить ограничения на угол вылета позитрона:

$$0 \leq \delta_+^{\prime 2} \leq \frac{\varepsilon}{4}(\varepsilon - 4) \quad (3.16)$$

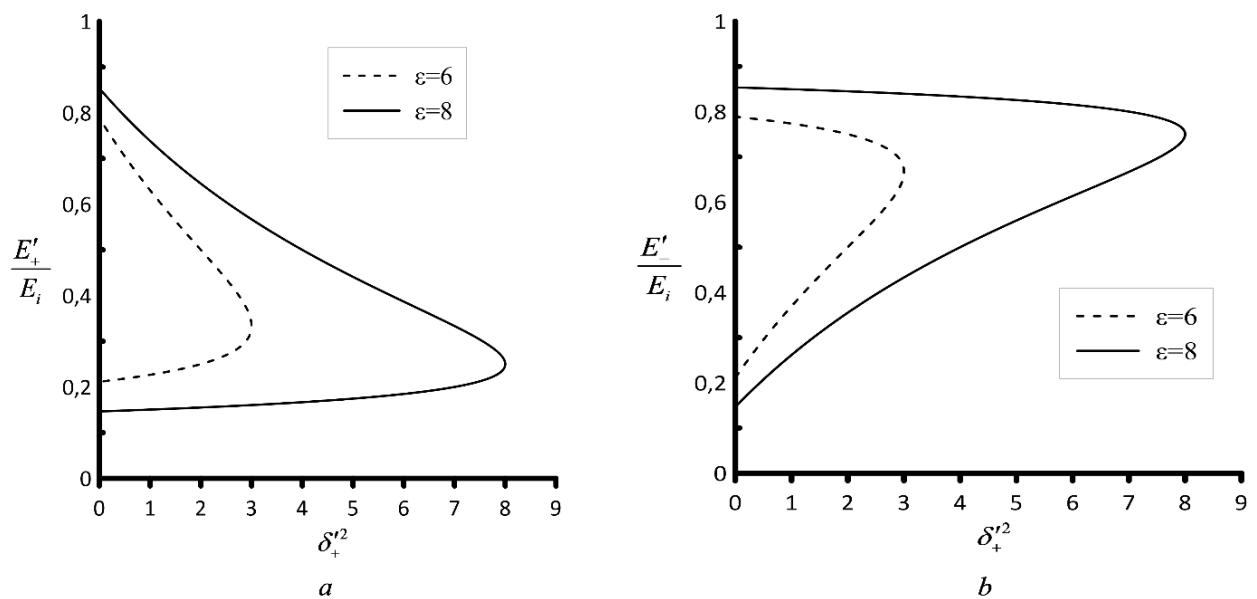


Рис. 3. Зависимость резонансных энергий электрон-позитронной пары от угла вылета позитрона (параметра $\delta_+^{\prime 2}$).

На рис.3 представлены зависимости резонансной энергии конечных электрона и позитрона от параметра $\delta_+^{\prime 2}$. При этом верхняя часть кривой для позитрона (рис. 3а) соответствует нижней части кривой для электрона (рис. 3б) и наоборот. Границы изменения параметра $\delta_+^{\prime 2}$ (3.15) существенно зависят от параметра ε (3.16), выбор которого в свою очередь зависит от соотношения комбинационной

энергии начальной электронной пары относительно пороговой энергии (параметра ε_c).

3.2. Амплитуда процесса в случае резонансная и циркулярной поляризации

Рассмотрим амплитуду (2.26), полученную без ограничений на характер поля, поляризацию внешней электромагнитной волны и кинематику частиц. Учтём эти условия сперва для части выражения, ответственного за первую вершину (аннигиляцию электрона и позитрона). Для этого упростим функцию $H_{l_1}^v$:

$$H_{l_1}^v = a_1^v L_{l_1} + b_{1-}^v L_{l_1-1} + b_{1+}^v L_{l_1+1} + c_1^v (L_{l_1+2} + L_{l_1-2}) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} a_1^v &= \tilde{\gamma}^v - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp_+)(kp_-)} (1 + \delta^2) \hat{k}k^v \\ b_{1-}^v &= \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{(kp_+)} \right) \\ b_{1+}^v &= \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{(kp_+)} \right) \\ c_1^v &= -\eta^2 \frac{m^2}{8(kp_+)(kp_-)} (1 - \delta^2) \hat{k}k^v \end{aligned} \quad (3.18)$$

Так как поле слабое ($\eta \ll 1$), то в (3.18) можно пренебречь слагаемыми, содержащими степени η старше единицы. Тогда (3.17) примет вид

$$H_{l_1}^v = a_1^v L_{l_1} + b_{1-}^v L_{l_1-1} + b_{1+}^v L_{l_1+1},$$

где a_1^v будет состоять только из гамма-матрицы

$$a_1^v = \tilde{\gamma}^v$$

Обратимся теперь к функции L_{l_1} :

$$\begin{aligned}
L_{l_1}(\gamma_1, \beta_1, \chi_1) &= \\
&= \exp(-il_1\chi_1) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \exp(2in'\chi_1) J_{l_1-2n'}(\gamma_1) J_{n'}(\beta_1)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Функции L_{l_1-1} и L_{l_1+1} могут быть получены из (3.19) сдвигом по l_1 . Они зависят от трёх параметров: γ_1 , β_1 и χ_1 , которые упростятся в резонансе:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{8}(1-\delta^2)\eta^2 m^2 \left(\frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) = 0 \\
\operatorname{tg} \chi_1 &= \frac{\delta \left(\frac{(p_+e_y)}{(kp_+)} - \frac{(p_-e_y)}{(kp_-)} \right)}{\left(\frac{(p_+e_x)}{(kp_+)} - \frac{(p_-e_x)}{(kp_-)} \right)} \\
\gamma_1 &= m\eta \sqrt{\left(\frac{(p_+e_x)}{(kp_+)} - \frac{(p_-e_x)}{(kp_-)} \right)^2 + \left(\frac{(p_+e_y)}{(kp_+)} - \frac{(p_-e_y)}{(kp_-)} \right)^2} = \\
&= m\eta \sqrt{(e_x Q_i)^2 + (e_y Q_i)^2} = m\eta \sqrt{-Q_i^2},
\end{aligned}$$

где

$$Q_i = \frac{p_-}{(kp_-)} - \frac{p_+}{(kp_+)}$$

Вычислим $-Q_i^2$, используя закон сохранения энергии-импульса (3.2).

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{p_+}{(kp_+)} - \frac{p_-}{(kp_-)} \right)^2 &= -\frac{m^2}{(kp_+)^2} - \frac{m^2}{(kp_-)^2} + 2\frac{p_+p_-}{(kp_+)(kp_-)} = \\
&= -\frac{m^2}{(kp_+)^2} - \frac{m^2}{(kp_-)^2} + 2\frac{kp - m^2}{(kp_+)(kp_-)} = \\
&= -m^2 \frac{(kp)^2}{(kp_+)^2 (kp_-)^2} + 2\frac{kp}{(kp_+)(kp_-)} = \\
&= \frac{m^2}{(kp_+)(kp_-)} \left(\frac{2kp}{m^2} - \frac{(kp)^2}{(kp_+)(kp_-)} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом, γ_1^2 может быть записан в следующем виде

$$\gamma_1^2 = \frac{4m^4\eta^2}{(kp_+)(kp_-)} \left(\frac{kp}{2m^2} - \frac{(kp)^2}{4(kp_+)(kp_-)} \right)$$

Вводя безразмерные параметры u и u_1

$$u = \frac{(kp)^2}{4(kp_+)(kp_-)}$$

$$u_1 = \frac{(kp)}{2m^2},$$

получаем

$$\gamma_1^2 = 4\eta^2 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right)$$

Покажем, что $\gamma_1 \sim \eta$. Для этого раскроем $\frac{u}{u_1}$ с учётом резонансных условий

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_1} &= \frac{m^2(kp)}{2(kp_+)(kp_-)} = \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) = \\ &= \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{2\omega E_+ \sin^2 \frac{\theta_+}{2}} + \frac{1}{2\omega E_- \sin^2 \frac{\theta_+}{2}} \right) = \frac{m^2}{4\omega \sin^2 \frac{\theta_+}{2}} \frac{E_i}{E_+ E_-} = \\ &= \frac{E_{thr}}{E_c} = \frac{1}{\varepsilon_c} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = 2\eta \sqrt{\frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right)} = 2\eta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_c} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_c} \right)}$$

Возвращаясь к функции L_l (3.19), заметим, что $J_{n'}(\beta_1)$ при малом β_1 имеет следующую асимптотику $J_{n'}(\beta_1) \sim \left(\frac{\beta_1}{2} \right)^{n'}$. Так как $\beta_1 = 0$, то все слагаемые кроме нулевого ($n' = 0$) равны нулю. Поэтому можно записать

$$L_l(\gamma_1, 0, \chi_1) = \exp(-il_1 \chi_1) J_l(\gamma_1)$$

Из асимптотики функций Бесселя $J_{l_1}(\gamma_1) \sim \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^{l_1} \sim \left(\frac{\eta}{2}\right)^{l_1}$ следует, что $l_1 = 1$.

Остальные l_1 будут давать малый вклад. Это означает, что наиболее вероятен процесс с испусканием одного фотона и можно пренебречь L_{l_1+1} . Тогда окончательно упрощённые функции $H_{l_1}^v$ первой вершины примут вид

$$H_{l_1}^v \equiv H^v = a_1^v L_1 + b_{1-}^v L_0 \quad (3.20)$$

$$a_1^v = \tilde{\gamma}^v$$

$$b_{1-}^v = \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{(kp_+)} \right)$$

Так как

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = \exp(-i\chi_1) J_1(\gamma_1) = \exp(-i\chi_1) \frac{\gamma_1}{2},$$

то

$$H^v = \tilde{\gamma}^v \exp(-i\chi_1) \frac{\gamma_1}{2} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{(kp_+)} \right)$$

Во второй вершине в общем виде функция имеет вид

$$H_{l_2 v} = a_{2v} L_{l_2} + b_{2-v} L_{l_2-1} + b_{2+v} L_{l_2+1} + c_{2v} (L_{l_2+2} + L_{l_2-2})$$

$$a_{2v} = \tilde{\gamma}_v - \eta^2 \frac{m^2}{4(kp'_+)(kp'_-)} (1 + \delta^2) \hat{k} k_v$$

$$b_{2-v} = \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}_v}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}_v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp'_+)} \right)$$

$$b_{2+v} = \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}_v}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}_v \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right)$$

$$c_{2v} = -\eta^2 \frac{m^2}{8(kp'_+)(kp'_-)} (1 - \delta^2) \hat{k} k_v$$

Параметры γ_2 , β_2 и χ_2 , в свою очередь принимают следующие значения:

$$\beta_2 = \frac{1}{8}(1 - \delta^2)\eta^2 m^2 \left(\frac{1}{(kp'_-)} - \frac{1}{(kp'_+)} \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$\operatorname{tg} \chi_2 = \frac{\delta \left(\frac{(p'_+ e_y)}{(kp'_+)} - \frac{(p'_- e_y)}{(kp'_-)} \right)}{\left(\frac{(p'_+ e_x)}{(kp'_+)} - \frac{(p'_- e_x)}{(kp'_-)} \right)} \quad (3.22)$$

$$\gamma_1 = m\eta \sqrt{-Q_f^2} = 2\eta \sqrt{\frac{u'}{u_1} \left(1 - \frac{u'}{u_1} \right)} = 2\eta \sqrt{\frac{1}{\varepsilon'_c} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon'_c} \right)}, \quad (3.23)$$

где

$$Q_f = \frac{p'_+}{(kp'_+)} - \frac{p'_-}{(kp'_-)}, \quad u' = \frac{(kp)^2}{4(kp'_+)(kp'_-)} \quad (3.24)$$

Используя (3.21)-(3.24), аналогично (3.20) получаем для функции $H_{l_2\nu}$

$$H_{l_2\nu} = a_{2\nu} L_{l_2} + b_{2+\nu} L_{l_2+1}$$

$$a_{2\nu} = \tilde{\gamma}_\nu$$

$$b_{2+\nu} = \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}_\nu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}_\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right)$$

Важно отметить, что во второй вершине в отличие от первой $l_2 = -1$. И тогда для функции $H_{l_2\nu}$ получается

$$H_{l_2\nu} \equiv H'_\nu = -\tilde{\gamma}_\nu \exp(i\chi_2) \frac{\gamma_2}{2} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}_\nu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}_\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right)$$

Представим для наглядности функции вместе.

$$H^\nu = \tilde{\gamma}^\nu \exp(-i\chi_1) \frac{\gamma_1}{2} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\tilde{\gamma}^\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{(kp_-)} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu}{(kp_+)} \right)$$

$$H'_\nu = -\tilde{\gamma}_\nu \exp(i\chi_2) \frac{\gamma_2}{2} + \eta \frac{m}{4} \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}_\nu}{(kp'_-)} - \frac{\tilde{\gamma}_\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{(kp'_+)} \right)$$

ГЛАВА 4. ОЦЕНКА РЕЗОНАНСНОГО СЕЧЕНИЯ

В общем виде амплитуда выглядит следующим образом.

$$S = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S^{(l)}$$

$$S^{(l)} = \frac{ie^2 \exp(-d_0) \cdot (2\pi)^5}{4\sqrt{E_- E_+ E'_- E'_+}} M^{(l)} \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_+ - p_- + lk)$$

$$M^{(l)} = \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \frac{(\bar{u}_2 H_{l_2, \nu} v_2)(\bar{v}_1 H_{l_1}^v u_1)}{(p_+ + p_- - l_1 k)^2},$$

где

$$H_{l_1}^v = H^v = \tilde{\gamma}^v \exp(-i\chi_1) \frac{\gamma_1}{2} + \eta \cdot \frac{m}{4} \cdot \left(\frac{\tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-}{kp_-} - \frac{\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^v}{kp_+} \right) \quad (4.1)$$

$$H_{l_2, \nu} = H'_\nu = -\tilde{\gamma}_\nu \exp(i\chi_2) \frac{\gamma_2}{2} + \eta \cdot \frac{m}{4} \cdot \left(\frac{\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}_\nu}{kp'_-} - \frac{\tilde{\gamma}_\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+}{kp'_+} \right)$$

Преобразуем эти функции с учётом свойств гамма-функции Дирака:

$$\hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}^v = 2k^v \hat{\varepsilon}_- - 2\varepsilon_-^v \hat{k} - \tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-,$$

$$\hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}_\nu = 2k_\nu \hat{\varepsilon}_+ - 2\varepsilon_{\nu+} \hat{k} - \tilde{\gamma}_\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+$$

Тогда (4.1) примет вид:

$$H^v = a_0 \cdot \tilde{\gamma}^v + \eta \cdot \frac{m}{2kp_+} \cdot (\varepsilon_-^v \hat{k} - k^v \hat{\varepsilon}_-) + \eta \cdot \frac{m}{4} \left(\frac{1}{kp_-} + \frac{1}{kp_+} \right) \tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_- =$$

$$= a_0 \cdot \tilde{\gamma}^v + a_1 \cdot (\varepsilon_-^v \hat{k} - k^v \hat{\varepsilon}_-) + a_2 \cdot \tilde{\gamma}^v \hat{k} \hat{\varepsilon}_-$$

Где обозначены:

$$a_0 = \exp(-i\chi_1) \left(\frac{\gamma_1}{2} \right) = \left(\frac{\gamma_1}{2} \right) (\cos \chi_1 - i \sin \chi_1)$$

Из определения χ_1

$$\cos \chi_1 = \frac{m\eta}{\gamma_1} (Q_i e_x)$$

$$\sin \chi_1 = \frac{m\eta}{\gamma_1} \delta(Q_i e_y)$$

Тогда

$$a_0 = \left(\frac{\eta m}{2} \right) ((Q_i e_x) - i\delta(Q_i e_y)) = \left(\frac{\eta m}{2} \right) (\varepsilon_- Q_i)$$

$$a_1 = \eta \cdot \frac{m}{2kp_+}$$

$$a_2 = \eta \cdot \frac{m}{4} \left(\frac{1}{kp_-} + \frac{1}{kp_+} \right) = \eta \cdot \frac{m}{4} \frac{kp}{kp_+ kp_-}$$

Вторая функция примет следующий вид:

$$H'_\nu = b_0 \cdot \tilde{\gamma}_\nu + b_1 \cdot (\varepsilon_{\nu+} \hat{k} - k_\nu \hat{\varepsilon}_+) + b_2 \cdot \tilde{\gamma}_\nu \hat{k} \hat{\varepsilon}_+$$

$$b_0 = -\exp(i\chi_2) \left(\frac{\gamma_2}{2} \right) = -\left(\frac{\gamma_2}{2} \right) (\cos \chi_2 + i \sin \chi_2)$$

Преобразуем b_0 с помощью χ_2

$$\cos \chi_2 = \frac{m\eta}{\gamma_2} (Q_f e_x)$$

$$\sin \chi_2 = \frac{m\eta}{\gamma_2} \delta(Q_f e_y)$$

Тогда b_0 изменится следующим образом

$$b_0 = -\left(\frac{\eta m}{2} \right) ((Q_f e_x) + i\delta(Q_f e_y)) = -\left(\frac{\eta m}{2} \right) (\varepsilon_+ Q_f)$$

$$b_1 = -\eta \cdot \frac{m}{2kp'_-}$$

$$b_2 = -\eta \cdot \frac{m}{4} \cdot \frac{kp}{kp'_+ kp'_-} = -\eta \cdot \frac{m}{4} \cdot \left(\frac{1}{kp'_+} + \frac{1}{kp'_-} \right)$$

Как было показано ранее $l_1 = 1$ и $l_2 = -1$, тогда $l = l_1 - l_2 = 0$. И амплитуда упрощается за счёт исчезновения двух сумм

$$S = S^{(0)}$$

$$S^{(0)} = \frac{ie^2 \exp(-d_0) \cdot (2\pi)^5}{4\sqrt{E_- E_+ E'_- E'_+}} M^{(0)} \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_+ - p_- + lk)$$

$$M^{(0)} = \frac{(\bar{u}_2 H'_\nu v_2)(\bar{v}_1 H^\nu u_1)}{(p_+ + p_- - k)^2}$$

Найдём вероятность искомого процесса:

$$\begin{aligned} dW &= |S|^2 \frac{d^3 p'_+ d^3 p'_-}{(2\pi)^6} = \\ &= S^{(0)} S^{(0)*} \frac{d^3 p'_+ d^3 p'_-}{(2\pi)^6} = \\ &= \frac{e^4 (2\pi)^4}{16E_- E_+} \frac{M^{(0)} \cdot M^{(0)*} \cdot \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_i)}{\sqrt{E'_- E'_+ E'_- E'_+}} \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_i) \cdot d^3 p'_+ d^3 p'_- \end{aligned} \quad (4.2)$$

Четырёхмерная дельта-функция может быть представлена через объём и время:

$$\delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_i) \rightarrow \frac{VT}{(2\pi)^4} \quad (V \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty)$$

Тогда чтобы получить вероятность процесса в единицу времени и единице объема разделим (4.2) на VT :

$$dw = \frac{dW}{VT} = \frac{e^4}{16E_- E_+} \frac{|M^{(0)}|^2}{E'_- E'_+} \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_i) \cdot d^3 p'_+ d^3 p'_-$$

Чтобы получить дифференциальное сечение, необходимо вероятность разделить на поток начальных частиц

$$d\sigma_{res} = \frac{dw}{j} \quad (4.3)$$

Плотность потока при единичном объёме ($V = 1$) имеет вид

$$j = \frac{\sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}}{E_+ E_-}$$

Тогда (4.3) оказывается равным

$$d\sigma_{res} = \frac{e^4}{16\sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \frac{|M_0|^2}{E_- E_+} \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_i) \cdot d^3 p'_+ d^3 p'_- \quad (4.4)$$

Раскроем $|M^{(0)}|^2$.

$$\begin{aligned} |M^{(0)}|^2 &= \frac{1}{p^4} [(\bar{u}_2 H'_\mu v_2)(\bar{v}_1 H^\mu u_1)] [(\bar{u}_2 H'_\nu v_2)(\bar{v}_1 H^\nu u_1)]^+ = \\ &= \frac{1}{p^4} [(\bar{u}_2 H'_\mu v_2)(\bar{v}_1 H^\mu u_1)] [(u_1^+ H^{\nu+} \bar{v}_1^+)(v_2^+ H_\nu'^+ \bar{u}_2^+)] = \\ &= \frac{1}{p^4} (\bar{u}_2 H'_\mu v_2)(\bar{v}_1 H^\mu u_1) \cdot \\ &\cdot [(u_1^+ \gamma^0 (\gamma^0 H^{\nu+} \gamma^0) \gamma^0 \bar{v}_1^+)(v_2^+ \gamma^0 (\gamma^0 H_\nu'^+ \gamma^0) \gamma^0 \bar{u}_2^+)] = \\ &= \frac{1}{p^4} (\bar{u}_2 H'_\mu v_2) [(\bar{v}_1 H^\mu u_1)(\bar{u}_1 \bar{H}^\nu v_1)] (\bar{v}_2 \bar{H}'_\nu u_2) = \\ &= \frac{1}{p^4} (\rho_+ H^\mu \rho_- \bar{H}^\nu) (\rho'_- H'_\mu \rho'_+ \bar{H}'_\nu) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\rho_- = u_1 \bar{u}_1$, $\rho'_- = u_2 \bar{u}_2$ – матрицы плотности электронов в начальных и конечных состояниях, $\rho_+ = v_1 \bar{v}_1$, $\rho'_+ = v_2 \bar{v}_2$ – матрицы плотности позитронов в начальных и конечных состояниях, а также \bar{H}^ν и \bar{H}'_ν

$$\begin{aligned} \bar{H}^\nu &= (\gamma^0 H^{\nu+} \gamma^0) = a_0^* \cdot \tilde{\gamma}^\nu + a_1 \cdot (\varepsilon_+^\nu \hat{k} - k^\nu \hat{\varepsilon}_+) + a_2 \cdot \hat{\varepsilon}_+ \hat{k} \tilde{\gamma}^\nu, \\ \bar{H}'_\nu &= (\gamma^0 H_\nu'^+ \gamma^0) = b_0^* \cdot \tilde{\gamma}_\nu + b_1 \cdot (\varepsilon_{\nu-} \hat{k} - k_\nu \hat{\varepsilon}_-) + b_2 \cdot \hat{\varepsilon}_- \hat{k} \tilde{\gamma}_\nu, \end{aligned}$$

В случае неполяризованных частиц усреднение по поляризациям начальной электронной пары и суммирование по поляризациям конечной электронной пары сводятся к замене на следы выражений $G^{\mu\nu}$ и $G'_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4p^4} \sum_{\text{поляризации}} (\rho_+ H^\mu \rho_- \bar{H}^\nu) (\rho'_- H'_\mu \rho'_+ \bar{H}'_\nu) &= \\ &= \frac{1}{4p^4} Sp(G^{\mu\nu}) \cdot Sp(G'_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= (\hat{p}_+ - m) H^\mu (\hat{p}_- + m) \bar{H}^\nu, \\ G'_{\mu\nu} &= (\hat{p}'_- + m) H'_\mu (\hat{p}'_+ - m) \bar{H}'_\nu \end{aligned}$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получаем резонансное дифференциальное сечение процесса рождения электрон-позитронной пары при аннигиляции электрон-позитронной пары в слабом электромагнитном поле циркулярной поляризации (4.6) для неполяризованных электронов и позитронов:

$$\begin{aligned} d\sigma_{res} &= \frac{e^4}{64\sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \frac{Sp(G^{\mu\nu}) \cdot Sp(G'_{\mu\nu})}{E'_- E'_+ p^4} \cdot \\ &\cdot \delta^{(4)}(p'_- + p'_+ - p_i) \cdot d^3 p'_+ d^3 p'_- \end{aligned} \quad (4.6)$$

И следующую оценку

$$d\sigma_{res} = \eta^4 r_e^2 \frac{m^2}{E_i^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \frac{x'_+}{1-x'_+} G \frac{W_1 W'_1}{(\delta_i^2 - \delta_{ires}^2)^2 + \Gamma^2} d\delta_+'^2 d\varphi. \quad (4.7)$$

Здесь

$$W_1 = 2u - 1 + 2 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right)$$

функция, определяющая вероятность однофотонной аннигиляции электрона и позитрона в слабом электромагнитном поле, а

$$W'_1 = 2u' - 1 + 2 \frac{u'}{u_1} \left(1 - \frac{u'}{u_1} \right)$$

функция, определяющая вероятность однофотонного рождения электрон-позитронной пары в слабом электромагнитном поле,

$$\Gamma = W \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon_c E_c} \quad (4.8)$$

ширина распадающегося состояния, а функция $G \sim 1$. В выражении (4.8)

$$W = \frac{\alpha m^2}{8\pi E_i} \eta^2 \left[\left(2 + \frac{2}{u_1} - \frac{1}{u_1^2} \right) \text{Arth} \sqrt{1 - \frac{1}{u_1}} - \left(1 + \frac{1}{u_1} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{u_1}} \right]$$

полная вероятность в единицу времени однофотонной аннигиляции начальной электрон-позитронной пары.

Когда $\delta_i^2 \rightarrow \delta_{ires}^2$, резонансное дифференциальное сечение (4.7) имеет максимум

$$d\sigma_{res}^{\max} = \left(\frac{16\pi}{\alpha} \right)^2 r_e^2 \left(\frac{E_{thr}}{m} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} \right)^2 \frac{x'_+}{1-x'_+} G W_1 W'_1 d\delta_+^2 d\varphi,$$

Например, при пороговой энергии $E_{thr} = 10^5 \text{ МэВ}$, $\varepsilon = 6$, $\varepsilon_c = 1,5$, $x'_+ \sim 0,5$ порядок сечения

$$d\sigma_{res}^{\max} \sim 10^{17} r_e^2 d\delta_+^2 d\varphi \quad (4.9)$$

Большая величина максимального резонансного сечения (4.9) обусловлена двумя причинами: очень малой величиной радиационной ширины (4.8), которая вносит в резонансное сечение около семи порядков, а также большой величиной пороговой энергии резонансного процесса, которая вносит около десяти порядков величины. Дифференциальное сечение аннигиляционного канала рассеяния Баба (без внешнего поля) равно

$$d\sigma_0 = r_e^2 \frac{m^2}{E_i^2} H d\delta_+^2 d\varphi, \quad H \sim 1$$

Отметим, что соответствующее дифференциальное сечение Баба (без внешнего поля) в резонансной кинематике имеет порядок величины

$$d\sigma_{Bhabha} \sim r_e^2 d\delta_+^2 d\varphi$$

Таким образом, отношение дифференциального сечения в слабом электромагнитном поле в максимуме к дифференциальному сечению без поля оказывается равным

$$R_{res}^{max} = \frac{d\sigma_{res}^{max}}{d\sigma_{Bhabha}} = \left(\frac{16\pi}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{E_{thr}}{m}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}\right)^2 \frac{x'_+}{1-x'_+} F \sim 10^{17}, \quad F \sim 1$$

В силу этого максимальное резонансное дифференциальное сечение превышает соответствующее дифференциальное сечение Баба (без внешнего поля) на семнадцать порядков величины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате изучения резонансной аннигиляции электрон-позитронной пары и рождения электронной пары в поле плоской монохроматической волны показано, что:

1. Резонансный процесс имеет пороговую энергию для комбинационной энергии начальной электрон-позитронной пары. При этом малый угол раствора между импульсами начальных электрона и позитрона должен удовлетворять резонансному условию. Пороговая энергия в области оптических частот ($\omega \sim 10^{15} \text{ 1/c}$) имеет порядок $E_{thr} \sim 10^5 \div 10^6 \text{ МэВ}$, а в области рентгеновских частот ($\omega \sim 10^{10} \div 10^{11} \text{ 1/c}$) – $E_{thr} \sim 10^2 \div 10^3 \text{ МэВ}$. Комбинационная энергия начальной пары определяется произведением энергий электрона и позитрона, делённым на сумму их энергий.

2. Все частицы процесса (начальная и конечная электрон-позитронные пары) летят в узком конусе, который находится вдали от направления распространения волны.

3. Энергия конечной электрон-позитронной пары существенно зависит от угла вылета одной из частиц. При этом для каждого угла вылета имеется два возможных значения энергий электрон-позитронной пары. Подчеркнём, что угол вылета частиц меняется от нуля до некоторого максимального значения, которое существенно зависит от суммарной начальной энергии пары (в единицах пороговой энергии).

4. Оценка резонансного дифференциального сечения показывает, что оно может превышать соответствующее дифференциальное сечение Баба на семнадцать порядков величины.

По материалам магистерской диссертации опубликована статья в журнале *Modern Physics Letters A* [27] и представлены следующие доклады по результатам конференций [7, 8, 28, 57, 59].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Апаневич П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом. – Минск: Наука и техника, 1977. – 496 с.
2. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 312 с.
3. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. – М.: ВИНТИ, 1964. – 295 с.
4. Волков Д. М. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. Вып. 11. С. 1286-1289.
5. Делоне Н. Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. – М.: Наука, 1989. – 280 с.
6. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. – М.: Энергоиздат, 1984. – 224 с.
7. Дорошенко Д. В., Дубов В. В., Рощупкин С. П. Резонансная кинематика в процессе аннигиляции электрон-позитронной пары с рождением электрон-позитронной пары в сильном поле плоской монохроматической волны. Неделя науки СПбПУ. Материалы научной конференции с международным участием. СПб: 2019. – 234–235
8. Дорошенко Д. В., Рощупкин С. П. Резонансная кинематика в процессе аннигиляции и рождения электронной пары в поле плоской монохроматической волны. Неделя науки СПбПУ. Материалы научной конференции с международным участием. СПб: 2018. – 347–349
9. Звелто О. Принципы лазеров: Пер. с англ. – 3-е перераб. и доп. изд. – М.: Мир, 1990. – 560 с.

10. Крюков П.Г. Лазеры ультракоротких импульсов // Квантовая электроника. – 2001. – 31, № 2. – С. 95.
11. Никишов А. И., Ритус В. И. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. Труды ФИАН, 111. – М.: Наука, 1979. – 271 с.
12. Олейник В. П. Резонансные эффекты в поле интенсивного лазерного луча Ч. 1 // ЖЭТФ. – 1967. – 52, № 4. – 1049–1067.
13. Олейник В. П. Резонансные эффекты в поле интенсивного лазерного луча Ч. 2 // ЖЭТФ. – 1967. – 53, № 6. – 1997–2011.
14. Попов В. С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) // УФН. – 2004. – 174, №9. – С. 921–951.
15. Рапопорт Л. П., Зон Б. А., Манаков Н. Л. Теория многофотонных процессов в атомах. – М.: Атомиздат, 1978. – 384 с.
16. Реди Дж. Действие мощного лазерного излучения. – М.: Мир, 1974. – 468 с.
17. Рощупкин С. П., Ворошило А. И. Резонансные и когерентные эффекты квантовой электродинамики в сильных световых полях. – К.: Наук. Думка, 2008. – 398 с.
18. Рощупкин С. П., Лебедь А. А. Эффекты квантовой электродинамики в сильных импульсных лазерных полях. — М.: Наукова думка, 2013.
19. Силин В. П., Параметрическое воздействие высокочастотного излучения на плазму. – М.: Наука, 1973. – 276 с.
20. Bagnoud V. et al Commissioning and early experiments of the PHELIX facility // Appl. Phys. B. – 2009. – 100, N 1, – P. 137–150.
21. Bagnoud V. et al. Commissioning and early experiments of the PHELIX facility // Appl. Phys. B Lasers Opt. 2010. Vol. 100, № 1. P. 137–150.

22. Bös J., Brock W., Mitter H., Schott Th. Resonances and intensity dependent shifts of the möller cross section in a strong laser field // *J. Phys. A.* – 1979. – 12, N 5. – P. 715–731.

23. Bula C., McDonald K. T., Prebys E. J. et al. Observation of nonlinear effects in compton scattering // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – 76, N 17. – P. 3116–3119.

24. Bunkin F. V., Fedorov M. V. Bremsstrahlung in a Strong Radiation Field // *Sov. Phys. JETP.* 1966. Vol. 22, № 4. P. 844–847. (

25. Burke D. L., Field R.C., Horton-Smith G. et al. Positron production in multiphoton light-by-light scattering // *Phys. Rev. Letts.* – 1997. – 79, N 9. – P.1626–1629.

26. Denisenko O. I. and Roshchupkin S. P., Resonant scattering of an electron by a positron in the field of a light wave. *Las. Phys.* **9**, 1108 (1999).

27. Doroshenko D. V., Dubov V. V, Roshchupkin S. P. Resonant annihilation and production of high-energy electron-positronpairs in an external electromagnetic field. *Modern Physics Letters A* 2040023 (2020)

28. Doroshenko D. V., Dubov V. V, Roshchupkin S. P. Resonant laser-assisted process of the electron-positron pairs annihilation and production. *AIP Conference Proceedings* 2179, 020005 (2019);

29. Dubov A. V., Dubov V. V., Roshchupkin S. P., Resonant emission of hard gamma-quanta at scattering of ultrarelativistic electrons on a nucleus within the external light field. *Modern Physics Letters A* Vol. 35, No. 03, 2040024 (2020)

30. Dubov A. V., Dubov V. V., Roshchupkin S. P., Resonant high-energy bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons in the field of a nucleus and a weak electromagnetic wave. 2020 *Laser Phys. Lett.* **17** 045301

31. Dubov A. V. and Roshchupkin S. P., "Resonant Spontaneous Bremsstrahlung of Ultrarelativistic Electrons in the Field of a Nucleus and a Laser

Wave," *2019 Photonics & Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS-Spring)*, Rome, Italy, 2019, pp. 4226-4232

32. Dubov A. V., Dubov V. V., Roshchupkin S. P., "Spontaneous bremsstrahlung of ultrarelativistic electrons within the resonant conditions in the field of a nucleus and external electromagnetic field," *2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL)*, Sozopol, Bulgaria, 2019, pp. 207-211

33. Dubov A. V., Dubov V. V., Roshchupkin S. P., The appearances of the resonant spontaneous emission of ultrarelativistic electrons in the field of a nucleus and a laser. 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1236 012073

34. Ehlotzky F. Scattering phenomena in strong radiation fields II//*Can. J. Phys.* – 1985. – 63, N 7. – P. 907–932.

35. Ehlotzky F., Jaron A., Kaminski J. Z. Electron-atom collisions in a laser field // *Phys. Rep.* – 1998. – 297, N 2–3. – P. 63–153.

36. Ehlotzky F., Krajewska K., Kaminski J. Z. Fundamental processes of quantum electrodynamics in laser fields of relativistic power // *Rep. Prog. Phys.* – 2009. – 72, N 4. – P. 0464401

37. Frantz L. M. Compton Scattering of an Intense Photon Beam // *Phys. Rev.* 1965. V. 139. No. 5. P. B1326-B1336

38. Hildum E. A., Boesl U., McIntyre D. H., Beausoleil R. G., and Hansch T. W. Measurement of the 1S-2S frequency in atomic hydrogen *Phys. Rev. Lett.* **56**, 576 – 1986

39. Klein O., Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac // *Zeitschrift für Physik* — 1929. — V. 53. — P. 157-165.]

40. Larin N. R., Dubov V. V., Roshchupkin S. P., Resonant laser-assisted process of the ultrarelativistic electron-positron pair creation by a gamma quantum in the nucleus field. *AIP Conference Proceedings* **2179**, 020016 (2019)

41. Larin N. R., Dubov V. V., Roshchupkin S. P., Resonant photoproduction of highenergy electron-positron pairs in the field of a nucleus and a weak electromagnetic wave // *Phys. Rev. A*—2019. —11. — V. 100. — P. 052502.

42. Lebed, A. & Padusenko, Elena & Roshchupkin, Sergei & Dubov, V.. (2016). Parametric interference effect in nonresonant spontaneous bremsstrahlung of an electron in the field of a nucleus and two pulsed laser waves. *Physical Review A*. 94. 10.1103/PhysRevA.94.013424.

43. Lebed A.A. et al. Resonant parametric interference effect in spontaneous bremsstrahlung of an electron in the field of a nucleus and two pulsed laser waves // *Phys. Rev. A*. 2018. Vol. 97, № 4. P. 274–285.

44. Lebed' A.A., Padusenko E.A., Roshchupkin S.P. Resonant scattering of ultrarelativistic electrons in the strong field of a pulsed laser wave // *Laser Phys*. IOP Publishing, 2016. Vol. 26, № 2. P. 25302

45. Lebed' A.A., Roshchupkin S.P. Resonant electron-positron pair photoproduction on a nucleus in a pulsed light field // *J. Exp. Theor. Phys*. 2011. Vol. 113, № 1. P. 46–54.

46. Lebed A., Padusenko E., Roshchupkin S. and Dubov V., "Resonant laser-modified electron-electron scattering by a strong bichromatic pulsed field," *2016 IEEE 13th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM)*, Odessa, 2016, pp. 21-23

47. Mittleman M. H. Introduction to theory of Laser-Atom Interaction. 2nd ed. – N.Y.: Plenum Press, 1993 – 326 p.

48. Nedoreshta V. N., Roshchupkin S. P., and Voroshilo A. I. Nonresonant Muon Pair Production in Electron-Positron Annihilation in the Field of Light Wave // *Laser Physics*, 2009, Vol. 19, No. 3, pp. 531–537.

49. Nedoreshta V.N., Roshchupkin S.P., Voroshilo A.I. Resonance of the exchange amplitude of a photon by an electron scattering in a pulsed laser field // *Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys.* 2015. Vol. 91, № 6. P. 1–9.

50. Nedoreshta V.N., Voroshilo A.I., Roshchupkin S.P. Resonant scattering of an electron by a muon in the field of light wave // *Eur. Phys. J. D.* 2008. Vol. 48, № 3. P. 451–458.

51. Nedoreshta V.N., Voroshilo A.I., Roshchupkin S.P. Resonant scattering of a photon by an electron in the moderately-strong-pulsed laser field // *Phys. Rev. A.* 2013. Vol. 88, № November. P. 52109.

52. Padusenko E.A., Roshchupkin S.P. Resonant scattering of a lepton by a lepton in the pulsed light field // *Laser Physics*. 2010, v. 20, p. 2080-2091.

53. Nedoreshta, Vitaly & Roshchupkin, Sergei & Voroshilo, A. (2016). Resonant two-photon emission of electron in the pulsed laser field. Conference: LFNM*2016, September 13-15 | ODESSA, UKRAINE

54. Padusenko E., Lebed A., Roshchupkin S. and Dubov V., "Nonresonant electron-nucleus spontaneous bremsstrahlung in the field of two pulsed laser waves," *2016 IEEE 13th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM)*, Odessa, 2016, pp. 18-20

55. Pustyntsev A. A., Dubov V. V., Roshchupkin S. P. Resonant Breit-Wheeler process in an external electromagnetic field. *Modern Physics Letters A* Vol. 35, No. 03, 2040027 (2020)

56. Roshchupkin S. P., "Influence of strong pulsed laser fields at resonant and coherent quantum electrodynamics processes," *2016 IEEE 13th International*

Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM), Odessa, 2016, pp. 7-11

57. Roshchupkin, S.P., Dubov, V.V., Larin, N.R., Doroshenko, D.V., "New aspects of resonant effects in laser-modified Quantum Electrodynamics processes : (Invited)," *2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL)*, Sozopol, Bulgaria, 2019, pp. 192-197

58. Roshchupkin S.P. Quantum electrodynamics in the strong pulsed Laser Fields // *Probl. At. Sci. Technol.* 2013. Vol. 3, № 3. P. 48–52.

59. Roshchupkin S. P., Dubov V. V. and Doroshenko D. V., "Resonance of the Annihilation Channel of a Laser-Assisted Electron-Positron Scattering," *2019 PhotonIcs & Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS-Spring)*, Rome, Italy, 2019, pp. 4220-4225

60. Roshchupkin S. P. Resonant effect in collisions of relativistic electrons in the field of light wave // *Las. Phys.* – 1996. – 6, N 5. – P. 837–858.

61. Roshchupkin S. P., Dubov A. V., Lebed ' A. A. and Padusenko E. A., "Resonant Parametric Interference Effect at Quantum Electrodynamics Processes in the Field of Two Pulsed Laser Waves," *2018 International Conference Laser Optics (ICLO)*, St. Petersburg, 2018, pp. 243-243

62. Roshchupkin S.P., Dubov V. V. Resonant processes of quantum electrodynamics in a pulsed laser field // *Prog. Electromagn. Res. Symp.* 2017. № 4. P. 2215–2222.

64. Roshchupkin S.P., Dubov V. V., Larin N., "Resonant Production of an Ultrarelativistic Electron-Positron Pair by a Gamma Quantum in the Field of a Nucleus and a Laser Wave," *2019 PhotonIcs & Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS-Spring)*, Rome, Italy, 2019, pp. 4214-4219

64. Roshchupkin S.P., Tsybul'nik V.A., and Chmirev A.N. The Probability of Multiphoton Processes in Quantum-Electrodynamic Phenomena in a Strong Light Field // *Laser Physics*, Vol. 10, No. 6, 2000, pp. 1256–1272

65. Sauter F., Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs // *Zeitschrift für Physik* —1931. — V. 69. — P. 742-764.

66. Schwinger J., On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // *Phys. Rev.* — 1951. — 6. — V.82. — P. 664–679.

67. Tanabashi M. et al. (Particle Data Group) Review of Particle Physics, *Phys. Rev. D* 98, 030001 (2018)

68. Voroshilo A.I., Roshchupkin S.P., Nedoreshta V.N. Resonant scattering of photon by electron in the presence of the pulsed laser field // *Laser Phys.* 2011. Vol. 21, № 9. P. 1675–1687.

69. Voroshilo, Alexey & Roshchupkin, Sergei & Nedoreshta, Vitaly. (2016). Resonant two-photon annihilation of electron-positron pair in the pulsed linear polarized wave field. Conference: LFNМ*2016, September 13-15 | ODESSA, UKRAINE

70. Zheltukhin A.N. et al. Resonant electron-atom bremsstrahlung in an intense laser field // *Phys. Rev. A - At. Mol. Opt. Phys.* 2014. Vol. 89, № 2. P. 1–16.