

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Направление: 01.04.04 – Прикладная математика

Профиль: Математическое моделирование

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ
ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ
В УПОРНОМ ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

Студент 2 курса

группы 09-825

«____» _____ 2020 г. _____ Федотов П.Е.

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

«____» _____ 2020 г. _____ Даутов Р.З.

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

«____» _____ 2020 г. _____ Даутов Р.З.

Казань 2020

Содержание

| | |
|---|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| 1 Постановка задачи | 7 |
| 1.1 Уравнение Рейнольдса | 8 |
| 1.2 Уравнение энергии в смазочном слое | 11 |
| 1.3 Уравнение энергии в упорном диске | 14 |
| 1.4 Уравнение энергии в подушке | 15 |
| 2 Приведение задачи к безразмерному виду | 17 |
| 2.1 Замена переменных | 17 |
| 2.2 Процедура замены переменных | 20 |
| 2.2.1 Коэффициенты в уравнениях и скорости | 20 |
| 2.2.2 Уравнение Рейнольдса | 23 |
| 2.2.3 Уравнение неразрывности | 26 |
| 2.2.4 Уравнение энергии в смазочном слое | 27 |
| 2.2.5 Уравнение энергии в упорном диске | 31 |
| 2.2.6 Уравнение энергии в подушке | 33 |
| 3 Построение сеточных аппроксимаций уравнений и методов их решения | 36 |
| 3.1 Построение расчётных областей | 36 |
| 3.2 Построение разностной схемы методом сумматорных тождеств для уравнения Рейнольдса | 36 |
| 3.3 Уравнение энергии в смазочном слое | 43 |
| 3.3.1 Вспомогательные обозначения | 43 |
| 3.3.2 Пространства конечно-элементных функций | 44 |
| 3.3.3 Построение сеточной схемы разрывного метода Галёркина | 44 |
| 3.4 Уравнение энергии в упорном диске | 50 |
| 3.4.1 Триангуляция упорного диска | 50 |
| 3.4.2 Пространства конечно-элементных функций | 51 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.4.3 | Построение схемы МКЭ для уравнения теплопроводности в диске | 51 |
| 3.5 | Уравнение энергии в подушке | 54 |
| 3.5.1 | Триангуляция подушки | 54 |
| 3.5.2 | Пространства конечно-элементных функций | 54 |
| 3.5.3 | Построение схемы МКЭ для уравнения теплопроводности в подушке | 54 |
| 3.6 | Метод декомпозиции | 57 |
| 4 | Численные эксперименты | 59 |
| | ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 75 |
| | СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ | 76 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ А | 79 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ Б | 96 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ В | 114 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ Г | 120 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ Д | 126 |

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена построению сеточных алгоритмов решения нестационарных уравнений в частных производных второго порядка, которые возникают при моделировании задач гидродинамической теории смазки упорных подшипников.

Описание течения смазки в смазочном слое упорного подшипника математически описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. В настоящей работе используются модели течения смазки в подшипниках, предложенные казанскими математиками Соколовым, Хадиевым и Максимовым [1], [2].

Подобные задачи решались, в основном в двумерной постановке. Здесь следует отметить работы Федотова, Даутова и Хадиева [3] – [6]. В них предлагались методы решения задач для различной геометрии и типов подушек подшипников. В настоящей работе рассматриваются методы решения двумерно-трехмерной задачи, описывающей течение смазки.

Упорные подшипники, используемые в компрессорах, имеют неподвижные подушки и вращающийся диск, между которыми протекает смазка. В работе решается уравнение Рейнольдса, характеризующее распределение давления и нестационарное уравнение энергии, описывающее теплопередачу в подушке, диске и смазочном слое. Уравнение Рейнольдса в смазочном слое является двумерным, в то время как уравнение энергии является трёхмерным нелинейным и выполняется в смазочном слое переменной толщины.

Для уравнений в каждой из областей ставятся граничные задачи. Для них строятся сеточные схемы методами сумматорных тождеств и МКЭ [7] – [11]. Для решения уравнения энергии с доминирующей конвекцией построена схема рахрывного метода Галёркина. Способ построения таких схем приведён в [12]. Для учёта теплообмена между областями строится итерационный метод на основе метода Лионса декомпозиции областей [13]. Предложены прямые и итерационные методы решения сеточных уравнений.

Для решения построенных сеточных схем создан комплекс программ

[14], с помощью которых проведены численные исследования, демонстрирующие эффективность используемых методов. Также они позволяют сделать выводы о сходимости схемы разрывного метода Галёркина со скоростью выше линейной на последовательности сеток [15] – [19]. Программа сборки и решения систем уравнений реализованы на языке C++. Для работы с разреженными матрицами используется средства библиотеки классов Eigen с открытым исходным кодом [20]. Построенный комплекс программ позволяет производить моделирование упорного подшипника, используемого в компрессорах, с необходимой точностью, при различных геометрических и физических параметрах.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача о течении смазки в зазорах и каналах упорного подшипника. Упорные подшипники, используемые в компрессорах, имеют неподвижные подушки и вращающийся диск, между которыми протекает смазка [1]. Упорный подшипник изображён на рисунке 1. В смазочном слое распределение давления описывается двумерным уравнением Рейнольдса, а теплообмен описывается трёхмерным уравнением энергии, которое ставится в смазочном слое, подушке и диске.

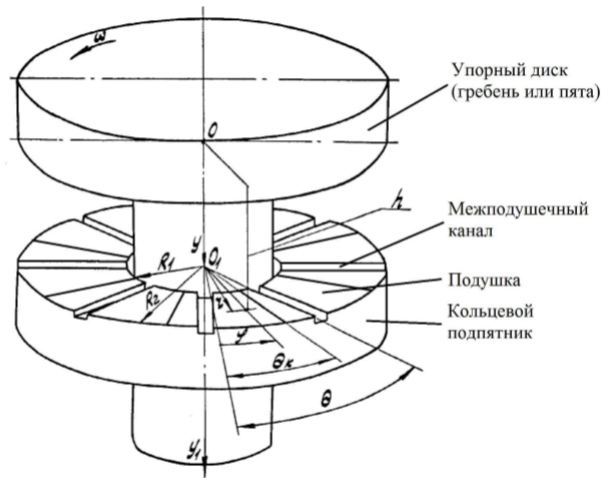


Рисунок 1 - Общий вид одностороннего упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками

При моделировании динамики подшипника естественно использовать цилиндрическую систему координат. Через r , φ , y обозначим координатные оси. Упорный подшипник имеет периодическую структуру, поэтому можно рассматривать лишь элемент периодичности. На рисунке 2 представлен элемент периодичности подшипника.

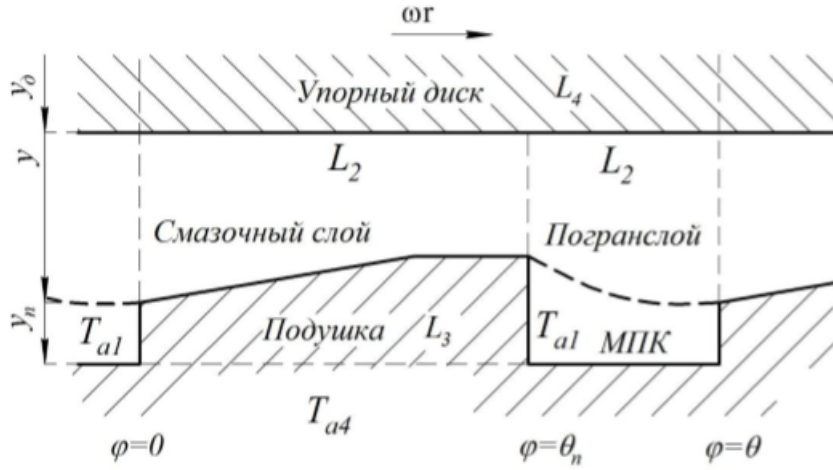


Рисунок 2 - Вид элемент периодичности подшипника
в плоскости $\varphi - y$

На рисунке видно, что поверхность подушки является профилированной. Толщина зазора h смазочного слоя с учётом различных профилей поверхности приводятся ниже. Поверхность диска является плоской. Между подушками расположены межподушечные каналы, через которые подаётся смазка.

1.1 Уравнение Рейнольдса

В области смазочного слоя $L_1 = \{r \in [R_1, R_2], \varphi \in [0, \theta_{\Pi}], y \in [0, h]\}$, $R_1, R_2, \theta_{\Pi} > 0$ функция давления p удовлетворяет уравнению Рейнольдса:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r f_0 \frac{\partial p}{\partial r} - f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(f_0 \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \omega r^2 f_2 \right) + A r^2 = 0, \quad (1)$$

где $A = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^h \rho dy \right) - \rho|_{y=h} \frac{\partial h}{\partial \tau}$.

На границах $\{r \in \{R_1, R_2\}, \varphi \in [0, \theta_{\Pi}], y \in [0, h]\}$ задано условие первого рода

$$p = p_{R_1}, \quad r = R_1, \quad (2)$$

$$p = p_{R_2}, \quad r = R_2. \quad (3)$$

На границах $\{r \in [R_1, R_2], \varphi \in \{0, \theta_{\Pi}\}, y \in [0, h]\}$ возможны два варианта

задания граничных условий

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = \theta_{\Pi}, \quad (5)$$

и

$$p = p_{\varphi_0}, \quad \varphi = 0, \quad (6)$$

$$p = p_{\varphi_{\theta_{\Pi}}}, \quad \varphi = \theta_{\Pi}. \quad (7)$$

Входящие в уравнение (1) функции f_0, f_1, f_2 имеют вид

$$f_0 = \int_0^h \rho \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) dy, \quad f_1 = \int_0^h \rho \left(j - \frac{n}{m_0} i_0 \right) dy, \quad (8)$$

$$f_2 = \int_0^h \rho \left(1 - \frac{i_0}{m_0} \right) dy,$$

где

$$i_k = \int_0^y \frac{y^k}{\mu} dy, \quad m_k = i_k|_{y=h}, \quad k = 0, 1,$$

$$j = \int_0^y \frac{1}{\mu} \int_0^{y'} \rho V_{\varphi}^2 dy' dy, \quad n = j|_{y=h}. \quad (9)$$

Скорость потока в окружном направлении V_{φ} определяется сл. образом:

$$V_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) \delta_1 + \omega r \left(1 - \frac{i_0}{m_0} \right), \quad (10)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 1, & \varphi \in [0, \theta_{\Pi}] \\ 0, & \varphi \in [\theta_{\Pi}, \theta]. \end{cases}$$

Приведённые выше формулы для коэффициентов i, m и скорости V_{φ} определяются для всех значений переменной y по толщине смазочного слоя. Отметим, что при выводе уравнения Рейнольдса давление в смазке

по толщине смазочного слоя принимается постоянным, то есть $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Поэтому в формуле (10) давление также полагается не зависящим от y .

В уравнении (1) коэффициенты вязкости μ и плотности ρ зависят от температуры и вида используемого масла. Они задаются таблично.

Пусть h_{2o} толщина смазочного слоя при центральном положении упорного диска, $y_{см.д}$ – координата расположения упорного диска, которая задается, как функция временной переменной; $\delta_{ск} = (h_1 - h_2)$ – глубина клинового скоса на входной кромке подушки, h_1, h_2 – толщина смазочного слоя при $\varphi = 0$, $\varphi = \theta_{п}$; $\alpha_{п}$ – коэффициент линейного расширения материала подушки и $T_{п}(\theta_{п}, r, y_{п})$ – распределение температуры на входной кромке подушки.

Тогда толщина смазочного слоя h принимается равной

– Винтовая поверхность клинового скоса

$$h = h_{2o} - y_{см.д} + \delta_{ск} \left(1 - \frac{\varphi}{\theta_k} \right) \delta_k + \alpha_{п} \int_0^{h_{п}} T_{п}(\theta_{п}, r, y_{п}) - T_{п}(\varphi, r, y_{п}) dy_{п}; \quad (11)$$

– Поверхность с параллельным межподушечному каналу скосом

$$h = h_{2o} - y_{см.д} + \delta_{ск} \left(1 - \frac{r \sin \varphi}{\eta_k} \right) \delta_k + \alpha_{п} \int_0^{h_{п}} T_{п}(\theta_{п}, r, y_{п}) - T_{п}(\varphi, r, y_{п}) dy_{п}; \quad (12)$$

где r, φ радиальная и угловая координаты, т.е. независимые переменные и δ_k – индикаторная функция:

– для винтовой поверхности

$$\delta_k = 1, \text{ при } \varphi \in [0, \theta_k] \text{ и } \delta_k = 0 \text{ иначе.}$$

– на поверхности с параллельным межподушечному каналу скосом

$$\delta_k = 1, \text{ при } \varphi \in [0, \arcsin \frac{\eta_k}{r}] \text{ и } \delta_k = 0 \text{ иначе.}$$

Течение жидкости моделируется во всём прилегающем к диску смазочном слое, включая межподушечный канал. При этом условная толщина пограничного слоя при $\theta_{\Pi} \leq \varphi \leq \theta$, в канале, принимается равной

$$h = \left[h|_{\varphi=\theta_{\Pi}} \frac{(\varphi - \theta_{\Pi})^2 - (\varphi - \theta)^2}{(\theta - \theta_{\Pi})^2} + h|_{\varphi=0} \frac{(\varphi - \theta_{\Pi})^2}{(\theta - \theta_{\Pi})^2} \right] + \\ + \varepsilon_1 (h_{2o} - y_{\text{см.}\partial}) \frac{(\varphi - \theta_{\Pi})(\varphi - \theta)}{\theta^2} + \varepsilon_2 (h_{2o} - y_{\text{см.}\partial}) \frac{(\varphi - \theta_{\Pi})^2(\varphi - \theta)}{\theta^3}. \quad (13)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры вогнутости и выпуклости виртуальной поверхности слоя, подбираются сравнением с натурным экспериментом, и позволяют исследовать влияние формы условной толщины пограничного слоя на решение задачи.

1.2 Уравнение энергии в смазочном слое

Уравнение энергии во всей области $L_2 = \{0 \leq \varphi \leq \theta, R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq y \leq h\}$ для смазочного слоя имеет вид

$$c \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} t + \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (cprV_r t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{c\rho}{r} V_{\varphi} t - \frac{\lambda_m}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c\rho V_y t - \lambda_m \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \\ = \mu \left[\left(\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Здесь компонента скорости V_{φ} определена следующим образом

$$V_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) \delta_1 + \omega r \left(1 - \frac{i_0}{m_0} \right), \quad (15)$$

скорость потока в радиальном V_r направлении:

$$V_r = \frac{\partial p}{\partial r} \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) \delta_1 - \frac{1}{r} \left(j - \frac{n}{m_0} i_0 \right), \quad (16)$$

где функция δ_1 — индикаторная функция поверхности подушки:

$$\delta_1 = \begin{cases} 1, & \varphi \in [0, \theta_{\Pi}] \\ 0, & \varphi \in [\theta_{\Pi}, \theta]. \end{cases}$$

Скорость V_y для смазочного и пограничного слоёв задана следующим образом:

$$V_y = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \int_0^y \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi) \right] dy, & y \in [0, y_0], \\ +\frac{1}{\rho} \int_y^h \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi) \right] dy, & y \in [y_0, h], \end{cases} \quad (17)$$

где y_0 параметр, задаваемый на отрезке $(0, h)$. Представление для скорости является следствием уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) = 0.$$

При этом рассматриваемая компонента скорости вычисляется из этого уравнения вопреки предположению о постоянстве давления по толщине смазочного слоя.

Для уравнения энергии принимаются следующие начальное и граничные условия.

В качестве начального условия нестационарной задачи (14) берётся решение стационарной задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (c \rho r V_r t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{c \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \rho V_y t - \lambda_M \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \\ = \mu \left[\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

для которого граничные условия совпадают с граничными условиями для нестационарной задачи, а начальное условие имеет вид

$$t = t_0(r, \varphi, y) \text{ при } \tau = 0, \quad (19)$$

где t_0 — заданная температура.

По координате φ на границах $\varphi = 0$ и $\varphi = \theta$ ставятся условия "периодичности" температуры:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{c \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right\} \Big|_{\varphi=0} = \left\{ \frac{c \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right\} \Big|_{\varphi=\theta}, \\ t|_{\varphi=0} = t|_{\varphi=\theta}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq y \leq h_1 \end{aligned} \quad (20)$$

По координате y при $y = 0$ на поверхности упорного диска при $r \in [R_1, R_2]$, $\varphi \in (0, h_1)$ ставится условие непрерывности температур и тепловых потоков (на разделе смазочный и пограничный слой – упорный диск).

$$t|_{y=0} = T_{\partial}|_{y_{\partial}=h_{\partial}}, \quad \left(c\rho V_y t - \lambda_m \frac{\partial t}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y_{\partial}} \Big|_{y_{\partial}=h_{\partial}}, \quad (21)$$

где T_{∂} – температура упорного диска, h_{∂} – толщина диска, $\lambda_m, \lambda_{\partial}$ – параметры (коэффициенты теплопроводности масла и диска).

По координате y при $y = h$, $r \in [R_1, R_2]$, $\varphi \in (0, \theta_{\Pi})$ ставятся условия: В пределах $y = h$, $\varphi \in (0, \theta_{\Pi})$ на поверхности подушки температура и тепловые потоки непрерывны (раздел смазочный слой – подушка), т.е.

$$t|_{y=h} = T_{\Pi}|_{y_{\Pi}=0}, \quad - \left(c\rho V_y t - \lambda_m \frac{\partial t}{\partial y} \right) \Big|_{y=h} = \lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial y_{\Pi}} \Big|_{y_{\Pi}=0}, \quad (22)$$

где T_{Π} – температура подушки, h – зазор в упорном подшипнике, λ_m, λ_{Π} – параметры (коэффициенты теплопроводности масла и подушки). В пределах межподушечного канала, на условной границе погранслоя $y = h$, $\varphi \in (\theta_{\Pi}, \theta)$, задаётся

– условие непротекания

$$\frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0. \quad (23)$$

– температура подачи смазки

$$t|_{y=h} = t_0. \quad (24)$$

В межподушечном канале при $r = R_1$, $r = R_2$, $\varphi \in (\theta_{\Pi}, \theta)$, $y \in [0, h]$ там, где происходит втекание смазки, ставится условия Дирихле, т.е. температура на границе считается равной температуре подачи смазки

$$\begin{aligned} t|_{r=R_1} &= t_0, \text{ если } V_r > 0, \\ t|_{r=R_2} &= t_0, \text{ если } V_r < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что физические соображения, а также известные решения аналогичной задачи для прямоугольной области, указывают на то, что

компонента скорости V_r течения смазки равна нулю вблизи средней линии $r^*(\varphi) \approx R_{cp} = \frac{R_1+R_2}{2}$ слоя над подушкой и меняет свой знак с отрицательного на линии $r = R_1$ на положительный на линии $r = R_2$ [2]. При таком распределении поля скоростей задача для уравнения энергии в смазочном слое не требует граничных условий при $r = R_1$ и $r = R_2$.

1.3 Уравнение энергии в упорном диске

Уравнение, описывающее распределение температуры в толще упорного диска в двумерном виде в области $L_4 = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq y_{\partial} \leq h_{\partial}\}$

$$c_{\partial}\rho_{\partial}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial \tau} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_{\partial}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(c_{\partial}\rho_{\partial}\frac{\omega r}{r}T_{\partial} - \frac{\lambda_{\partial}}{r^2}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{\partial}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial y}\right) = 0, \quad (26)$$

где c_{∂} , ρ_{∂} , λ_{∂} — параметры (коэффициент удельной теплоёмкости, плотность и коэффициент теплопроводности материала упорного диска).

В качестве начального условия нестационарной задачи (26) берётся решение стационарной задачи

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_{\partial}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(c_{\partial}\rho_{\partial}\frac{\omega r}{r}T_{\partial} - \frac{\lambda_{\partial}}{r^2}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{\partial}\frac{\partial T_{\partial}}{\partial y}\right) = 0, \quad (27)$$

для которого граничные условия совпадают с граничными условиями для нестационарной задачи, а начальное условие имеет вид

$$T_{\partial}(0, r, \varphi, y_{\partial}) = T_{\partial,0}(r, \varphi, y_{\partial}), \quad \tau = 0, \quad (28)$$

где $T_{\partial,0}$ — заданная температура.

Для уравнения на границе раздела "упорный диск - смазочный слой и пограничный слой межподушечного канала" при $R_1 \leq r \leq R_2, 0 < \varphi < \theta$ ставятся условия сопряжения

$$t|_{y=0} = T_{\partial}|_{y_{\partial}=h_{\partial}}, \quad \left(c\rho V_y t - \lambda_m \frac{\partial t}{\partial y}\right) \Big|_{y=0} = \lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y_{\partial}} \Big|_{y_{\partial}=h_{\partial}}, \quad (29)$$

где T_{∂} — температура упорного диска, h_{∂} — толщина диска, $\lambda_m, \lambda_{\partial}$ — параметры, коэффициенты теплопроводности масла и диска.

При $y_{\partial} = 0$ с тыльной стороны упорного диска ставится граничное условие третьего рода

$$-\lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y_{\partial}} r + \alpha_{T_{\partial}0} T_{\partial} r = \alpha_{T_{\partial}0} T_{\alpha} r, \quad y_{\partial} = 0, \quad (30)$$

где $\alpha_{T_{\partial}0}$ — коэффициент теплоотдачи с тыльной стороны упорного диска, T_{α} — температура окружающей среды с тыльной стороны упорного диска.

На границе области при $r = R_1$ и $r = R_2$ также ставятся граничные условия третьего рода

$$-\lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y_{\partial}} r + \alpha_{T_{\partial}R_1} T_{\partial} r = \alpha_{T_{\partial}R_1} T_{\alpha} r, \quad r = R_1, \quad (31)$$

$$+\lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y_{\partial}} r + \alpha_{T_{\partial}R_2} T_{\partial} r = \alpha_{T_{\partial}R_2} T_{\alpha} r, \quad r = R_2, \quad (32)$$

где $\alpha_{T_{\partial}R_1}$, $\alpha_{T_{\partial}R_2}$ — параметры (коэффициенты теплоотдачи диска при $r = R_1$ и $r = R_2$, T_{α} — температура окружающей среды при $r = R_1$ и $r = R_2$.

На границах $\varphi = 0$ и $\varphi = \theta$ ставятся условия "периодичности":

$$\left(c_{\partial} \rho_{\partial} \frac{\omega r}{r} T_{\partial} - \frac{\lambda_{\partial}}{r^2} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = \left(c_{\partial} \rho_{\partial} \frac{\omega r}{r} T_{\partial} - \frac{\lambda_{\partial}}{r^2} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\theta}, \quad (33)$$

$$T_{\partial}|_{\varphi=0} = T_{\partial}|_{\varphi=\theta}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq y, \leq h_1$$

1.4 Уравнение энергии в подушке

Уравнение, описывающее распределение температуры в толще подушки в трёхмерном виде в области $L_3 = \{0 \leq y_{\Pi} \leq h_{\Pi}, R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \theta_{\Pi}\}$ имеет вид

$$c_{\Pi} \rho_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial y} \right) = 0, \quad (34)$$

где c_{Π} , ρ_{Π} , λ_{Π} — параметры, коэффициент теплоёмкости, плотность и коэффициент теплопроводности материала подушки.

В качестве начального условия нестационарной задачи (26) берётся решение стационарной задачи

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial y} \right) = 0, \quad (35)$$

для которого граничные условия совпадают с граничными условиями для нестационарной задачи, а начальное условие имеет вид

$$T_{\Pi} = T_{\Pi,0}(r, \varphi, y_{\Pi}), \quad \tau = 0 \quad (36)$$

где $T_{\Pi,0}$ — заданная температура.

Для уравнения на границе раздела смазочный слой $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 < \varphi < \theta_{\Pi}$ на поверхности подушки ставятся условия сопряжения

$$t|_{y=h} = T_{\Pi}|_{y_{\Pi}=0}, \quad - \left(c\rho V_y t - \lambda_{\text{м}} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \Big|_{y=h} = \lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial y_{\Pi}} \Big|_{y_{\Pi}=0}, \quad (37)$$

где T_{Π} — температура подушки, h — зазор в упорном подшипнике, $\lambda_{\text{м}}$, λ_{Π} — параметры, коэффициенты теплопроводности масла и подушки.

На границах подушки при $r = R_1$, $r = R_2$, $\varphi = 0$, $\varphi = \theta_{\Pi}$, $y_{\Pi} = h_{\Pi}$, соответственно, ставятся граничные условия третьего рода:

$$-\lambda_{\Pi} r \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial r} r + \alpha_{T_{\Pi}R_1} r = \alpha_{T_{\Pi}R_1} T_{a2} r, \quad r = R_1, \quad (38)$$

$$+\lambda_{\Pi} r \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial r} r + \alpha_{T_{\Pi}R_2} r = \alpha_{T_{\Pi}R_2} T_{a3} r, \quad r = R_2, \quad (39)$$

$$-\frac{\lambda_{\Pi}}{r} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial \varphi} r + \alpha_{T_{\Pi}0} r = \alpha_{T_{\Pi}0} T_{a1} r, \quad \varphi = 0, \quad (40)$$

$$+\frac{\lambda_{\Pi}}{r} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial \varphi} r + \alpha_{T_{\Pi}\theta_{\Pi}} r = \alpha_{T_{\Pi}\theta_{\Pi}} T_{a1} r, \quad \varphi = \theta_{\Pi}, \quad (41)$$

$$+\lambda_{\Pi} \frac{\partial T_{\Pi}}{\partial y_{\Pi}} r + \alpha_{T_{\Pi}h_{\Pi}} r = \alpha_{T_{\Pi}h_{\Pi}} T_{a4} r, \quad y_{\Pi} = h_{\Pi}, \quad (42)$$

где $\alpha_{T_{\Pi}h_{\Pi}}$, T_{a4} — коэффициент теплоотдачи и температуры с тыльной стороны подушки, $\alpha_{T_{\Pi}0}$, $\alpha_{T_{\Pi}\theta_{\Pi}}$ — коэффициенты теплоотдачи при $\varphi = 0$ и $\varphi = \theta_{\Pi}$, T_{a1} — температура смазки в межподушечном канале, $\alpha_{T_{\Pi}R_1}$, $\alpha_{T_{\Pi}R_2}$, T_{a2} , T_{a3} — параметры коэффициент теплоотдачи и температура окружающей среды при $r = R_1$, $r = R_2$.

2 Приведение задачи к безразмерному виду

Толщина зазора $h = h(r, \varphi)$ смазочного слоя существенно меньше толщин подушек и упорного диска, она является переменной величиной за счёт профилирования подушки и возможных температурных деформаций. Также, характеристики твёрдых материалов подшипника и смазки имеют различный порядок. Поэтому, для удобства и повышения качества решения задачи, производится особая замена переменных, сохраняющая дивергентный вид уравнения энергии в смазочном слое.

2.1 Замена переменных

Произведём замену пространственных переменных¹

$$r = (\sigma \bar{r} + 1)R_{cp}, \quad \varphi = \theta \bar{\varphi},$$

$$y = h_{*0} \bar{h} \bar{y}, \quad y_{\Pi} = H_{\Pi} \bar{y}_{\Pi}, \quad y_{\partial} = H_{\partial} \bar{y}_{\partial}, \quad \tau = \tau^* \bar{\tau},$$

где $R_{cp} = \frac{R_2 + R_1}{2}$, $\sigma = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = \frac{R_2 - R_1}{2R_{cp}}$, h — толщина зазора, h_{*0} — характерная толщина смазочного слоя, H_{Π} — толщина подушки, H_{∂} — толщина диска, τ^* — характерное время.

Этой замене соответствует следующие матрицы Якоби.

Для смазочного слоя

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma R_{cp}} & & & \\ & \frac{1}{\theta} & & \\ & \frac{\bar{h}'_{\bar{r}} \bar{y}}{\sigma R_{cp} \bar{h}} & \frac{\bar{h}'_{\bar{\varphi}} \bar{y}}{\theta \bar{h}} & \frac{h_{*0}}{\bar{h}} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Для подушки и диска

$$J_{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma R_{cp}} & & & \\ & \frac{1}{\theta} & & \\ & & \frac{1}{H_{\Pi}} & \\ & & & \frac{1}{H_{\partial}} \end{pmatrix}, \quad J_{\partial} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma R_{cp}} & & & \\ & \frac{1}{\theta} & & \\ & & \frac{1}{H_{\partial}} & \\ & & & \frac{1}{H_{\partial}} \end{pmatrix}.$$

¹Далее, там, где это не вызывает недоразумений, будем использовать обозначения для пространственных переменных и функций, опуская символ надчёркивания

Определители матриц Якоби для областей

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{1}{\sigma R_{cp} \theta h_{*0} \bar{h}}, & |J_{\Pi}| &= \frac{1}{\sigma R_{cp} \theta H_{\Pi}}, & |J_{\partial}| &= \frac{1}{\sigma R_{cp} \theta H_{\partial}}, \\ |J^{-1}| &= \sigma R_{cp} \theta h_{*0} \bar{h}; & |J_{\Pi}^{-1}| &= \sigma R_{cp} \theta H_{\Pi}; & |J_{\partial}^{-1}| &= \sigma R_{cp} \theta H_{\partial}; \end{aligned}$$

Так же для границ:

$$\begin{aligned} |J_{r,\varphi}^{-1}| &= \sigma R_{cp} \theta, & |J_{r,y}^{-1}| &= \sigma R_{cp} h_{*0} \bar{h}, & |J_{\varphi,y}^{-1}| &= \theta h_{*0} \bar{h}, \\ |J_{\Pi,r,\varphi}^{-1}| &= \sigma R_{cp} \theta, & |J_{\Pi,r,y}^{-1}| &= \sigma R_{cp} H_{\Pi}, & |J_{\Pi,\varphi,y}^{-1}| &= \theta H_{\Pi}, \\ |J_{\partial,r,\varphi}^{-1}| &= \sigma R_{cp} \theta, & |J_{\partial,r,y}^{-1}| &= \sigma R_{cp} H_{\partial}, & |J_{\partial,\varphi,y}^{-1}| &= \theta H_{\partial}. \end{aligned}$$

Для дифференцируемой функции η выполняется

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial r} &= \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} + 0 + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} &= 0 + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 + 0 + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \end{aligned}$$

В матричном виде

$$\nabla \eta = J^T \bar{\nabla} \bar{\eta}.$$

Таким образом, образуются области

$$\Omega_{Re} = \bar{L}_1 = \{x = (\bar{r}, \bar{\varphi}) : \bar{r} \in [-1, 1], \bar{\varphi} \in [0, \bar{\theta}_{\Pi}], \bar{y} \in [0, 1]\}$$

$$\Omega_M = \bar{L}_2 = \{x = (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{y}) : \bar{r} \in [-1, 1], \bar{\varphi} \in [0, \bar{\theta}], \bar{y} \in [0, 1]\}$$

$$\Omega_{\Pi} = \bar{L}_3 = \{x = (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{y}) : \bar{r} \in [-1, 1], \bar{\varphi} \in [0, \bar{\theta}_{\Pi}], \bar{y} \in [0, 1]\}$$

$$\Omega_{\partial} = \bar{L}_4 = \{x = (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{y}) : \bar{r} \in [-1, 1], \bar{\varphi} \in [0, \bar{\theta}], \bar{y} \in [0, 1]\}$$

Также, выполним обезразмеривание некоторых величин.

1. $\omega = \omega_* \bar{\omega}$, где ω_* — характерная скорость
2. $h = h_{*0} \bar{h}$
3. $\rho = \rho_0 \bar{\rho}$
4. $\mu = \mu_0 \bar{\mu}$

$$5. c = c_0 \bar{c}$$

$$6. p = \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{h_{*0}^2} \bar{p},$$

$$7. t = \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{c_0 \rho_* h_{*0}^2} \bar{t} + t_*, \text{ здесь } t_* \text{ — характеристическая температура смазочного слоя}$$

$$8. T_{\Pi} = \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{c_0 \rho_* h_{*0}^2} \bar{T}_{\Pi} + t_*,$$

$$9. T_{\partial} = \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{c_0 \rho_* h_{*0}^2} \bar{T}_{\partial} + t_*,$$

Обезразмеривание для температуры подушки и диска аналогичны замене для температуры смазочного слоя. Это необходимо для соблюдения баланса тепловых потоков.

Критерии и вспомогательные переменные

$$1. \lambda = \frac{2R_{cp}\theta}{R_2 - R_1} = \frac{\theta}{\sigma} \text{ — относительная длина подушки}$$

$$2. \psi = \frac{h_{*0}}{R_{cp}\theta} \text{ — относительная толщина смазочного слоя}$$

$$3. \psi_{\Pi} = \frac{H_{\Pi}}{R_{cp}\theta} \text{ — относительная толщина подушки}$$

$$4. \psi_{\partial} = \frac{H_{\partial}}{R_{cp}\theta} \text{ — относительная толщина диска}$$

$$5. Re = \frac{\rho_0 \omega_* R_{cp} h_{*0}}{\mu_0} \text{ — критерий Рейнольдса}$$

$$6. Sh = \frac{\theta}{\omega_* \tau^*} \text{ — критерий Струхала}$$

$$7. Pe = \frac{c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} h_{*0}}{\lambda_{m0}} \text{ — критерий Пекле смазки}$$

$$8. Pe_{\Pi} = \frac{c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} H_{\Pi}}{\lambda_{m0}} \text{ — критерий Пекле подушки}$$

$$9. Pe_{\partial} = \frac{c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} H_{\partial}}{\lambda_{m0}} \text{ — критерий Пекле диска}$$

10. $Nu_{\pi R_1} = \frac{\alpha_{T_{\pi} R_1} R_{cp} \theta}{\lambda_{\pi}}$ – Критерий Нуссельта подушки при $r = R_1$
11. $Nu_{\pi R_2} = \frac{\alpha_{T_{\pi} R_2} R_{cp} \theta}{\lambda_{\pi}}$ – Критерий Нуссельта подушки при $r = R_2$
12. $Nu_{\pi \varphi_0} = \frac{\alpha_{T_{\pi} 0} R_{cp} \theta}{\lambda_{\pi}}$ – Критерий Нуссельта подушки при $\varphi = 0$
13. $Nu_{\pi \theta_{\pi}} = \frac{\alpha_{T_{\pi} \theta_{\pi}} R_{cp} \theta}{\lambda_{\pi}}$ – Критерий Нуссельта подушки при $\varphi = \theta_{\pi}$
14. $Nu_{\pi H_{\pi}} = \frac{\alpha_{T_{\pi} H_{\pi}} R_{cp} \theta}{\lambda_{\pi}}$ – Критерий Нуссельта подушки при $y_{\pi} = H_{\pi}$
15. $Nu_{\partial R_1} = \frac{\alpha_{T_{\partial} R_1} R_{cp} \theta}{\lambda_{\partial}}$ – Критерий Нуссельта диска при $r = R_1$
16. $Nu_{\partial R_2} = \frac{\alpha_{T_{\partial} R_2} R_{cp} \theta}{\lambda_{\partial}}$ – Критерий Нуссельта диска при $r = R_2$
17. $Nu_{\partial 0} = \frac{\alpha_{T_{\partial} 0} R_{cp} \theta}{\lambda_{\partial}}$ – Критерий Нуссельта диска при $y_{\partial} = 0$

2.2 Процедура замены переменных

2.2.1 Коэффициенты в уравнениях и скорости

Воспользуемся заменой переменных (2.1).

$$i_k = \int_0^y \frac{y^k}{\mu} dy = \int_0^{\bar{y}} \frac{(h_{*0} \bar{h} y)^k}{\mu} h_{*0} \bar{h} d\bar{y} = \frac{(h_{*0} \bar{h})^{k+1}}{\mu_0} \int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{y}^k}{\bar{\mu}} d\bar{y},$$

Обозначив $\bar{i}_k = \int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{y}^k}{\bar{\mu}} d\bar{y}$ можно записать

$$i_k = \frac{(h_{*0} \bar{h})^{k+1}}{\mu_0} \bar{i}_k$$

Аналогично

$$m_k = \frac{(h_{*0} \bar{h})^{k+1}}{\mu_0} \bar{m}_k,$$

здесь $\bar{m}_k = \int_0^1 \frac{\bar{y}^k}{\bar{\mu}} d\bar{y}$.

Для скоростей введём соотношения

$$V_j = \omega_* R_{cp} \bar{V}_j, \quad j = \{r, \varphi, y\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) \delta_1 + \omega r \left(1 - \frac{i_0}{m_0} \right) = \\ &= \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{\theta h_{*0} R_{cp}} \frac{1}{(\sigma \bar{r} + 1)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \left(\frac{(h_{*0} \bar{h})^2}{\mu_0} \bar{i}_1 - \frac{(h_{*0} \bar{h})^2}{\mu_0} \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \delta_1 + \\ &\quad + \omega_* \bar{\omega} (\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \left(1 - \frac{\bar{i}_0}{\bar{m}_0} \right) = \\ &= \omega_* R_{cp} \left[\frac{\mu_*}{\mu_0} \frac{\bar{h}^2}{(\sigma \bar{r} + 1)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \left(\bar{i}_1 - \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \delta_1 + \bar{\omega} (\sigma \bar{r} + 1) \left(1 - \frac{\bar{i}_0}{\bar{m}_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

Обозначим то, что находится в квадратных скобках как \bar{V}_φ .

Преобразования для j и n аналогичны друг другу.

$$\begin{aligned} j &= \int_0^y \frac{1}{\mu} \int_0^y \rho V_\varphi^2 dy dy = \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{\mu_0 \bar{\mu}} \int_0^{\bar{y}} \rho_0 \bar{\rho} (\omega_* R_{cp})^2 \bar{V}_\varphi^2 (h_{*0} \bar{h})^2 d\bar{y} d\bar{y} = \\ &= \frac{\rho_0 \omega_*^2 R_{cp}^2 h_{*0}^2 \bar{h}^2}{\mu_0} \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{\mu_*} \int_0^{\bar{y}} \bar{\rho} \bar{V}_\varphi^2 d\bar{y} d\bar{y} = Re^2 \frac{\mu_0}{\rho_0} \bar{h}^2 \bar{j}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} j &= Re^2 \frac{\mu_0}{\rho_0} \bar{h}^2 \bar{j} \\ n &= Re^2 \frac{\mu_0}{\rho_0} \bar{h}^2 \bar{n} \end{aligned}$$

Коэффициенты, используемые в уравнении Рейнольдса

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_0^h \rho \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) dy = \int_0^1 \rho_0 \bar{\rho} \frac{(h_{*0} \bar{h})^2}{\mu_0} \left(\bar{i}_1 - \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) h_{*0} \bar{h} d\bar{y} = \\ &= \frac{(h_{*0} \bar{h})^3}{\mu_0} \rho_0 \int_0^1 \bar{\rho} \left(\bar{i}_1 - \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) d\bar{y} = \frac{(h_{*0} \bar{h})^3}{\mu_0} \rho_0 \bar{f}_0 \end{aligned}$$

$$f_1 = \int_0^h \rho \left(j - \frac{n}{m_0} i_0 \right) dy =$$

$$= Re^2 \mu_0 \bar{h}^2 \int_0^1 \bar{\rho} \left(\bar{j} - \frac{\bar{n}}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \bar{h}_{*0} \bar{h} d\bar{y} = Re^2 \mu_0 h_{*0} \bar{h}^3 \bar{f}_1.$$

$$f_2 = \int_0^h \rho \left(1 - \frac{i_0}{m_0} \right) dy = \rho_0 h_{*0} \bar{h} \bar{f}_2.$$

$$A = \frac{\rho_0 h_{*0}}{\tau^*} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left(\bar{h} \int_0^1 \bar{\rho} d\bar{y} \right) - \bar{\rho} \Big|_{\bar{y}=1} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\tau}} \right] = \frac{\rho_0 h_{*0}}{\tau^*} \bar{A}.$$

Обезразмерим оставшиеся компоненты вектора скорости.

$$V_r = \frac{\partial p}{\partial r} \left(i_1 - \frac{m_1}{m_0} i_0 \right) \delta_1 - \frac{1}{r} \left(j - \frac{n}{m_0} i_0 \right) =$$

$$= \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta (h_{*0} \bar{h})^2}{\sigma R_{cp} h_{*0}^2 \mu_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\bar{i}_1 - \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \delta_1 -$$

$$- \frac{1}{(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp}} Re^2 \frac{\mu_0}{\rho_0} \bar{h}^2 \left(\bar{j} - \frac{\bar{n}}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) =$$

$$= \omega_* R_{cp} \left[\frac{\mu_* \theta \bar{h}^2}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\bar{i}_1 - \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \delta_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{Re \mu_0 \bar{h}^2 \rho_0 \omega_* R_{cp} h_{*0}}{(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp}^2 \omega_* \rho_0 \mu_0} \left(\bar{j} - \frac{\bar{n}}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \right] =$$

$$= \omega_* R_{cp} \left[\frac{\mu_*}{\mu_0} \lambda \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \left(\bar{i}_1 - \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \delta_1 - \frac{Re \psi \sigma \lambda \bar{h}^2}{(\sigma \bar{r} + 1)} \left(\bar{j} - \frac{\bar{n}}{\bar{m}_0} \bar{i}_0 \right) \right] = \omega_* R_{cp} \bar{V}_r.$$

Выполним замену переменных в выражении для скорости в направ-

лении y

$$\begin{aligned}
V_y &= -\frac{1}{\rho} \int_0^y \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi) \right] dy = \\
&= \omega_* R_{cp} \left\{ -\frac{1}{\rho_0 \bar{\rho}} \int_0^{\bar{y}} \left[\frac{\rho_0}{\tau^*} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} + \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp}} \left(\frac{1}{\sigma R_{cp}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} ((\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \rho_0 \bar{\rho} \omega_* R_{cp} \bar{V}_r) + \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} ((\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \rho_0 \bar{\rho} \omega_* R_{cp} \bar{V}_r) \left(-\frac{\bar{h}'_r \bar{y}}{\sigma R_{cp} \bar{h}} \right) + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} (\rho_0 \bar{\rho} \omega_* R_{cp} \bar{V}_\varphi) + \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\rho_0 \bar{\rho} \omega_* R_{cp} \bar{V}_\varphi) \left(-\frac{\bar{h}'_\varphi \bar{y}}{\theta \bar{h}} \right) \right) \right] h_{*0} \bar{h} dy \right\} = \\
&= \omega_* R_{cp} \left\{ -\frac{h_{*0}}{\sigma \theta \bar{\rho}} \int_0^{\bar{y}} \left[\frac{Sh}{R_{cp}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} + \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp}} \left(\theta \frac{\partial}{\partial \bar{r}} ((\sigma \bar{r} + 1) \bar{\rho} \bar{V}_r) + \right. \\
&\quad + \left(-\frac{\bar{h}'_r \bar{y} \theta}{\bar{h}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} ((\sigma \bar{r} + 1) \bar{\rho} \bar{V}_r) + \\
&\quad \left. \left. + \sigma \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} (\bar{\rho} \bar{V}_\varphi) + \left(-\frac{\bar{h}'_\varphi \bar{y} \sigma}{\bar{h}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{\rho} \bar{V}_\varphi) \right) \right] \bar{h} dy \right\} = \\
&= \omega_* R_{cp} \left\{ -\frac{\psi}{\sigma \bar{\rho}} \int_0^{\bar{y}} \left[Sh \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} + \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{\sigma \bar{r} + 1} \left(\bar{h} \left\{ \theta \frac{\partial}{\partial \bar{r}} ((\sigma \bar{r} + 1) \bar{\rho} \bar{V}_r) + \sigma \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} (\bar{\rho} \bar{V}_\varphi) \right\} - \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{y} \left\{ \bar{h}'_r \theta \frac{\partial}{\partial \bar{y}} ((\sigma \bar{r} + 1) \bar{\rho} \bar{V}_r) + \bar{h}'_\varphi \sigma \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{\rho} \bar{V}_\varphi) \right\} \right) \right] d\bar{y} \right\} = \omega_* R_{cp} \bar{V}_y,
\end{aligned}$$

при $y \in [0, y_0]$, для $y \in [y_0, h]$ аналогично.

2.2.2 Уравнение Рейнольдса

Рассмотрим уравнение Рейнольдса (1) с граничными условиями (2)–(4).

Умножим обе части уравнения на $1/r$ и пробную функцию $v : v|_{\Gamma_R} =$

0. и проинтегрируем по области Ω .

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(r f_0 \frac{\partial p}{\partial r} - f_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(f_0 \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \omega r^2 f_2 \right) + A r^2 \right] v dx = 0$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

Поскольку $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$, $x \in \Gamma_{\varphi}$, $v|_{\Gamma_R} = 0$, $\cos(\nu, r) = 0$, $x \in \Gamma_{\varphi}$, где ν — внешняя нормаль к границе, то интегралы по границам обратятся в нуль.

$$\int_{\Omega} r f_0 \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{r} f_0 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial r} v dx + \int_{\Omega} \omega r \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} v dx + \int_{\Omega} A r v dx$$

Введём замену переменных $r = (\sigma \bar{r} + 1) R_{cp}$, $\varphi = \theta \varphi$. Ей соответствует следующая матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma R_{cp}} & \\ & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix}$$

$$|J| = \frac{1}{\sigma R_{cp} \theta}, \quad |J^{-1}| = \sigma R_{cp} \theta.$$

Рассмотрим каждый интеграл в отдельности.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega} r f_0 \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} dx = \int_{\Omega} \frac{(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \rho_0 h_{*0}^3 \bar{h}^3 \mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{(\sigma R_{cp})^2 \mu_0} f_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} \sigma R_{cp} \theta dx = \\ &= \int_{\Omega} \frac{(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp}^2 h_{*0} \mu_* \omega_* \theta^2 \rho_0 \bar{h}^3 \bar{f}_0}{\sigma \mu_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dx = \\ &= Re \lambda^2 \sigma \mu_* R_{cp} \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega} \frac{1}{r} f_0 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} dx = \frac{\rho_0 \omega_* R_{cp}^2 h_{*0} \sigma \mu_*}{\mu_0} \int_{\Omega} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\varphi}} dx = \\ &= Re \sigma \mu_* R_{cp} \int_{\Omega} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\varphi}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial r} v dx = - \int_{\Omega} \frac{\sigma R_{cp} \theta}{\sigma R_{cp}} Re^2 \mu_0 h_{*0} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx = \\
&= - Re^2 \theta \mu_0 h_{*0} \int_{\Omega} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx = - Re^2 \psi \sigma^2 \lambda^2 \mu_0 R_{cp} \int_{\Omega} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\Omega} \omega r \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} v dx = \int_{\Omega} \frac{\omega_* \bar{\omega} (\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \rho_0 h_{*0} \sigma R_{cp} \theta}{\theta} \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx = \\
&= Re \bar{\omega} \mu_0 R_{cp} \sigma \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{\Omega} A r v dx = \int_{\Omega} \frac{\rho_0 h_{*0}}{\tau^*} (\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \bar{A} v \sigma R_{cp} \theta dx = \\
&= Re \frac{\mu_0 \sigma \theta R_{cp}}{\omega_* \tau^*} \int_{\Omega} \bar{A} (\sigma \bar{r} + 1) v dx = Re Sh \mu_0 R_{cp} \sigma \int_{\Omega} \bar{A} (\sigma \bar{r} + 1) v dx
\end{aligned}$$

После замены переменных имеем

$$\begin{aligned}
&Re \lambda^2 \sigma \mu_* R_{cp} \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dx + Re \sigma \mu_* R_{cp} \int_{\Omega} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\varphi}} dx = \\
&= - Re^2 \psi \sigma^2 \lambda^2 \mu_0 R_{cp} \int_{\Omega} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx + Re \bar{\omega} \mu_0 R_{cp} \sigma \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx + \\
&\quad + Re Sh \mu_0 R_{cp} \sigma \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A} v dx
\end{aligned}$$

Умножим обе части равенства на величину $\frac{1}{Re \sigma \mu_* R_{cp}}$

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dx + \int_{\Omega} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\varphi}} dx = \\
&= - Re \psi \sigma \lambda \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx + \bar{\omega} \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx + \\
&\quad + Sh \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A} v dx \quad (44)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям и получим безразмерный вид уравнения Рейнольдса

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left((\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left(\frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \right) = \\
& = -Re\psi\sigma\lambda^2 \frac{\mu_0}{\mu_*} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} + \bar{\omega} \frac{\mu_0}{\mu_*} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} + Sh \frac{\mu_0}{\mu_*} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A}. \quad (45)
\end{aligned}$$

2.2.3 Уравнение неразрывности

Перед преобразованием уравнения энергии рассмотрим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) = 0 \quad (46)$$

Умножим уравнение² на c , r и пробную функцию $v : v|_{\Gamma_R} = 0$, затем проинтегрируем получившееся уравнение по области Ω .

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial \rho}{\partial \tau} v r dx + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} (c r \rho V_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (c \rho \frac{V_\varphi}{r}) r + \frac{\partial}{\partial y} (c \rho V_y) r \right] v dx = 0$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} c \frac{\partial \rho}{\partial \tau} v r dx - \int_{\Omega} \left[(c \rho V_r) \frac{\partial v}{\partial r} + (c \rho \frac{V_\varphi}{r}) \frac{\partial v}{\partial \varphi} + (c \rho V_y) \frac{\partial v}{\partial y} \right] r dx + \\
& + \int_{\Gamma} \left[(c \rho V_r) \cos(\nu, r) + (c \rho \frac{V_\varphi}{r}) \cos(\nu, \varphi) + (c \rho V_y) \cos(\nu, y) \right] v r dx = 0
\end{aligned}$$

Обозначим

$$V = c \rho \begin{pmatrix} V_r \\ V_\varphi \\ r \\ V_y \end{pmatrix}, \quad \nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Уравнение приобретает вид

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial \rho}{\partial \tau} v r dx - \int_{\Omega} V \cdot \nabla v r dx + \int_{\Gamma} V \cdot \nu v r dx = 0.$$

²Поскольку c слабо зависит от температуры, будем полагать далее при выводе уравнений $c = const$

Произведём замену переменных согласно (2.1)

$$\begin{aligned} & \frac{c_0 \rho_0}{\tau^*} \int_{\Omega} \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{r}} v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx - \\ & - c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} \int_{\Omega} \bar{V} \cdot J^T \nabla v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx + \\ & + c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} \int_{\Gamma} \bar{V} \cdot \nu v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

2.2.4 Уравнение энергии в смазочном слое

Рассмотрим условие равенства температур и тепловых потоков (21).

Выполнено

$$-(Vt - K \nabla t) \cdot \nu = -K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu_{\partial}, \quad (48)$$

где

$$V = c\rho \begin{pmatrix} V_r \\ V_{\varphi} \\ r \\ V_y \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \frac{\lambda_M}{r^2} & & \\ & & & \lambda_M \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$K_{\partial} = \begin{pmatrix} \lambda_{\partial} & & & \\ & \frac{\lambda_{\partial}}{r^2} & & \\ & & & \lambda_{\partial} \end{pmatrix}, \quad (50)$$

ν — вектор нормали к границе смазочного слоя при $y = 0$, ν_{∂} — вектор нормали к границе диска при $y_{\partial} = H_{\partial}$.

Поскольку температуры на границе равны, то справедливо

$$-(Vt - K \nabla t) \cdot \nu + \omega_{\alpha \partial} t = -K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu_{\partial} + \omega_{\alpha \partial} T_{\partial},$$

здесь $\omega_{\alpha \partial}$ — некоторое вещественное число.

Если обозначить $g_{M\partial} = -K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu_{\partial} + \omega_{\alpha \partial} T_{\partial}$, то уравнение выше примет вид

$$-(Vt - K \nabla t) \cdot \nu + \omega_{\alpha \partial} t = g_{M\partial}, \quad r \in [R1, R2], \varphi \in [0, \theta], y = 0. \quad (51)$$

Повторяя рассуждения на границе смазочного слоя при $y = h$ получим

$$-(Vt - K \nabla t) \cdot \nu + \omega_{\alpha \Pi} t = g_{M\Pi}, \quad r \in [R1, R2], \varphi \in [0, \theta_{\Pi}], y = h. \quad (52)$$

Дополним уравнение (14) граничными условиями (51) и (52). Для удобства записи представим их в виде

$$-(Vt - K\nabla t) \cdot \nu + \omega_\alpha t = g_M, x \in \Gamma_{N3} \quad (53)$$

где Γ_{N3} — граница смазочного слоя, соприкасающаяся с диском и подушкой,

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \omega_{\alpha\partial}, y = 0 \\ \omega_{\alpha\Pi}, y = h \end{cases}, \quad g_M = \begin{cases} g_{M\partial}, y = 0 \\ g_{M\Pi}, y = h \end{cases}$$

Приведём уравнение энергии в смазочном слое (14) к безразмерному виду. Для этого умножим его на r и пробную функцию $v : v|_{\Gamma_R} = 0$, затем, проинтегрируем по области Ω .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} t + \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) v r dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} (c p r V_{rt}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{c \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) r + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \rho V_{yt} - \lambda_M \frac{\partial t}{\partial y} \right) r \right) v dx = \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right] v r dx \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} t + \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) v r dx - \\ - \int_{\Omega} \left(c p r V_{rt} + \left(\frac{c \rho}{r} V_\varphi t + - \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \left(c \rho V_{yt} - \lambda_M \frac{\partial t}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) r dx + \\ + \int_{\Gamma} \left(c p r V_{rt} + \frac{c \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} + c \rho V_{yt} - \lambda_M \frac{\partial t}{\partial y} \right) \cdot \nu v r dx = \\ = \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right] v r dx \end{aligned}$$

При обозначениях (49) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} t + \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) v r dx - \int_{\Omega} (Vt - K\nabla t) \cdot \nabla v r dx + \\ + \int_{\Gamma} (Vt - K\nabla t) \cdot \nu v r dx = \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right] v r dx \end{aligned}$$

Воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} t + \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) v r dx - \int_{\Omega} (V t - K \nabla t) \cdot \nabla v r dx - \\ & - \int_{\Gamma_{N3}} (g_M - \omega_{\alpha} t) v r dx. = \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right] v r dx \end{aligned}$$

Произведём замену переменных согласно (2.1). Для краткости $t = C_t \bar{t} + t_*$,

$$C_t = \frac{\mu_* \omega_* R_{cp}^2 \theta}{c_0 \rho_* h_{*0}^2}$$

$$\begin{aligned} & C_t \frac{c_0 \rho_0}{\tau^*} \int_{\Omega_M} \bar{c} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} \bar{t} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\tau}} \right) v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx - \\ & - C_t c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} \int_{\Omega_M} \left(\bar{V} \bar{t} - \frac{h_{*0}}{Pe} \bar{K} J^T \bar{\nabla} \bar{t} \right) \cdot J^T \bar{\nabla} v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx - \\ & - \int_{\Gamma_{N3}} \left(g_M - \omega_{\alpha} C_t \bar{t} - \omega_{\alpha} t_* \right) v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx + \\ & + \left[\frac{c_0 \rho_0}{\tau^*} \int_{\Omega_M} \bar{c} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx - \right. \\ & - c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} \int_{\Omega_M} \bar{V} \cdot J^T \bar{\nabla} v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx \pm \\ & \left. \pm c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} \int_{\Gamma} \bar{V} \cdot \nu v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx \right] t_* = \\ & = \frac{\omega_*^2 R_{cp}^2 \mu_0}{h_{*0}^2} \int_{\Omega_M} \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \bar{V}_{\varphi}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \frac{|J^{-1}|}{\bar{h}^2} dx, \end{aligned}$$

здесь

$$\bar{V} = \bar{c} \bar{\rho} \begin{pmatrix} \bar{V}_r \\ \bar{V}_{\varphi} \\ (\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \\ \bar{V}_y \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \bar{\lambda}_M & & \\ & & (\sigma \bar{r} + 1)^2 R_{cp}^2 & \\ & & & \bar{\lambda}_M \end{pmatrix}.$$

В силу равенства (47) и граничных условий для уравнения (14) слагаемое в квадратных скобках при t_* равно нулю. Имеем

$$\begin{aligned}
& C_t \frac{c_0 \rho_0}{\tau^*} \int_{\Omega} \bar{c} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\tau}} \bar{t} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\tau}} \right) v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx - \\
& - C_t c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp} \int_{\Omega} \left(\bar{V} \bar{t} - \frac{h_{*0}}{Pe} \bar{K} J^T \bar{\nabla} \bar{t} \right) \cdot J^T \bar{\nabla} v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx - \\
& - \int_{\Gamma_{N3}} (g_M - \omega_\alpha C_t \bar{t} - \omega_\alpha t_*) v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} |J^{-1}| dx = \\
& = \frac{\omega_*^2 R_{cp}^2 \mu_0}{h_{*0}^2} \int_{\Omega} \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] v(\sigma \bar{r} + 1) R_{cp} \frac{|J^{-1}|}{\bar{h}^2} dx,
\end{aligned}$$

Воспользуемся определением сопряжённой матрицы $u \cdot A^T v = Au \cdot v$, $\forall u, v$ и умножим обе части равенства на $1/(C_t c_0 \rho_0 \omega_* \sigma R_{cp}^4 \theta)$.

$$\int_{\Omega} b_M \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{t})}{\partial \bar{\tau}} v dx - \int_{\Omega} (\Upsilon_M \bar{t} - \kappa_M \bar{\nabla} \bar{t}) \cdot \nu v dx - \int_{\Gamma_{N3}} (\bar{g}_M - \sigma_M \bar{t}) v d\bar{u} dx = \int_{\Omega} f_M v dx \quad (54)$$

здесь

$$\begin{aligned}
b_M &= Sh \frac{\psi}{R_{cp}} \bar{c} \bar{h}(\sigma \bar{r} + 1) \\
\Upsilon &= \sigma \psi \lambda J \bar{V} \bar{h}(\sigma \bar{r} + 1) \quad \kappa = \sigma \psi \lambda \frac{h_{*0}}{Pe} J \bar{K} J^T \bar{h}(\sigma \bar{r} + 1) \\
f_M &= \frac{\omega_*^2 R_{cp}^2 \mu_0}{Pe \lambda_{M0} C_t} \bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] \frac{(\sigma \bar{r} + 1)}{\bar{h}} \\
\sigma_M &= \frac{\omega_\alpha}{c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp}^2} (\sigma \bar{r} + 1), \quad \bar{g}_M = \frac{g_M - \omega_\alpha t_*}{C_t c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp}^2} (\sigma \bar{r} + 1).
\end{aligned}$$

Обратными преобразованиями получим уравнение в дивергентном виде

$$b_M \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{t})}{\partial \bar{\tau}} + \operatorname{div}(\Upsilon_M \bar{t} - \kappa_M \bar{\nabla} \bar{t}) = f_M, \quad (55)$$

с граничными условиями на границе по y

$$-(\Upsilon_M \bar{t} - \kappa_M \bar{\nabla} \bar{t}) \cdot \nu + \sigma_{M\partial} \bar{t} = \bar{g}_{M\partial}, \quad \bar{y} = 0, \quad (56)$$

$$-(\Upsilon_M \bar{t} - \kappa_M \bar{\nabla} \bar{t}) \cdot \nu + \sigma_{M\Pi} \bar{t} = \bar{g}_{M\Pi}, \quad \bar{y} = 1, \quad (57)$$

здесь $\sigma_{M\partial} = \sigma_M|_{\bar{y}=0}$, $\bar{g}_{M\partial} = \bar{g}_M|_{\bar{y}=0}$, $\sigma_{M\Pi} = \sigma_M|_{\bar{y}=1}$, $\bar{g}_{M\Pi} = \bar{g}_M|_{\bar{y}=1}$.

2.2.5 Уравнение энергии в упорном диске

Рассмотрим условие равенства температур и тепловых потоков (29).

Выполнено

$$K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu_{\partial} = (Vt - K \nabla t) \cdot \nu.$$

Выполняя действия аналогичные пункту (2.2.4) получим граничное условие для уравнения (26)

$$K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu_{\partial} + \omega_{\alpha \partial} T_{\partial} = g_{\partial M}, \quad x \in \Gamma_{\partial M} \quad (58)$$

где $\Gamma_{\partial M}$ — граница диска прилегающая к смазочному слою, $g_{\partial M} = (Vt - K \nabla t) \cdot \nu + \omega_{\alpha \partial} t$.

Условия (30) — (32), для краткости, представим в виде

$$K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu_{\partial} + \alpha_{\partial z} T_{\partial} = \alpha_{\partial z} T_a, \quad x \in \Gamma_{\partial z}, \quad (59)$$

где $\Gamma_{\partial z}$ — граница диска не соприкасающаяся со смазочным слоем,

$$\alpha_{\partial z} = \begin{cases} \alpha_{T_{\partial} R_1}, & r = R_1 \\ \alpha_{T_{\partial} R_2}, & r = R_2 \\ \alpha_{T_{\partial} 0}, & y_{\partial} = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Приведём уравнение энергии в диске (26) к безразмерному виду. Для этого умножим его на r и пробную функцию v , затем проинтегрируем по области $\Omega = L_4$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c_{\partial} \rho_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \tau} v r dx + \int_{\Omega} c_{\partial} \rho_{\partial} \omega \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi} v r dx - \\ & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\lambda_{\partial}}{r^2} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi} \right) r + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y} \right) r \right] v dx = 0 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} c_{\partial} \rho_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \tau} v r dx - \int_{\Omega} c_{\partial} \rho_{\partial} \omega T_{\partial} \frac{\partial v}{\partial \varphi} r dx + \\ & + \int_{\Omega} \left[\lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\lambda_{\partial}}{r^2} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] r dx + \int_{\Gamma} c_{\partial} \rho_{\partial} \omega T_{\partial} \cos(\nu, \varphi) v r dx - \\ & - \int_{\Gamma} \left[\lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial r} \cos(r, \nu) + \frac{\lambda_{\partial}}{r^2} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \varphi} \cos(\varphi, \nu) + \lambda_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial y} \cos(y, \nu) \right] v r dx = 0 \end{aligned}$$

За счёт равенства температур и тепловых потоков по направлению φ , интегралы на границах по φ взаимоуничтожаются.

Обозначим

$$V_{\partial} = c_{\partial}\rho_{\partial} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega r}{r} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

При этих обозначениях уравнение примет вид

$$\int_{\Omega} c_{\partial}\rho_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \tau} v r dx - \int_{\Omega} (V_{\partial} T_{\partial} - K_{\partial} \nabla T_{\partial}) \cdot \nabla v r dx - \int_{\Gamma} (K_{\partial} \nabla T_{\partial} \cdot \nu) v r dx = 0$$

Воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{\partial}\rho_{\partial} \frac{\partial T_{\partial}}{\partial \tau} v r dx - \int_{\Omega} (V_{\partial} T_{\partial} - K_{\partial} \nabla T_{\partial}) \cdot \nabla v r dx - \\ - \int_{\Gamma_{\partial 3}} \alpha_{\partial 3} (T_a - T_{\partial}) v r dx - \int_{\Gamma_{\partial M}} (g_{\partial M} - \omega_{\alpha \partial} T_{\partial}) v r dx = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Произведём замену переменных согласно (2.1). Поскольку t_* — константа, то производные от неё будут обращаться в ноль. Следовательно, в слагаемых, где температура находится под знаком производной останется коэффициент при \bar{T}_{∂} .

Учтём, что

$$\int_{\Omega} V_{\partial} t_* \cdot \nabla v r dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(V_{\partial} t_*) v r dx + \int_{\Gamma} V_{\partial} t_* \cdot \nu v r dx = 0.$$

Умножим обе части равенства (62) после преобразований на

$$\frac{1}{C_t c_0 \rho_0 \omega_* \sigma R_{cp}^4 \theta}$$

и объединим коэффициенты.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\partial}} b_{\partial} \frac{\partial \bar{T}_{\partial}}{\partial \bar{\tau}} v dx - \int_{\Omega_{\partial}} (\Upsilon_{\partial} \bar{T}_{\partial} - \kappa_{\partial} \bar{\nabla} \bar{T}_{\partial}) \cdot \bar{\nabla} v dx - \\ - \int_{\Gamma_{\partial 3}} (\bar{T}_a - \sigma_{\partial 3} \bar{T}_{\partial}) v dx - \int_{\Gamma_{\partial M}} (\bar{g}_{\partial M} - \sigma_{M \partial} \bar{T}_{\partial}) v dx = 0, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{\partial} &= Sh \frac{\psi_{\partial}}{R_{cp}} \bar{c}_{\partial} \bar{\rho}_{\partial} (\sigma \bar{r} + 1) \\
\Upsilon_{\partial} &= \frac{\sigma \psi_{\partial} \lambda}{R_{cp}} J_{\partial} \bar{V}_{\partial} (\sigma \bar{r} + 1), \quad \kappa_{\partial} = \sigma \psi_{\partial} \lambda \frac{H_{\partial}}{Pe_{\partial}} J_{\partial} \bar{K}_{\partial} J_{\partial}^T (\sigma \bar{r} + 1) \\
\sigma_{m\partial} &= \frac{\omega_{\alpha\partial}}{c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp}^2} (\sigma \bar{r} + 1), \quad \bar{g}_{\partial m} = \frac{g_{\partial m} - \omega_{\alpha\partial} t_*}{C_t c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp}^2} (\sigma \bar{r} + 1) \\
\sigma_{\partial 3} &= C_{\partial 3} (\sigma \bar{r} + 1) \quad \bar{T}_a = \frac{T_a - t_*}{C_t} (\sigma \bar{r} + 1) \\
C_{\partial 3} &= \begin{cases} \frac{Nu_{\partial R1} \psi_{\partial}^2 \lambda}{Pe_{\partial} R_{cp}}, & \bar{r} = -1 \\ \frac{Nu_{\partial R2} \psi_{\partial}^2 \lambda}{Pe_{\partial} R_{cp}}, & \bar{r} = +1 \\ \frac{Nu_{\partial 0} \psi_{\partial}}{Pe_{\partial} R_{cp}}, & \bar{y}_{\partial} = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Обратными преобразованиями получим уравнение в дивергентном виде

$$b_{\partial} \frac{\partial \bar{T}_{\partial}}{\partial \bar{r}} + \operatorname{div}(\Upsilon_{\partial} \bar{T}_{\partial} - \kappa_{\partial} \bar{\nabla} \bar{T}_{\partial}) = 0 \quad (64)$$

с граничными условиями

$$-(\Upsilon_{\partial} \bar{T}_{\partial} - \kappa_{\partial} \bar{\nabla} \bar{T}_{\partial}) \cdot \nu + \sigma_{\partial 3} \bar{T}_{\partial} = \bar{T}_a, \quad x \in \Gamma_{\partial 3} \quad (65)$$

$$-(\Upsilon_{\partial} \bar{T}_{\partial} - \kappa_{\partial} \bar{\nabla} \bar{T}_{\partial}) \cdot \nu + \sigma_{m\partial} \bar{T}_{\partial} = \bar{g}_{\partial m}, \quad x \in \Gamma_{\partial m} \quad (66)$$

2.2.6 Уравнение энергии в подушке

Рассмотрим условие равенства температур и тепловых потоков (37).

Выполнено

$$K_{\Pi} \nabla T_{\Pi} \cdot \nu_{\Pi} = (Vt - K \nabla t) \cdot \nu,$$

где

$$K_{\Pi} = \begin{pmatrix} \lambda_{\Pi} & & \\ & \frac{\lambda_{\Pi}}{r^2} & \\ & & \lambda_{\Pi} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

Выполняя действия аналогичные пункту (2.2.4) получим граничное условие для уравнения (34)

$$K_{\Pi} \nabla T_{\Pi} \cdot \nu_{\Pi} + \omega_{\alpha\Pi} T_{\Pi} = g_{\Pi m}, \quad x \in \Gamma_{\Pi, m}, \quad (68)$$

где $g_{\text{пм}} = (Vt - K\nabla t) \cdot \nu + \omega_{\alpha\text{п}}t$, $\Gamma_{\text{п,м}}$ — граница подушки, прилегающая к смазочному слою.

Условия (38) — (42), для краткости, представим в виде

$$K_{\text{п}} \nabla T_{\text{п}} \cdot \nu_{\text{п}} + \alpha_{\text{п3}} T_{\text{п}} = \alpha_{\text{п3}} T_{\text{п3}}, \quad x \in \Gamma_{\text{п3}}, \quad (69)$$

где $\Gamma_{\text{п3}}$ — граница подушки не соприкасающаяся со смазочным слоем,

$$\alpha_{\text{п3}} = \begin{cases} \alpha_{T_{\text{п}}R_1}, & r = R_1 \\ \alpha_{T_{\text{п}}R_2}, & r = R_2 \\ \alpha_{T_{\text{п}}0}, & \varphi = 0 \\ \alpha_{T_{\text{п}}\theta_{\text{п}}}, & \varphi = \theta_{\text{п}} \\ \alpha_{T_{\text{п}}H_{\text{п}}}, & y_{\text{п}} = H_{\text{п}} \end{cases}, \quad T_{\text{п3}} = \begin{cases} T_{a2}, & r = R_1 \\ T_{a3}, & r = R_2 \\ T_{a1}, & \varphi = 0, \theta_{\text{п}} \\ T_{a4}, & y_{\text{п}} = H_{\text{п}} \end{cases} \quad (70)$$

Приведём уравнение энергии в подушке (34) к безразмерному виду. Для этого умножим его на r и пробную функцию v , затем проинтегрируем по области $\Omega = L_3$

$$\int_{\Omega} c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \tau} v r dx - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\lambda_{\text{п}}}{r^2} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \varphi} \right) r + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial y} \right) r \right] v dx = 0$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \tau} v r dx + \int_{\Omega} \left[\lambda_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\lambda_{\text{п}}}{r^2} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \lambda_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] r dx - \int_{\Gamma} \left[\lambda_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial r} \cos(r, \nu) + \frac{\lambda_{\text{п}}}{r^2} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \varphi} \cos(\varphi, \nu) + \lambda_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial y} \cos(y, \nu) \right] v r dx = 0$$

В обозначениях (67)—(70) уравнение примет вид

$$\int_{\Omega} c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \tau} v r dx + \int_{\Omega} (K_{\text{п}} \nabla T_{\text{п}} \cdot \nabla v) r dx - \int_{\Gamma} (K_{\text{п}} \nabla T_{\text{п}} \cdot \nu) v r dx = 0$$

Воспользуемся граничными условиями

$$\int_{\Omega} c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} \frac{\partial T_{\text{п}}}{\partial \tau} v r dx + \int_{\Omega} (K_{\text{п}} \nabla T_{\text{п}} \cdot \nabla v) r dx - \int_{\Gamma_{\text{пм}}} (g_{\text{пм}} - \omega_{\alpha\text{п}} T_{\text{п}}) v r dx - \int_{\Gamma_{\text{п3}}} \alpha_{\text{п3}} (T_{\text{п3}} - T_{\text{п}}) v r dx = 0$$

Произведём замену переменных согласно (2.1). Поскольку t_* — константа, то производные от неё будут обращаться в ноль. Следовательно, в слагаемых, где температура находится под знаком производной останется коэффициент при \bar{T}_Π .

Умножим обе части равенства на $1/(C_t c_0 \rho_0 \omega_* \sigma R_{cp}^4 \theta)$ и объединим коэффициенты.

$$\int_{\Omega_\Pi} b_\Pi \frac{\partial \bar{T}_\Pi}{\partial \bar{\tau}} v dx + \int_{\Omega_\Pi} \kappa_\Pi \bar{\nabla} \bar{T}_\Pi \cdot \bar{\nabla} v dx - \int_{\Gamma_{\Pi M}} (\bar{g}_{\Pi M} - \sigma_{\Pi M} \bar{T}_\Pi) v dx - \int_{\Gamma_{\Pi 3}} (\bar{T}_{\Pi 3} - \sigma_{\Pi 3} \bar{T}_\Pi) v dx = 0, \quad (71)$$

где

$$b_\Pi = Sh \frac{\psi_\Pi}{R_{cp}} \bar{c}_\Pi \bar{\rho}_\Pi (\sigma \bar{r} + 1), \quad \kappa_\Pi = \sigma \psi_\Pi \lambda \frac{H_\Pi}{Pe_\Pi} J_\Pi \bar{K}_\Pi J_\Pi^{-1} (\sigma \bar{r} + 1),$$

$$\sigma_{\Pi M} = \frac{\omega_{\alpha \Pi}}{c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp}^2} (\sigma \bar{r} + 1) \quad \bar{g}_{\Pi M} = \frac{(g_{\Pi M} - \omega_{\alpha \Pi} t_*)}{C_t c_0 \rho_0 \omega_* R_{cp}^2} (\sigma \bar{r} + 1)$$

$$\sigma_{\Pi 3} = C_{\Pi 3} (\sigma \bar{r} + 1) \quad \bar{T}_{\Pi 3} = \frac{(T_{\Pi 3} - t_*)}{C_t} C_{\Pi 3} (\sigma \bar{r} + 1)$$

$$C_{\Pi 3} = \begin{cases} \frac{Nu_{\Pi R_1} \psi_\Pi^2 \lambda}{Pe_\Pi R_{cp}}, & \bar{r} = -1 \\ \frac{Nu_{\Pi R_2} \psi_\Pi^2 \lambda}{Pe_\Pi R_{cp}}, & \bar{r} = +1 \\ \frac{Nu_{\Pi \varphi_0} \psi_\Pi^2}{Pe_\Pi}, & \bar{\varphi} = 0 \\ \frac{Nu_{\Pi \theta_\Pi} \psi_\Pi^2}{Pe_\Pi}, & \bar{\varphi} = \bar{\theta}_\Pi \\ \frac{Nu_{\Pi H_\Pi} \psi_\Pi}{Pe_\Pi R_{cp}}, & \bar{y}_\Pi = 1 \end{cases} \quad (72)$$

Обратными преобразованиями получим уравнение в дивергентном виде

$$b_\Pi \frac{\partial \bar{T}_\Pi}{\partial \bar{\tau}} - \text{div}(\kappa_\Pi \bar{\nabla} \bar{T}_\Pi) = 0, \quad (73)$$

с граничными условиями

$$\kappa_\Pi \bar{\nabla} \bar{T}_\Pi \cdot \nu_\Pi + \sigma_{\Pi M} \bar{T}_\Pi = \bar{g}_{\Pi M}, \quad x \in \Gamma_{\Pi M}, \quad (74)$$

$$\kappa_\Pi \bar{\nabla} \bar{T}_\Pi \cdot \nu_\Pi + \sigma_{\Pi 3} \bar{T}_\Pi = \bar{T}_{\Pi 3}, \quad x \in \Gamma_{\Pi 3}. \quad (75)$$

3 Построение сеточных аппроксимаций уравнений и методы их решения

3.1 Построение расчётных областей

Для решения для уравнений (44), (54), (71), (63), требуется ввести разбиения в подушке, диске и смазочном слое.

На отрезке $[0, \bar{\theta}]$ построим кусочно-равномерную сетку ω_φ с шагами $h_\varphi = h_{\varphi,к}$ на $[0, \bar{\theta}_к]$, $h_\varphi = h_{\varphi,п}$ — на $[\bar{\theta}_к, \bar{\theta}_п]$ и $h_\varphi = h_{\varphi,мпк}$ в межподушечном канале $[\bar{\theta}_п, \bar{\theta}]$.

На отрезке $[-1, 1]$ построим равномерную сетку ω_r с шагом h_r .

В области Ω_{Re} построим прямоугольное разбиение $\mathcal{T}_{h,Re}$. Для этого разобьём область её прямыми, параллельными осям r и φ , исходящих из указанных выше точек одномерных сеток, лежащих в Ω_{Re} . Вершины этого разбиения обозначим через ω_{Re} .

В области $\Omega_п$ введём прямоугольное разбиение $\mathcal{T}_{h,п}$ с вершинами в точках сетки $\omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_{y_п}$, где $\omega_{y_п}$ равномерная сетка с шагом $h_{y_п}$ на отрезке $[0, 1]$.

Аналогично разобьём область Ω_∂ , введя прямоугольное разбиение $\mathcal{T}_{h,\partial}$ с вершинами в точках сетки $\omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_{y_\partial}$, где ω_{y_∂} равномерная сетка с шагом h_{y_∂} на отрезке $[0, 1]$.

Также, разобьём область $\Omega_м$, введя прямоугольное разбиение $\mathcal{T}_{h,м}$ с вершинами в точках сетки $\omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_{y_м}$, где $\omega_{y_м}$ равномерная сетка с шагом $h_{y_м}$ на отрезке $[0, 1]$.

Обозначим $N_r, N_{rRe}, N_\varphi, N_y, N_{y_п}, N_{y_\partial}$ количество точек разбиения $\omega_r, \omega_{Re}, \omega_\varphi, \omega_{y_м}, \omega_{y_п}$ и ω_{y_∂} , соответственно.

3.2 Построение разностной схемы методом сумматорных тождеств для уравнения Рейнольдса

Для решения уравнения (44) с краевыми условиями (4), воспользуемся методом сумматорных тождеств (см. [7]).

Умножим обе части равенства (44) на пробную функцию $v \in V_{0,Re} = \{\eta = \eta(x), x = (r, \varphi) \in \Omega_{Re} : \eta = 0, \text{ при } r = -1, r = +1\}$ и проинтегри-

руем по области Ω_{Re} :

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 \int_{\Omega_{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left((\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) v dx - \int_{\Omega_{Re}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \right) v dx = \\
& = -Re\psi\sigma\lambda \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx + \\
& + \bar{\omega} \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx + Sh \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A} v dx. \quad (76)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dx - \int_{\Gamma_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} v \cos(\nu, \bar{r}) dx + \\
& + \int_{\Omega_{Re}} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\varphi}} dx - \int_{\Gamma_{Re}} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} v \cos(\nu, \bar{\varphi}) dx = \\
& = -Re\psi\sigma\lambda \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx + \\
& + \bar{\omega} \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx + Sh \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A} v dx \quad (77)
\end{aligned}$$

Поскольку, пробная функция v на границе при $\bar{r} = -1$ и $\bar{r} = +1$ равна нулю, равна нулю и нормальная производная давления при $\bar{\varphi} = 0$ и $\bar{\varphi} = \bar{\theta}_{II}$, то тождество (77) приобретает вид

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} dx + \int_{\Omega_{Re}} \frac{\bar{h}^3}{(\sigma \bar{r} + 1)} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\varphi}} dx = \\
& = -Re\psi\sigma\lambda \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} \frac{\partial(\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} v dx + \\
& + \bar{\omega} \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial(\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} v dx + Sh \frac{\mu_0}{\mu_*} \int_{\Omega_{Re}} (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A} v dx \quad (78)
\end{aligned}$$

Пусть $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{Re}$. Пусть $\gamma_{R_1}, \gamma_{R_2}, \gamma_{\varphi_0}, \gamma_{\theta_n}$ обозначают множества граничных точек, выходящих на части границ $\bar{r} = -1, \bar{r} = +1, \bar{\varphi} = 0$ и $\bar{\varphi} = \bar{\theta}_n$ и $\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus (\gamma_{R_1} \cup \gamma_{R_2} \cup \gamma_{\varphi_0} \cup \gamma_{\theta_n})$.

Обозначим через $N_r + 1, N_\varphi + 1$ количества точек по соответствующим направлениям на сетке $\bar{\omega}_h$, $f_{k,i,j} = \bar{f}_k(x_{i,j}), k = 1, 2, 3, h_{i,j} = \bar{h}(x_{i,j}), A_{i,j} = \bar{A}(x_{i,j}), p_{i,j} = \bar{p}(x_{i,j}), v_{i,j} = v(x_{i,j}),$ для $\forall i, j : x_{i,j} = (r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}_h$. Шаги сеток обозначим $h_{r,k} = r_{k+1} - r_k, h_{\varphi,l} = \varphi_{l+1} - \varphi_l$ и

$$\bar{h}_{r,k} = \begin{cases} h_{r,0}/2 & , k = 0; \\ (h_{r,k} - h_{r,k-1})/2 & , k = 1, \dots, N_r - 1; \\ h_{r,N_r-1} & , k = N_r. \end{cases}$$

Введём сеточные скалярные произведения в соответствии с [7].

Положим

$$\begin{aligned} y_{r,k,l} &= (y_{k+1,l} - y_{k,l})/h_{r,k}, \\ y_{\bar{r},k,l} &= (y_{k,l} - y_{k-1,l})/h_{r,k-1}, \\ y_{\hat{r},k,l} &= (y_{k+1,l} - y_{k,l})/\bar{h}_{r,k}, \\ y_{\tilde{r},k,l} &= (y_{k+1,l} - y_{k-1,l})/\bar{h}_{r,k}. \end{aligned}$$

Аппроксимируем интегралы (78) квадратурной формулой трапеций

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N_r-1} h_{r,i} \left(\sum_{j=0}^{N_\varphi-1} h_{\varphi,j} \left[\lambda^2(\sigma r_i + 1) h_{i,j}^3 f_{0,i,j} p_{r,i,j} v_{r,i,j} + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{h_{i,j}^3}{(\sigma r_i + 1)} f_{0,i,j} p_{\varphi,i,j} v_{\varphi,i,j} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{N_\varphi} h_{\varphi,j-1} \left[\lambda^2(\sigma r_i + 1) h_{i,j}^3 f_{0,i,j} p_{r,i,j} v_{r,i,j} + \frac{h_{i,j}^3}{(\sigma r_i + 1)} f_{0,i,j} p_{\bar{\varphi},i,j} v_{\bar{\varphi},i,j} \right] \right) + \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_r} h_{r,i-1} \left(\sum_{j=0}^{N_\varphi-1} h_{\varphi,j} \left[\lambda^2(\sigma r_i + 1) h_{i,j}^3 f_{0,i,j} p_{\bar{r},i,j} v_{\bar{r},i,j} + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{h_{i,j}^3}{(\sigma r_i + 1)} f_{0,i,j} p_{\varphi,i,j} v_{\varphi,i,j} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{N_\varphi} h_{\varphi,j-1} \left[\lambda^2(\sigma r_i + 1) h_{i,j}^3 f_{0,i,j} p_{\bar{r},i,j} v_{\bar{r},i,j} + \frac{h_{i,j}^3}{(\sigma r_i + 1)} f_{0,i,j} p_{\bar{\varphi},i,j} v_{\bar{\varphi},i,j} \right] \right) + \\
& \approx \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N_r-1} h_{r,i} \left(\sum_{j=0}^{N_\varphi-1} h_{\varphi,j} \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_i + 1) (hf_2)_{\varphi,i,j} - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{r,i,j} + Sh(\sigma r_i + 1) A_{i,j} \right] v_{i,j} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{j=1}^{N_\varphi} h_{\varphi,j-1} \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_i + 1) (hf_2)_{\bar{\varphi},i,j} - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{r,i,j} + Sh(\sigma r_i + 1) A_{i,j} \right] v_{i,j} \right) + \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N_r} h_{r,i-1} \left(\sum_{j=0}^{N_\varphi-1} h_{\varphi,j} \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_i + 1) (hf_2)_{\varphi,i,j} - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\bar{r},i,j} + Sh(\sigma r_i + 1) A_{i,j} \right] v_{i,j} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{j=1}^{N_\varphi} h_{\varphi,j-1} \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_i + 1) (hf_2)_{\bar{\varphi},i,j} - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\bar{r},i,j} + Sh(\sigma r_i + 1) A_{i,j} \right] v_{i,j} \right) \quad (79)
\end{aligned}$$

В качестве функции v выберем сеточный аналог δ функции, сосредото-

точной в точке $x_{k,l} = (r_k, \varphi_l)$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_{k,l}; \\ \frac{1}{\bar{h}_{r,k}\bar{h}_{\varphi,l}}, & x = x_{k,l}. \end{cases}$$

Обозначив $\delta_{k,l} = \frac{1}{\bar{h}_{r,k}\bar{h}_{\varphi,l}}$, выпишем направленные разности для функции v

$$v_r(x) = \begin{cases} -\frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{r,k}}, & x = x_{k,l}; \\ \frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{r,k-1}}, & x = x_{k-1,l}. \end{cases} \quad v_{\bar{r}}(x) = \begin{cases} \frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{r,k-1}}, & x = x_{k,l}; \\ -\frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{r,k}}, & x = x_{k+1,l}. \end{cases}$$

$$v_\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{\varphi,k}}, & x = x_{k,l}; \\ \frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{\varphi,k-1}}, & x = x_{k,l-1}. \end{cases} \quad v_{\bar{\varphi}}(x) = \begin{cases} \frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{\varphi,k-1}}, & x = x_{k,l}; \\ -\frac{\delta_{k,l}}{\bar{h}_{\varphi,k}}, & x = x_{k,l+1}. \end{cases}$$

Таким образом, для выбранной функции v , выражение (79) в точке $x = x_{k,l} \in \omega_h$ примет вид

$$\begin{aligned} & - (ap_{\bar{r}})_{\hat{r},k,l} - (bp_{\bar{\varphi}})_{\hat{\varphi},k,l} \approx \\ & \approx \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\hat{\varphi},k,l} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\hat{r},k,l} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,l} \right], \end{aligned} \quad (80)$$

где

$$(hf_2)_{\hat{\varphi},k,l} = \frac{(hf_2)_{k,l+1} - (hf_2)_{k,l-1}}{\bar{h}_{\varphi,l}}, \quad (hf_1)_{\hat{r},k,l} = \frac{(hf_1)_{k+1,l} - (hf_1)_{k-1,l}}{\bar{h}_{r,k}},$$

$$a_{k,l} = \lambda^2 \frac{(\sigma r_{k-1} + 1)(hf_0)_{k-1,l} + (\sigma r_k + 1)(hf_0)_{k,l}}{2},$$

$$b_{k,l} = \frac{(h^3 f_0)_{k,l-1} + (h^3 f_0)_{k,l}}{2(\sigma r_k + 1)},$$

Подобным образом для $x \in \gamma_{\varphi_0}$ получим

$$\begin{aligned} & - (ap_{\bar{r}})_{\hat{r},k,0} - b_{k,1}p_{\varphi,k,0} \frac{1}{\bar{h}_{\varphi,0}} \approx \\ & \approx \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\varphi,k,0} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\hat{r},k,0} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,0} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

и для $x \in \gamma_{\theta_n}$

$$\begin{aligned} & - (ap_{\bar{r}})_{\hat{r},k,N_p} - b_{k,N_p}p_{\varphi,k,N_p} \frac{1}{\bar{h}_{\varphi,N_p}} \approx \\ & \approx \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\varphi,k,N_p} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\hat{r},k,N_p} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,N_p} \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Сеточный аналог функции давления p обозначим через p^h , $f_0 - f_0^h$, $f_1 - f_1^h$, $f_2 - f_2^h$, $h - h^h$, $A - A^h$. Тогда, (80), (81), (82) примут вид для $x = x_{k,l} \in \omega_h$:

$$\begin{aligned} & - (ap_{\bar{r}}^h)_{\hat{r},k,l} - (bp_{\bar{\varphi}}^h)_{\hat{\varphi},k,l} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(h^h f_2^h)_{\hat{\varphi},k,l} - Re\psi\sigma\lambda(h^{h^3} f_1^h)_{\bar{r},k,l} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,l}^h \right], \end{aligned} \quad (83)$$

для $x \in \gamma_{\varphi_0}$:

$$\begin{aligned} & - (ap_{\bar{r}}^h)_{\hat{r},k,0} - b_{k,1}p_{\varphi,k,0}^h \frac{1}{\bar{h}_{\varphi,0}} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(h^h f_2^h)_{\varphi,k,0} - Re\psi\sigma\lambda(h^{h^3} f_1^h)_{\bar{r},k,0} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,0}^h \right] \end{aligned} \quad (84)$$

и для $x \in \gamma_{\theta_n}$

$$\begin{aligned} & - (ap_{\bar{r}}^h)_{\hat{r},k,N_p} - b_{k,N_p}p_{\varphi,k,N_p}^h \frac{1}{\bar{h}_{\varphi,N_p}} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(h^h f_2^h)_{\varphi,k,N_p} - Re\psi\sigma\lambda(h^{h^3} f_1^h)_{\bar{r},k,N_p} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,N_p}^h \right]. \end{aligned} \quad (85)$$

Для удобства, левую часть равенства (83) запишем в виде ³

$$\begin{aligned} & a_{k,l} \frac{p_{k,l} - p_{k-1,l}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} + a_{k+1,l} \frac{p_{k+1,l} - p_{k,l}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} + b_{k,l} \frac{p_{k,l} - p_{k,l-1}}{h_{\varphi,l-1}\bar{h}_{\varphi,l}} + b_{k,l+1} \frac{p_{k,l+1} - p_{k,l}}{h_{\varphi,l}\bar{h}_{\varphi,l}} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(h f_2)_{\hat{\varphi},k,l} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\bar{r},k,l} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,l} \right], \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{k,l}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} + \frac{a_{k+1,l}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} + \frac{b_{k,l}}{h_{\varphi,l-1}\bar{h}_{\varphi,l}} + \frac{b_{k,l+1}}{h_{\varphi,l}\bar{h}_{\varphi,l}} \right) p_{k,l} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(h f_2)_{\hat{\varphi},k,l} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\bar{r},k,l} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,l} \right] + \\ & + \frac{a_{k,l}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} p_{k-1,l} + \frac{a_{k+1,l}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} p_{k+1,l} + \frac{b_{k,l}}{h_{\varphi,l-1}\bar{h}_{\varphi,l}} p_{k,l-1} + \frac{b_{k,l+1}}{h_{\varphi,l}\bar{h}_{\varphi,l}} p_{k,l+1}. \end{aligned} \quad (87)$$

³Всюду далее, там, где это не вызывает недоразумений, будем использовать безындексные обозначения для сеточных функций, опуская индекс h

Аналогично, для (84), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{k,0}}{h_{r,k-1}\tilde{h}_{r,k}} + \frac{a_{k+1,0}}{h_{r,k}\tilde{h}_{r,k}} + \frac{b_{k,1}}{h_{\varphi,0}\tilde{h}_{\varphi,0}} \right) p_{k,0} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\varphi,k,0} - \text{Re}\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\tilde{r},k,0} + \text{Sh}(\sigma r_k + 1)A_{k,0} \right] + \\ & \quad + \frac{a_{k,0}}{h_{r,k-1}\tilde{h}_{r,k}} p_{k-1,0} + \frac{a_{k+1,0}}{h_{r,k}\tilde{h}_{r,k}} p_{k+1,0} + \frac{b_{k,1}}{h_{\varphi,0}\tilde{h}_{\varphi,k}} p_{k,1} \quad (88) \end{aligned}$$

и для (85):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_{k,N_\varphi}}{h_{r,k-1}\tilde{h}_{r,k}} + \frac{a_{k+1,N_\varphi}}{h_{r,k}\tilde{h}_{r,k}} + \frac{b_{k,N_\varphi}}{h_{\varphi,N_\varphi-1}\tilde{h}_{\varphi,N_\varphi}} \right) p_{k,N_\varphi} = \\ & = \frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\varphi,k,N_p} - \text{Re}\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\tilde{r},k,N_p} + \text{Sh}(\sigma r_k + 1)A_{k,N_p} \right] + \\ & \quad + \frac{a_{k,N_\varphi}}{h_{r,k-1}\tilde{h}_{r,k}} p_{k-1,N_\varphi} + \frac{a_{k+1,N_\varphi}}{h_{r,k}\tilde{h}_{r,k}} p_{k+1,N_\varphi} + \frac{b_{k,N_\varphi}}{h_{\varphi,N_\varphi-1}\tilde{h}_{\varphi,N_\varphi}} p_{k,N_\varphi-1}. \quad (89) \end{aligned}$$

Для решения (87), (88), (89) воспользуемся методом релаксации с параметром $w \in (0, 2)$ (см. Приложение А). Пусть $\overset{0}{p}$ — заданное начальное приближение. Приближения $\overset{k}{p}$ для $k = 0, 1, \dots$ определяем по рекуррентной формуле ($p = \overset{k}{p}$, $\hat{p} = \overset{k+1}{p}$) для $x \in \omega_h$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k,l} = & (1 - w)p_{k,l} + w \left(\frac{\mu_0}{\mu_*} \left[\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\tilde{\varphi},k,l} - \text{Re}\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\tilde{r},k,l} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{Sh}(\sigma r_k + 1)A_{k,l} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{a_{k,l}}{h_{r,k-1}\tilde{h}_{r,k}} p_{k-1,l} + \frac{a_{k+1,l}}{h_{r,k}\tilde{h}_{r,k}} p_{k+1,l} + \frac{b_{k,l}}{h_{\varphi,l-1}\tilde{h}_{\varphi,l}} p_{k,l-1} + \frac{b_{k,l+1}}{h_{\varphi,l}\tilde{h}_{\varphi,k}} p_{k,l+1} \right) / \\ & / \left(\frac{a_{k,l}}{h_{r,k-1}\tilde{h}_{r,k}} + \frac{a_{k+1,l}}{h_{r,k}\tilde{h}_{r,k}} + \frac{b_{k,l}}{h_{\varphi,l-1}\tilde{h}_{\varphi,l}} + \frac{b_{k,l+1}}{h_{\varphi,l}\tilde{h}_{\varphi,l}} \right), \quad (90) \end{aligned}$$

для $x \in \gamma_{\varphi_0}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k,0} = & (1-w)p_{k,0} + w \left(\frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\varphi,k,0} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\tilde{r},k,0} + \right. \right. \\ & \left. \left. + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,0} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{a_{k,0}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} p_{k-1,0} + \frac{a_{k+1,0}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} p_{k+1,0} + \frac{b_{k,1}}{h_{\varphi,0}\bar{h}_{\varphi,k}} p_{k,1} \right) / \\ & / \left(\frac{a_{k,0}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} + \frac{a_{k+1,0}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} + \frac{b_{k,1}}{h_{\varphi,0}\bar{h}_{\varphi,0}} \right) \quad (91) \end{aligned}$$

и для $x \in \gamma_{\theta_{\Pi}}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k,N_\varphi} = & (1-w)p_{k,N_\varphi} + \\ & + w \left(\frac{\mu_0}{\mu_*} \left[2\bar{\omega}(\sigma r_k + 1)(hf_2)_{\varphi,k,N_\varphi} - Re\psi\sigma\lambda(h^3 f_1)_{\tilde{r},k,N_\varphi} + Sh(\sigma r_k + 1)A_{k,N_\varphi} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{a_{k,N_\varphi}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} p_{k-1,N_\varphi} + \frac{a_{k+1,N_\varphi}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} p_{k+1,N_\varphi} + \frac{b_{k,N_\varphi}}{h_{\varphi,N_\varphi-1}\bar{h}_{\varphi,N_\varphi}} p_{k,N_\varphi-1} \right) / \\ & / \left(\frac{a_{k,N_\varphi}}{h_{r,k-1}\bar{h}_{r,k}} + \frac{a_{k+1,N_\varphi}}{h_{r,k}\bar{h}_{r,k}} + \frac{b_{k,N_\varphi}}{h_{\varphi,N_\varphi-1}\bar{h}_{\varphi,N_\varphi}} \right). \quad (92) \end{aligned}$$

Построение сеточной схемы с граничными условиями (6), частично, повторяет вывод выше. Отличием является то, что на границах γ_{φ_0} и $\gamma_{\theta_{\Pi}}$ давление $\hat{p}_{i,j}$ задаётся.

3.3 Уравнение энергии в смазочном слое

3.3.1 Вспомогательные обозначения

В пункте 3.1 было введено прямоугольное разбиение $\mathcal{T}_{h,m}$. Пусть i_r, i_φ, i_y – индексы соответствующие направлениям r, φ, y . Элементы $K = K_{i_r, i_\varphi, i_y} \in \mathcal{T}_{h,m}$ упорядочим таким образом, что индекс i_r , соответствующий направлению r изменяется быстрее φ , а φ быстрее y .

Тогда глобальный индекс K -того элемента определим по формуле

$$i_{gl} = i_y N_r N_\varphi + N_r i_\varphi + i_r \quad (93)$$

Центральную точку на элементе K обозначим через x_c . Для обозначения остальных точек определим правило. Если точка находится слева

от точки x_c по направлению r , то в обозначении появляется индекс rl , если справа — rr , например: x_{rl} — центральная точка элемента, расположенного слева по r относительно K -того элемента. Для направлений φ , y , аналогично, будем использовать индексы $x_{\varphi l}, x_{\varphi r}, x_{yl}, x_{yr}$. Возможно использование нескольких индексов. В таком случае, индексы прописываются в соответствии с скоростью изменения в глобальной индексации. Пример: $x_{\varphi r, yl}$ — точка, находящаяся в элементе справа по φ и слева по y , относительно K -того элемента. Аналогичная индексация вводится для сторон элемента разбиения. Пример: e_{rl} — левая граница в направлении r , на элементе K , $x_{e_{rl}}$ — точка, находящаяся в центре границы e_{rl} элемента K . Для элементов K , примыкающих к границе по y , точки $x_{e_{yl}}$ и x_{eyr} обозначаются z_l, z_r , соответственно.

3.3.2 Пространства конечно-элементных функций

Введём $P_{1,\alpha}(\Omega)$ — пространство функций линейных на Ω по направлению α и постоянных в остальных направлениях.

Приближенное решение t^h задачи будем искать в пространстве кусочно-постоянных функций внутри области Ω_M и кусочно-линейных по направлению y функций на элементах, прилегающих к границе Γ_{N3}

$$\overset{\circ}{V}_{h,m} = \{\eta_h \in V_{h,m}, \eta_h = 0 \text{ вне } \Omega_M\},$$

где $V_{h,m} = \{\eta_h \in L_\infty(\Omega_M) : \eta_h|_K \in P_0(K), K \in \mathcal{T}_{h,m} : K \cap \Gamma_{N3} = \emptyset; \eta_h|_K \in P_{1,y}(K), K \in \mathcal{T}_{h,m} : K \cap \Gamma_{N3}\}$, $P_0(K)$ — пространство полиномов нулевой степени на элементе K , $V_h^3 = V_{h,m} \times V_{h,m} \times V_{h,m}$.

3.3.3 Построение сеточной схемы разрывного метода Галёркина

Для задачи (54) построим схему разрывного метода Галёркина, следуя [12].

Для этого построим на отрезке $[0, T_{max}]$ сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{\tau_j = 0, h_\tau, 2h_\tau, \dots\}, \quad \omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}$$

и определим пространство сеточных функций

$$X_{h,\tau} = \{w(\tau) \in V_h, \tau \in \bar{\omega}_\tau\}.$$

Пусть $\Gamma_{h,N3}$ — разбиение части границы Γ_{N3} , согласованное с разбиением $\mathcal{T}_{h,m}$. На каждой стороне элемента выберем вектор p как единичную нормаль к границе элемента K , ориентированную так чтобы скалярное произведение $(1, 1, 1) \cdot p$ было положительным.

Тогда для всех $u_h \in X_{h,\tau}$, при всех $\tau \in \omega_\tau$ можно записать

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_M} b(\rho u_h)_{\bar{\tau}} w_h dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,m}} \int_K (q_h - u_{h,-p} \Upsilon_M) \cdot \nabla w_h dx + \\ & + \sum_{\gamma_h \setminus \Gamma_{h,N3}} \int_{\gamma_h} [u_{h,+p} (\Upsilon_M \cdot p)^- - u_{h,-p} (\Upsilon_M \cdot p)^+] (w_{n,+p} - w_{n,-p}) dx + \\ & + \sum_{\gamma_h \setminus \Gamma_{h,N3}} \int_{\gamma_h} (w_{h,+p} - w_{h,-p}) q_{h,+p} \cdot p dx + \int_{\Gamma_{N3}} \sigma_M u_h w_h dx = \\ & = \int_{\Omega_M} f_M w_h dx + \int_{\Gamma_{N3}} \bar{g}_M w_h dx \quad \forall w_h \in \mathring{V}_{h,m}, \quad (94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_M} d_h \cdot w_{u,h} dx + \sum_K \int_K u_h \operatorname{div} w_{u,h} dx + \sum_{\gamma_h \setminus \Gamma_{N3}} \int_{\gamma_h} u_{h,-p} (w_{u,h,+p} - w_{u,h,-p}) \cdot p dx - \\ & - \int_{\Gamma} u_h w_{u,h} \cdot \nu dx = 0 \quad \forall w_{u,h} \in V_h^3, \quad (95) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_M} (q_h - \kappa_M(x, u_h, d_h)) \cdot w_{q,h} = 0, \quad w_{q,h} \in V_h^3, \quad (96)$$

$$\int_{\Omega_M} (u_h(x, 0) - u_0(x)) w_{0,h} dx = 0, \quad w_{0,h} \in \mathring{V}_{h,m} \quad (97)$$

здесь $(\rho u_h)_{\bar{\tau}} = (\rho u_h - \check{\rho} \check{u}_h) / h_\tau$.

Преобразуем уравнения (94) – (97). Одновременно воспользуемся формулами трапеций в направлении y вблизи границы Γ_{N3} и центральных прямоугольников в остальных для вычисления интегралов по элементам разбиений. В полученных соотношениях будем использовать равенства

и сохраним обозначения неизвестных. Эти соотношения будем рассматривать как уравнения для определения приближённого решения.

Пусть $w_{u,h} = (w_{h,r}, w_{h,\varphi}, w_{h,y})$ — произвольный вектор из V_h^3 .

Для $j \in \{r, \varphi, y\}$ положим в (95) $w_{h,j}(x)$ равным единице, когда $x \in K$, $K \cap \Gamma_{h,N3} = \emptyset$ и равным нулю в противном случае, $w_{h,j}(x) = 0$. Получим

$$\mu(K)d_{h,j} = \mu(\gamma_{il})(u_h(x_c) - u_h(x_{il})),$$

где x_{jl} — точка в центре элемента находящегося слева от элемента K в направлении j , $\mu(K)$ — мера элемента K , γ_{jl} — левая граница элемента K в направлении j .

Отсюда имеем

$$d_{h,j}(x) = u_{h,\bar{j}}(x) = (u_h(x_c) - u_h(x_{jl}))/h_{i,i_j}, \quad (98)$$

где $i_j = \{1, 2, \dots, j = r \text{ иначе: } 0, 1, \dots\}$. Значения $d_{h,j}(x)$ при $i_j = 0$ и, соответственно, $u_{h,\bar{j}}$ доопределим нулём при $i_r = 0$ (части элементов, примыкающих к границе в направлении r).

Отдельно для $K \cap \Gamma_{h,N3}$ определим $d_{h,y}$, значения $d_{h,r}, d_{h,\varphi}$ будем вычислять как в (98). Пусть $K \cap \Gamma_{h,N3}$.

Положим $w_{h,r} = w_{h,\varphi} = 0$, $w_{h,y} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_0}$. Получим

$$\frac{\mu(K)}{2}d_{h,y}(z_l) - \frac{\mu(K)}{2h_{y,0}}(u_h(z_l) + u_h(z_r)) + \mu(\gamma_{yl})u_h(z_l) = 0,$$

здесь z_l и z_r определяются в соответствии с (3.3.1).

Отсюда

$$d_{h,y}(z_l) = \frac{u_h(z_r) - u_h(z_l)}{h_{y,0}}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} d_{h,y}(z_r) &= \frac{u_h(z_r) - u_h(z_l)}{h_{y,0}}, & w_{h,y} &= \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}; \\ d_{h,y}(z_l) &= \frac{u_h(z_r) + u_h(z_l) - 2u_h(x_{yl})}{h_{y,N_y-2}}, & w_{h,y} &= \frac{y_{N_y-1} - y}{y_{N_y-1} - y_{N_y-2}}; \\ d_{h,y}(z_r) &= \frac{u_h(z_r) - u_h(z_l)}{h_{y,N_y-2}}, & w_{h,y} &= \frac{y - y_{N_y-2}}{y_{N_y-1} - y_{N_y-2}}. \end{aligned}$$

Преобразуем (96), учётём, при этом, что

$$\kappa_i(x, u_h, d_h) = \sum_{j \in \{r, \varphi, y\}} k_{i,j}(x, u_h(x)) d_{h,j}, \quad i \in \{r, \varphi, y\}.$$

и вычислим интегралы по элементам K , пользуясь формулами трапеций при

$K \cap \Gamma_{h,N3}$ и центральных прямоугольников, иначе.

Уравнение преобразуется к виду

$$q_{h,i} = \sum_{j \in \{r, \varphi, y\}} k_{i,j}(x_c, u_h) d_{h,j}, \quad x \in K.$$

Запишем сеточную схему (94) в операторном виде.

$$B(\rho u_h)_{\bar{\tau}} + (A_v + A_q + A_g)u_h = F + F_g, \quad (99)$$

где операторы определяются следующими соотношениями

$$B u \cdot w_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K b_M u w_h dx$$

$$\begin{aligned} A_v u \cdot w_h &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (-u \Upsilon_M \cdot \nabla w_h) dx + \\ &+ \sum_{\gamma_h \setminus \Gamma_{h,N3}} \int_{\gamma_h} [u_{h,+p} (\Upsilon_M \cdot p)^- - u_{h,-p} (\Upsilon_M \cdot p)^+] (w_{n,+p} - w_{n,-p}) dx, \end{aligned}$$

$$A_q u \cdot w_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q \cdot \nabla w_h dx + \sum_{\gamma_h \setminus \Gamma_{h,N3}} \int_{\gamma_h} (w_{h,+p} - w_{h,-p}) q_{h,+p} \cdot p dx,$$

$$A_g u \cdot w_h = \sum_{\gamma_h \in \Gamma_{h,N3}} \int_{\gamma_h} \sigma_M u w_h dx,$$

$$F \cdot w_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f_M w_h dx, \quad F_g \cdot w_h = \sum_{\gamma_h \in \Gamma_{h,N3}} \int_{\gamma_h} \bar{g}_M w_h dx,$$

для $\forall u, w_h \in \mathring{V}_h$.

Варьируя w_h и вычисляя интегралы, получим вид операторов в терминах q и d .

Для оператора A_q при $\forall i_r, i_\varphi$ выполнено

$$\begin{aligned} (A_q u)_0 &= \frac{q_\varphi(z_l) - q_\varphi(x_{\varphi r})}{h_{\varphi, i_\varphi}} - \frac{q_y(z_r) + q_y(z_l)}{h_{y, 0}}, & i_y = 0, \\ (A_q u)_1 &= \frac{q_\varphi(z_r) - q_\varphi(x_{\varphi r})}{h_{\varphi, i_\varphi}} + \frac{q_y(z_r) + q_y(z_l) - 2q_y(x_{yr})}{h_{y, 0}}, & i_y = 1, \\ (A_q u)_{i_y} &= \frac{q_\varphi(x_c) - q_\varphi(x_{\varphi r})}{h_{\varphi, i_\varphi}} + \frac{q_y(x_c) - q_y(x_{yr})}{h_{y, i_y - 1}}, & i_y = \overline{2, N_y - 3}, \\ (A_q u)_{N_y - 2} &= \frac{q_\varphi(x_c) - q_\varphi(x_{\varphi r})}{h_{\varphi, i_\varphi}} + \frac{q_y(x_c) - q_y(z_l)}{h_{y, N_y - 3}}, & i_y = N_y - 2, \\ (A_q u)_{N_y - 1} &= \frac{q_\varphi(z_l) - q_\varphi(x_{\varphi r})}{h_{\varphi, i_\varphi}} + \frac{q_y(z_l) - q_y(z_r)}{h_{y, N_y - 2}}, & i_y = N_y - 1, \\ (A_q u)_{N_y} &= \frac{q_\varphi(z_l) - q_\varphi(x_{\varphi r})}{h_{\varphi, i_\varphi}} + \frac{q_y(z_r) + q_y(z_l)}{h_{y, N_y - 2}}, & i_y = N_y. \end{aligned}$$

Для оператора A_v при $\forall i_r, i_\varphi$ выполнено

$$\begin{aligned} (A_v u)_0 &= \frac{u(z_l)v_y(x_{e_{yl}}) + u(z_r)v_y(x_{e_{yr}})}{h_{y, 0}} + \\ &+ \frac{1}{h_{r, i_r}} [u(z_l)(v_r^-(x_{e_{rl}}) + v_r^+(x_{e_{rr}})) - u(x_{rl})v_r^+(x_{e_{rl}}) - u(x_{rr})v_r^-(x_{e_{rr}})] + \\ &+ \frac{1}{h_{\varphi, i_\varphi}} [u(z_l)(v_\varphi^-(x_{e_{pl}}) + v_\varphi^+(x_{e_{pr}})) - u(x_{\varphi l})v_\varphi^+(x_{e_{pl}}) - u(x_{\varphi r})v_\varphi^-(x_{e_{pr}})], \\ & & i_y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_v u)_1 &= -\frac{u(z_l)v_y(x_{e_{yl}}) + u(z_r)v_y(x_{e_{yr}})}{h_{y,0}} + \\
&+ \frac{1}{h_{r,i_r}} [u(z_r)(v_r^-(x_{e_{rl}}) + v_r^+(x_{e_{rr}})) - u(x_{rl})v_r^+(x_{e_{rl}}) - u(x_{rr})v_r^-(x_{e_{rr}})] + \\
&+ \frac{1}{h_{\varphi,i_\varphi}} [u(z_r)(v_\varphi^-(x_{e_{pl}}) + v_\varphi^+(x_{e_{pr}})) - u(x_{\varphi l})v_\varphi^+(x_{e_{pl}}) - u(x_{\varphi r})v_\varphi^-(x_{e_{pr}})] + \\
&+ \frac{2}{h_{y,0}} [u(z_r)(v_y^-(x_{e_{yl}}) + v_y^+(x_{e_{yr}})) - u(x_{yl})v_y^+(x_{e_{yl}}) - u(x_{yr})v_y^-(x_{e_{yr}})], \\
& \qquad \qquad \qquad i_y = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_v u)_{i_y} &= \\
= &+ \frac{1}{h_{r,i_r}} [u(z_r)(v_r^-(x_{e_{rl}}) + v_r^+(x_{e_{rr}})) - u(x_{rl})v_r^+(x_{e_{rl}}) - u(x_{rr})v_r^-(x_{e_{rr}})] + \\
&+ \frac{1}{h_{\varphi,i_\varphi}} [u(z_r)(v_\varphi^-(x_{e_{pl}}) + v_\varphi^+(x_{e_{pr}})) - u(x_{\varphi l})v_\varphi^+(x_{e_{pl}}) - u(x_{\varphi r})v_\varphi^-(x_{e_{pr}})] + \\
&+ \frac{1}{h_{y,i_y}} [u(z_r)(v_y^-(x_{e_{yl}}) + v_y^+(x_{e_{yr}})) - u(x_{yl})v_y^+(x_{e_{yl}}) - u(x_{yr})v_y^-(x_{e_{yr}})], \\
& \qquad \qquad \qquad i_y = \{2, \dots, N_y - 2\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_v u)_{N_y-1} &= +\frac{u(z_l)v_y(x_{e_{yl}}) + u(z_r)v_y(x_{e_{yr}})}{h_{y,N_y-2}} + \\
&+ \frac{1}{h_{r,i_r}} [u(z_r)(v_r^-(x_{e_{rl}}) + v_r^+(x_{e_{rr}})) - u(x_{rl})v_r^+(x_{e_{rl}}) - u(x_{rr})v_r^-(x_{e_{rr}})] + \\
&+ \frac{1}{h_{\varphi,i_\varphi}} [u(z_r)(v_\varphi^-(x_{e_{pl}}) + v_\varphi^+(x_{e_{pr}})) - u(x_{\varphi l})v_\varphi^+(x_{e_{pl}}) - u(x_{\varphi r})v_\varphi^-(x_{e_{pr}})] + \\
&+ \frac{2}{h_{y,N_y-2}} [u(z_r)(v_y^-(x_{e_{yl}}) + v_y^+(x_{e_{yr}})) - u(x_{yl})v_y^+(x_{e_{yl}}) - u(x_{yr})v_y^-(x_{e_{yr}})], \\
& \qquad \qquad \qquad i_y = N_y - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A_v u)_{N_y} &= -\frac{u(z_l)v_y(x_{e_{yl}}) + u(z_r)v_y(x_{e_{yr}})}{h_{y,N_y-2}} + \\
&+ \frac{1}{h_{r,i_r}} [u(z_r)(v_r^-(x_{e_{rl}}) + v_r^+(x_{e_{rr}})) - u(x_{rl})v_r^+(x_{e_{rl}}) - u(x_{rr})v_r^-(x_{e_{rr}})] + \\
&+ \frac{1}{h_{\varphi,i_\varphi}} [u(z_r)(v_\varphi^-(x_{e_{pl}}) + v_\varphi^+(x_{e_{pr}})) - u(x_{\varphi l})v_\varphi^+(x_{e_{pl}}) - u(x_{\varphi r})v_\varphi^-(x_{e_{pr}})], \\
& \qquad \qquad \qquad i_y = N_y.
\end{aligned}$$

здесь v_r , v_φ , v_y обозначены компоненты вектора скорости Υ_m .

Для оператора A_g при $\forall i_r, i_\varphi$ выполнено

$$(A_g u)_0 = \frac{2}{h_{y,0}} (\sigma_M u)(z_l), \quad i_y = 0,$$

$$(A_g u)_{i_y} = 0, \quad i_y = \{1, \dots, N_y - 1\},$$

$$(A_g u)_{N_y} = \frac{2}{h_{y,N_y-2}} (\sigma_M u)(z_r), \quad i_y = N_y.$$

Для оператора B и вектора F при $\forall i_r, i_\varphi$ выполнено

$$(Bu)_{i_y} = (b_M u)(x_c), \quad F_{i_y} = f_M(x_c), \quad i_y = \{0, \dots, N_y\},$$

под точкой x_c при $i_y = 0, 1, N_y - 2, N_y - 1$ понимается z_l, z_r , соответственно.

Для вектора F_g при $\forall i_r, i_\varphi$ выполнено

$$(F_g u)_0 = \frac{2}{h_{y,0}} (\bar{g}_M u)(z_l), \quad i_y = 0,$$

$$(F_g u)_{i_y} = 0, \quad i_y = \{1, \dots, N_y - 1\},$$

$$(F_g u)_{N_y} = \frac{2}{h_{y,N_y-2}} (\bar{g}_M u)(z_r), \quad i_y = N_y, \quad \bar{\varphi}_{i_\varphi} \leq \bar{\theta}_\Pi.$$

Для решения задачи (99) построим итерационный метод

$$B(\rho^k u_h^k)_{\bar{\tau}} + (A_v + A_q + A_g) u_h^{k+1} = F + F_g, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (100)$$

где в качестве u_h^0 берётся начальное значение для уравнения энергии в смазочном слое.

Для решения, полученной системы уравнений, воспользуемся LU разложением [8]. Фрагмент программы сборки частей матрицы приведен в приложении Б.

3.4 Уравнение энергии в упорном диске

3.4.1 Триангуляция упорного диска

Воспользуемся разбиением $\mathcal{T}_{h,\partial}$, описанным в параграфе 3.1. Через K условимся обозначать элементы $\mathcal{T}_{h,\partial}$, через e_K – границы элементов. Определим для каждого элемента K его вершины $x^{\alpha,K}$, $\alpha = 0 \dots 7$.

Для каждого элемента $K \in \mathcal{T}_{h,\partial}$ сделаем замену переменных

$$x = x^{0,K} + J_K t, \quad J_K = \begin{pmatrix} h_r & 0 & 0 \\ 0 & h_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & h_y \end{pmatrix},$$

переводящую базисный куб $\Delta = [0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1]$ в элемент K .

На элементе триангуляции $K \in \mathcal{T}_{h,\partial}$ определим узлы квадратурной формулы трапеций, совпадающей с вершинами элемента и узловым параметром равным $\alpha_{kv}^K = \text{meas } K/8$.

Элементы триангуляции на границах области $\Gamma_{\partial 3}$, $\Gamma_{\partial M}$, согласованные с разбиением $\mathcal{T}_{h,\partial}$, будем обозначать ⁴ $\Gamma_{\partial 3}^h$, $\Gamma_{\partial M}^h$, соответственно.

3.4.2 Пространства конечно-элементных функций

Приближенное решение T_∂^h задачи будем искать в пространстве кусочно-линейных функций $V_{h,\partial} \equiv \{\eta_h \in C(\partial) : \eta_h|_K \in Q_1(K), K \in \mathcal{T}_{h,\partial}\}$, $Q_1(K) = \sum_{i,j,l=0}^1 a_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l$ —пространство полиномов первой степени по каждому направлению на элементе K .

3.4.3 Построение схемы МКЭ для уравнения теплопроводности в диске

Для решения уравнения (63) воспользуемся методом конечных элементов [9]. Алгоритм сборки описан в [10], [11].

Аппроксимируем (63) неявной схемой. Для этого производную по времени аппроксимируем разностью вперёд $\partial T_\partial / \partial \tau = (\hat{T}_\partial - T_\partial) / h_\tau$, где $\hat{T}_\partial(\tau) = T_\partial(\tau + h_\tau)$. Получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\partial} b_\partial \frac{\hat{T}_\partial}{\bar{\tau}} v dx - \int_{\Omega_\partial} (\Upsilon_\partial \hat{T}_\partial - \kappa_\partial \nabla \hat{T}_\partial) \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_{\partial 3}} \sigma_{\partial 3} \hat{T}_\partial v dx + \int_{\Gamma_{\partial M}} \sigma_{\partial M} \hat{T}_\partial v dx = \\ = \int_{\Omega_\partial} b_\partial \frac{T_\partial}{\bar{\tau}} v dx + \int_{\Gamma_{\partial 3}} \bar{T}_a v dx + \int_{\Gamma_{\partial M}} \bar{g}_{\partial M} v dx \quad (101) \end{aligned}$$

Введём билинейную форму $A(u, v) = A_{\Omega_\partial}(u, v) + A_{\partial 3}(u, v) + A_{\partial M}(u, v)$, и линейную форму $F(v) = F_{\Omega_\partial}(v) + F_{\partial 3}(v) + F_{\partial M}(v)$,

⁴Символ h у сеточных функций и границ согласованных с разбиением, для краткости, будем опускать

$$A_\Omega(u, v) = \sum_K \int_K a_\Omega(u, v) dx, \quad a_\Omega(u, v) = b_\partial \frac{u}{\tau} v - (\Upsilon_\partial u - \kappa_\partial \nabla u) \cdot \nabla v,$$

$$A_{\partial 3}(u, v) = \sum_{K \in \Gamma_{\partial 3}} \int_K a_{\partial 3}(u, v) dx, \quad a_{\partial 3}(u, v) = \sigma_{\partial 3} u v dx, \quad (102)$$

$$A_{\partial M}(u, v) = \sum_{K \in \Gamma_{\partial M}} \int_K a_{\partial M}(u, v) dx, \quad a_{\partial M}(u, v) = \sigma_{\partial M} u v,$$

$$F_\Omega(v) = \sum_K \int_K f_\Omega(v) dx, \quad f_\Omega(u, v) = b_\partial \frac{u}{\tau} v,$$

$$F_{\partial 3}(v) = \sum_{K \in \Gamma_{\partial 3}} \int_K f_{\partial 3}(v) dx, \quad f_{\partial 3}(v) = \bar{T}_a v \quad (103)$$

$$F_{\partial M}(v) = \sum_{K \in \Gamma_{\partial M}} \int_K f_{\partial M}(v) dx, \quad f_{\partial M}(v) = \bar{g}_{\partial M} v.$$

Таким образом, будем иметь:

$$A(u, v) \approx F(v) \quad (104)$$

Аппроксимируем интегралы в (102), (103) квадратурами трапеций. В качестве весового коэффициента выберем $\alpha_{kv} = \text{meas}(K)/8$, $\text{meas}(K) = h_r h_\varphi h_y$, x_{kv} – узлы квадратуры.

Под приближённым решением задачи для уравнения (63) будем понимать сеточную функцию $T_\partial^h = T_\partial^h(\tau, r, \varphi, y)$, удовлетворяющую тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_{h, \partial}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (a_\Omega(\hat{T}_\partial^h, v^h))(x_{kv}) + \sum_{K \in \Gamma_{\partial 3}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (a_{\partial 3}(\hat{T}_\partial^h, v^h))(x_{kv}) + \\ & + \sum_{K \in \Gamma_{\partial M}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (a_{\partial M}(\hat{T}_\partial^h, v^h))(x_{kv}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h, \partial}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (f_\Omega(T_\partial^h, v^h))(x_{kv}) + \\ & + \sum_{K \in \Gamma_{\partial 3}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (f_{\partial 3}(v^h))(x_{kv}) + \sum_{K \in \Gamma_{\partial M}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (f_{\partial M}(v^h))(x_{kv}) \end{aligned}$$

для любой функции $v^h \in V_{h,\partial}$.

Это тождество эквивалентно системе линейных уравнений. Опишем способ формирования матрицы системы и её правой части.

Компоненты матрицы, соответствующие A_Ω , вычисляются следующим образом:

$$a_{l,k} = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\partial}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} \left(b_\partial \frac{\delta_{kl}}{\tau} - (\Upsilon_\partial \varphi_k - \kappa_\partial \nabla \varphi_k) \cdot \nabla \varphi_l \right) (x_{kv}).$$

где $\delta_{kl} = 1$, если $k = l$, и 0 иначе.

Компоненты матрицы, соответствующие $A_{\partial\Omega}$, определяются равенствами:

$$a_{l,k} = \sum_{K \in \Gamma_{\partial\Omega}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\sigma_{\partial\Omega} \delta_{kl}) (x_{kv}).$$

Компоненты матрицы, соответствующие $A_{\partial M}$, определяются равенствами:

$$a_{l,k} = \sum_{K \in \Gamma_{\partial M}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\sigma_{\partial M} \delta_{kl}) (x_{kv}).$$

Компоненты вектора, соответствующие F_Ω , определяются равенствами:

$$f_l = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\partial}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} \left(b_\partial \frac{\delta_{kl}}{\tau} \right) (x_{kv}).$$

Компоненты вектора, соответствующие $F_{\partial\Omega}$, определяются равенствами:

$$f_l = \sum_{K \in \Gamma_{\partial\Omega}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\bar{T}_a \delta_{kl}) (x_{kv}).$$

Компоненты вектора, соответствующие $F_{\partial M}$, определяются равенствами:

$$f_l = \sum_{K \in \Gamma_{\partial M}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\bar{g}_{\partial M} \delta_{kl}) (x_{kv}).$$

Фрагмент программы сборки частей матрицы приведен в приложении В.

Для решения, полученной системы уравнений, воспользуемся LU разложением [8].

3.5 Уравнение энергии в подушке

3.5.1 Триангуляция подушки

Воспользуемся разбиением $\mathcal{T}_{h,\Pi}$, описанным в параграфе 3.1. Через K условимся обозначать элементы $\mathcal{T}_{h,\Pi}$, через e_K – границы элементов. Определим для каждого элемента K его вершины $x^{\alpha,K}$, $\alpha = 0 \dots 7$.

Для каждого элемента $K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}$ сделаем замену переменных

$$x = x^{0,K} + J_K t, \quad J_K = \begin{pmatrix} h_r & 0 & 0 \\ 0 & h_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & h_y \end{pmatrix},$$

переводящую базисный куб $\Delta = [0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1]$ в элемент K .

На элементе триангуляции $K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}$ определим узлы квадратурной формулы трапеций, совпадающей с вершинами элемента и узловым параметром равным $\alpha_{kv}^K = \text{meas } K/8$.

Элементы триангуляции на границах области $\Gamma_{\Pi 2}$, $\Gamma_{\Pi 3}$, согласованные с разбиением $\mathcal{T}_{h,\Pi}$, будем обозначать $\Gamma_{\Pi 2}^h$, $\Gamma_{\Pi 3}^h$, соответственно.

3.5.2 Пространства конечно-элементных функций

Приближенное решение T_{Π}^h задачи будем искать в пространстве кусочно-линейных функций $V_{h,\Pi} \equiv \{\eta_h \in C(\Omega_{\Pi}) : \eta_h|_K \in Q_1(K), K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}\}$, $Q_1(K) = \sum_{i,j,l=0}^1 a_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l$ – пространство полиномов первой степени по каждому направлению на элементе K .

3.5.3 Построение схемы МКЭ для уравнения теплопроводности в подушке

Для решения уравнения (71) воспользуемся методом конечных элементов [9]. Алгоритм сборки описан в [10], [11].

Аппроксимируем (71) неявной схемой. Для этого производную по времени аппроксимируем разностью вперёд $(\hat{T}_{\Pi} - T_{\Pi})/h_{\tau}$, где $\hat{T}_{\Pi}(\tau) = T_{\Pi}(\tau + h_{\tau})$.

Получим:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{\Pi}} b_{\Pi} \frac{\hat{T}_{\Pi}}{\bar{\tau}} v dx + \int_{\Omega_{\Pi}} \kappa_{\Pi} \nabla \hat{T}_{\Pi} \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_{\Pi\Pi}} \sigma_{\Pi\Pi} \hat{T}_{\Pi} v dx + \int_{\Gamma_{\Pi3}} \sigma_{\Pi3} \hat{T}_{\Pi} v dx = \\
= \int_{\Omega_{\Pi}} b_{\Pi} \frac{T_{\Pi}}{\bar{\tau}} v dx + \int_{\Gamma_{\Pi\Pi}} \bar{g}_{\Pi\Pi} v dx + \int_{\Gamma_{\Pi3}} \bar{T}_{\Pi3} v dx \quad (105)
\end{aligned}$$

Введём билинейную форму $A(u, v) = A_{\Omega_{\Pi}}(u, v) + A_{\Pi3}(u, v) + A_{\Pi\Pi}(u, v)$,
и линейную форму $F(v) = F_{\Omega_{\Pi}}(v) + F_{\Pi3}(v) + F_{\Pi\Pi}(v)$,

$$\begin{aligned}
A_{\Omega}(u, v) &= \sum_K \int_K a_{\Omega}(u, v) dx, & a_{\Omega}(u, v) &= b_{\Pi} \frac{u}{\tau} v + \kappa_{\Pi} \nabla u \cdot \nabla v, \\
A_{\Pi\Pi}(u, v) &= \sum_{K \in \Gamma_{\Pi\Pi}} \int_K a_{y_{H_{\Pi}}}(u, v) dx, & a_{\Pi\Pi}(u, v) &= \sigma_{\Pi\Pi} uv, \quad (106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\Pi3}(u, v) &= \sum_{K \in \Gamma_{\Pi3}} \int_K a_{\Pi3}(u, v) dx, & a_{\Pi3}(u, v) &= \sigma_{\Pi3} uv dx, \\
F_{\Omega}(v) &= \sum_K \int_K f_{\Omega}(v) dx, & f_{\Omega}(v) &= b_{\Pi} \frac{u}{\tau} v, \\
F_{\Pi\Pi}(v) &= \sum_{K \in \Gamma_{\Pi\Pi}} \int_K f_{y_{H_{\Pi}}}(v) dx, & f_{\Pi\Pi}(v) &= \bar{g}_{\Pi\Pi} v. \quad (107)
\end{aligned}$$

$$F_{\Pi3}(v) = \sum_{K \in \Gamma_{\Pi3}} \int_K f_{\Pi3}(v) dx, \quad f_{\Pi3}(v) = \bar{T}_{\Pi3} v$$

Таким образом, будем иметь:

$$A(u, v) \approx F(v) \quad (108)$$

Аппроксимируем интегралы в (106), (107) квадратурами трапеций. В качестве весового коэффициента выберем $\alpha_{kv} = \text{meas}(K)/8$, $\text{meas}(K) = h_r h_{\varphi} h_y$, x_{kv} – узлы квадратуры.

Под приближённым решением задачи для уравнения (71) будем понимать сеточную функцию $T_{\Pi}^h = T_{\Pi}^h(\tau, r, \varphi, y)$, удовлетворяющую тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (a_{\Omega}(\hat{T}_{\Pi}^h, v^h))(x_{kv}) + \sum_{K \in \Gamma_{\Pi 3}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (a_{\Pi 3}(\hat{T}_{\Pi}^h, v^h))(x_{kv}) + \\ & + \sum_{K \in \Gamma_{\Pi \text{м}}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (a_{\Pi \text{м}}(\hat{T}_{\Pi}^h, v^h))(x_{kv}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (f_{\Omega}(T_{\Pi}^h, v^h))(x_{kv}) + \\ & + \sum_{K \in \Gamma_{\Pi 3}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (f_{\Pi 3}(v^h))(x_{kv}) + \sum_{K \in \Gamma_{\Pi \text{м}}} \sum_{x_{kv} \in K} \alpha_{kv} (f_{\Pi \text{м}}(v^h))(x_{kv}) \quad (109) \end{aligned}$$

для любой функции $v \in V_{h,\Pi}$.

Это тождество эквивалентно системе линейных уравнений. Опишем способ формирования матрицы системы и её правой части.

Компоненты матрицы, соответствующие A_{Ω} , вычисляются следующим образом:

$$a_{l,k} = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} \left(b_{\Pi} \frac{\delta_{kl}}{\tau} + \kappa_{\Pi} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_l \right) (x_{kv}).$$

где $\delta_{kl} = 1$, если $k = l$, и 0 иначе.

Компоненты матрицы, соответствующие $A_{\Pi 3}$, определяются равенствами:

$$a_{l,k} = \sum_{K \in \Gamma_{\Pi 3}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\sigma_{\Pi 3} \delta_{kl}) (x_{kv}).$$

Компоненты матрицы, соответствующие $A_{\Pi \text{м}}$, определяются равенствами:

$$a_{l,k} = \sum_{K \in \Gamma_{\Pi \text{м}}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\sigma_{\Pi \text{м}} \delta_{kl}) (x_{kv}).$$

Компоненты вектора, соответствующие F_{Ω} , определяются равенствами:

$$f_l = \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,\Pi}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} \left(b_{\Pi} \frac{\delta_{kl}}{\tau} \right) (x_{kv}).$$

Компоненты вектора, соответствующие $F_{пз}$, определяются равенствами:

$$f_l = \sum_{K \in \Gamma_{пз}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\bar{T}_{мз} \delta_{kl})(x_{kv}).$$

Компоненты вектора, соответствующие $F_{пм}$, определяются равенствами:

$$f_l = \sum_{K \in \Gamma_{пм}} \alpha_{kv} \sum_{x_{kv} \in K} (\bar{g}_{пм} \delta_{kl})(x_{kv}).$$

Фрагмент программы сборки частей матрицы приведен в приложении Г.

Для решения, полученной системы уравнений, воспользуемся LLT разложением [8].

3.6 Метод декомпозиции

Рассмотрим разделение диск-смазка. Для смазочного слоя справедливо (55) — (57), аналогично, для диска (64) — (66).

Построим итерационный метод, реализующий теплообмен между областями подшипника.

$$\begin{aligned} b_m \frac{\partial(\bar{\rho} \frac{n+1}{t})}{\partial \bar{\tau}} + \operatorname{div}(\Upsilon_m \frac{n+1}{t} - \kappa_m \bar{\nabla} \frac{n+1}{t}) &= f_m, \quad x \in \Omega_m, \\ -(\Upsilon_m \frac{n+1}{t} - \kappa_m \bar{\nabla} \frac{n+1}{t}) \cdot \nu + \sigma_{m\partial} \frac{n+1}{t} &= \bar{g}_{m\partial}^n, \quad \bar{y} = 0, \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} b_\partial \frac{\partial \bar{T}_\partial}{\partial \bar{\tau}} + \operatorname{div}(\Upsilon_\partial \bar{T}_\partial - \kappa_\partial \bar{\nabla} \bar{T}_\partial) &= 0, \quad x \in \Omega_\partial, \\ -(\Upsilon_\partial \bar{T}_\partial - \kappa_\partial \bar{\nabla} \bar{T}_\partial) \cdot \nu_\partial + \sigma_{m\partial} \bar{T}_\partial &= \bar{g}_{\partial m}^n, \quad x \in \Gamma_{\partial m}. \end{aligned} \quad (111)$$

Получим выражения для $\bar{g}_{m\partial}^{n+1}$, $\bar{g}_{\partial m}^{n+1}$. По определению $\bar{g}_{\partial m}^n = \bar{g}_{m\partial}^n$ на границе раздела, следовательно

$$\begin{aligned} \bar{g}_{m\partial}^n &= (\Upsilon_\partial \bar{T}_\partial - \kappa_\partial \bar{\nabla} \bar{T}_\partial) \cdot \nu_\partial + \sigma_{m\partial} \bar{T}_\partial, \\ \bar{g}_{\partial m}^n &= (\Upsilon_m \frac{n}{t} - \kappa_m \bar{\nabla} \frac{n}{t}) \cdot \nu + \sigma_{m\partial} \frac{n}{t}. \end{aligned}$$

Пользуясь этим, получим

$$\begin{aligned} \bar{g}_{M\partial}^{n+1} &= (\Upsilon_{\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} - \kappa_{\partial} \bar{\nabla} \bar{T}_{\partial}^{n+1}) \cdot \nu_{\partial} + \sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} \pm \sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} = \\ &= - \left[-(\Upsilon_{\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} - \kappa_{\partial} \bar{\nabla} \bar{T}_{\partial}^{n+1}) \cdot \nu_{\partial} + \sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} \right] + 2\sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} = -\bar{g}_{\partial M}^n + 2\sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1} \end{aligned}$$

Продельвая аналогичные операции для $\bar{g}_{\partial M}^{n+1}$, получим

$$\bar{g}_{M\partial}^{n+1} = -\bar{g}_{\partial M}^n + 2\sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1}, \quad (112)$$

$$\bar{g}_{\partial M}^{n+1} = -\bar{g}_{M\partial}^n + 2\sigma_{M\partial} \bar{T}_{\partial}^{n+1}. \quad (113)$$

Положим

$$\bar{g}_{M\partial}^0 = 0, \quad \bar{g}_{\partial M}^0 = 0. \quad (114)$$

Таким образом, (110) – (114) описывают итерационный метод теплообмена между диском и смазочным слоем [13]. Для подушки аналогично.

4 Численные эксперименты

Для решения построенных сеточных схем был создан комплекс программ [20], [14], с помощью которых проведены численные исследования (см Приложение Д).

Проведено исследование точности сеточной схемы на последовательности сгущающихся сеток для уравнение теплопроводности в смазочном слое. В качестве модельной задачи берётся уравнение энергии в смазочном слое постоянной толщины с известным точным решением при заданных параметрах дифференциальной задачи

$$t = \sin(\tau) \frac{\bar{r} - R_{cp}}{l_r} \cos(\bar{\varphi}) \sin(\bar{y}),$$

где $l_r = R_2 - R_1$.

При проведении численных экспериментов приближённое решение t^h сравнивалось с точным решением t модельной задачи. Критерием точности выбиралась равномерная норма погрешности $\max_{(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{y})} |t - t^h|$. Для решения разреженных систем уравнений использовался метод LU разложения матрицы.

Ниже представлены графики погрешности и приближенного решения. На рисунке 3 представлен график зависимости погрешности решения от числа точек разбиения n по направления r , φ , y . Рисунок показывает, что имеет место сходимости построенного метода со скоростью выше линейной с ростом n .

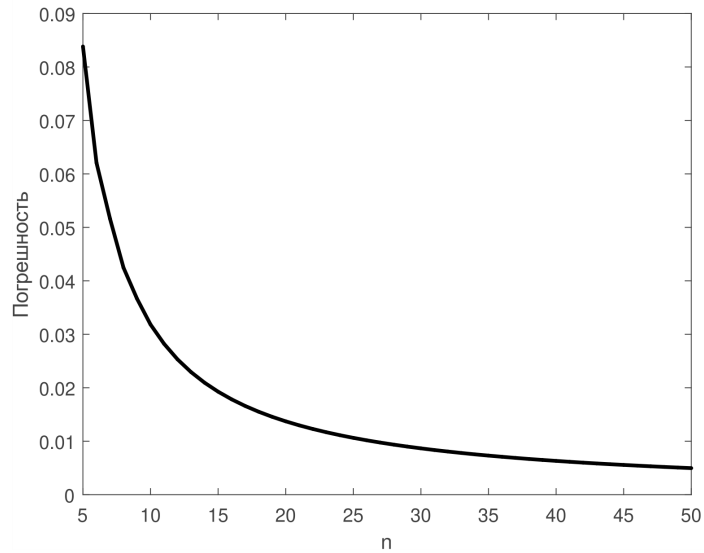


Рисунок 3 - График зависимости погрешности от числа точек разбиения n

На рисунках 4-6 представлены графики приближенного и точного решения при фиксированных φ и y в центре расчётной области. На рисунках 7-12 представлены аналогичные графики приближённого и точного решения при фиксированных r, y и r, φ соответственно.

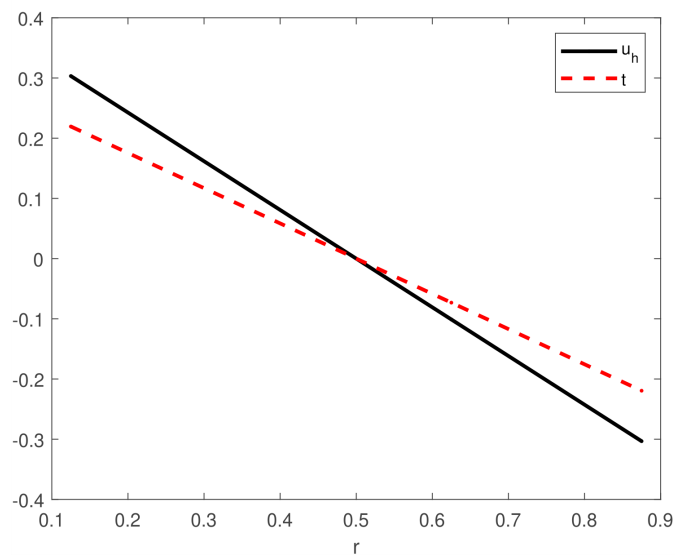


Рисунок 4 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению r при $n = 5$

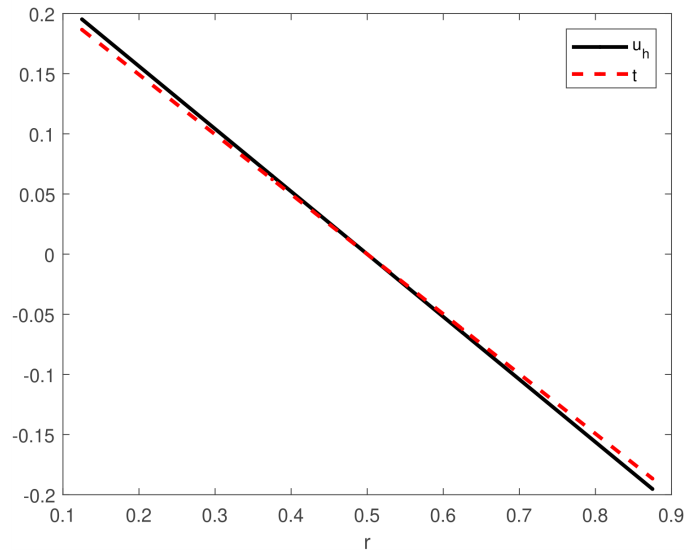


Рисунок 5 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению r при $n = 25$

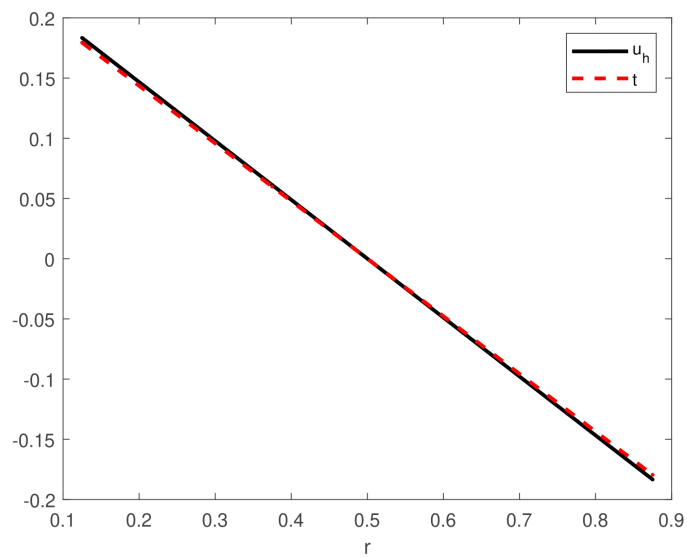


Рисунок 6 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению r при $n = 50$

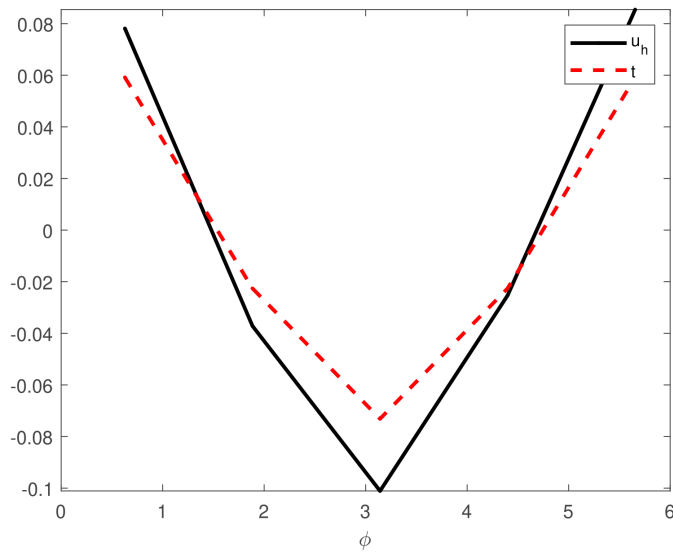


Рисунок 7 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению φ при $n = 5$

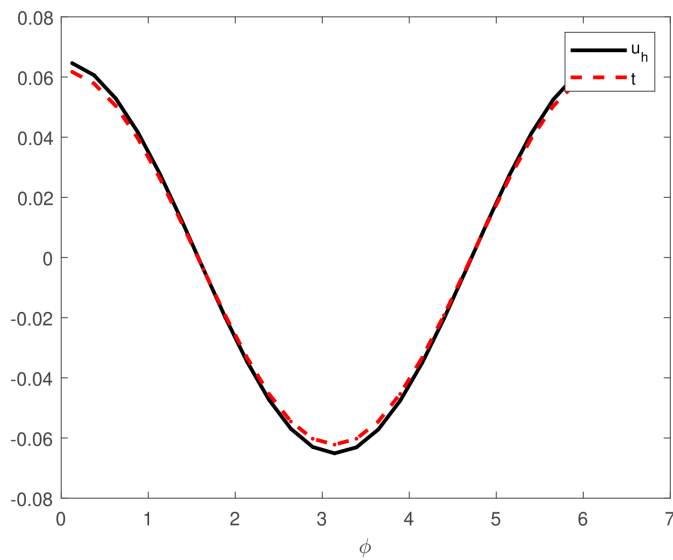


Рисунок 8 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению φ при $n = 25$

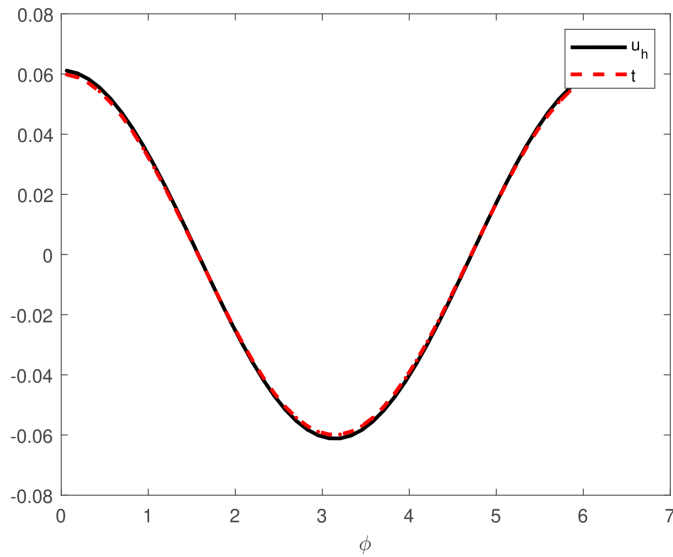


Рисунок 9 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению φ при $n = 50$

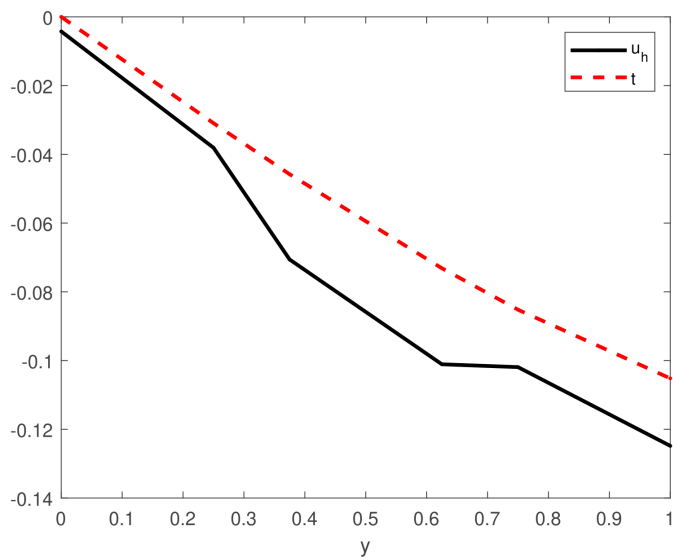


Рисунок 10 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению y при $n = 5$

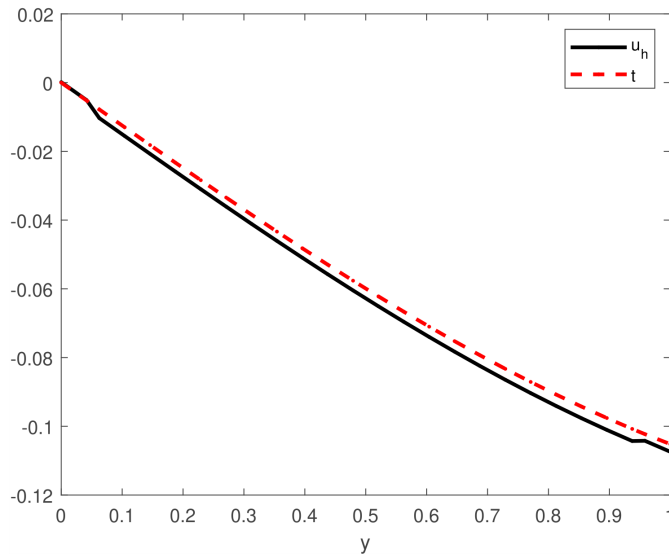


Рисунок 11 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению y при $n = 25$

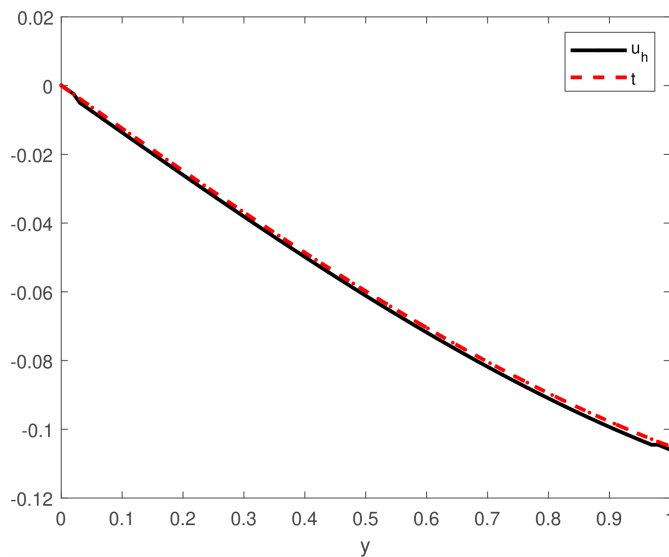


Рисунок 12 - График точного и приближенного решения в сечении по направлению y при $n = 50$

На рисунках 13 – 15 представлены графики точного и приближенного решения во времени при различном количестве точек разбиения N_τ отрезка $[0, T_{max}]$.

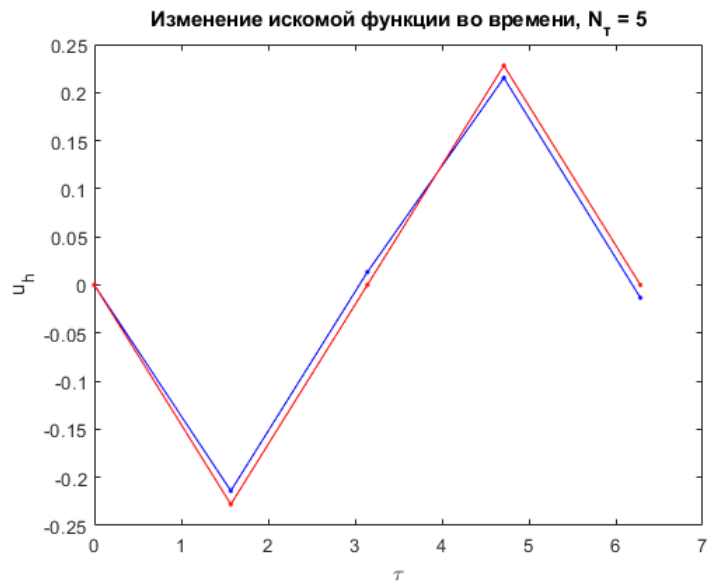


Рисунок 13 - График точного и приближенного решения во времени при $N_\tau = 5$

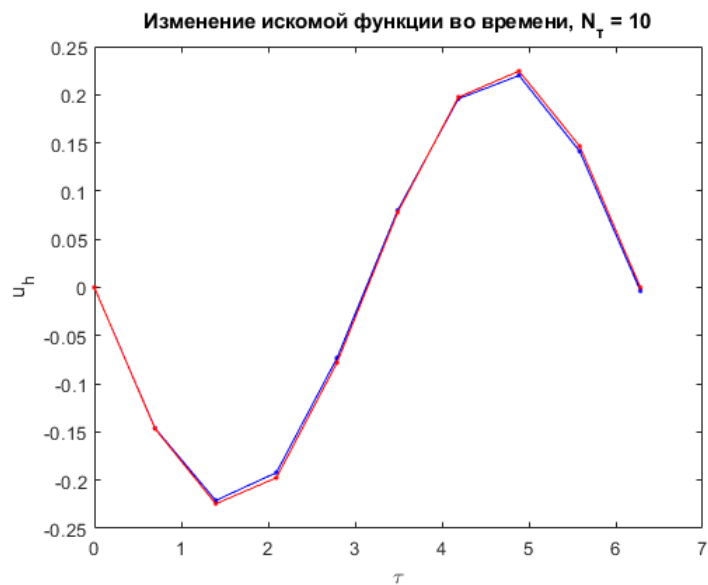


Рисунок 14 - График точного и приближенного решения во времени при $N_\tau = 10$

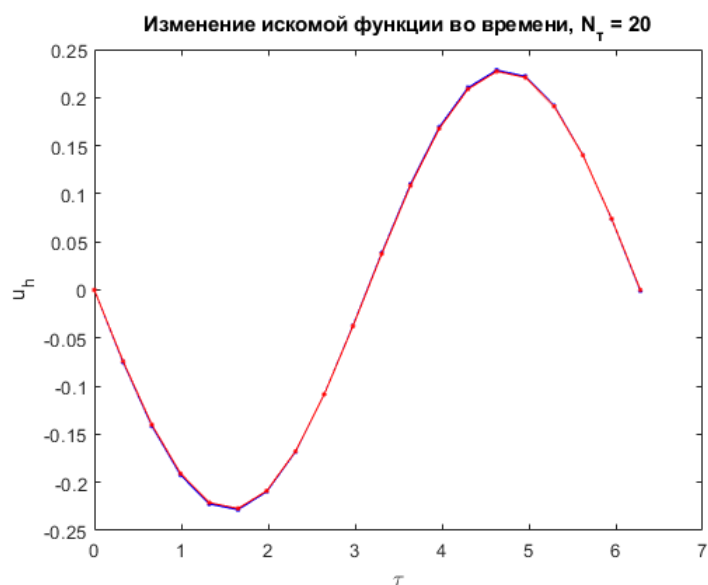


Рисунок 15 - График точного и приближенного решения во времени при $N_\tau = 20$

Для решения уравнения Рейнольдса была построена схема методом сумматорных тождеств. На рисунках 16 и 17 приведён график давления в сечении при фиксированных r или φ в центре расчётной области.

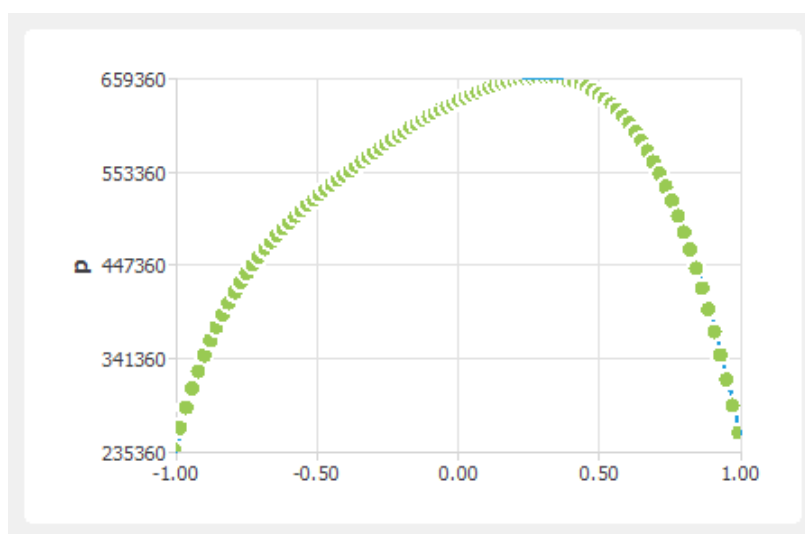


Рисунок 16 - График давления в сечении при фиксированном φ

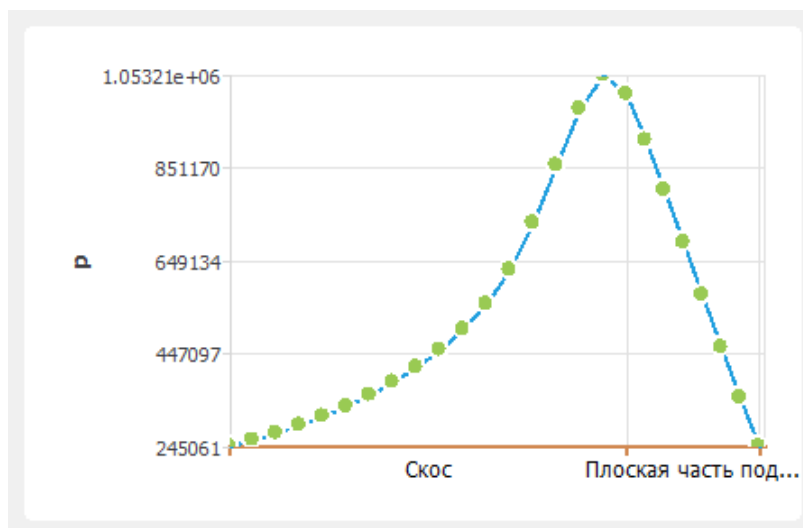


Рисунок 17 - График давления в сечении при фиксированном r

На рисунке 18 представлен график изобар. Наибольшее значение давления вблизи входа на плоскую часть подушки. Зазор там минимален и протекание смазки затруднено. Наименьшее значение давления приходится на начало клинового скоса, а так же на внешних и внутренних радиусах области. Это обусловлено тем, что в начале клинового скоса зазор максимален, а на внутренних и внешних радиусах области смазка покидает подшипник.

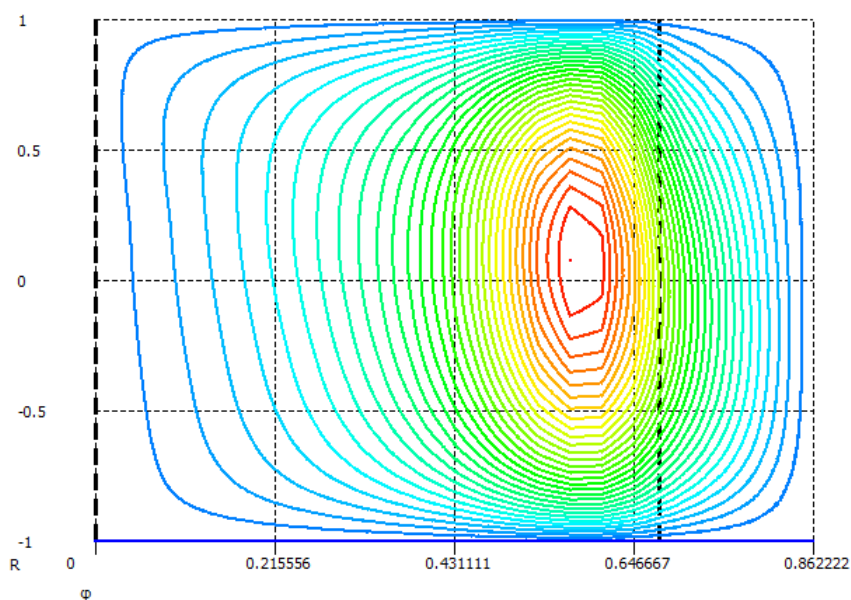


Рисунок 18 - График изобар

При решении задачи использовался итерационный метод декомпозиции областей. Поиск решения производился с заданной точностью. На

рисунке 19 представлены график приближённого решения уравнения энергии в элементе периодичности в центре расчётной области при фиксированных r и φ .

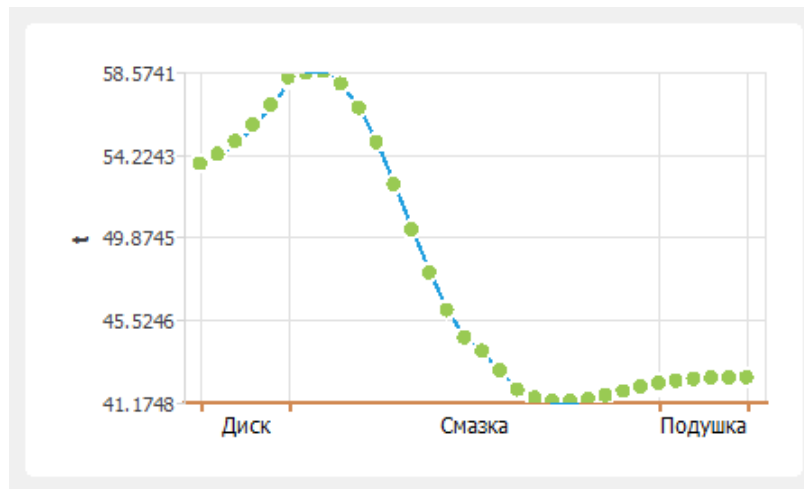


Рисунок 19 - График приближённого решения уравнения энергии в элементе периодичности

На рисунках 20 – 22 представлены графики скорости в сечениях. Численный эксперимент подтверждает предположение о том, что компонента скорости V_r течения смазки равна нулю вблизи средней линии и меняет свой знак с отрицательного на линии $r = R_1$ а положительный на линии $r = R_2$. Скорость V_φ уменьшается вблизи и увеличивается на уровне плоской части подушки. Это объясняется тем, что зазор там минимален и приток смазки ограничен.

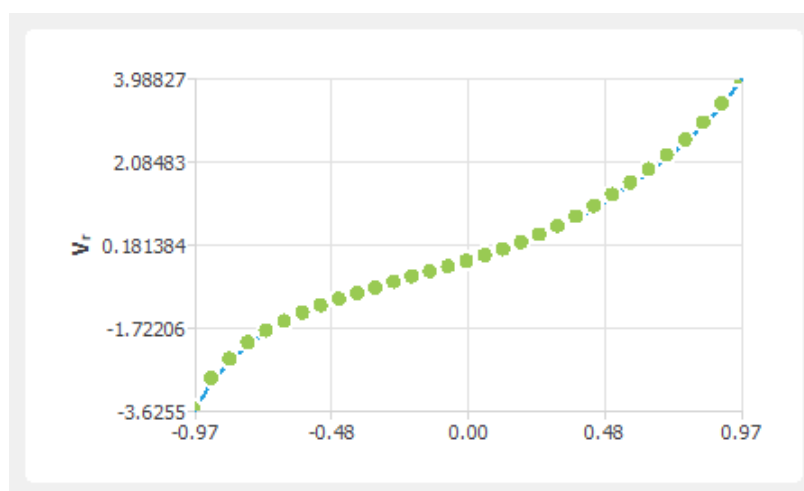


Рисунок 20 - График скорости V_r

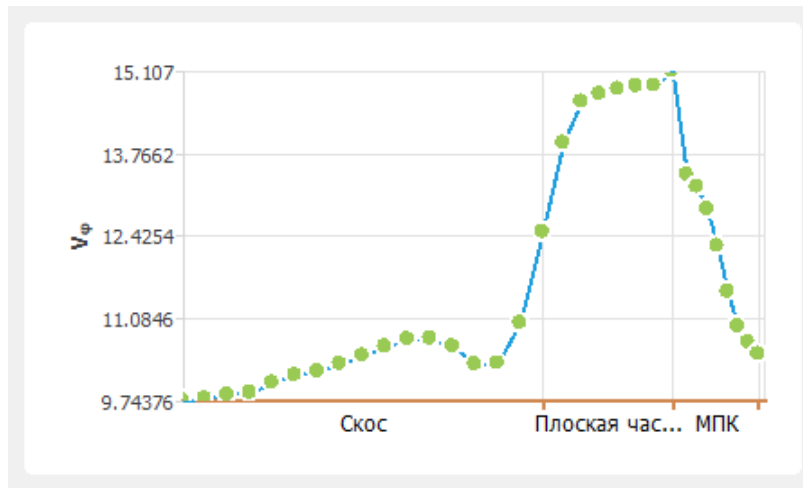


Рисунок 21 - График скорости V_φ

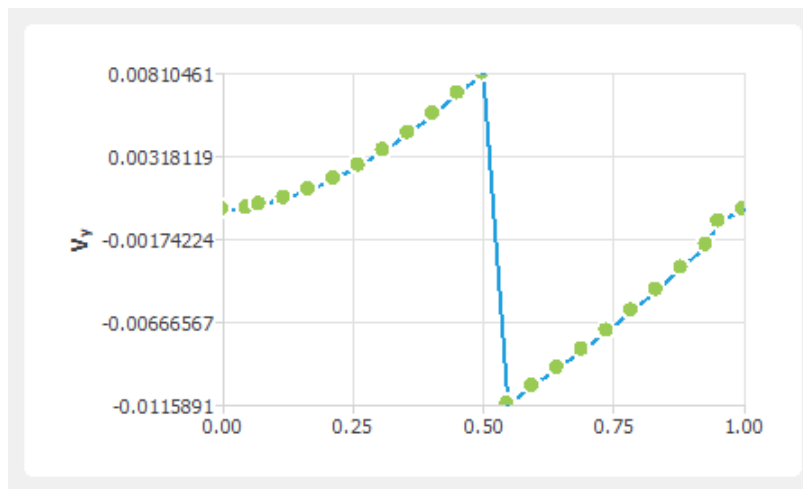


Рисунок 22 - График скорости V_y

На рисунках 23 – 25 представлены графики изотерм в области подушки, диска и смазочного слоя. Стоит обратить внимание, из-за наличие скорости V_φ в диске, температура в направлении φ не изменяется.

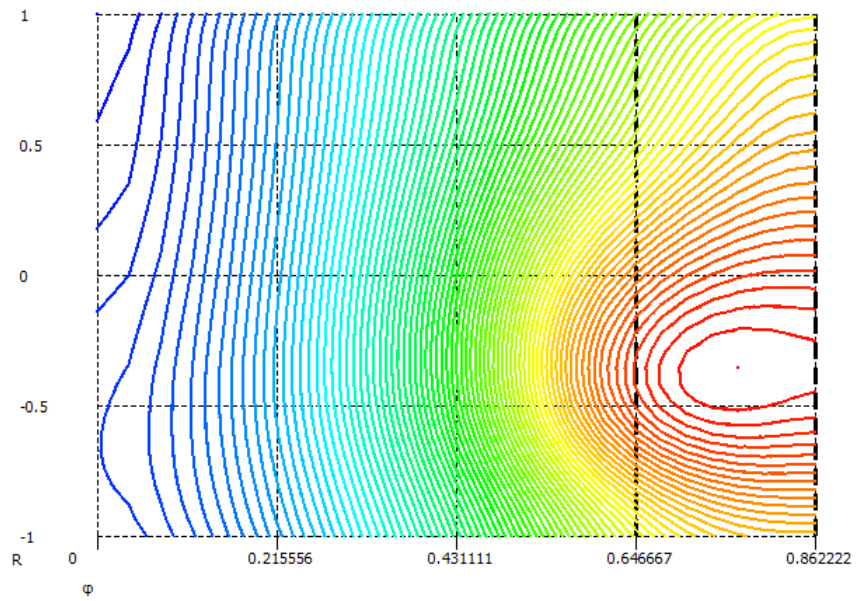


Рисунок 23 - График изотерм в области подушки

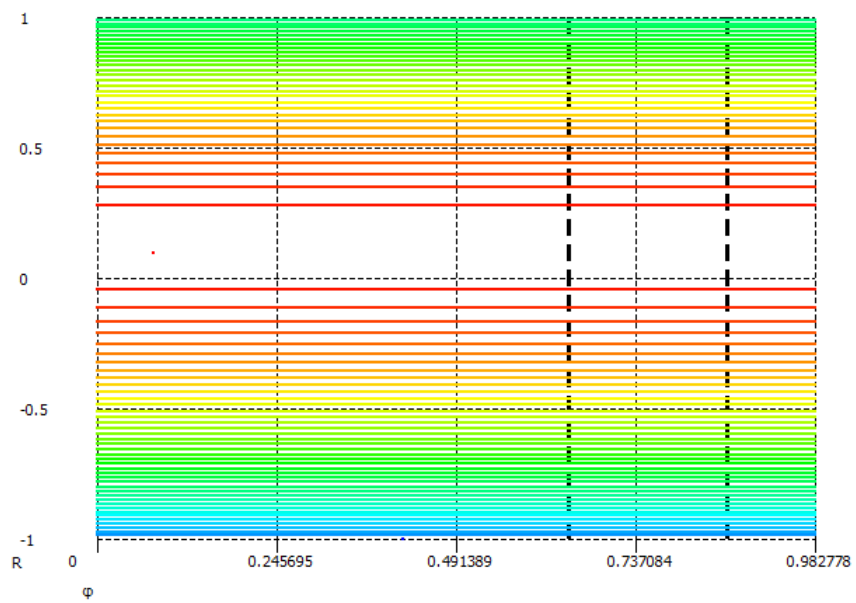


Рисунок 24 - График изотерм в области диска

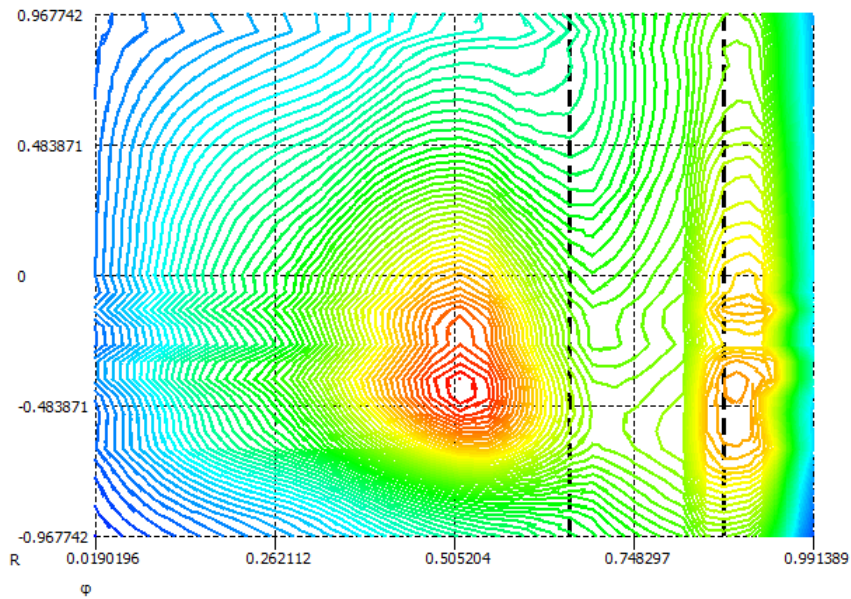


Рисунок 25 - График изотерм в области смазочного слоя

В ходе работы подшипника диск совершает перемещение по заданной траектории. На рисунке 26 представлен график изменения толщины зазора h в зависимости от времени при синусоидальной траектории движения диска. Тут и далее, точками отмечается рассматриваемая характеристика, а линией — поведение диска. При приближении диска к подушке значения функции отмеченной линией увеличиваются, при отдалении — уменьшаются.

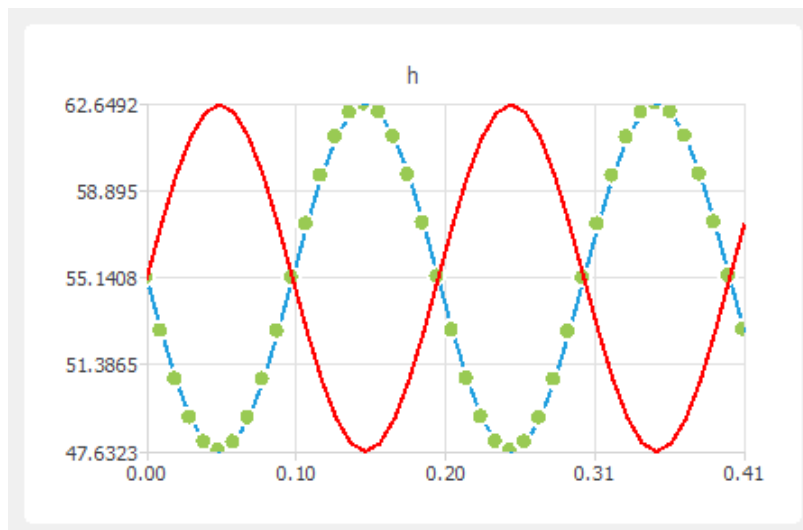


Рисунок 26 - График толщины зазора h

Такое поведение диска влияет на характеристики подшипника. На рисунке 27 представлен график давления в зависимости от времени при

движении диска. На рисунках 28–30 представлены графики изменения скорости течения смазки.

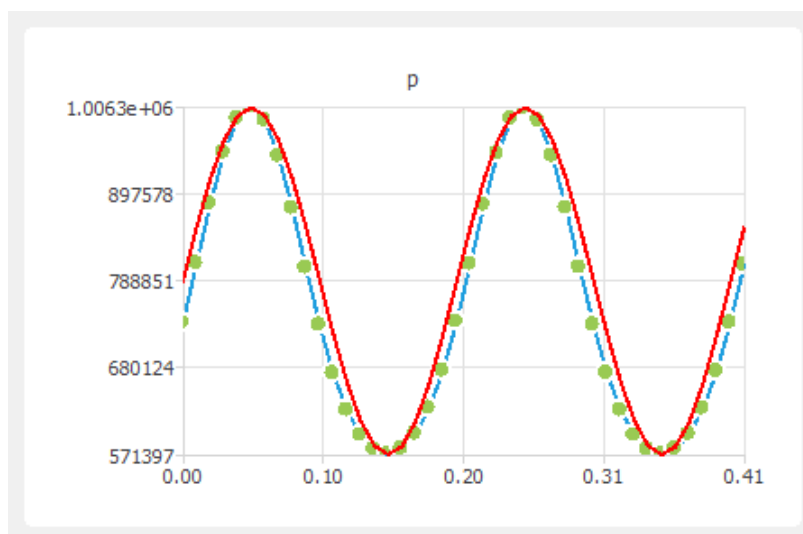


Рисунок 27 - График изменения давления во времени при движении диска

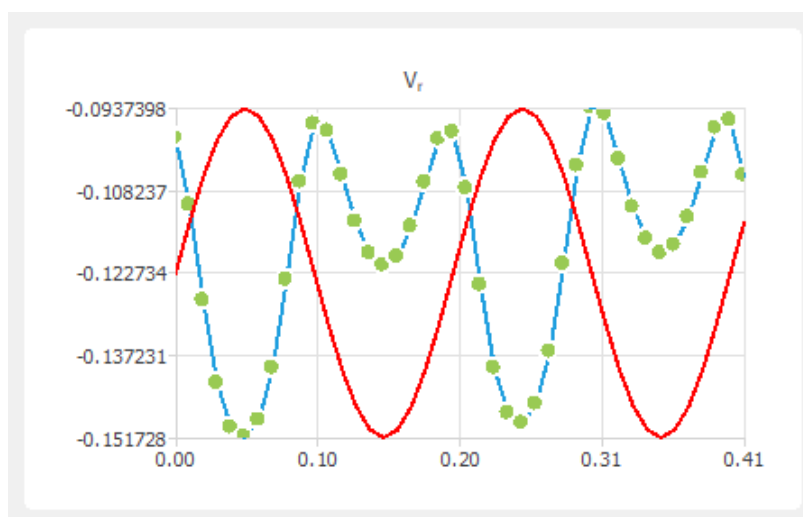


Рисунок 28 - График изменения скорости V_r течения смазки

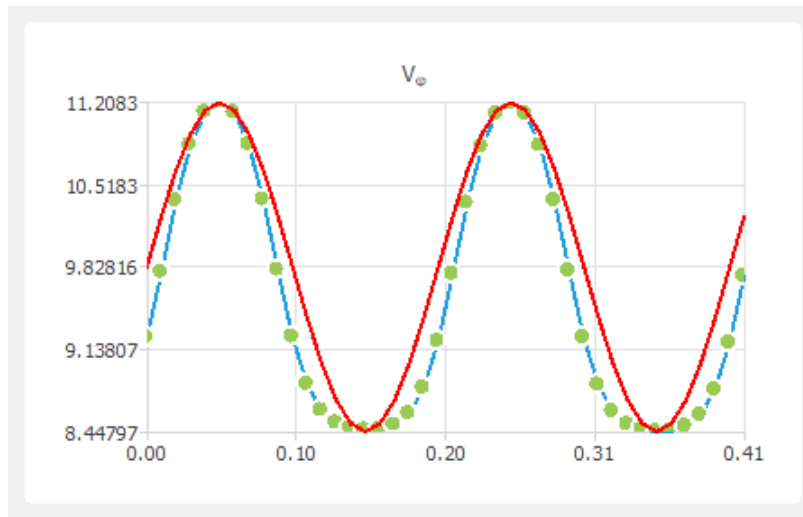


Рисунок 29 - График изменения скорости V_ϕ течения смазки

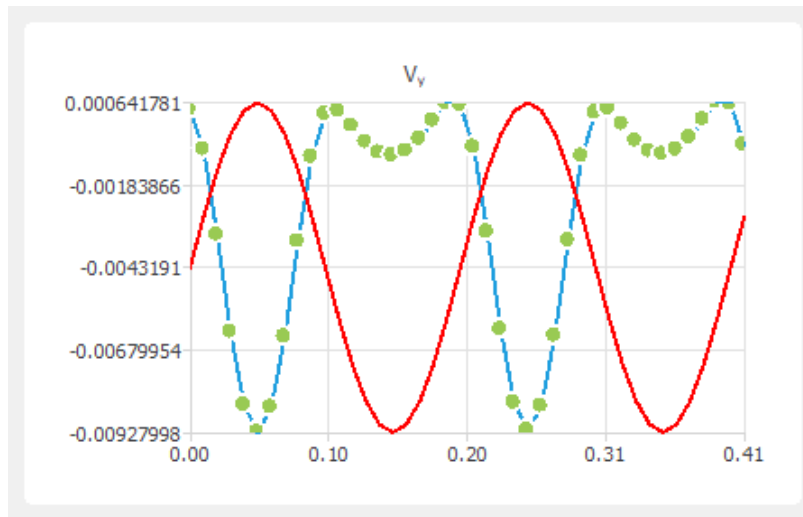


Рисунок 30 - График изменения скорости V_y течения смазки

По известному давлению, температурам и скоростям можно узнать о расходах смазки, несущей способности подшипника и потерях мощности на трение. На графиках 31–33 представлены соответствующие характеристики подшипника.

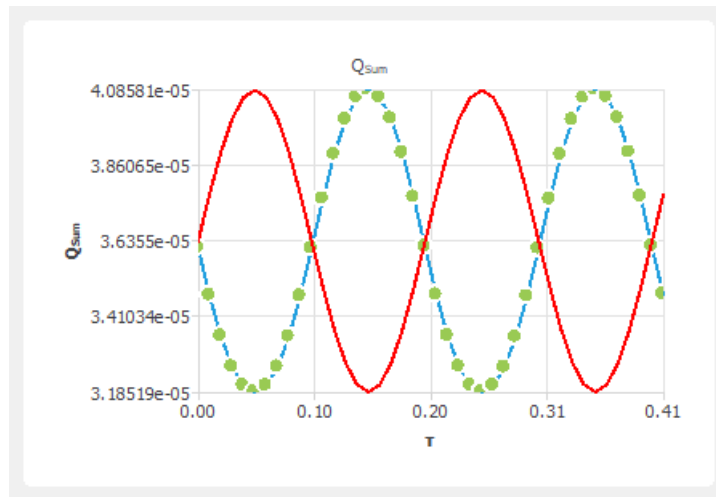


Рисунок 31 - График потерь смазки подшипника

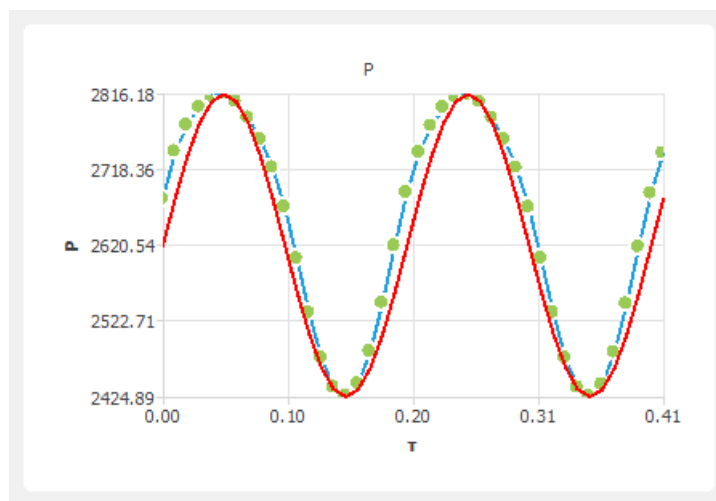


Рисунок 32 - График несущей способности подшипника

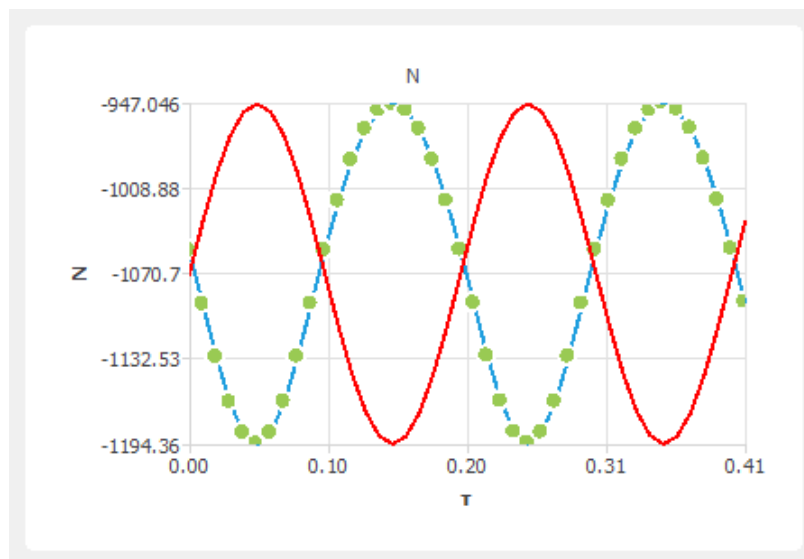


Рисунок 33 - График потерь мощности на трение

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено построение сеточных алгоритмов решения нестационарных уравнений в частных производных второго порядка, которые возникают при моделировании задач гидродинамической теории смазки упорных подшипников. Для уравнения Рейнольдса была построена сеточная схема методом сумматорных тождеств. Описывающее теплопередачу в подушке и диске уравнение энергии, было сведено к решению систем линейных уравнений методом конечных элементов. В смазочном слое была построена сеточная схема разрывным методом Галёркина, вычислительная состоятельность которой была подтверждена численными экспериментами. Для построения единого решения в расчётной области был построен метод декомпозиции областей, обеспечивший непрерывность и гладкость решения на разделах твердых областей и смазочного слоя подшипника. При построении матриц использовались разреженные матрицы библиотеки классов Eigen. Для решения систем уравнений использовались построенные в работе методы, а так же метод верхней релаксации, LU и LLT . Численные эксперименты показали, что построенный комплекс программ может быть использован для исследования поведения подшипника при его различных физических и геометрических параметрах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Sokolov N.V., Khadiev M.B., Maksimov T.V., Fedotov E.M., Fedotov P.E. Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbocharger / Journal of Physics: Conference Series, – 2019. – Vol. 1158 – No. 4. – P.1 - 9.
2. Соколов Н.В., Хадиев М.Б., Федотов Е.М., Федотов П.Е. Математическое моделирование динамически нагруженного упорного подшипника скольжения центробежного компрессора / Актуальные проблемы морской энергетики: материалы восьмой международной научно-технической конференции. – СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2019. – С. 307-311
3. Максимов В.А., Федотов Е.М., Хадиев М.Б. Гидродинамически и деформационные характеристики смазочных слоев упорных подшипников. Часть I. Влияние упорного диска и межподушечного канала // Гидродинамическая теория смазки : Труды международного научного симпозиума. – Орел, 2006. – Т.1. С. 233-239
4. Максимов В.А., Федотов Е.М., Хадиев М.Б. Гидродинамические и деформационные характеристики смазочных слоев упорных подшипников. Часть II. Исследование плоскопараллельных неподвижных и реверсивных самоустанавливающихся подушек // Гидродинамическая теория смазки : Труды международного научного симпозиума. – Орел, 2006. – Т.1. С. 240-249
5. Даутов Р.З., Карчевский М.М., Федотов Е.М., Паранин Ю.А., Карчевский А.М. Численное моделирование тепловых полей охлаждаемого спирального компрессора сухого сжатия // Сб. науч. трудов под ред. И.Г. Хисамеева: "Проектирование и исследование компрессорных машин Вып. 6. – Изд-во ЗАО "НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа Казань 2009
6. Хадиев М.Б., Соколов Н.В., Федотов Е.М. Гидродинамические, тепловые и деформационные характеристики смазочных слоев упорных

подшипников со скосом, параллельным радиальному межподушечному каналу // Вестник машиностроения.– Москва: изд-во Машиностроение, 2014, 5, С. 54 -58 // Гидродинамическая теория смазки : Труды международного научного симпозиума. – Орел, 2006. – Т.1. С. 233-239

7. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики — КГУ: Казань, 1976, 158 с.
8. Андреев В.Б. Численные методы — Москва, 2013, 324 с.
9. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980, 512 с.
10. Карчевский М.М., Лапин А.В. Некоторые вопросы теории метода конечных элементов — Казань, 1981, 110 с.
11. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов — КГУ.: Казань, 2004, 234 с.
12. Федотов Е.М. Предельные схемы Галёркина-Петрова для нелинейного уравнения конвекции-диффузии // Дифференц. уравнения.– Т. 46,– 2010,– 7, С.1033-1043
13. Dolean V., Jolivet P., Nataf F. An Introduction to Domain Decomposition Methods: algorithms, theory and parallel implementation, France: Master, 2015.
14. Федотов П.Е., Федотов Е.М., Соколов Н.В., Хадиев М.Б. "*Sm2Px3Txτ* — Динамически нагруженный упорный подшипник скольжения при постановке обратной задачи" Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2020615227, 19 Май 2020.
15. Федотов П.Е. Решение стационарного уравнения теплопроводности в смазочном слое упорного подшипника / Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского федерального

университета 2019 года: сборник статей.-Казань: Издательство казанского университета, 2019. – с.1475-1477

16. Федотов П.Е. Численное исследование сеточной схемы для уравнения энергии в смазочном слое упорного подшипника / XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых): Международная молодёжная научная конференция, 7-8 ноября 2019 года: Материалы конференции. Сборник докладов. – В 6т.; Т.4 – Казань: изд-во ИП Сагиева А.Р., 2019. – с. 148-151
17. Федотов П.Е. Решение уравнения энергии в смазочном слое упорного подшипника / Лобачевские чтения – 2019 // Материалы Восемнадцатой молодежной научной школы-конференции. – Казань: Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. – Т.58. – С.194-197
18. Федотов П.Е. Численное моделирование нестационарных полей температуры в упорном подшипнике скольжения / Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского федерального университета 2020 года
19. Федотов П.Е. Численное моделирование нестационарных полей температуры в упорном подшипнике скольжения // Материалы конференции Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием имени профессора О.Н. Пьявченко «КомТех2020»
20. Sparse linear algebra. Eigen. - URL: http://eigen.tuxfamily.org/dox/group__Sparse__chapter.html (дата обращения 01-May-2020)

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
bool OSDProblemState::Reynolds()
{
// Размерности
const int64_t &Nr    = m_mesh->config.NrR;
const int64_t &Np    = m_mesh->config.Np_n;
const int64_t &NrNp = m_mesh->Fast.Reyn.NrNp;

const double &lambda2 = m_taskVars->Fast.lambda2;

const bool diricletMode =
static_cast<bool>(m_taskVars->comData.dirichletReyn);

// Шаги
double hr      = 0;
double hrLast  = 0;
double hrbar   = 0;

double hp      = 0;
double hpLast  = 0;
double hpbar   = 0;
double hphpbar = 0; // hp * hpbar

// Значение phi и r в точке
double srp1    = 0;
double srp1Next = 0;

// Максимальное количество итераций
```

```

const int64_t &maxIterReyn =
m_methVars->data.maxIterReyn;
// Допустимая погрешность
const double &tol = m_methVars->data.tolReyn;
// Погрешность
double maxErr = 0;
// Максимальный элемент на интерации
double pMax = 0;

// Итерационный параметр
const double &w = m_methVars->data.wReyn;
double w1 = (1 - w);

// Индексы
int64_t idxc = 0; // Индекс элемента k1
int64_t idxl = 0; // Индекс элемента k1-1
int64_t idxr = 0; // Индекс элемента k1+1
int64_t idxu = 0; // Индекс элемента k+11
int64_t idxd = 0; // Индекс элемента k-11

// Первая точка области
const int64_t idxcFirst = Nr + 1      ;
// Индекс элемента k1
const int64_t idxlFirst = idxcFirst - Nr;
// Индекс элемента k1-1
const int64_t idxrFirst = idxcFirst + Nr;
// Индекс элемента k1+1
const int64_t idxuFirst = idxcFirst + 1 ;
// Индекс элемента k+11
const int64_t idxdFirst = idxcFirst - 1 ;
// Индекс элемента k-11

```

```

// Указатели на элементы
arrxd::Scalar *pk1 = 0; // k1 элемент в массиве p
arrxd::Scalar *p1 = 0; // k1-1 элемент в массиве p
arrxd::Scalar *pr = 0; // k1+1 элемент в массиве p
arrxd::Scalar *pu = 0; // k+1l элемент в массиве p
arrxd::Scalar *pd = 0; // k-1l элемент в массиве p
// Старое значение в k1
double pk1Old = 0;

// Указатели на значения толщины зазора
arrxd::Scalar *h3c = 0; // k1 элемент в массиве hReyn3
arrxd::Scalar *h3l = 0; // k1-1 элемент в массиве hReyn3
arrxd::Scalar *h3r = 0; // k1+1 элемент в массиве hReyn3
arrxd::Scalar *h3u = 0; // k+1l элемент в массиве hReyn3
arrxd::Scalar *h3d = 0; // k-1l элемент в массиве hReyn3

// Значения функций
//arrxd f0, f1, f2;
arrxd::Scalar *f0c = 0; // k1
arrxd::Scalar *f0l = 0; // k1-1
arrxd::Scalar *f0r = 0; // k1+1
arrxd::Scalar *f0u = 0; // k+1l
arrxd::Scalar *f0d = 0; // k-1l

// Коэффициенты
double aPart = 0;
double aPartNext= 0;
//double bPart = 0;
//double bPartNext= 0;

double a = 0; // делённые на h и hbar
double aNext = 0; // делённые на h и hbar

```



```

double b          = 0;    // делённые на h и hbar
double bNext      = 0;    // делённые на h и hbar

double aSum       = 0;    // сумма a и aNext для знаменателя
double bSum       = 0;
double Sum        = 0;    // Для проверки знаков

//arrxd dh_dtau = specData.dh_dtau;

arrxd fReynk1;
arrxd fReynk0;
arrxd fReynkNp;

// Правая часть
{
const double &mu0_muAst = m_taskVars->Fast.mu0_muAst;
const double &RePsiSigmaLambda2 =
m_taskVars->Fast.RePsiSigmaLambda2;
const double &Sh = m_taskVars->data.Sh;
arrxd &A = (*specData.AReyn);

A.setZero();
if(!executionStage.inStationary)
{
arrxd rhoH(m_mesh->Fast.Reyn.NrNp);
arrxd rhoV(m_mesh->Fast.Reyn.NrNp);
arrxd interpTemp0(m_mesh->Fast.Oil.NrNp);
arrxd interpTempn(m_mesh->Fast.Oil.NrNp);
m_mesh->POToD(
specData.rho->segment(m_mesh->Fast.Center.lastLvl,
m_mesh->Fast.Center.NrNp),

```

```

        interpTempn);
m_mesh->dataStd2Reyn(interpTemp0, rhoV);
m_mesh->dataStd2Reyn(interpTempn, rhoH);

A = ((*specData.hReyn) * (*specData.rhoReyn)
      - (*specData.hReynOld) * (*specData.rhoReynOld))
    / m_mesh->config.tau
    - rhoH * (*specData.dh_dtau);
}

fReynk1 = mu0_muAst *
(
    - RePsiSigmaLambda2 *
    (*specData.f1ReynCentr_hrbar) +
    m_mesh->Fast.Reyn.gsRP1 *
    (
        (*specData.f2ReynCentr_hpbar) +
        Sh * A)
);

fReynk0 = mu0_muAst *
(
    - RePsiSigmaLambda2 *
    specData.f1ReynCentr_hrbar->segment(0, Nr) +
    m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1 *
    (
        (*specData.f2ReynVper_hatk0) +
        Sh * A.segment(0, Nr))
);

const size_t NrNpmNr = NrNp - Nr;
fReynkNp = mu0_muAst *

```

```

(
    - RePsiSigmaLambda2 *
    specData.f1ReynCentr_hrbar->segment(NrNpmNr, Nr) +
    m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1 *
    (
        (*specData.f2ReynVper_hatkNp_1) +
        Sh * A.segment(NrNpmNr, Nr))
);
}

int64_t iter = 0;
for(iter = 0; iter < maxIterReyn; ++iter)
{
    maxErr = 0;
    pMax    = 0;

    //
    // Phi 0
    //
    if(diricletMode == false)
    {

        // Возвращаем индексы в исходное состояние
        idxc = 1;
        idxl = 0; // Слева ничего нет
        idxr = idxc + Nr;
        idxu = idxc + 1;
        idxd = idxc - 1;

        // Встаём на узел (1, 1)
        pk1 = &pReyn->coeffRef(idxc);

```

```

pl = &pReyn->coeffRef(idxl);
pr = &pReyn->coeffRef(idxr);
pu = &pReyn->coeffRef(idxu);
pd = &pReyn->coeffRef(idxd);

// Толщина зазора ^3
h3c = &specData.hReyn3->coeffRef(idxc);
h3l = &specData.hReyn3->coeffRef(idxl);
h3r = &specData.hReyn3->coeffRef(idxr);
h3u = &specData.hReyn3->coeffRef(idxu);
h3d = &specData.hReyn3->coeffRef(idxd);

// Коэффициенты
f0c = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxc);
f0l = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxl);
f0r = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxr);
f0u = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxu);
f0d = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxd);

// Шаг по направлению phi
hp = m_mesh->mesh.hp[0];
//hp_1 = 1/hp;
hpbar = m_mesh->mesh.hpbarP[0];
hphpbar = hp * hpbar;

srp1Next = m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(1);
// 1 тк по внутренним
hr = m_mesh->mesh.hrR[0]; // для hrLast

aPart =
m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(0) * (*f0d) * (*h3d);

```

```

aPartNext = srp1Next * (*f0c) * (*h3c);
for(int64_t ir = 1; ir < Nr-1; ++ir)
{
// Шаг по направлению r
hrLast = hr;
hr = m_mesh->mesh.hrR[ir];
//hr_1 = 1/hr;
hrbar = m_mesh->mesh.hrbarR[ir];
// Координата r
srp1 = srp1Next;
srp1Next = m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(ir + 1);

a = lambda2 * (aPart + aPartNext)
/ (2 * hrLast * hrbar);
aPart = aPartNext;
aPartNext = srp1Next * (*f0u) * (*h3u);
//a = aNext;
aNNext = lambda2 * (aPart + aPartNext)
/ (2 * hr * hrbar);

bNext = ((*f0c) * (*h3c) + (*f0r) * (*h3r))
/ (2 * srp1 * hphpbar);

aSum = a + aNext;
bSum = bNext;

pk1Old = (*pk1);
// запоминаем старое значение в k1 для сравнения
// if k1
(*pk1) = (fReynk0[ir] +\
          a * (*pd) +\

```

```

        aNext * (*pu) +\
        bNext * (*pr)) / (aSum + bSum);
(*pk1) = w1 * pk1Old + w * (*pk1);

maxErr =
MathSupp::max(maxErr, qAbs<double>((*pk1) - pk1Old));
pMax = MathSupp::max(pMax, qAbs<double>(*pk1));

// Сдвигаемся на следующую точку
++f0c; ++f0l; ++f0r; ++f0u; ++f0d;

++pk1; ++pl; ++pr; ++pu; ++pd;

++h3c; ++h3l; ++h3r; ++h3u; ++h3d;

++idxc; ++idxl; ++idxr; ++idxu; ++idxd;
} // for ir
}

//
// KL
//
{

// Возвращаем индексы в исходное состояние

```

```

idxc = idxcFirst;
idxl = idxlFirst;
idxr = idxrFirst;
idxu = idxuFirst;
idxd = idxdFirst;

// Встаём на узел (1, 1)
pk1 = &pReyn->coeffRef(idxc);
pl  = &pReyn->coeffRef(idxl);
pr  = &pReyn->coeffRef(idxr);
pu  = &pReyn->coeffRef(idxu);
pd  = &pReyn->coeffRef(idxd);

// Толщина зазора ^3
h3c = &specData.hReyn3->coeffRef(idxc);
h3l = &specData.hReyn3->coeffRef(idxl);
h3r = &specData.hReyn3->coeffRef(idxr);
h3u = &specData.hReyn3->coeffRef(idxu);
h3d = &specData.hReyn3->coeffRef(idxd);

// Коэффициенты
f0c = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxc);
f0l = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxl);
f0r = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxr);
f0u = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxu);
f0d = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxd);

hp = m_mesh->mesh.hp[0]; // для hpLast
for(int64_t ip = 1; ip < Np-1; ++ip)
{
// Шаг по направлению phi

```

```

hpLast = hp;
hp = m_mesh->mesh.hp[ip];
hpbar = m_mesh->mesh.hpbarP[ip];
hphpbar = hp * hpbar;

srp1Next =
m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(1);
// 1 тк по внутренним
hr = m_mesh->mesh.hrR[0]; // для hrLast

aPart =
m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(0) * (*f0d) * (*h3d);
aPartNext = srp1Next * (*f0c) * (*h3c);
for(int64_t ir = 1; ir < Nr-1; ++ir)
{
// Шаг по направлению r
hrLast = hr;
hr = m_mesh->mesh.hrR[ir];
//hr_1 = 1/hr;
hrbar = m_mesh->mesh.hrbarR[ir];
// Координата r
srp1 = srp1Next;
srp1Next = m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(ir + 1);

a = lambda2 * (aPart + aPartNext)
/ (2 * hrLast * hrbar);
aPart = aPartNext;
aPartNext = srp1Next * (*f0u) * (*h3u);
//a = ;//aNext;
aNext = lambda2 * (aPart + aPartNext)
/ (2 * hr * hrbar);

```



```

b = ((*f0l) * (*h3l) + (*f0c) * (*h3c)) /
(2 * srp1 * hpLast * hpbar); //bNext;
bNext = ((*f0c) + (*f0r))
/ (2 * srp1 * hphpbar);

aSum = a + aNext;
bSum = b + bNext;

Sum = aSum + bSum;

pk1Old = (*pk1);
// запоминаем старое значение в k1 для сравнения
// if k1
(*pk1) = (fReynkl[idxc] + \
          a * (*pd)      + \
          aNext * (*pu) + \
          b * (*pl)      + \
          bNext * (*pr)) / (Sum);
(*pk1) = w1 * pk1Old + w * (*pk1);

maxErr =
MathSupp::max(maxErr, qAbs<double>((*pk1) - pk1Old));
pMax = MathSupp::max(pMax, qAbs<double>(*pk1));

// Сдвигаемся на следующую точку
++f0c; ++f0l; ++f0r; ++f0u; ++f0d;

++pk1; ++pl; ++pr; ++pu; ++pd;

++h3c; ++h3l; ++h3r; ++h3u; ++h3d;

```

```

++idxc; ++idxl; ++idxr; ++idxu; ++idxd;
}// for ir

// Сдвигаемся на следующую точку
f0c+=2; f0l+=2; f0r+=2; f0u+=2; f0d+=2;

pk1+=2; pl+=2; pr+=2; pu+=2; pd+=2;

h3c+=2; h3l+=2; h3r+=2; h3u+=2; h3d+=2;

idxc+=2; idxl+=2; idxr+=2; idxu+=2; idxd+=2;

}// for ip
}

```

```

//
// Theta_n
//
if(diricletMode == false)
{

// Возвращаем индексы в исходное состояние
idxc = NrNp - Nr + 1;
idxl = idxc - Nr;
idxr = idxc; // справа ничего нет
idxu = idxc + 1;

```

```

idxd = idxc - 1;

// Встаём на узел (1, 1)
pk1 = &pReyn->coeffRef(idxc);
pl  = &pReyn->coeffRef(idxl);
pr  = &pReyn->coeffRef(idxr);
pu  = &pReyn->coeffRef(idxu);
pd  = &pReyn->coeffRef(idxd);

// Толщина зазора ^3
h3c = &specData.hReyn3->coeffRef(idxc);
h3l = &specData.hReyn3->coeffRef(idxl);
h3r = &specData.hReyn3->coeffRef(idxr);
h3u = &specData.hReyn3->coeffRef(idxu);
h3d = &specData.hReyn3->coeffRef(idxd);

// Коэффициенты
f0c = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxc);
f0l = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxl);
f0r = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxr);
f0u = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxu);
f0d = &specData.f0Reyn->coeffRef(idxd);

// Шаг по направлению phi
hpLast = m_mesh->mesh.hp[Np-2];
hp      = m_mesh->mesh.hp[Np-1];
hpbar  = m_mesh->mesh.hpbarP[Np-1];
hphpbar = hp * hpbar;

srp1Next = m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(1);
// 1 тк по внутренним

```

```

hr = m_mesh->mesh.hrR[0]; // для hrLast

aPart = m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(0) * (*f0d) * (*h3d);
aPartNext = srp1Next * (*f0c) * (*h3c);
for(int64_t ir = 1; ir < Nr-1; ++ir)
{
// Шаг по направлению r
hrLast = hr;
hr = m_mesh->mesh.hrR[ir];

hrbar = m_mesh->mesh.hrbarR[ir];
// Координата r
srp1 = srp1Next;
srp1Next = m_mesh->Fast.Reyn.sigmaRP1(ir + 1);

a = lambda2 * (aPart + aPartNext)
/ (2 * hrLast * hrbar);
aPart = aPartNext;
aPartNext = srp1Next * (*f0u) * (*h3u);
//a = aNext;
aNext = lambda2 * (aPart + aPartNext)
/ (2 * hr * hrbar);

b = ((*f0l) * (*h3l) + (*f0c) * (*h3c))
/ (2 * srp1 * hpLast * hpbar);

aSum = a + aNext;
bSum = b;

pk1Old = (*pk1);
// запоминаем старое значение в k1 для сравнения

```

```

// if k1
(*pk1) = (fReynkNp[ir] +\
          a * (*pd) +\
          aNext * (*pu) +\
          b * (*pl)) / (aSum + bSum);
(*pk1) = w1 * pk1Old + w * (*pk1);

maxErr =
MathSupp::max(maxErr, qAbs<double>((*pk1) - pk1Old));
pMax = MathSupp::max(pMax, qAbs<double>(*pk1));

// Сдвигаемся на следующую точку
++f0c; ++f0l; ++f0r; ++f0u; ++f0d;

++pk1; ++pl; ++pr; ++pu; ++pd;

++h3c; ++h3l; ++h3r; ++h3u; ++h3d;

++idxc; ++idxl; ++idxr; ++idxu; ++idxd;
} // for ir
}

if(iter%5 == 0)
    emit outputReynErr(maxErr);

if(maxErr <= tol * pMax)
    break;
} // for iter

if(pReyn->minCoeff() < 0)

```

```
{  
  errorType = ProblemStateErrorType::LowReyn;  
  return false;  
}  
return true;  
}
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

```
void OSDProblemState::buildAqvFull
(SpMatRow & A, arrxd &Kpp, arrxd &Kpy,
arrxd &Kyp, arrxd &Kyy)
{
const int64_t &Nr = m_mesh->config.Nr;
const int64_t &Np = m_mesh->config.Np;
const int64_t &Ny = m_mesh->config.Ny0;

const int64_t &Nrc = m_mesh->config.Nrc;
const int64_t &Nyu = m_mesh->config.Nyu;

const int64_t &NrcNp = m_mesh->Fast.Center.NrNp;
const int64_t &Nu      = m_mesh->Fast.Center.N      ;

const arrxd &Vr = *specData.Vre;
const arrxd &Vp = *specData.Vpe;
const arrxd &Vy = *specData.Vye;

const arrxd Vr_p = (Vr.abs() + Vr)/2;
const arrxd Vr_m = (Vr.abs() - Vr)/2;
const arrxd Vp_p = (Vp.abs() + Vp)/2;
const arrxd Vp_m = (Vp.abs() - Vp)/2;
const arrxd Vy_p = (Vy.abs() + Vy)/2;
const arrxd Vy_m = (Vy.abs() - Vy)/2;

const arrxd &hr_1 = m_mesh->mesh.hr_1;
const arrxd &hp_1 = m_mesh->mesh.hp_1;
const arrxd &hy_1 = m_mesh->mesh.hy0_1;

if(!patternComplete)
```

```

{
A.resize(Nu, Nu);
A.reserve(Eigen::VectorXi::Constant(Nu, 10));

patternComplete = true;
}

#pragma omp parallel for
for(int64_t iy = 0; iy < Nyu; ++iy)
{

// Индексы
int64_t xc      = m_mesh->Fast.Center.lvls(iy);
int64_t xrl    = xc - 1;
int64_t xrr    = xc + 1;
int64_t xpl    =
m_mesh->Fast.Center.lvlsPreTheta(iy);
// Периодичность
int64_t xpr    = xc + Nrc;
int64_t xyl    = xc - NrcNp;
int64_t xyr    = xc + NrcNp;
int64_t xplyl  = xpl - NrcNp;
int64_t xpryl  = xpr - NrcNp;
int64_t xplyr  = xpl + NrcNp;
int64_t xpryr  = xpr + NrcNp;

// Индексы уровня по r для скорости
int64_t idxVr = m_mesh->Fast.Edge.Er1vls(iy);

// Индексы сторон элемента
int64_t xerl = idxVr;
int64_t xerr = xerl + 1;

```



```

int64_t xep1 =
m_mesh->Fast.Edge.Eplvls(iy);
int64_t xepr = xep1 + Nrc;
int64_t xeyl = 0;
int64_t xeyr = 0;

if (iy == 0 || iy == 1)
// Тк ey столько же, сколько Ny
{
xeyl = m_mesh->Fast.Edge.Eylvls(0);
xeyr = m_mesh->Fast.Edge.Eylvls(1);
}
else
{
if (iy == Nyu - 2 || iy == Nyu - 1)
// Тк ey столько же, сколько Ny
{
xeyl = m_mesh->Fast.Edge.Eylvls(Ny - 2);
xeyr = m_mesh->Fast.Edge.Eylvls(Ny - 1);
}
else
{
xeyl = m_mesh->Fast.Edge.Eylvls(iy-1);
xeyr = xeyl + NrcNp;
}
}

for (int64_t ip = 0; ip < Np; ++ip)
{
int64_t ipP1 = ip + 1;

```

```

if (ip == 1) // Периодичность.
{
// Требуется вернуть индекс с правой позиции в левую
xpl = m_mesh->Fast.Center.lvls(iy);
xplyl = xpl - NrcNp;
xplyr = xpl + NrcNp;
}
if (ip == Np-1) // Периодичность
{
ipP1 = 0;
xpr = m_mesh->Fast.Center.lvls(iy);
xpryl = xpr - NrcNp;
xpryr = xpr + NrcNp;

xepr = m_mesh->Fast.Edge.Eplvls(iy);
}

for (int64_t ir = 0; ir < Nrc; ++ir)
{
// Первая часть меры
double mess =
m_mesh->mesh.hr(ir) * m_mesh->mesh.hp(ip);
double &srp1 = m_mesh->Fast.Center.sigmaRP1(ir);

if (iy == 0)
{
mess = mess * m_mesh->mesh.hy0(0) / 2;

const int64_t &z1 = xc;
const int64_t &zr = xyr;
const int64_t &zrpl = xplyr;
const int64_t &zrpr = xpryr;
}
}

```

```

double dA_xpl =
hp_1(ip) * (-Kpp(zl) * hp_1(ip) + Kyp(zl) * hy_1(0));
double dA_zl =
(
+ hp_1(ip) * (Kpp(zl) * hp_1(ip)
- Kpy(zl) * hy_1(0) + Kpp(xpr) * hp_1(ipP1))
+ hy_1(0) * (-Kyp(zl) * hp_1(ip)
+ Kyy(zl) * hy_1(0) + Kyy(zr) * hy_1(0))
);
double dA_xpr = hp_1(ip) * (-Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)
+ Kpy(xpr) * hy_1(0));
double dA_zrpl = hy_1(0) * (+Kyp(zr) * hp_1(ip));
double dA_zr = hy_1(0) * (
+Kpy(zl) * hp_1(ip) - Kyy(zl) * hy_1(0)
- Kyp(zr) * hp_1(ip) - Kyy(zr) * hy_1(0));
double dA_zrpr = hy_1(0) * (-Kpy(xpr) * hp_1(ip));

// Скорости
double dA_xrl = 0;
double dA_xrr = 0;

dA_xpl += hp_1(ip) * (-1 * Vp_p(xepl));
if (ir != 0)
    dA_xrl += hr_1(ir) * (-1 * Vr_p(xerl));
dA_zl +=
+ 1 * hr_1(ir) * (Vr_m(xerl) + Vr_p(xerr))
+ 1 * hp_1(ip) * (Vp_m(xepl) + Vp_p(xepr))
+ hy_1(0) * (Vy(xeyl));
if (ir != Nrc - 1)
    dA_xrr += hr_1(ir) * (-1 * Vr_m(xerr));

```

```

dA_xpr += hp_1(ip) * (-1 * Vp_m(xepr));
dA_zr += hy_1(0) * (Vy(xeyr));

// Граница
dA_zl += hy_1(0) * 2 * sigmaSwT_d * srp1;

#pragma omp critical
{
A.coeffRef(zl, xpl ) = mess * dA_xpl ;
if(ir != 0)
    A.coeffRef(zl, xrl ) = mess * dA_xrl ;
A.coeffRef(zl, zl  ) = mess * dA_zl  ;
if(ir != Nrc-1)
    A.coeffRef(zl, xrr ) = mess * dA_xrr ;
A.coeffRef(zl, xpr ) = mess * dA_xpr ;
A.coeffRef(zl, zrpl) = mess * dA_zrpl;
A.coeffRef(zl, zr  ) = mess * dA_zr  ;
A.coeffRef(zl, zrpr) = mess * dA_zrpr;
}
}
else if (iy == 1)
{
    mess = mess * m_mesh->mesh.hy0(0) / 2;

    const int64_t &zl = xyl;
    const int64_t &zr = xc;
    const int64_t &zlpl = xplyl;
    const int64_t &zlpr = xpryl;

```

```

double dA_zlpl = hy_1(0) * (-Kyp(zl) * hp_1(ip));
double dA_zl = hy_1(0) * (-Kpy(zr) * hp_1(ip)
- Kyy(zr) * hy_1(0)
+ Kyp(zl) * hp_1(ip) - Kyy(zl) * hy_1(0));
double dA_zlpr = hp_1(ip) * Kpy(xpr) * hy_1(0);
double dA_xpl = hp_1(ip) * (-Kpp(zr) * hp_1(ip)
- Kyp(zr) * hy_1(0));
double dA_zr =
(
+ hp_1(ip) * (Kpp(zr) * hp_1(ip) + Kpy(zr) * hy_1(0)
+ Kpp(xpr) * hp_1(ipP1))
+ hy_1(0) * (Kyp(zr) * hp_1(ip) + Kyy(zr) * hy_1(0)
+ Kyy(zl) * hy_1(0) + 2 * Kyy(xyr) * hy_1(1))
);
double dA_xpr = hp_1(ip) * (-Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)
- Kpy(xpr) * hy_1(0));
double dA_xplyr = hy_1(0) * (2 * Kyp(xyr) * hp_1(ip));
double dA_xyr = hy_1(0) * (-2 * Kyp(xyr) * hp_1(ip)
- 2 * Kyy(xyr) * hy_1(1));

// Скорости
double dA_xrl = 0;
double dA_xrr = 0;
dA_zl += hy_1(0) * (-Vy(xeyl));
dA_xpl += hp_1(ip) * (-1 * Vp_p(xepl));
if (ir != 0)
dA_xrl += hr_1(ir) * (-1 * Vr_p(xerl));
dA_zr +=
+ 1 * hr_1(ir) * (Vr_m(xerl) + Vr_p(xerr))
+ 1 * hp_1(ip) * (Vp_m(xepl) + Vp_p(xepr))
+ hy_1(0) * (-Vy(xeyr) + 2 * Vy_p(xeyr));

```

```

if (ir != Nrc-1)
    dA_xrr += hr_1(ir) * (-1 * Vr_m(xerr));
dA_xpr += hp_1(ip) * (-1 * Vp_m(xepr));
dA_xyr += hy_1(0) * (-2 * Vy_m(xeyr));

#pragma omp critical
{
A.coeffRef(zr, zlpl ) = mess * dA_zlpl ;
A.coeffRef(zr, zl   ) = mess * dA_zl   ;
A.coeffRef(zr, zlpr ) = mess * dA_zlpr ;
A.coeffRef(zr, xpl  ) = mess * dA_xpl  ;
if(ir != 0)
    A.coeffRef(zr, xrl  ) = mess * dA_xrl  ;
A.coeffRef(zr, zr   ) = mess * dA_zr   ;
if(ir != Nrc-1)
    A.coeffRef(zr, xrr  ) = mess * dA_xrr  ;
A.coeffRef(zr, xpr  ) = mess * dA_xpr  ;
A.coeffRef(zr, xplyr) = mess * dA_xplyr;
A.coeffRef(zr, xyr  ) = mess * dA_xyr  ;
}

}

else if (iy == Nyu - 3)
{
    mess = mess * m_mesh->mesh.hy0(Ny - 3);

    const int64_t &z1 = xyr;
    const int64_t &zr = z1 + NrcNp;
    const int64_t &zlpl = xplyr;

    double dA_xyl  = hy_1(iy - 1) * (-Kpy(xc) * hp_1(ip)

```

```

- Kyy(xc) * hy_1(iy - 1));
double dA_xpryl= hy_1(iy - 1) * (+Kpy(xpr) * hp_1(ip));
double dA_xpl  = hp_1(ip) * (-Kpp(xc) * hp_1(ip)
- Kyp(xc) * hy_1(iy - 1));
double dA_xc   =
(
+ hp_1(ip)      * (Kpp(xc) * hp_1(ip)
+ Kpy(xc) * hy_1(iy - 1)
+ Kpp(xpr) * hp_1(ipP1))
+ hy_1(iy - 1) * (Kyp(xc) * hp_1(ip)
+ Kyy(xc) * hy_1(iy - 1)
+ 2 * Kyy(zl) * hy_1(iy))
);
double dA_xpr  = hp_1(ip) * (-Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)
- Kpy(xpr) * hy_1(iy - 1));
double dA_zlpl = hy_1(iy - 1) * (Kyp(zl) * hp_1(ip));
double dA_zl   = hy_1(iy - 1) * (-Kyp(zl) * hp_1(ip)
- Kyy(zl) * hy_1(iy));
double dA_zr   = (-Kyy(zl) * hy_1(iy - 1) * hy_1(iy));

// Скорости
double dA_xrl = 0;
double dA_xrr = 0;

dA_xy1 += hy_1(iy - 1) * (-Vy_p(xey1));
dA_xpl += hp_1(ip) * (-Vp_p(xepl));
if (ir != 0)
    dA_xrl += hr_1(ir) * (-Vr_p(xerl));
dA_xc +=
+ hr_1(ir) * (Vr_m(xerl) + Vr_p(xerr))
+ hp_1(ip) * (Vp_m(xepl) + Vp_p(xepr))
+ hy_1(iy - 1) * (Vy_m(xey1) + Vy_p(xeyr));

```

```

if (ir != Nrc-1)
    dA_xrr += hr_1(ir) * (-Vr_m(xerr));
dA_xpr += hp_1(ip) * (-Vp_m(xepr));
dA_zl  += hy_1(iy - 1) * (-Vy_m(xeyr));

#pragma omp critical
{
A.coeffRef(xc, xyl  ) = mess * dA_xyl  ;
A.coeffRef(xc, xpryl) = mess * dA_xpryl;
A.coeffRef(xc, xpl  ) = mess * dA_xpl  ;
if(ir != 0)
    A.coeffRef(xc, xrl  ) = mess * dA_xrl  ;
A.coeffRef(xc, xc   ) = mess * dA_xc   ;
if(ir != Nrc-1)
    A.coeffRef(xc, xrr  ) = mess * dA_xrr  ;
A.coeffRef(xc, xpr  ) = mess * dA_xpr  ;
A.coeffRef(xc, zlpl ) = mess * dA_zlpl ;
A.coeffRef(xc, zl   ) = mess * dA_zl   ;
A.coeffRef(xc, zr   ) = mess * dA_zr   ;
}

}
else if (iy == Nyu - 2)
{
    mess = mess * m_mesh->mesh.hy0(Ny - 2) / 2;

    const int64_t &z1 = xc;
    const int64_t &zr = xyr;
    const int64_t &zrpl = xplyr;
    const int64_t &zrpr = xpryr;

    double dA_xyl  = hy_1(Ny - 2) * (-2 * Kpy(z1) * hp_1(ip)

```



```

- 2 * Kyy(z1) * hy_1(Ny - 2));
double dA_xpry1 = hy_1(Ny - 2) *
(2 * Kpy(xpr) * hp_1(ip));
double dA_xp1 = hp_1(ip) * (-Kpp(z1) * hp_1(ip)
- Kyp(z1) * hy_1(Ny - 2));
double dA_z1 =
(
+ hp_1(ip) * (Kpp(z1) * hp_1(ip)
+ Kpy(z1) * hy_1(Ny - 2)
+ Kpp(xpr) * hp_1(ipP1))
+ hy_1(Ny - 2) * (Kyp(z1) * hp_1(ip)
+ Kyy(z1) * hy_1(Ny - 2)
+ Kyy(zr) * hy_1(Ny - 2))
);
double dA_xpr = hp_1(ip) * (-Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)
- Kpy(xpr) * hy_1(Ny - 2));
double dA_zrpl = hy_1(Ny - 2) * (Kyp(zr) * hp_1(ip));
double dA_zr = hy_1(Ny - 2) * (
+Kpy(z1) * hp_1(ip) + Kyy(z1) * hy_1(Ny - 2)
- Kyp(zr) * hp_1(ip)
- Kyy(zr) * hy_1(Ny - 2));
double dA_zrpr = (-hp_1(ip) * Kpy(xpr) * hy_1(Ny - 2));

// Скорости
double dA_xr1 = 0;
double dA_xrr = 0;

dA_xy1 += hy_1(Ny - 2) * (-2 * Vy_p(xey1));
dA_xp1 += hp_1(ip) * (-1 * Vp_p(xepl));
if (ir != 0)
    dA_xr1 += hr_1(ir) * (-Vr_p(xer1));
dA_z1 +=

```

```

        + 1 * hr_1(ir) * (Vr_m(xerl) + Vr_p(xerr))
        + 1 * hp_1(ip) * (Vp_m(xepl) + Vp_p(xepr))
        + hy_1(Ny - 2) * (Vy(xeyl) + 2 * Vy_m(xeyl));
if (ir != Nrc-1)
    dA_xrr += hr_1(ir) * (-Vr_m(xerr));
dA_xpr += hp_1(ip) * (-1 * Vp_m(xepr));
dA_zr  += hy_1(Ny - 2) * (Vy(xeyr));

#pragma omp critical
{
A.coeffRef(zl, xyl ) = mess * dA_xyl  ;
A.coeffRef(zl, xpryl) = mess * dA_xpryl;
A.coeffRef(zl, xpl ) = mess * dA_xpl  ;
if(ir != 0)
    A.coeffRef(zl, xrl ) = mess * dA_xrl  ;
A.coeffRef(zl, zl ) = mess * dA_zl  ;
if(ir != Nrc-1)
    A.coeffRef(zl, xrr ) = mess * dA_xrr  ;
A.coeffRef(zl, xpr ) = mess * dA_xpr  ;
A.coeffRef(zl, zrpl ) = mess * dA_zrpl  ;
A.coeffRef(zl, zr ) = mess * dA_zr  ;
A.coeffRef(zl, zrpr ) = mess * dA_zrpr  ;
}

}
else if (iy == Nyu - 1)
{
    if ( (m_taskVars->comData.bondCondMPK == 0)
        && (ip >= m_mesh->Fast.Center.Np_nC) )
    {
        const int64_t &zr = xc;
        #pragma omp critical

```

```

    {
    A.coeffRef(zr, zr) = 1.0;
    }
}
else
{
    mess =
    mess * m_mesh->mesh.hy0(Ny - 2) / 2;

    const int64_t &z1 = xyl;
    const int64_t &xylt = xyl - NrcNp;
    const int64_t &zr = xc;
    const int64_t &z1p1 = xply1;
    const int64_t &z1pr = xpryl;

    double dA_xylt = hy_1(Ny - 2) * (-2 * Kyy(z1)
    * hy_1(Ny - 2));
    double dA_z1p1 = hy_1(Ny - 2) * (-Kyp(z1)
    * hp_1(ip));
    double dA_z1 = hy_1(Ny - 2) * (
        -Kpy(zr) * hp_1(ip) + Kyp(z1) * hp_1(ip)
        +Kyy(z1) * hy_1(Ny - 2)
        - Kyy(zr) * hy_1(Ny - 2));
    double dA_z1pr =
    hp_1(ip) * Kpy(xpr) * hy_1(Ny - 2);
    double dA_xp1 = hp_1(ip) * (-Kpp(zr) * hp_1(ip)
    - Kyp(zr) * hy_1(Ny - 2));
    double dA_zr =
    (
        hp_1(ip) * (
        +Kpp(zr) * hp_1(ip) + Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)
        + Kpy(zr) * hy_1(Ny - 2))

```

```

    + hy_1(Ny - 2) * (
        +Kyy(zl) * hy_1(Ny - 2) + Kyp(zr) * hp_1(ip)
        + Kyy(zr) * hy_1(Ny - 2))
    );
double dA_xpr = hp_1(ip) * (-Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)
- Kpy(xpr) * hy_1(Ny - 2));

// Скорости
double dA_xrl = 0;
double dA_xrr = 0;

dA_zl += hy_1(Ny - 2) * (-Vy(xeyl));
dA_xpl += hp_1(ip) * (-1 * Vp_p(xepl));
if (ir != 0)
    dA_xrl += hr_1(ir) * (-1 * Vr_p(xerl));
dA_zr +=
    +1 * hr_1(ir) * (Vr_m(xerl) + Vr_p(xerr))
    + 1 * hp_1(ip) * (Vp_m(xepl) + Vp_p(xepr))
    + hy_1(Ny - 2) * (-Vy(xeyr));
if (ir != Nrc-1)
    dA_xrr += hr_1(ir) * (-1 * Vr_m(xerr));
dA_xpr += hp_1(ip) * (-1 * Vp_m(xepr));

// Граница
if(ip < m_mesh->Fast.Center.Np_nC)
    dA_zr += hy_1(Ny - 2) * (2 * sigmaSwT_n * srp1);

#pragma omp critical
{
A.coeffRef(zr, xy1t) = mess * dA_xy1t;

```

```

A.coeffRef(zr, zlpl) = mess * dA_zlpl;
A.coeffRef(zr, zl ) = mess * dA_zl ;
A.coeffRef(zr, zlpr) = mess * dA_zlpr;
A.coeffRef(zr, xpl ) = mess * dA_xpl ;
if(ir != 0)
    A.coeffRef(zr, xrl ) = mess * dA_xrl ;
A.coeffRef(zr, zr ) = mess * dA_zr ;
if(ir != Nrc-1)
    A.coeffRef(zr, xrr ) = mess * dA_xrr ;
A.coeffRef(zr, xpr ) = mess * dA_xpr ;
}
}
}
else
{
mess = mess * m_mesh->mesh.hy0(iy - 1);

double dA_xyl = hy_1(iy - 1) * (-Kpy(xc) * hp_1(ip)
- Kyy(xc) * hy_1(iy - 1));
double dA_xpryl = hy_1(iy - 1) * (Kpy(xpr) * hp_1(ip));
double dA_xpl = hp_1(ip) * (-Kpp(xc) * hp_1(ip)
- Kyp(xc) * hy_1(iy - 1));
double dA_xc =
(
    hp_1(ip) * (
+ Kpp(xc) * hp_1(ip) + Kpy(xc) * hy_1(iy - 1)
+ Kpp(xpr) * hp_1(ipP1))
+ hy_1(iy - 1) * (
    + Kyp(xc) * hp_1(ip) + Kyy(xc) * hy_1(iy - 1)
    + Kyy(xyr) * hy_1(iy))
);
double dA_xpr = hp_1(ip) * (-Kpp(xpr) * hp_1(ipP1)

```

```

- Kpy(xpr) * hy_1(iy - 1));
double dA_xplyr = hy_1(iy - 1) * (Kyp(xyr) * hp_1(ip));
double dA_xyr    = hy_1(iy - 1) * (-Kyp(xyr) * hp_1(ip)
- Kyy(xyr) * hy_1(iy));

// Скорости
double dA_xrl = 0;
double dA_xrr = 0;

double test = dA_xyl + dA_xpryl + dA_xpl + dA_xrl
+ dA_xc + dA_xrr + dA_xpr + dA_xplyr + dA_xyr;

assert(abs(test) <= 1e-10 * dA_xc);
// Тут ещё нет скоростей

dA_xyl += hy_1(iy - 1) * (-Vy_p(xeyl));
dA_xpl += hp_1(ip) * (-Vp_p(xepl));
if (ir != 0)
    dA_xrl += hr_1(ir) * (-Vr_p(xerl));
dA_xc +=
    +hr_1(ir) * (Vr_m(xerl) + Vr_p(xerr))
    + hp_1(ip) * (Vp_m(xepl) + Vp_p(xepr))
    + hy_1(iy - 1) * (Vy_m(xeyl) + Vy_p(xeyr));
if (ir != Nrc-1)
    dA_xrr += hr_1(ir) * (-Vr_m(xerr));
dA_xpr += hp_1(ip) * (-Vp_m(xepr));
dA_xyr += hy_1(iy - 1) * (-Vy_m(xeyr));

#pragma omp critical
{

```

```

A.coeffRef(xc, xyl ) = mess * dA_xyl ;
A.coeffRef(xc, xpryl) = mess * dA_xpryl;
A.coeffRef(xc, xpl ) = mess * dA_xpl ;
if(ir != 0)
    A.coeffRef(xc, xrl ) = mess * dA_xrl ;
A.coeffRef(xc, xc ) = mess * dA_xc ;
if(ir != Nrc-1)
    A.coeffRef(xc, xrr ) = mess * dA_xrr ;
A.coeffRef(xc, xpr ) = mess * dA_xpr ;
A.coeffRef(xc, xplyr) = mess * dA_xplyr;
A.coeffRef(xc, xyr ) = mess * dA_xyr ;
}

}

// Индексы сторон элемента
xerl = xerl + 1;
xerr = xerr + 1;
xerl = xerl + 1;
xerpr = xerpr + 1;
xeyl = xeyl + 1;
xeyr = xeyr + 1;

// Индексы неизвестных
xc = xc + 1;
xrl = xrl + 1;
xrr = xrr + 1;
xpl = xpl + 1;
xpr = xpr + 1;
xyl = xyl + 1;
xyr = xyr + 1;
xplyl = xplyl + 1;

```

```
xpryl = xpryl + 1;
xplyr = xplyr + 1;
xpryr = xpryr + 1;

} // for ir

idxVr = idxVr + Nr;
xerl = idxVr;
xerr = xerl + 1;

} // for ip

} // for iy

} // buildAqvFull
```


ПРИЛОЖЕНИЕ В

```
void OSDProblemState::disc_Matrix_omega
(vTriplet &coef, vTriplet &coefUnstat)
{
// Массив сдвигов 01, определяющий гру узла
int8_t const* rp = m_mesh->rp;
int8_t const* pp = m_mesh->pp;
int8_t const* yp = m_mesh->yp;

// Шаг по направлениям
const double &tau = m_mesh->config.tau;
const double &tauAst = m_taskVars->data.tauAst;
double hr,
hp,
hy;
double hphy; // для быстроты
double hr_1,
hp_1,
hy_1; // 1/hr, 1/hp, 1/hy

double srp1, srp1Next;

const int64_t &Nr = m_mesh->config.Nr;
const int64_t &Np = m_mesh->config.Np;
const int64_t &Ny = m_mesh->config.NyD;
const int64_t &NrNp = m_mesh->Fast.Disc.NrNp;
const int64_t &N = m_mesh->Fast.Disc.N;

if(coef.size() != (size_t)N)
coef.clear();
coef.reserve(N);
if(coefUnstat.size() != (size_t)N)
```

```

coefUnstat.clear();
coefUnstat.reserve(N);

// Глобальный индекс элемента
int64_t iglEl = 0;
// Компоненты сдвига при
формировании глобального индекса
int64_t iglMk = 0;
int64_t iglMl = 0;
// Глобальные индексы узлов на элементе,
объявление
int64_t iglK, iglL;

int64_t U; // Значение базисной функции
в узле квадратуры
int64_t V; // -||-

// Производные базисной функции в узлах квадратуры
double DrU, DrV, DpU, DpV, DyU, DyV;
// Значения производных
// локальных базисных функций в узлах квадратуры
int8_t const
*dudr, *dudp, *dudy,
*dvdr, *dvdp, *dvdy;

// Меры элементов 3d
double mK;
// Коэффициенты квадратуры 3d
double alphaKV;
// Значения подинт выражений
double a_Omega = 0;
double a_OmegaUnstat = 0;

```

```

// Параметры в выражении
const double &sigma2Rcp2 = m_taskVars->Fast.sigma2Rcp2;
const double &Rcp2theta2 = m_taskVars->Fast.Rcp2theta2;
const double &H2          = m_taskVars->Fast.Hd2          ;
const double &b_dCoef     = m_taskVars->Fast.b_dCoef     ;
const double &Kcoef      = m_taskVars->Fast.KdCoef      ;

for(int64_t iy = 0; iy < Ny-1; ++iy)
{
// Шаг по направлению y
hy = m_mesh->mesh.hyD[iy];
hy_1 = 1/hy;
for(int64_t ip = 0; ip < Np; ++ip)
{
// Шаг по направлению phi
hp = m_mesh->mesh.hp[ip];
hp_1 = 1/hp;

hphy = hp * hy;
srp1Next = m_mesh->Fast.Oil.sigmaRP1(0);
for(int64_t ir = 0; ir < Nr-1; ++ir)
{
// Шаг по направлению r
hr = m_mesh->mesh.hr[ir];
hr_1 = 1/hr;
// Координата r
srp1 = srp1Next;
srp1Next = m_mesh->Fast.Oil.sigmaRP1(ir + 1);
// Мера элемента
mK = hphy * hr;
// Вычисление глобального индекса элемента

```

```

// Коэффициент квадратуры
alphaKV = mK/8;

//
// Вычисляем значения подинт функций
//
dudr = m_mesh->dudr;
dudp = m_mesh->dudp;
dudy = m_mesh->dudy;

for(int8_t k = 0; k < 8; ++k)
// Цикл по базисным функциям на элементе
{
    // Компонента сдвига глобального индекса
    iglMk = ((pp[k])? Nr :0) + ((yp[k])? NrNp :0) + rp[k];
    iglK = iglE1 + iglMk;

    if((ip == Np-1) && (pp[k]))
        iglK -= NrNp;

    dvdr = m_mesh->dudr;
    dvdp = m_mesh->dudp;
    dvdy = m_mesh->dudy;

    for(int8_t l = 0; l < 8; ++l)
    {
        // Производные для v
        //m_mesh->getDrDpDy(l, dvdr, dvdp, dvdy);
        // Компонента сдвига глобального индекса
        iglMl = ((pp[l])? Nr :0) + ((yp[l])? NrNp :0)
        + rp[l];
    }
}

```

```

iglL = iglE1 + iglM1;

if((ip == Np-1) && (pp[l]))
    iglL -= NrNp;

a_Omega          = 0;
a_OmegaUnstat    = 0;
// Бежим по узлам квадратуры
for(int8_t kv = 0; kv < 8; ++kv)
{
    const double srp1loc =
        (rp[kv]) ? srp1Next : srp1;
    // сдвиг по r

    U    = kv == k;
    V    = kv == l;

    DrU = dudr[kv] * hr_1;
    DrV = dvdr[kv] * hr_1;

    DpU = dudp[kv] * hp_1;
    DpV = dvdp[kv] * hp_1;

    DyU = dudy[kv] * hy_1;
    DyV = dvdy[kv] * hy_1;
    a_Omega += Kcoef * srp1loc * (
        DrU * DrV / (sigma2Rcp2)+
        DpU * DpV / (srp1loc * srp1loc * Rcp2theta2) +
        DyU * DyV / H2); // Набла в конце
a_OmegaUnstat += b_dCoef * (U * V) * srp1loc / tau;
}
// A(iglK, iglL) += alphaKV * a_Omega;

```

```

coef.emplace_back(iglL, iglK, alphaKV * a_Omega);
coefUnstat.emplace_back(
    iglL, iglK, alphaKV * a_OmegaUnstat);

    dvdr += 8;
    dvdp += 8;
    dvdy += 8;
} // for l

    dudr += 8;
    dudp += 8;
    dudy += 8;
} // for k
    iglEl++;
} // for ir
    iglEl++;
} // for ip
//iglEl += Nr; // тк 'y' до Ny-1,
} // for iy

}

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

```
void OSDProblemState::pillow_Matrix_omega
(vTriplet &coef, vTriplet &coefUnstat)
{

// Массив сдвигов 01, определяющий гру узла
int8_t const* rp = m_mesh->rp;
int8_t const* pp = m_mesh->pp;
int8_t const* yp = m_mesh->yp;

// Шаг по направлениям
const double &tau = m_mesh->config.tau;
const double &tauAst = m_taskVars->data.tauAst;
double hr,
    hp,
    hy;
double hphy;
double hr_1,
    hp_1,
    hy_1;

double srp1, srp1Next;

const int64_t &Nr = m_mesh->config.Nr;
const int64_t &Np = m_mesh->config.Np_n;
const int64_t &Ny = m_mesh->config.NyP;
const int64_t &NrNp = m_mesh->Fast.Pillow.NrNp;
const int64_t &N = m_mesh->Fast.Pillow.N;

if(coef.size() != (size_t)N)
coef.clear();
coef.reserve(N);
```

```

if(coefUnstat.size() != (size_t)N)
coefUnstat.clear();
coefUnstat.reserve(N);

// Глобальный индекс элемента
int64_t iglEl = 0;
// Компоненты сдвига при
формировании глобального индекса
int64_t iglMk = 0;
int64_t iglMl = 0;
// Глобальные индексы узлов
на элементе, объявление
int64_t iglK, iglL;

int64_t U; // Значение базисной
функции в узле квадратуры
int64_t V; // -||-

// Производные базисной функции в
узлах квадратуры
double DrU, DrV, DpU, DpV, DyU, DyV;
// Значения производных
// локальных базисных функций в
узлах квадратуры
int8_t const
*dudr, *dudp, *dudy,
*dvdr, *dvdp, *dvdy;

// Меры элементов 3d
double mK;
// Коэффициенты квадратуры 3d
double alphaKV;

```



```

// Значения подинт выражений
double a_Omega          = 0;
double a_OmegaUnstat    = 0;

// Параметры в выражении
const double &sigma2Rcp2 = m_taskVars->Fast.sigma2Rcp2;
const double &Rcp2theta2 = m_taskVars->Fast.Rcp2theta2;
const double &H2          = m_taskVars->Fast.Hn2          ;
const double &b_nCoef     = m_taskVars->Fast.b_nCoef      ;
const double &Kcoef       = m_taskVars->Fast.KnCoef       ;

//yNext = m_mesh->mesh.YP[0];
for(int64_t iy = 0; iy < Ny-1; ++iy)
{
// Шаг по направлению y
hy = m_mesh->mesh.hyP[iy];
hy_1 = 1/hy;

for(int64_t ip = 0; ip < Np-1; ++ip)
{
// Шаг по направлению phi
hp = m_mesh->mesh.hp[ip];
hp_1 = 1/hp;

// Мера элемента
hphy = hp * hy;
srp1Next = m_mesh->Fast.Oil.sigmaRP1(0);
for(int64_t ir = 0; ir < Nr-1; ++ir)
{
// Шаг по направлению r
hr = m_mesh->mesh.hr[ir];
hr_1 = 1/hr;
}
}
}

```

```

// Координата r
srp1 = srp1Next;
srp1Next = m_mesh->Fast.Oil.sigmaRP1(ir + 1);
// Мера элемента
mK = hphy * hr;
// Вычисление глобального индекса элемента

// Коэффициент квадратуры
alphaKV = mK/8;

//
// Вычисляем значения подинт функций
//
dudr = m_mesh->dudr;
dudp = m_mesh->dudp;
dudy = m_mesh->dudy;

for(int8_t k = 0; k < 8; ++k)
// Цикл по базисным функциям на элементе
{
    // Производные для u
    //m_mesh->getDrDpDy(k, dudr, dudp, dudy);
    // Компонента сдвига глобального индекса
    iglMk = ((pp[k])? Nr :0) + ((yp[k])? NrNp :0)
    + rp[k];
    iglK = iglEl + iglMk;

    dvdr = m_mesh->dudr;
    dvdp = m_mesh->dudp;
    dvdy = m_mesh->dudy;
}

```

```

for(int8_t l = 0; l < 8; ++l)
{
// Производные для v
//m_mesh->getDrDpDy(l, dvdr, dvdp, dvdy);
// Компонента сдвига глобального индекса
iglMl =
((pp[l])? Nr :0) + ((yp[l])? NrNp :0)
+ rp[l];
iglL = iglEl + iglMl;
a_Omega      = 0;
a_OmegaUnstat = 0;
// Бежим по узлам квадратуры
for(int8_t kv = 0; kv < 8; ++kv)
{
const double srp1loc =
(rp[kv]) ? srp1Next : srp1;
// сдвиг по r

U   = kv == k;
V   = kv == l;

DrU = dudr[kv] * hr_1;
DrV = dvdr[kv] * hr_1;

DpU = dudp[kv] * hp_1;
DpV = dvdp[kv] * hp_1;

DyU = dudy[kv] * hy_1;
DyV = dvdy[kv] * hy_1;

a_Omega += Kcoef * srp1loc * (
DrU * DrV / (sigma2Rcp2)+

```

```

DpU * DpV / (srp1loc * srp1loc * Rcp2theta2) +
DyU * DyV / H2); // Набла в конце

a_OmegaUnstat +=
b_nCoef * (U * V)* srp1loc / tau;
}
// A(iglK, iglL) += alphaKV * a_Omega;
coef.emplace_back(iglL, iglK, alphaKV * a_Omega);
coefUnstat.emplace_back(
    iglL, iglK, alphaKV * a_OmegaUnstat);

dvdr += 8;
dvdp += 8;
dvdy += 8;
} // for l

dudr += 8;
dudp += 8;
dudy += 8;
} // for k
    iglEl++;
} // for ir
    iglEl++;
} // for ip
    iglEl += Nr; // тк 'y' до Ny-1,
} // for iy

}

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020615227

**«Sm2Px3Tхт – Динамически нагруженный упорный
подшипник скольжения при постановке прямой задачи»**

Правообладатели: **Федотов Павел Евгеньевич (RU), Федотов Евгений Михайлович (RU), Соколов Николай Викторович (RU), Хадиев Муллагали Бариевич (RU)**

Авторы: **Федотов Павел Евгеньевич (RU), Федотов Евгений Михайлович (RU), Соколов Николай Викторович (RU), Хадиев Муллагали Бариевич (RU)**

Заявка № **2020612244**

Дата поступления **02 марта 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **19 мая 2020 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ивлиев**

