Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет
им. М.К.Аммосова»
Институт математики и информатики
Кафедра математического анализа

РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(направление подготовки бакалавров 01.03.01 – Математика)

Выполнил: студент 4 курса
группы БА-МО-16
Верховцев Семен Дмитриевич
Руководитель:
Попов Сергей Вячеславович
д.ф-м.н., профессор

Работа защищена
«___» июня 2020 г.
Оценка ____________
Секретарь ГЭК ____________

Якутск — 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **3**

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА **5**

1.1. Доказательство единственности решения 5

1.2. Интегральное представление решения 7

1.3. Исследование системы интегральных уравнений 9

УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА **13**

2.1. Интегральное представление решения 13

2.2. Исследование системы сингулярных уравнений 15

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **20**

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА **21**

ПРИЛОЖЕНИЯ **23**

П.1. Поведение интеграла типа Коши на контуре 23

П.2. Краевая задача Римана 24

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время решено много модельных задач Жевре. В частности, исследованы задачи Жевре для параболических уравнений с меняющимся направлением времени: вторго порядка [12], третьего порядка [2], четвертого порядка[8], $2n$-го порядка[11]. В монографии [12], дается также постановка и решение задач Жевре со строго эллиптическими и гиперболо-эллиптическими операторами. В данной работе доказана теорема существования и единственности гладкого решения задач Жевре для смешанных уравнений

$$\begin{cases} u_{xxx} + u_t = 0, & x < 0, \\ u_{xx} - u_t = 0, & x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xxx} + u_t = 0, & x < 0, \\ u_{xxxx} + u_t = 0, & x > 0, \end{cases}$$

Особенностью приведенных задач является то, что уравнения имеют разный порядок, из-за чего возникают специфические трудности при стандартном подходе сведения задач к сингулярным интегральным уравнениям.

Объектом исследований выпускной квалификационной работы являются краевые задачи Жевре для уравнений смешанного типа второй, третьей и четвертой степени.

Предметом выступает сведение задач к интегральным уравнениям с обобщенными операторами типа Абеля, а также решение этих уравнений.

Целью данной работы является доказательство теоремы существования и единственности решения задачи.

Для достижения цели решены следующие задачи:

1. Получить интегральное представление решений.

2. С помощью интегрального представления свести задачи к системе с обобщенными интегральными операторами Абеля.

3. Исследовать полученные системы с обобщенными интегральными операторами Абеля.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка использованной литературы.

Во введении раскрыта актуальность, поставлены цели и задачи, определены объект и предмет исследования.

Основная часть состоит из 2 глав. Первая глава из 3 параграфов содержит постановки задач. Во второй главе исследуются полученные системы интегральных уравнений.

В заключении дается формулировка теоремы существования и единственности решений поставленных краевых задач Жевре.

В конце указан список использованной литературы.

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В этой главе получены теоремы существования и единственности решения для первой из упомянутых во введении задач. Дается интегральное представление решений, с помощью которого задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений. В дальнейшем система упрощается до такой, достаточно гладкое решение которой заведомо существует.

1.1. Доказательство единственности решения

Задачу рассмотрим в $Q = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega = \mathbb{R}$. Обозначим через Q^- и Q^+ части Q, расположенные в области $x < 0$ и $x > 0$. В области $Q^\pm$ рассмотрим указанное во введении уравнение

$$\begin{cases} u_{xxx} + u_t = 0, \quad x < 0, \\ u_{xx} - u_t = 0, \quad x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \\ u(x,T) = \varphi_2(x),\ x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

и условиями склеивания на $x = 0$

$$\begin{cases} \sigma_0 u(-0,t) = u(+0,t), \\ \sigma_1 u_{xx}(-0,t) = u_x(+0,t). \end{cases} \tag{3}$$

Решения уравнения (1) будем искать в пространствах Гёльдера $H^{p_1,p_1/2}_{x,t}(Q^+)$ и $H^{p_2,p_2/3}_{x,t}(Q^-)$ [1]. Для простоты будем предполагать, что $p_1 = 2 + \gamma_1$ и $p_2 = 3 + \gamma_2$, где $0 < \gamma_1 < 1$ и $0 < \gamma_2 < 1$.

Теорема (о единственности решения). Пусть $\sigma_0\sigma_1 > 0$. Тогда краевая задача (1)–(3) имеет не более одного решения.

Доказательство. Рассмотрим в области $Q_N = (-N; N) \times (0; T)$ задачу (1)–(3) с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(-N,t) = u_x(-N,t) = u(N,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Для её решения в Q_N^- выполняется

$$u(u_{xxx} - \operatorname{sgn} x u_t) = \left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right)_x + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t = 0, \quad x < 0. \tag{5}$$

Интегрируя это тождество по области $Q_N^- = (-N; 0) \times (0; T)$, получим

$$\sigma_0\sigma_1 \int_0^T \left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right)\Big|_{x=-0} dt = \frac{\sigma_0\sigma_1}{2} \int_{-N}^0 u^2(x,0)\, dx. \tag{6}$$

Аналогично в Q_N^+ выполняется

$$u(-u_{xx} + u_t) = -(uu_x + u_x^2)_x + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t = 0, \quad x > 0, \tag{7}$$

откуда следует

$$\int_0^T (uu_x)\Big|_{x=+0} dt + \int_0^T \int_0^N u_x^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_0^N u^2(x,T)\, dx = 0. \tag{8}$$

Учитывая условия склеивания (3) из уравнений (6), (8) получим

$$\sigma_0\sigma_1 \int_{-N}^0 u^2(x,0)\, dx + \int_0^N u^2(x,T)\, dx + 2\int_0^T \int_0^N u_x^2\, dt + \\ + \sigma_0\sigma_1 \int_0^T u_x^2(-0,t)\, dt = \\ = 2\int_0^T [\sigma_0\sigma_1 u(-0,t)u_{xx}(-0,t) - u(+0,t)u_x(+0,t)]\, dt \equiv 0. \tag{9}$$

Отсюда в области Q_N^- следует, что

$$u(x,0) = 0 \quad -N \le x \le 0, \quad u(-0,t) = 0 \quad 0 \le t \le T. \tag{10}$$

С другой стороны, интегрируя по частям интеграл

$$\sigma_0\sigma_1 \iint_{Q_N^-} xu(u_{xxx} + u_t) dxdt = 0,$$

с учетом условий (2) и (10), находим

$$\frac{3\,\sigma_0\sigma_1}{2} \iint_{Q_N^-} u_x^2\, dxdt = \sigma_0\sigma_1 \int_0^T uu_x|_{x=-0}\, dt.$$

При $\sigma_0\sigma_1 > 0$ следует, что это равенство возможно только при $u_x(x,t) = 0$ как в Q_N^-, так и в Q_N^+ (см. уравнение (9)). Следовательно, решение не зависит от пространственной переменной $u(x,t) = g(t)$ в $Q_N^{\pm}$. Отсюда, учитывая, что оно непрерывно в $\bar{Q}_N$ и удовлетворяет нулевым граничным условиям, можно сделать вывод, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_N$. Предельным переходом $N \to +\infty$ получаем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\bar{Q}$. $\Box$

.

1.2. Интегральное представление решения

Для дальнейших целей перепишем исходное уравнение (1) в виде двух уравнений в области Q^+

$$\begin{cases} u_t^1 = u_{xx}^1, \ x > 0 \\ u_t^2 = u_{xxx}^2, \ x > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Соответственно будем считать, что начальные условия и условия склеивания тоже заданы на Q^+

$$\begin{cases} u^1(x,0) = \varphi_1(x), \ x > 0, \\ u^2(x,T) = \varphi_2(x), \ x > 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} u^1(0,t) = \sigma_0 u^2(0,t), \ x > 0, \\ u_x^1(0,t) = \sigma_1 u_{xx}^2(0,t), \ x > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Приведем для уравнений (11) соответствующие функции Грина

$$U_0^1(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} f_0^1\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/2}}\right), & t > \tau, \\ 0, & t \le \tau, \end{cases} \tag{14}$$

$$U_0^2(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(t-\tau)^{1/3}} f_0^2\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\right), & t > \tau, \\ 0, & t \le \tau. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь функции $f_0^1(x)$, $f_0^2(x)$ имеют вид

$$f_0^1(x) = \int\limits_0^{\infty} \exp(-\lambda^2)\cos(\lambda x)\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_0^2(x) = \int\limits_0^\infty \cos(\lambda^3 - \lambda x)\, d\lambda = \frac{\pi}{\sqrt[3]{3}} Ai\left(-\frac{x^3}{\sqrt[3]{3}}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$Ai(x)$ — функция Эйри. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$f_0^2(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \quad (f_0^2)'(0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$\int\limits_0^\infty f_0^2(\eta)\, d\eta = \frac{2\pi}{3}, \quad \int\limits_{-\infty}^0 f_0^2(\eta)\, d\eta = \frac{\pi}{3}. \tag{16}$$

Естественно будем предполагать, что начальные условия достаточно гладки: $\varphi_1(x) \in H^{p_1}(\mathbb{R})$, $\varphi_2(x) \in H^{p_2}(\mathbb{R})$, где $p_1 = 2 + \gamma_1$, $p_2 = 3 + \gamma_2$. Тогда

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} U_0^1(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\, d\xi,$$

$$\omega_2(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} U_0^2(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\, d\xi \tag{17}$$

будут решениями уравнений (11), удовлетворяющими начальным условиям (12). Решения поставленной задачи для уравнений (11) будем искать в виде

$$u^1(x,t) = \int\limits_0^t U_0^1(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\, d\tau + \omega_1(x,t),$$

$$u^2(x,t) = \int\limits_t^T U_0^2(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\, d\tau + \omega_2(x,t), \tag{18}$$

где α_0, β_0 – неизвестные плотности. Чтобы искомые решения были из $H_{x,t}^{p_1,p_1/2}(Q^+)$ и $H_{x,t}^{p_2,p_2/3}(Q^+)$ достаточно, чтобы плотности α_0, β_0 принадлежали пространствам $H^{q_1}(Q^+)$, где $\left(q_1 = \frac{\gamma_1+1}{2}\right)$ и $H^{q_2}(Q^+)$ $\left(q_2 = \frac{\gamma_2+1}{3}\right)$ соответственно, причем

$$\alpha_0(0) = \beta_0(T) = 0. \tag{19}$$

В самом деле, из классических результатов по первой и второй краевым задачам для параболических уравнений, известно, что [7] $u^1(x,t) \in H_{x\ t}^{p_1,p_1/2}(Q^+)$, если $\Psi(t) = u^1(0,t) \in H^{p_1/2}(0,T)$ и выполнено так называемые условия согласования $\Psi^{(s)}(0) = \varphi_1^{(2s)}(0) \quad (s = 0,\ldots,1)$. Из представления u^1 в виде

(18), получим $\Psi(t) = u^1(0,t) = \int\limits_0^t U_0^1(0,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau + \omega_1(0,t)$ и, следовательно,

$$\Psi(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau + \omega_1(0,t).$$

Отсюда видно, что при $\alpha_0(0) = 0$ действительно

$$\Psi^{(s)}(0) = \varphi_1^{(2s)}(0)\ (s = 0,1). \tag{20}$$

1.3. Исследование системы интегральных уравнений

Теперь подставим интегральные представления решений (18) в условия склеивания (13). В результате получится система интегральных уравнений, имеющая вид

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau + \omega_1(0,t) = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}}\Gamma(\frac{1}{3})\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau + \sigma_0\omega_2(0,t), \\ -\frac{\pi}{2}\alpha_0(t) + \omega_{1x}(0,t) = \sigma_1\frac{\pi}{3}\beta_0(t) + \sigma_1\omega_{2xx}(0,t) \end{cases} \tag{21}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Gamma(\frac{1}{3})\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau = \Phi_0(t), \\ \alpha_0(t) + \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Phi_1(t), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\Phi_0(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sigma_0\omega_2(0,t) - \omega_1(0,t)\right),$$

$$\Phi_1(t) = \frac{2}{\pi}\left(\omega_{1x}(0,t) - \sigma_1\omega_{2xx}(0,t)\right).$$

Применим к первому уравнению в (22) формулу обращения операторов Абеля [4]

$$\begin{cases} \alpha_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0(t,\tau)\beta_0(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_0(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau, \\ \alpha_0(t) + \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Phi_1(t), \end{cases} \tag{23}$$

где

$$K_0(t,\tau) = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sigma_0\Gamma(\frac{1}{3})}\begin{cases} -\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\tau}{t}\right)^{\frac{2}{3}}\dfrac{F\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{5}{3};\frac{\tau}{t}\right)}{(t-\tau)^{5/6}} \\ \left(\dfrac{\tau}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{2};\frac{t}{\tau}\right)}{(\tau-t)^{5/6}} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{k_0^1(t,\tau)}{(t-\tau)^{5/6}}, & \tau < t, \\ \dfrac{k_0^2(t,\tau)}{(\tau-t)^{5/6}}, & \tau > t. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$F_1(t) = \Phi_1(t) - \Phi_1(0),$$
$$F_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\Phi_0'(\tau) - \Phi_0'(0)}{(t-\tau)^{1/2}}\,d\tau,$$

. Если $\gamma_1 \le \frac{2}{3}\gamma_2 - \frac{1}{3}$ $\left(\gamma_2 \le \frac{3}{2}\gamma_1\right)$, то $F_0(t)$, $F_1(t)$ принадлежат пространству Гёльдера с показателем $(1+\gamma_1)/2$ ($(1+\gamma_2)/3$), причем $F_0(t) = F_1(t) = O(t^{(1+\gamma_1)/2})$ ($O(t^{(1+\gamma_2)/3})$) для малых t.

Предположим, что $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ принадлежат искомым пространствам. Тогда из системы (23) следует

$$-\frac{\sqrt{3\pi}}{\sigma_0\Gamma(\frac{1}{3})}\int\limits_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau^{1/3}}\,d\tau = \Phi_0(0). \tag{24}$$

При выполнении (24) систему (23) можно переписать так:

$$\begin{cases} \alpha_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^1(t,\tau)\beta_0(\tau)\,d\tau = \frac{2}{\pi}\Phi_0'(0)t^{\frac{1}{2}} + F_0^0(t), \\ \alpha_0(t) + \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Phi_1(0) + F_1^0(t), \end{cases} \tag{25}$$

где при $t < \tau$ имеем

$$K_0^1(t,\tau) = K_0(t,\tau) + \frac{\sqrt{3\pi}}{\sigma_0 t^{1/2}\tau^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})} = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sigma_0\Gamma(\frac{1}{3})}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{(\tau-t)^{\frac{5}{6}}} + \dots.$$

Введем в (23) новые искомые функции $\bar{\beta}_0(t) = \beta_0(t) - \beta_0(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (25) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \alpha_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^1(t,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau = \\ = \frac{\beta_0(0)}{\pi T}\int\limits_0^T K_0^1(t,\tau)(T-\tau)\,d\tau + \frac{2}{\pi}\Phi_0'(0)t^{\frac{1}{2}} + F_0^0(t), \\ \alpha_0(t) + \frac{2}{3}\bar{\beta}_0(t) = -\frac{2}{3T}(T-t)\beta_0(0) + F_1^0(t), \end{cases} \tag{26}$$

где $\beta_0(0) = \frac{3}{2}\Phi_1(0)$. Так как $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ ищем из пространства Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$, $\frac{1+\gamma_2}{3}$, то должны выполняться условия

$$\int\limits_0^T \frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau^{7/6}}\,d\tau = 0, \quad \Phi_0'(0) = 0. \tag{27}$$

Таким образом, при выполнении условий (24), (27) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^2(t,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau = \overline{F}_0^0(t), \\ \alpha_0(t) + \frac{2}{3}\bar{\beta}_0(t) = \overline{F}_1^0(t), \end{cases} \tag{28}$$

где $\overline{F}_0^0(t) = \frac{\beta_0(0)}{\pi T}\int\limits_0^T K_0^1(t,\tau)(T-\tau)\,d\tau + F_0^0(t)$, $\overline{F}_1^0(t) = -\frac{2}{3T}(T-t)\beta_0(0) + F_1^0(t)$,

$$K_0^2(t,\tau) = K_0^1(t,\tau) + \frac{\sqrt{3\pi}t^{1/3}}{\sigma_0\tau^{7/6}\Gamma(\frac{1}{3})} = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sigma_0\Gamma(\frac{1}{3})}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{7}{6}}\frac{1}{(\tau-t)^{\frac{5}{6}}} + \ldots, \quad t<\tau.$$

Отметим, что $\overline{F}_0^0(t)$, $\overline{F}_1^0(t)$ принадлежат пространствам Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$ или $\frac{1+\gamma_2}{3}$, причем имеют нули соответствующего порядка при малых t.

Исключая, $\alpha_0(t)$ в системе (28), получим интегральное уравнение относительно $\bar{\beta}_0(t)$

$$\frac{2}{3}\bar{\beta}_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^2(t,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau = Q(t), \tag{29}$$

где

$$Q(t) = \overline{F}_1^0(t) - \overline{F}_0^0(t).$$

Из уравнения (29) следует, что для того, чтобы $\beta_0(T) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^2(T,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau = Q(T). \tag{30}$$

При выполнении условия (30) придем к следующему уравнению:

$$\frac{2}{3}\bar{\beta}_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^3(t,\tau)\bar{\beta}_0(\tau)\,d\tau = Q_1(t), \tag{31}$$

где

$$K_0^3(t,\tau) = K_0^2(t,\tau) - K_0^2(T,\tau), \quad Q_1(t) = Q(t) - Q(T).$$

Так как $Q_1(t)$ принадлежит пространству Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$, $\frac{1+\gamma_2}{3}$, то функция $\bar{\beta}_0(t)$, представленная формулой (31) удовлетворяет условию

Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$, $\frac{1+\gamma_2}{3}$ во всех точках контура $(0,T)$, включая концы интервала. Системы уравнений (31) эквивалентны исходной системе уравнений (24) при выполнении условий (24), (27) и (30). Подставляя найденные значения функций $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ в условия (24), (27) и (30), получим условия разрешимости задачи (1)–(3). Эти условия обозначим так:

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, 2, 3, . \tag{32}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\varphi_1 \in H^{p_1}(Q^+)$ $(p_1 = 2+\gamma_1)$, $\varphi_2 \in H^{p_2}(Q^-)$ $(p_2 = 3+\gamma_2)$, $0 < \gamma_1 < \frac{2}{3}$, $\frac{1}{2} < \gamma_2 < 1$. Тогда при выполнении условий (32) существует единственное решение уравнения (1) в Q, удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространств $H_{x\ t}^{p_2, p_2/3}(Q^-)$, $H_{x\ t}^{p_1, p_1/2}(Q^+)$.

Аналогичные исследования можно провести в случае $\varphi_1 \in H^p$ $(p = 2l+\gamma)$, $\varphi_2 \in H^p$ $(p = 3l+\gamma)$, $0 < \gamma < 1$, где $l \geq 1$ — целое число.

УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В этой главе даны теоремы существования и единственности решения для второй задачи. Изложение аналогично предыдущему.

2.1. Интегральное представление решения В области $Q^{\pm}$ рассматривается

уравнение

$$\begin{cases} u_{xxx} + u_t = 0, \quad x < 0, \\ u_{xxxx} + u_t = 0, \quad x > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Решение уравнения (33) ищется из пространства Гёльдера, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x), \quad x < 0, \tag{34}$$

и условиям склеивания:

$$\begin{cases} u(-0,t) = u(+0,t), \\ u_x(+0,t) = 0, \\ u_{xx}(-0,t) = u_{xxx}(+0,t). \end{cases} \tag{35}$$

Единственность задачи (33)–(35) рассматривается аналогично предыдущему.

Как и выше, вместо уравнения (33), будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 + u_{xxxx}^1 = 0, \quad u_t^2 = u_{xxx}^2 \tag{36}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид:

$$u^1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x,T) = \varphi_2(x),\ x > 0, \tag{37}$$

$$u^1(0,t) = u^2(0,t), \quad u_x^1(0,t) = 0, \quad u_{xxx}^1(0,t) = u_{xx}^2(0,t). \tag{38}$$

Прежде чем приступить к доказательству существования решения поставленной задачи, напомним фундаментальное и элементарное решения Б. Пини уравнения (33) при $x > 0$.

Фундаментальное и элементарное решения Б. Пини имеют вид

$$V_i(x,t;\xi,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{(t-\tau)^{1/4}}g_i\left(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/4}}\right), & t>\tau,\\ 0, & t\le\tau,\end{cases} \tag{39}$$

где функции $g_0(x)$, $g_1(x)$ являются решениями уравнения

$$z'''(\eta)-\frac{\eta}{4}z(\eta)=0, \tag{40}$$

и имеют вид

$$g_0(\eta)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^4}\cos(\lambda\eta)\,d\lambda,\quad -\infty<\eta<+\infty,$$

$$g_1(\eta)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^4}(e^{-\lambda\eta}-\sin\lambda\eta)\,d\lambda,\quad \eta>-\infty.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$g_i(0)=\frac{1}{4}\,\Gamma(1/4)\quad (i=0,1);$$

$$g_0'(0)=0,\quad g_1'(0)=-\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2);$$

$$g_1''(0)=\frac{1}{4}\,\Gamma(3/4);\quad g_0''(0)=-\frac{1}{4}\,\Gamma(3/4);$$

$$\int\limits_0^\infty g_0(\eta)\,d\eta=\int\limits_{-\infty}^0 g_0(\eta)\,d\eta=\frac{\pi}{2},\quad \int\limits_0^\infty g_1(\eta)\,d\eta=0.$$

Будем предполагать, что $\varphi_1(x)\in H^{p_1}(\mathbb{R})$, $\varphi_2(x)\in H^{p_3}(\mathbb{R})$, где $p_3=4l+\gamma_1$, $p_2=3l+\gamma_2$, $l\in\mathbb{N}$. Тогда функции

$$\begin{aligned}\omega_1(x,t)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}V_0(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)\,d\xi,\\ \omega_2(x,t)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}U_0^2(\xi,T;x,t)\varphi_2(\xi)\,d\xi\end{aligned} \tag{41}$$

являются решениями уравнений (36), удовлетворяющими условиям (37) в $\mathbb{R}$. Будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (36):

$$u^1(x,t) = \int\limits_0^t V_0(x,t;0,\tau)\alpha_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t V_1(x,t;0,\tau)\alpha_1(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t),$$

$$u^2(x,t) = \int\limits_t^T U_0^2(0,\tau;x,t)\beta_0(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t). \tag{42}$$

Плотности $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ должны принадлежать пространству $H^{q_1}(Q^+)$ ($q_1 = l + \frac{\gamma_1-1}{4}$), $H^{q_2}(Q^+)$ ($q_2 = l + \frac{\gamma_2-2}{3}$) соответственно, причем

$$\alpha_0^{(k)}(0) = \alpha_1^{(k)}(0) = \beta_0^{(k)}(T) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,l-1. \tag{43}$$

2.2. Исследование системы сингулярных уравнений

Из условий склеивания (38) получим систему уравнений относительно α_0, α_1, β_0:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{4}}}\,d\tau + \omega_1(0,t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\Gamma(\frac{1}{3})\int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau + \omega_2(0,t), \\ -\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\int\limits_0^t \frac{\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau + \omega_{1x}(0,t) = 0, \\ \frac{\pi}{2}\alpha_0(t) + \omega_{1xxx}(0,t) = \frac{\pi}{3}\beta_0(t) + \omega_{2xx}(0,t) \end{cases} \tag{44}$$

или

$$\begin{cases} \int\limits_t^T \frac{\beta_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{3}}}\,d\tau - B\int\limits_0^t \frac{\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{4}}}\,d\tau = \Psi_0(t), \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{3})}, \\ \int\limits_0^t \frac{\alpha_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau = \Psi_1(t), \\ \alpha_0(t) - \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Psi_2(t), \end{cases} \tag{45}$$

где

$$\Psi_0(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\Gamma(\frac{1}{3})}\left(\omega_1(0,t) - \omega_2(0,t)\right),$$

$$\Psi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega_{1x}(0,t),$$

$$\Psi_2(t) = \frac{2}{\pi}\left(\omega_{2xx}(0,t) - \omega_{1xxx}(0,t)\right).$$

Первое и второе уравнения в (45) обратим при помощи формул обращения оператора Абеля, получим

$$\begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}}\beta_0(t) + \frac{B}{\pi}\int\limits_0^T N_0(t,\tau)(\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau))\,d\tau = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \frac{\Psi_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau, \\ \alpha_1(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau, \\ \alpha_0(t) - \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Psi_2(t), \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}}\beta_0(t) + \frac{B}{\pi}\int\limits_0^T N_0(t,\tau)(\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau))\,d\tau = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \frac{\Psi_0(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau, \\ \alpha_1(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Psi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau, \\ \alpha_0(t) - \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Psi_2(t), \end{cases} \tag{47}$$

где

$$N_0(t,\tau) = \begin{cases} -\left(\dfrac{T-\tau}{T-t}\right)^{\frac{2}{3}} \dfrac{F\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}; \frac{T-t}{T-\tau}\right)}{(t-\tau)^{11/12}} \\ \dfrac{8}{9}\left(\dfrac{T-\tau}{T-t}\right)^{\frac{3}{4}} \dfrac{F\left(\frac{1}{12}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}; \frac{T-\tau}{T-t}\right)}{(\tau-t)^{11/12}} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{n_0^1(t,\tau)}{(t-\tau)^{11/12}}, & \tau < t, \\ \dfrac{n_0^2(t,\tau)}{(\tau-t)^{11/12}}, & \tau > t. \end{cases}$$

Введем обозначения $G_2^0(t) = \Psi_2(t) - \Psi_2(0)$,

$$G_1^0(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Psi_1(\tau) - \Psi_1(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau,$$

$$G_0^0(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_t^T \frac{\Psi_0'(T) - \Psi_0'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{2}{3}}}\,d\tau.$$

Заметим, что $G_1^0(t)$ принадлежат пространству Гёльдера с показателем $(1+\gamma_1)/4$ и $G_1^0(t) = O(t^{(1+\gamma_1)/4})$ для малых t. Если $\gamma_2 \le \frac{3}{4}\gamma_1 - \frac{1}{4}$ ($\gamma_1 \le \frac{4}{3}\gamma_2$), то $G_0^0(t)$, $G_2^0(t)$ принадлежат пространству Гёльдера с показателем $(1+\gamma_2)/3$ ($(1+\gamma_1)/4$), причем $G_0^0(t) = G_1^0(t) = O(t^{(1+\gamma_2)/3})$ ($O(t^{(1+\gamma_1)/4})$) для малых t.

Предположим, что функции $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\beta_0(t)$ принадлежат искомым пространствам, тогда из системы (46) следует, что

$$B\int\limits_0^T \frac{\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau)}{(T-\tau)^{1/4}}\,d\tau = \Psi_0(T). \tag{48}$$

При выполнении (48) систему (46) можно переписать так:

$$\begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}}\beta_0(t) + \frac{B}{\pi}\int\limits_0^T N_0^1(t,\tau)(\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau))\,d\tau = \frac{3}{\pi}\Psi_0'(T)(T-t)^{\frac{1}{3}} - G_0^0(t),\\ \alpha_1(t) = \frac{1}{\pi}\Psi_1(0)t^{-\frac{1}{2}} + G_0^1(t),\\ \\ \alpha_0(t) - \frac{2}{3}\beta_0(t) = \Psi_2(0) + G_2^0(t), \end{cases} \tag{49}$$

где при $t > \tau$ имеем

$$N_0^1(t,\tau) = N_0(t,\tau) + \frac{B}{(T-t)^{2/3}(T-\tau)^{1/4}} = -B\left(\frac{T-t}{T-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{(\tau-t)^{\frac{11}{12}}} + \ldots.$$

Введем в первое уравнение системы (46) новые искомые функции $\bar{\alpha}_k(t) = \alpha_k(t) - \alpha_k(T)\frac{t}{T}$, $k = 0, 1$. Имеем

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\beta_0(t) + \frac{B}{\pi}\int\limits_0^T N_0^1(t,\tau)(\alpha_0(\tau)+\alpha_1(\tau))\,d\tau = \tag{50}$$

$$= \frac{3}{\pi}\Psi_0'(T)(T-t)^{\frac{1}{3}} - G_0^0(t), \tag{51}$$

где $\beta_0(0) = \frac{3}{2}\Phi_1(0)$.

Так как $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ ищем из пространства Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$, $\frac{1+\gamma_2}{3}$, то должны выполняться условия

$$\int\limits_0^T \frac{\bar{\beta}_0(\tau)}{\tau^{7/6}}\,d\tau = 0, \quad \Phi_0'(0) = 0. \tag{52}$$

Таким образом, при выполнении условий (48), (52) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0(t) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^T K_0^2(t,\tau)\bar\beta_0(\tau)\,d\tau = \overline{F}_0^0(t), \\ \alpha_0(t) + \dfrac{2}{3}\bar\beta_0(t) = \overline{F}_1^0(t), \end{cases} \tag{53}$$

где $\overline{F}_0^0(t) = \frac{\beta_0(0)}{\pi T}\int\limits_0^T K_0^1(t,\tau)(T-\tau)\,d\tau + F_0^0(t)$, $\overline{F}_1^0(t) = -\frac{2}{3T}(T-t)\beta_0(0) + F_1^0(t)$,

$$K_0^2(t,\tau) = K_0^1(t,\tau) + \frac{\sqrt{3\pi}t^{1/3}}{\sigma_0\tau^{7/6}\Gamma(\frac{1}{3})} = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sigma_0\Gamma(\frac{1}{3})}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{7}{6}}\frac{1}{(\tau-t)^{\frac{5}{6}}} + \ldots, \quad t<\tau.$$

Отметим, что $\overline{F}_0^0(t)$, $\overline{F}_1^0(t)$ принадлежат пространствам Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$ или $\frac{1+\gamma_2}{3}$, причем имеют нули соответствующего порядка при малых t.

Исключая, $\alpha_0(t)$ в системе (53), получим интегральное уравнение относительно $\bar\beta_0(t)$

$$\frac{2}{3}\bar\beta_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^2(t,\tau)\bar\beta_0(\tau)\,d\tau = Q(t), \tag{54}$$

где

$$Q(t) = \overline{F}_1^0(t) - \overline{F}_0^0(t).$$

Из уравнения (54) следует, что для того, чтобы $\beta_0(T) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^2(T,\tau)\bar\beta_0(\tau)\,d\tau = Q(T). \tag{55}$$

При выполнении условия (55) придем к следующему уравнению:

$$\frac{2}{3}\bar\beta_0(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T K_0^3(t,\tau)\bar\beta_0(\tau)\,d\tau = Q_1(t), \tag{56}$$

где

$$K_0^3(t,\tau) = K_0^2(t,\tau) - K_0^2(T,\tau), \quad Q_1(t) = Q(t) - Q(T).$$

Так как $Q_1(t)$ принадлежит пространству Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$, $\frac{1+\gamma_2}{3}$, то функция $\bar\beta_0(t)$, представленная формулой (56) удовлетворяет условию

Гёльдера с показателями $\frac{1+\gamma_1}{2}$, $\frac{1+\gamma_2}{3}$ во всех точках контура $(0,T)$, включая концы интервала. Системы уравнений (56) эквивалентны исходной системе уравнений (48) при выполнении условий (48), (52) и (55). Подставляя найденные значения функций $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ в условия (48), (52) и (55), получим условия разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве $H_{x\,t}^{p,p/2}(Q)$. Их обозначим так:

$$L_s(\varphi_1,\varphi_2)=0, \quad s=1,2,3,4,5,6. \tag{57}$$

Теперь мы можем установить теорему.

Теорема 2 (о разрешимости). Пусть $\varphi_1 \in H^{p_1}(Q^+)$ $(p_1 = 4+\gamma_1)$, $\varphi_2 \in H^{p_2}(Q^-)$ $(p_2 = 3+\gamma_2)$, $0<\gamma_1<1$, $\frac{1}{4}<\gamma_2<1$. Тогда при выполнении условий (2) существует единственное решение уравнения (33) в Q, удовлетворяющее условиям (34), (35) из пространств $H_{x\ \ t}^{p_2,p_2/3}(Q^-)$, $H_{x\ \ t}^{p_1,p_1/4}(Q^+)$.

Аналогичные исследования можно провести в случае $\varphi_1 \in H^p$ $(p=4l+\gamma)$, $\varphi_2 \in H^p$ $(p=3l+\gamma)$, $0<\gamma<1$, где $l \geq 1$ — целое число.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи приведены к эквивалентным сингулярным интегральным уравнениям. Выявлены явные условия существования решения поставленных задач.

Неравные порядки уравнений, фигурирующие в разобранных задачах, не позволяют полностью обратить получающиеся системы сингулярных интегральных уравнений. В работе развит возможный метод решения подобных задач. А именно, разложение ядер остаточных сингулярных операторов до малых членов может быть достаточно для установления существования решения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Krylov, N.V. - Lectures on elliptic and parabolic equations in Holder spaces. American Mathematical Society, 1996. - 175 p.

[2] Антипин В.И. О гладких решениях задачи Жевре для уравнения третьего порядка / В.И. Антипин, С.В. Попов // Математические заметки СВФУ. 2015. - Т. 22. №1. - С. 51-61.

[3] Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя, интегралы от специальных функций. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи и др. - М.: Наука, 1970 - 328 с.

[4] Гахов, Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

[5] Гохберг И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. - М.: Наука, 1971. - 352 с.

[6] Кожанов А.И. Об одной нестандартной задаче сопряжения для эллиптических уравнений / А.И. Кожанов, С.В. Потапова // Математические заметки СВФУ. 2016. - Т. 23. №3. - С. 70-80.

[7] Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. - М.: Наука, 1967. - 736 с.

[8] Марков В.Г. Параболические уравнения четвертого порядка с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания / В.Г. Марков, С.В. Попов // Математические заметки СВФУ. 2017. - Т.24. №4. - С.52-66.

[9] Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с.

[10] Попов, С.В. О поведении интеграла типа Коши на концах контура интегрирования и его приложение в краевых задачах для параболических уравнений переменного направления времени // Математические заметки СВФУ. 2016. - Т.23. №2. - С.90-107.

[11] Потапова, С.В. Разрешимость краевых задач для $2n$-параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции. [Текст]: дис.....канд. ф.-м. наук: 01.01.02: защищена 08.11.07 / Потапова Саргылана Викторовна. - Якутск, 2007. - 114 с.

[12] Терсенов, С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. - М.: Наука, 1985. - 105 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Здесь приведены первоначальные сведения о сингулярных интегралах и сингулярных интегральных уравнениях. Указана связь последних с краевой задачей Римана.

П.1. Поведение интеграла типа Коши на контуре

Следующая лемма, доказательство которой содержится в [4] описывает поведение интеграла типа Коши при приближении к контуру:
Лемма 0.1. Пусть $\Phi(z)$ есть интеграл типа Коши (??). Если плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и точка t не совпадает с концами контура L, то функция

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} \, d\tau \tag{58}$$

непрерывна в точке $z = t$, т.е. имеет одинаковый предел при приближении к этой точке как изнутри, так и вне контура, совпадающий с его значением в этой точке, который понимается в смысле главного значения.

На основе этой леммы, учитывая, что

$$\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \\ \pi i & , z \in L, \end{cases} \tag{59}$$

можно получить соотношения между предельными значениями и главным значением интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} \, d\tau, \tag{60}$$

предельные свойства при приближении к контуру изнутри и извне. Действительно, выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
\psi^{+}(t) &= \lim_{z\to t^{+}}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{d\tau}{\tau - z}\Big] = \Phi^{+}(t) - \varphi(t),\\
\psi^{-}(t) &= \lim_{z\to t^{-}}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{d\tau}{\tau - z}\Big] = \Phi^{-}(t),\\
\psi(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t),
\end{aligned}
\tag{61}
$$

из которых следуют так называемые формулы Сохоцкого:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{+}(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\\
\Phi^{-}(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Аналогами этих соотношений для интеграла типа Коши на прямой являются [4]

$$
\begin{aligned}
\Phi^{+}(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,\\
\Phi^{-}(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Из формул Сохоцкого следует, что

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t),\\
&\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

П.2. Краевая задача Римана

Краевая задача Римана для полуплоскости состоит в том, чтобы найти две аналитические функции $\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)$, ($\Phi^{+}(z)$ аналитична на верхней полуплоскости $D^{+}, \Phi^{-}(z)$, соответственно, на $D^{-}(z)$) такие, что их предельные значения на контуре удовлетворяют соотношению

$$
\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t) \quad (-\infty < t < \infty). \tag{65}
$$

Всегда подразумевается, что $G(t) \neq 0$ на всем контуре.

Частные случаи этой задачи.

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + g(t) \quad (-\infty < t < \infty),$$
$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (-\infty < t < \infty).$$

соответственно называются задачей о сдвиге и однородной задачей. Из формул Сохоцкого (63) следует, что решение задачи о сдвиге даётся интегралом типа Коши.

Индекс $\xi = \operatorname{ind} G(t)$ называется индексом задачи Римана. Однородная задача в случае, когда $\xi = 0$, сводится к задаче о сдвиге. Дело в том, что в этом случае однозначно определен логарифм $\ln(G(t))$, и таким образом задача равносильна

$$\ln(\Phi^+(t)) = \ln(\Phi^-(t)) + \ln(G(t))(-\infty < t < \infty) \tag{66}$$

Решение этой задачи представляется как

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}, \tag{67}$$

где

$$\Gamma(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(G(\tau))}{\tau - z} d\tau \right). \tag{68}$$

Случай $\operatorname{ind} G(t) = \xi \neq 0$ для однородной задачи можно решить, введя функцию

$$\frac{t-i}{t+i}, \tag{69}$$

которая имеет единичный индекс

$$\operatorname{ind} \frac{t-i}{t+i} = 1. \tag{70}$$

Если $\operatorname{ind} G(t) = \xi$, то функция

$$G(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\xi} \tag{71}$$

имеет индекс, равный нулю. Её логарифм однозначен.

Далее следует ввести так называемую каноническую функцию, которая имеет исключительную точку $-i$.

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right) e^{\Gamma^-(z)}, \tag{72}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau - i}{\tau + i}\right)^{-\xi} G(\tau)\right] \frac{d\tau}{\tau - z}\,. \tag{73}$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{74}$$

Далее, вводя аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}\,, \tag{75}$$

представим краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) \tag{76}$$

На основании обобщенной теоремы Лиувилля будем иметь

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = \frac{P_\xi(t)}{(t+i)^\xi} \qquad (\xi \geq 0), \tag{77}$$

$P_\xi(t)$ – многочлен степени не выше ξ с произвольными коэффициентами.

Отсюда получаем общее решение задачи

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= X(z)\left[\Psi(z) + \frac{P_\xi(z)}{(z+i)^\xi}\right], \\ \Phi(z) &= X(z)[\Psi(z) + C]. \end{aligned} \tag{78}$$

При $\xi < 0$ функция $X(z)$ имеет в точке $z = -i$ полюс порядка $-\xi$, поэтому для разрешимости задачи нужно положить $C = -\Psi^-(-i)$. При $\xi < -1$, кроме того, должны выполняться еще следующие условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau + i)^k} = 0 \quad (k = 2, \ldots, -\xi). \tag{79}$$

ТЕОРЕМА. При $\xi \geq 0$ всегда существует решение (78), зависящее от $\xi + 1$ произвольных постоянных. При $\xi < 0$ однородная задача неразрешима. Неоднородная же имеет решение только при выполнении $-\xi - 1$ условий (79). В частности, при $\xi = -1$ решение неоднородной задачи всегда существует и однозначно.