Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова"
Институт математики и информатики
Кафедра дифференциальных уравнений

Ядрихинский Христофор Васильевич

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВНИЯ ОПЦИОНОВ С УЧЕТОМ ЗАТРАТ НА ИСПОЛНЕНИЕ

01.04.01 — Математика, профиль "Финансовая математика"

Магистерская Диссертация

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Федоров,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Е. Егоров

ЯКУТСК — 2020

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования

Классические теории ценообразования опционов базируются на гипотезе совершенного рынка. В рамках этой гипотезы нет затрат на исполнение и участники рынка используют только сложившиеся на рынке цены и не могут своими операциями оказать влияния на цены — ни временно, ни постоянно.

Эти предположения, несмотря на очевидное противоречие рыночной практике, довольно широко используются и результирующие модели дают полезные результаты тогда, когда базовый актив ликвиден и номинал опциона не слишком большой для рынка.

Однако, в случае опционов для неликвидного актива или больших номиналов относительно обычно торгуемого объема на рынке уже нельзя исключать из рассмотрения влияние на рынок и затраты на исполнение.

Интерес к изучению моделей, которые учитывают затраты на исполнение, вызван теми ситуациями, когда цена высокочастотного хеджирования(high frequency hedging cost) недопустимо возрастает из-за затрат на исполнение, в то время как низкочастотное хеджирование ведет к большим ошибкам или погрешности отслеживания.

Степень разработанности темы исследования

Возможно, одной из первых работ по ценобразованию опционов была диссертация Л. Башелье [12] 1900-го года. Л. Башелье рассчитал цены опционов на акции, предполагая изменение цены базового актива (акции) по законам броуновского движения, и сравнил их с текущими ценами.

В 1965 г. П. Самуэльсон [39] было предложено для описания динамики цены акций использовать так называемое геометрическое (экономическое) броуновское движение.

Геометрическое броуновское движение послужило основой для модели Блэка — Шоулза — Мертона (1973) [15, 16, 35] и широко известной формулы Блэка — Шоулза.

Ввиду того, что модель Блэка — Шоулза не учитывает затраты на исполнение и влияние сделок участников рынка на текущие цены, исследователями активно изучаются изменения в модели, которые могут их учитывать. Возникло два подхода учета влияния сделок на цены.

Первый подход обычно называется подходом «кривой предложения» (the «supply curve» approach). Он учитывает влияние на цену торгуемого актива операций большого объема или недостаточной ликвидности. Данный подход был разработан и получил дальнейшее развитие в работах P. Bank и D. Baum (2004) [13] , U. Çetin, R. Jarrow и P. Protter (2004) [22, см. §4], U. Çetin и L. C. Rogers (2007) [23, см. §6].

Второй подход изучает наблюдающиеся на практике ситуации, связанные с влиянием дельта-хеджирования (динамического хеджирования) на динамику базового актива и вытекающим из этого эффектом обратной связи на цену опциона. S. Grossman (1998) [30] написал одну из первых работ по данному направлению. Также изучению этого подхода посвящены работы E. Platen и M. Schweizer (1998) [37], P. Schönbucher и P. Wilmott (2000) [40], R. Sircar и G. Papanicolaou (1998) [41] .

В работе H. E. Leland (1985) [32] предложил одну из первых моделей, учитывающих транзакции при определении цены опционов. Модель G. Barles и H. M. Soner (1998) [14], учитывающая транзакционные издержки и фактор неприятия риска хеджеров, была получена при использовании асимптотического анализа. В работе J. Cvitanić и I. Karatzas (1996) [25] при помощи мартингального подхода получена формула для расчета минимального первоначального капитала, необходимого для хеджирования произвольного условного требования в модели с непрерывным временем и с учетом пропорциональных транзакционных издержек.

Вдобавок недавно появился подход, учитывающий транзакционные издержки и основанный на «теории оптимального исполнения». При данном подходе Rogers and Singh [38], T. M. Li and R. Almgren [11] рассматривали затраты на исполнение, не являющиеся линейными относительно исполненного объема, а выпуклыми для учета влияния ликвидности.

Перечисленные модели исследовались многими авторами как численно, так и аналитически. Аналитическое исследование уравнения Блэка — Шоулза методами группового анализа проведено в работе Н.Х. Ибрагимова и Р.К. Газизова (1998) [29]. В работах L.A. Bordag с соавторами [18–21,36], М. М. Дышаева и В. Е. Федорова [3–5,27] и других авторов изучены групповые свойства различных нелинейных моделей типа Блэка — Шоулза, осуществлен поиск их инвариантных решений и подмоделей.

В работе O. Guéant и J. Pu (2015) [31], посвящённой анализу ценообразования опционов с учетом транзакционных издержек и влияния операций на рынок, решается задача продажи кол-опциона банком или трейдером на рынке клиенту со сроком погашения T при предположениях:

1. Рассматривается постоянная безрисковая ставка r, параметр абсолютного избегания риска γ и волатильность σ.

2. Процесс рыночного объема торгов V_t считается детерминированным, неотрицательным и ограниченным.

3. Торговля ограничена максимальной степенью участия ρ_m и следовательно рассматриваются процессы v из множества допустимых стратегий A, которые имеет ограничение $|v_t| \leq \rho_m V_t$ почти всюду на $(0, T) \times \Omega$.

4. Количество акций в хеджируемом портфеле моделируется как $q_t = q_0 + \int_0^t v_s ds$.

5. Процесс цены моделируется как $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t + k v_t dt$, где μ — прогноз тренда, ожидаемая доходность базового актива, а k линейно моделирует

постоянное воздействие на рынок.

6. Для моделирования затрат на исполнения используют непрерывную неотрицательную функции $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, которая является четной, возрастающей на $\mathbb{R}_+$, $L(0) = 0$, строго выпуклой и коэрцитивной, т. е. $\lim_{\rho\to+\infty} \frac{L(\rho)}{\rho} = +\infty$.

7. Для любого $v \in A$ счет X меняется как $dX_t = rX_t dt - v_t S_t dt - V_t L(\frac{v_t}{V_t})dt$.

8. Функция штрафа (Penalty function) $\mathcal{L}(q, q')$ моделирует цену ликвидности при переходе от портфеля с q акциями к портфелю с q' акциями. Ее вид в работе специфицируется как $\mathcal{L}(q, q') = l(|q - q'|) + \frac{1}{2}k(q - q')^2$, где l — выпуклая и возрастающая функция (возможные варианты ее вида предложены в [31], замечание 4).

При этих условиях поставлена задача оптимального стохастического контроля

$$\sup_{v\in A} \mathbb{E}\left[-\exp(-\gamma(X_T + q_T S_T - \Pi(q_T, S_T)))\right],$$

где $\mathbb{E}$ — математическое ожидание. Для нее определяют функцию значения и связанное с задачей уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана.

При $k = 0$ и, следовательно, при отсутствии постоянного воздействия на рынок, получена фукция $\theta(t, S, q)$, которая моделирует цену безразличия кол-опциона, и при помощи введения функции $H(p) = \sup\limits_{|\rho|\le\rho_m} [p\rho - L(\rho)]$ выведено связанное с θ дифференциальное уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + V_t H(\theta_q).$$

В данной работе получена групповая классификация этого уравнения при различных спецификациях свободного элемента H. На ее основе для конкретных функций найдены инвариантные решения и подмодели.

1. Теоретическкая часть

1.1. Однопараметрические группы Ли

Рассматриваются обратимые преобразования $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, зависящие от параметра $a \in \Delta \subset R$ вида $\bar{x} = f(x, a)$, где f - производящая функция группы.

Определение 1.1.1. *Определение 1. Семейство преобразований $\{T_a\}$ называется локальной однопарамерической непрерывной группой Ли G^1, если существует интервал $\Delta' \subset \Delta$ такой, что выполнены следующие*

1. *$\{T\}$ замкнуто в Δ' относительно операции умножения, т.е. $\forall a, b \in \Delta'$ выполнено $T_a T_b = T_c \in \{T\}$, где $c = \varphi(a, b) \in \Delta'$ - закон умножения в группе;*
2. *Закон умножения является гладким, т.е. $\varphi \in C^2(\Delta' \times \Delta')$;*
3. *Семейство $\{T\}$ локально упорядочено в Δ', т.е. $\forall a, b \in \Delta'$ из $T_a = T_b$ следует $a = b$.*
4. *Семейство $\{T\}$ содержит единицу в Δ', т.е. $\exists a_0 \in \Delta'$ такое, что $T_{a_0} = I$ - тождественное преобразование.*

При другом определении можно сузить область определения производящей функции f до некоторого $V \times \Delta$, где V - открытое множество.

Если закон умножения имеет вид $\varphi(a, b) = a + b$, то он *канонический.*

Для данного семейства преобразований определяем *касательное векторное поле* $\xi(x)$. Его компоненты задаются как

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{1.1.1}$$

Следующая теорема установливает определенное соответствие между касательным векторным полем ξ и ее группой G_1.

Теорема 1.1.1. *Производящая функция $\bar{x} = f(x, a)$ группы G_1 удовлетворяет задаче Коши*

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{x}}{\partial a} = \xi(\bar{x}), \\ \bar{x}|_{a=0} = x. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Обратно, какова бы ни была достаточно гладкая вектор функция $\xi(x)$ тождественно не равная нулю, решение задачи (1.1.2), *определяет производящую функцию однопараметрическогй группы преобразований G_1 с каноническим законом умножения.*

Уравнения (1.1.2) называются *уравнениями Ли.*

Ввиду этой теоремы считаем далее, что параметры a однопараметрических групп Ли G^1 канонические.

Рассматривается отображение $F : R^n \to R^m$

Определение 1.1.2. *Функция $F(x) \neq const$ называется инвариантом группы G^1 если для любого $T \in G^1$ имеет место тождество $F(Tx) = F(x)$.*

Рассмотрим дифференцирование по параметру a в 0 следующей композиции

$$\frac{\partial}{\partial a} F(f(x, a))|_{a=0} = \Sigma_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i}, \text{ так как } f(x, 0) = x. \tag{1.1.3}$$

Следовательно вводится следующий дифференциальный оператор.

Определение 1.1.3. *Инфинитезимальным оператором или генератором группы G_1 называется дифференциальный оператор*

$$X = \Sigma_{i=1}^{n} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.1.4}$$

Далее рассматривается критерий инвариантности функции

Теорема 1.1.2 (Критерий инвариантности функции)**.** *Функция $F(x)$ является инвариантом группы G_1 если и только если выполнено равенство*

$$XF \equiv \xi^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \tag{1.1.5}$$

Рассматриваем многообразие M неявно заданное набором s функций

$$\psi^k(x) = 0,\ k = 1, \dots, s. \tag{1.1.6}$$

Для них тоже вводится понятие инвариантности и критерий инвариантности.

Определение 1.1.4. *Многообразие M инвариантно относительно группы G^1 тогда и только тогда, когда $\forall x \in M$ и для любого преобразования $T \in G^1$ выполено $Tx \in M$.*

Многообразие M называется *реулярно* заданным уравнениями (1.1.6) , если матрица Якоби $||\frac{\partial\psi^k}{\partial x^i}||$ имеет ранг s. Тогда $n - s$ размерность многообразия M.

Теорема 1.1.3 (Критерий инвариантности многообразия). *Многообразие M регулярно заданное уравнениями* (1.1.6) *инвариантно относительно действия группы G^1 с оператором X, если и только если выполнено*

$$X\psi^k|_M = 0,\ k = 1, \dots, s. \tag{1.1.7}$$

Многообразие M называется *особым* относительно грущппы G^1, если оператор группы X тождественно равен нулю нулю на многообразии M, т.е. $X|_M \equiv 0$. В противном случае многообразие M называется неособым.

Если многообразие M неособое относительно группы G^1, то для инвариантности функция F по критерию должна удовлетворять следующему уравнению в частных производных

$$\Sigma_{i=1}^n \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0. \tag{1.1.8}$$

Его $n - 1$ функционально независимых решений $J_1(x), \dots, J_{n-1}(x)$ можно, к примеру, найти при помощи метода характеристик. А сами решения $J_1(x), \dots, J_{n-1}(x)$ образуют фунциональный базис инвариантов группы G^1, из которых можно получить все остальные инварианты.

1.2. Продолженное пространство и продолжения операторов

Введенные утверждения и определения распространяются на дифференциальные уравнения(дифференциальные инварианты) при помощи понятия продолженного пространства.

Для этого рассматриваем пространство $Z = R^n \times R^m = X \times U$. Переменные разделяются на два типа: $x = (x^1, \ldots, x^n)$ -независимые переменные, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ - функции от x.

Определение 1.2.1. *k-м продолжением пространства Z называется пространство*

$$\underset{k}{Z} = X \times U \times \underset{1}{U} \times \cdots \times \underset{k}{U}. \tag{1.2.1}$$

где $\underset{s}{U} = \left\{ \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^{j_1} \ldots x^{j_s}} \right\}$ *- пространство всех производных k-го порядка.*

Пусть в пространстве Z действует локальная группа Ли G с оператором

$$X = \xi^i(x, u)\partial_{x^i} + \eta^\alpha(x, u)\partial_{u^\alpha}. \tag{1.2.2}$$

Определение 1.2.2. *Локальная группа Ли* $\underset{k}{G}$, *полученная распространением преобразований группы* G *на производные по обычным правилам замены переменных, действующих в пространстве* $\underset{k}{Z}$, *называется k-м продолжением локальной группы Ли* G.

Продолженной группе $\underset{k}{G}$ отвечает оператор

$$\underset{k}{X} = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \cdots + \zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_k} \partial_{u^\alpha_{i_1 \cdots k}}. \tag{1.2.3}$$

Оператор полной производной D_i по i-ой переменной задается как

$$D_i = \partial_{x^i} + u_i^\alpha \partial_{u^\alpha} + \cdots + u^\alpha_{ij_1 \ldots j_s} \partial_{u^\alpha_{j_1 \ldots j_s}} + \ldots. \tag{1.2.4}$$

Координаты продолженного оператора $\underset{k}{X}$ вычисляются по формуле

$$\zeta^\alpha_{j_1 \ldots j_s} = D_{j_1} \ldots D_{j_s}(\eta^\alpha - u_i^\alpha \xi^i) + \xi^i u^\alpha_{ij_1 \ldots j_s}, \tag{1.2.5}$$

Реккурентная формула

$$\zeta_i^\alpha = D_i\eta^\alpha - u_i^\alpha D_i\xi^j,$$
$$\zeta_{ij_1\dots j_s}^\alpha = D_i\zeta_{j_1\dots j_s}^\alpha - u_{rj_1\dots j_s}^\alpha D_i\xi^r. \tag{1.2.6}$$

Определение 1.2.3. *Дифференциальным инвариантом группы G называется инвариант продолженного действия группы G, т.е. такая функция $F(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u})$, что для любого преобразования $T \in G$ выполнено*

$$F(Tx, Tu, \underset{1}{T}\underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{T}\underset{k}{u}) = F(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}). \tag{1.2.7}$$

1.3. Определяющее уравнение

Рассматривается дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений E

$$E : F^l(\underset{k}{z}) = 0, l = 1, \dots, s. \tag{1.3.1}$$

Обозначаем также как E многообразие в продолженном пространстве $\underset{k}{Z}$ задаваемое дифференциальным уравнением. Многообразие E считается заданным регулярно.

Определение 1.3.1. *Говорят, что система дифференциальных уравнений E допускает локальную группу непрерывных преобразований G, если многообразие $E \subset \underset{k}{Z}$ является дифференциальным инваривантным многообразием группы G, т.е.*

$$\underset{k}{X}E(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u})|_E = 0. \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.3.1. *Группа G, допускаемая системой E, действует на множестве решений этой системы, т.е. множество решений системы E инвариантно отоносительно действия группы G.*

Исходя из критерия инвариантности (1.3.2) допускаемую группу ищут по следующему алгоритму:

-Продолжение оператора X на производные до k-го порядка по формулам

$$\underset{k}{X} = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \cdots + \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha \partial_{u_{i_1 \dots i_k}^\alpha}. \qquad (1.3.3)$$

-Действие оператора $\underset{k}{X}$ на уравнения системы E. В результате получается система из s уравнений, содержащая функции $\xi^i(x,u), \eta^\alpha(x,u)$, их производные до k-го порядка включительно, а также переменные $x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}$.
-Переход на многообразие, определяемое системой E. Для этого система E разрешается относительно некоторых s производных из набора $\{\underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u}\}$. Все остальные производные далее будем называть свободными. Найденные выражения подставляются в уравнения, полученные на предыдущем шаге. Построенная таким образом система уравнений на координаты инфинитезимального оператора X должна быть выполнена тождественно по оставшимся переменным пространства $\underset{k}{Z}$.
-Расщепление(разделение переменных) уравнений, найденных в результате выполнения предыдущего шага, относительно свободных производных. При этом учитывается, что координаты $\xi^i(x,u), \eta^\alpha(x,u)$ зависят только от x и u и не зависят от производных $\underset{j}{u}$. Расщепление обычно осуществляется разложением левых частей уравнений в ряд Тейлора по свободным производным в окрестности какой- нибудь точки и приравнивается нулю коэффициентов при различных мономах, составленных из производных. Результатом расщепления является переопределенная система дифференциальных уравнений для координат оператора X.

Полученные в результате расщепления уравнения называются определяющими уравнениями. Пространство их решений обозначается как L. Его основными свойствами являются линейность и однородность. Если оно имеет размерность r, то обозначается L_r.

Преобразования эквивалентности - это преобразования, которые меняют только произвольный(свободный) элемент. Их совокупность образует группу преобразований эквивалентности.

Они ищутся модификацией алгоритма, того же что используется для поиска допускаемой группы.

Далее действуем на изучаемое уравнение при предположении, что произвольный элемент это функция и после разделения переменных получаем набор уравнений на произвольный элемент называемые классифицурующими уравнениями. При помощи преобразований эквивалентости решения разбиваются на классы эквивалентности. И далее получаются все спецификации(конкретные формы) произвольного элемента.

1.4. Алгебра Ли

Пусть L - векторное поле на полем $R($ или $C)$, снабженное операцией коммутирования $[\cdot,\cdot]$, т.е. $\forall X, Y \in L$, $[X,Y] \in L$.

Теорема 1.4.1. *Замкнутое относительно операции коммутирования* $[\cdot,\cdot]$ *векторное пространство L называется алгеброй Ли, если для любых* $\xi, \eta, \tau \in L$, $\alpha, \beta \in R$ *выполняется*

$$1)\, [\alpha\xi + \beta\eta, \tau] = \alpha[\xi, \tau] + \beta[\eta, \tau];$$

$$2)\, [\eta, \tau] = -[\tau, \eta];$$

$$3)\, [\xi, [\eta, \tau]] + [\eta, [\tau, \xi]] + [\tau, [\xi, \eta]] = 0.$$

Последнее равенство называтся тождетсвом Якоби. Операцию умножения (коммутирования) называют умножением Ли, скобкой Ли или коммутатором.

Рассмотрим множество L всех инфинитезимальных операторов допускаемых некоторой системой уравнений. Данное множество будет векторным пространством над $\mathbb{R}$. Более того, с коммутатором двух операторов $X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, определяемым формулой

$$[X, Y] = XY - YX = \left(\xi^i(x)\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^i(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i})\right)\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{1.4.1}$$

данное векторное пространство будет алгеброй Ли, называемой *основной алгеброй Ли системы.*

Для алгебры Ли L_r с базисом $X_1, X_2, \ldots, X_r$ разложение коммутатора дано как

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \; i, j = 1, 2, \ldots, r,$$

где c_{ij}^k — называются *структурными постоянными* алгебры Ли L_r.

1.5. Инвариантные решения, оптимальные системы подалгебр

Определение 1.7. *Подалгеброй алгебры Ли* называется векторное подпространство алгебры, замкнутое относительно операции умножения.

Пусть H — подгруппа группы G, допускаемой системой дифференциальных уравнений.

Определение 1.8. Решение $u = \varphi(x)$ системы уравнений называется *H-инвариантным решением*, если многообразие $u - \varphi(x) = 0$ инвариантно относительно группы H.

Алгоритм построения H-инвариантных решений состоит в следующем. Пусть L_H — подалгебра основной алгебры Ли системы, соответствующая подгруппе H, $I_1, I_2, \ldots, I_s$ — полный набор функционально независимых решений уравнений

$$X_\beta I = 0, \quad \beta = 1, \ldots, l,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_l$ — базис L_H. Для построения H-инвариантного решения берутся m инвариантнов, содержащих неизвестные функции, и назначаются функциями от оставшихся инвариантов, в которые входят только независимые переменные. Подставив эти функции в исходную систему и переписав ее в новых переменных, получим систему уравнений от меньшего числа переменных, решениями которой и будут инвариантные решения. Последнюю систему уравнений называют факторсистемой или подмоделью.

Теорема 1.6. *Для существования H-инвариантных решений необходимо, чтобы выполнялось равенство*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial I_k}{\partial u^\alpha}\right) = m.$$

Определение 1.14. *Однопараметрической группой внутренних автоморфизмов алгебры Ли* L_r называется группа с векторным полем(алгеброй дифференцирований) $\xi(X) = [X, Y]$, где Y элемент алгебры Ли L_r.

Для группового анализа дифференциальных уравнений существенна задача о перечислении всех подалгебр данной конечномерной алгебры Ли. Так как под действием автоморфизма каждая подалгебра переходит снова в некоторую подалгебру той же размерности, то поставленную задачу достаточно решить с точностью до преобразований, определяемых внутренними автоморфизмами.

Подалгебры N и M алгебры Ли L называются *подобными*, если существует внутренний автоморфизм $A \in \mathrm{Int}L$, для которого $A(N) = M$.

По отношению подобия все подалгебры данной алгебры Ли разбиваются на непересекающиеся классы подобных подалгебр.

Определение 1.5.1. *Совокупность представителей классов подобных подалгебр данной размерности m (по одному из каждого класса) будет называться оптимальной системой (порядка m) и обозначаться символом Θ_m.*

Итогом решения поставленной задачи для данной конечномерной алгебры Ли L_r должны быть таблицы оптимальных систем Θ_m для каждого $m = 1, 2, \ldots, r-1$.

2. Решение

2.1. Группы преобразования эквивалентности

Рассматриваем уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(\theta_q), \quad (2.1.1)$$

где $\theta = \theta(t, S, q)$, $F(\theta_q)$ - произвольный элемент.

Для поиска генераторов групп преобразований эквивалентности считаем F и ее производные переменными. Оператор порождающий группы преобразований эквивалентности будут искаться в виде

$$X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \alpha\partial_q + \eta\partial_\theta + \zeta\partial_F,$$

где τ, ξ, α, η зависят от t, S, q, θ, а ζ от t, S, q, θ, F, θ_S, θ_q, θ_t. При этом к уравнению (2.1.1) добавляются дополнительные уравнения, которые обозначают зависимость F только от θ_q :

$$F_t = 0, F_q = 0, F_S = 0, F_\theta = 0, F_{\theta_S} = 0, F_{\theta_t} = 0. \quad (2.1.2)$$

Система (2.1.1), (2.1.2) рассматривается как многообразие M в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на уравнение (2.1.1) продолженным оператором на правую часть после переноса слагаемых в правую часть

$$\tilde{X} = X + \eta^q\partial_{\theta_q} + \eta^S\partial_{\theta_S} + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}} + \zeta^{\theta_q}\partial_{F_{\theta_q}} + \zeta^{\theta_S}\partial_{F_{\theta_S}} +$$
$$+\zeta^{\theta_t}\partial_{F_{\theta_t}} + \zeta^t\partial_{F_t} + \zeta^S\partial_{F_S} + \zeta^q\partial_{F_q} + \zeta^\theta\partial_{F_\theta}.$$

после сужения результата на многообрзие M получаем уравнение

$$\begin{aligned} &-\eta^t + r\eta + (\mu - rS)\alpha - rq\xi - \mu\eta^S + \\ &+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(-\eta^S + \alpha + \frac{r}{2}(\theta_S - q)\tau) + \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M = \\ &= -\eta^t + r\eta - rS\alpha - rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(-\eta^S + \alpha) + \\ &+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M = 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Коэффициенты продолженного оператора $\tilde{X}$ вычисляются при помощи формул продолжения и операторов полной производной

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \theta_t \frac{\partial}{\partial \theta} + \ldots, \quad D_S = \frac{\partial}{\partial S} + \theta_S \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta_{SS} \frac{\partial}{\partial \theta_S} + \ldots, \quad D_q = \frac{\partial}{\partial q} + \theta_q \frac{\partial}{\partial \theta} + \ldots,$$

$$\tilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + F_t \frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_S = \frac{\partial}{\partial S} + F_S \frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_q = \frac{\partial}{\partial q} + F_q \frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$

$$\tilde{D}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} + F_\theta \frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_t} = \frac{\partial}{\partial \theta_t} + F_{\theta_t} \frac{\partial}{\partial F} + \ldots, \quad \tilde{D}_{\theta_S} = \frac{\partial}{\partial \theta_S} + F_{\theta_S} \frac{\partial}{\partial F} + \ldots,$$

$$\tilde{D}_{\theta_q} = \frac{\partial}{\partial \theta_q} + F_{\theta_q} \frac{\partial}{\partial F} + \ldots.$$

По формулам продолжения

$$\eta^t = D_t\eta - \theta_t D_t\tau - \theta_S D_t\xi - \theta_q D_t\alpha,$$

$$\eta^S = D_S\eta - \theta_t D_S\tau - \theta_S D_S\xi - \theta_q D_S\alpha,$$

$$\eta^q = D_q\eta - \theta_t D_q\tau - \theta_S D_q\xi - \theta_q D_q\alpha,$$

$$\eta^{SS} = D_S\eta^S - \theta_{St} D_S\tau - \theta_{SS} D_S\xi - \theta_{Sq} D_S\alpha.$$

Их вычисление дает

$$\eta^t = \eta_t + \theta_t\eta_\theta - \theta_t(\tau_t + \theta_t\tau_\theta) - \theta_S(\xi_t + \theta_t\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_t + \theta_t\alpha_\theta),$$

$$\eta^S = \eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta),$$

$$\eta^q = \eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_t(\tau_q + \theta_q\tau_\theta) - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta),$$

$$\eta^{SS} = \eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) + \tag{2.1.4}$$

$$+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_t\tau_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) -$$

$$-\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) -$$

$$-\theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}).$$

Аналогично для ζ

$$\zeta^t = \tilde{D}_t\zeta - F_t\tilde{D}_t\tau - F_S\tilde{D}_t\xi - F_q\tilde{D}_t\alpha - F_\theta\tilde{D}_t\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_t\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_t\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_t\eta^q,$$

$$\zeta^S = \tilde{D}_S\zeta - F_t\tilde{D}_S\tau - F_S\tilde{D}_S\xi - F_q\tilde{D}_S\alpha - F_\theta\tilde{D}_S\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_S\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_S\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_S\eta^q,$$

$$\zeta^q = \tilde{D}_q\zeta - F_t\tilde{D}_q\tau - F_S\tilde{D}_q\xi - F_q\tilde{D}_q\alpha - F_\theta\tilde{D}_q\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_q\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_q\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_q\eta^q,$$

$$\zeta^{\theta} = \tilde{D}_{\theta}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta}\alpha - F_{\theta}\tilde{D}_{\theta}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta}\eta^q,$$
$$\zeta^{\theta_t} = \tilde{D}_{\theta_t}\zeta_{\theta_t} - F_t\tilde{D}_{\theta_t}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_t}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_t}\alpha - F_{\theta}\tilde{D}_{\theta_t}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_t}\eta^q,$$
$$\zeta^{\theta_S} = \tilde{D}_{\theta_S}\zeta - F_t\tilde{D}_{\theta_S}\tau - F_S\tilde{D}_{\theta_S}\xi - F_q\tilde{D}_{\theta_S}\alpha - F_{\theta}\tilde{D}_{\theta_S}\eta - F_{\theta_t}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^t - F_{\theta_S}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^S - F_{\theta_q}\tilde{D}_{\theta_S}\eta^q.$$

Раскрытие производных дает

$$\zeta^t = \zeta_t + \zeta_F F_t - F_t\tau_t - F_S\xi_t - F_q\alpha_t - F_{\theta}\eta_t - F_{\theta_t}\eta^t_t - F_{\theta_S}\eta^S_t - F_{\theta_q}\eta^q_t,$$
$$\zeta^S = \zeta_S + \zeta_F F_S - F_t\tau_S - F_S\xi_S - F_q\alpha_S - F_{\theta}\eta_S - F_{\theta_t}\eta^t_S - F_{\theta_S}\eta^S_S - F_{\theta_q}\eta^q_S,$$
$$\zeta^q = \zeta_q + \zeta_F F_q - F_t\tau_q - F_S\xi_q - F_q\alpha_q - F_{\theta}\eta_q - F_{\theta_t}\eta^t_q - F_{\theta_S}\eta^S_q - F_{\theta_q}\eta^q_q,$$
$$\zeta^{\theta} = \zeta_{\theta} + \zeta_F F_{\theta} - F_t\tau_{\theta} - F_S\xi_{\theta} - F_q\alpha_{\theta} - F_{\theta}\eta_{\theta} - F_{\theta_t}\eta^t_{\theta} - F_{\theta_S}\eta^S_{\theta} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta},$$
$$\zeta^{\theta_t} = \zeta_{\theta_t} + \zeta_F F_{\theta_t} - F_t\tau_{\theta_t} - F_S\xi_{\theta_t} - F_q\alpha_{\theta_t} - F_{\theta}\eta_{\theta_t} - F_{\theta_t}\eta^t_{\theta_t} - F_{\theta_S}\eta^S_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t},$$
$$\zeta^{\theta_S} = \zeta_{\theta_S} + \zeta_F F_{\theta_S} - F_t\tau_{\theta_S} - F_S\xi_{\theta_S} - F_q\alpha_{\theta_S} - F_{\theta}\eta_{\theta_S} - F_{\theta_t}\eta^t_{\theta_S} - F_{\theta_S}\eta^S_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S} \tag{2.1.5}$$

Результат действия продолжненного оператора на дополнтельные уравнения (2.1.2) с сужением на многообразие M дает

$$\zeta^t|_M = 0, \zeta^q|_M = 0, \zeta^S|_M = 0, \zeta^{\theta}|_M = 0, \zeta^{\theta_S}|_M = 0, \zeta^{\theta_t}|_M = 0. \tag{2.1.6}$$

С учетом дополнительных уравнений (2.1.2) по которым можно перейти к многообразию и продолжениями операторов (2.1.5) уравнения (2.1.6) примут вид

$$\begin{gathered}
\zeta^t|_M = \zeta_t - F_{\theta_q}\eta^q_t|_M = \zeta_t - F_{\theta_q}(\eta_{qt} + \theta_q\eta_{t\theta} - \theta_t(\tau_{tq} + \theta_q\tau_{t\theta}) - \\
-\theta_S(\xi_{tq} + \theta_q\xi_{t\theta}) - \theta_q(\alpha_{tq} + \theta_q\alpha_{t\theta}))|_M = 0, \\
\zeta^S|_M = \zeta_S - F_{\theta_q}\eta^q_S|_M = \zeta_S - F_{\theta_q}(\eta_{Sq} + \theta_q\eta_{S\theta} - \theta_t(\tau_{Sq} + \theta_q\tau_{S\theta}) - \\
-\theta_S(\xi_{Sq} + \theta_q\xi_{S\theta}) - \theta_q(\alpha_{Sq} + \theta_q\alpha_{S\theta}))|_M = 0, \\
\zeta^q|_M = \zeta_q - F_{\theta_q}\eta^q_q|_M = \zeta_q - F_{\theta_q}(\eta_{qq} + \theta_q\eta_{q\theta} - \theta_t(\tau_{qq} + \theta_q\tau_{q\theta}) - \\
-\theta_S(\xi_{qq} + \theta_q\xi_{q\theta}) - \theta_q(\alpha_{qq} + \theta_q\alpha_{q\theta}))|_M = 0, \\
\zeta^{\theta}|_M = \zeta_{\theta} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta}|_M = \zeta_{\theta} - F_{\theta_q}(\eta_{q\theta} + \theta_q\eta_{\theta\theta} - \theta_t(\tau_{q\theta} + \theta_q\tau_{\theta\theta}) - \\
-\theta_S(\xi_{q\theta} + \theta_q\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{q\theta} + \theta_q\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0 \\
\zeta^{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}(\tau_q + \theta_q\tau_{\theta}) = 0,
\end{gathered} \tag{2.1.7}$$

$$\zeta^{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} - F_{\theta_q}\eta^q_{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}(\xi_q + \theta_q\xi_\theta)| = 0.$$

Подставляем продолжения операторов (2.1.4) в уравнение (2.1.3)

$$\begin{gathered}
r\eta - rS\alpha - rq\xi + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\cdot \\
\cdot(-(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta)) + \alpha)- \\
-(\eta_t + \theta_t\eta_\theta - \theta_t(\tau_t + \theta_t\tau_\theta) - \theta_S(\xi_t + \theta_t\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_t + \theta_t\alpha_\theta))+ \\
+\zeta - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta)+ \\
+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_t\tau_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta)- \\
-\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta})- \\
-\theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0
\end{gathered} \tag{2.1.8}$$

Перемещаем в (2.1.8) все члены с θ_t в конец уравнения для последующего перехода к многообразию по θ_t и вносим знаки внутрь скобок

$$\begin{gathered}
r\eta - rS\alpha - rq\xi + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\cdot \\
\cdot(-\eta_S - \theta_S\eta_\theta + \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) + \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) + \alpha) - \eta_t + \theta_S\xi_t+ \\
+\theta_q\alpha_t + \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta)+
\end{gathered} \tag{2.1.9}$$

$$\begin{gathered}
+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta)- \\
-\theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}))+ \\
+(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta)+ \\
+\theta_t^2\tau_\theta + \theta_t(-\eta_\theta + \tau_t + \theta_S\xi_\theta + \theta_q\alpha_\theta)+ \\
+\frac{1}{2}\sigma^2(\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) + \tau_\theta\theta_t\theta_{SS})|_M = 0
\end{gathered}$$

Переходим в (2.1.7) к многообразию по θ_t

$$\begin{gathered}
\zeta^t|_M = \zeta_t - F_{\theta_q}(\eta_{tq} + \theta_q\eta_{t\theta} - \theta_S(\xi_{tq} + \theta_q\xi_{t\theta}) - \theta_q(\alpha_{tq} + \theta_q\alpha_{t\theta})- \\
-(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)\cdot \\
\cdot(\tau_{tq} + \theta_q\tau_{t\theta})) = 0,
\end{gathered} \tag{2.1.10}$$

$$\zeta^S|_M = \zeta_S - F_{\theta_q}(\eta_{Sq} + \theta_q\eta_{S\theta} - \theta_S(\xi_{Sq} + \theta_q\xi_{S\theta}) - \theta_q(\alpha_{Sq} + \theta_q\alpha_{S\theta}) -$$
$$-(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)\cdot \tag{2.1.11}$$
$$\cdot(\tau_{Sq} + \theta_q\tau_{S\theta}) = 0,$$

$$\zeta^q|_M = \zeta_q - F_{\theta_q}(\eta_{qq} + \theta_q\eta_{q\theta} - \theta_S(\xi_{qq} + \theta_q\xi_{q\theta}) - \theta_q(\alpha_{qq} + \theta_q\alpha_{q\theta}) -$$
$$-(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)\cdot \tag{2.1.12}$$
$$\cdot(\tau_{qq} + \theta_q\tau_{q\theta})) = 0,$$

$$\zeta^\theta|_M = \zeta_\theta - F_{\theta_q}(\eta_{q\theta} + \theta_q\eta_{\theta\theta} - \theta_S(\xi_{q\theta} + \theta_q\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{q\theta} + \theta_q\alpha_{\theta\theta}) -$$
$$-(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)\cdot \tag{2.1.13}$$
$$\cdot(\tau_{q\theta} + \theta_q\tau_{\theta\theta})) = 0,$$

$$\zeta^{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} + F_{\theta_q}(\tau_q + \theta_q\tau_\theta) = 0, \tag{2.1.14}$$

$$\zeta^{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} + F_{\theta_q}(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) = 0. \tag{2.1.15}$$

Переходим в уравнении (2.1.9) к многообразию по θ_t

$$r\eta - rS\alpha - rq\xi + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\cdot \tag{2.1.16}$$
$$\cdot(-\eta_S - \theta_S\eta_\theta + \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) + \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) + \alpha) - \eta_t + \theta_S\xi_t +$$
$$+\theta_q\alpha_t + \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) +$$
$$+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) -$$
$$-\theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta})) +$$
$$+(\tau_t - \eta_\theta + \theta_S\xi_\theta + \theta_q\alpha_\theta + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta} + \theta_{SS}\tau_\theta) +$$
$$+(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\tau_S + \theta_S\tau_\theta))\cdot$$
$$\cdot(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F) +$$
$$+\tau_\theta(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F)^2 = 0.$$

Отделяя члены θ_{Sq}, θ_{St} в (2.1.16) получаем равенства $\tau_S = 0, \tau_\theta = 0, \alpha_S = 0$,

$\alpha_\theta = 0$. Отделяя F_{θ_q} в (2.1.14) и (2.1.15) получаем, еще $\tau_q = 0$ и $\xi_q = 0$, $\xi_\theta = 0$. Отмечаем найденные равенства

$$\tau_S = 0, \tau_\theta = 0, \alpha_S = 0, \alpha_\theta = 0, \tau_q = 0, \xi_q = 0, \xi_\theta = 0. \tag{2.1.17}$$

Следовательно (2.1.10)-(2.1.13) можно сократить так

$$\zeta^t|_M = \zeta_t - F_{\theta_q}(\eta_{tq} + \theta_q \eta_{t\theta} - \theta_q \alpha_{tq}) = 0, \tag{2.1.18}$$

$$\zeta^S|_M = \zeta_S - F_{\theta_q}(\eta_{Sq} + \theta_q \eta_{S\theta}) = 0, \tag{2.1.19}$$

$$\zeta^q|_M = \zeta_q - F_{\theta_q}(\eta_{qq} + \theta_q \eta_{q\theta} - \theta_q \alpha_{qq}) = 0, \tag{2.1.20}$$

$$\zeta^\theta|_M = \zeta_\theta - F_{\theta_q}(\eta_{q\theta} + \theta_q \eta_{\theta\theta}) = 0, \tag{2.1.21}$$

$$\zeta^{\theta_t}|_M = \zeta_{\theta_t} = 0, \tag{2.1.22}$$

$$\zeta^{\theta_S}|_M = \zeta_{\theta_S} = 0. \tag{2.1.23}$$

Сначала отделяем F_{θ_q} в (2.1.21) и получаем $\eta_{q\theta} = 0$, далее отделяем $F_{\theta_q}\theta_q$ в (2.1.20) и получаем $\alpha_{qq} = \eta_{q\theta}$. С учетом ранее полученного, следовательно получаем $\alpha_{qq} = 0$. Разделяя оставшееся в уравнениях (2.1.18)-(2.1.23) получаем следующие уравнения

$$\begin{gathered} \eta_{tq} = 0, \eta_{t\theta} = \alpha_{tq}, \eta_{S\theta} = 0, \eta_{Sq} = 0, \eta_{q\theta} = 0, \alpha_{qq} = 0, \eta_{qq} = 0, \eta_{\theta\theta} = 0, \\ \zeta_t = 0, \zeta_S = 0, \zeta_q = 0, \zeta_\theta = 0, \zeta_{\theta_t} = 0, \zeta_{\theta_S} = 0. \end{gathered} \tag{2.1.24}$$

Теперь сокращаем получеными равенствами определяющее уравнение (2.1.16)

$$\begin{gathered} r\eta - rS\alpha - rq\xi + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\cdot \\ \cdot(-\eta_S - \theta_S\eta_\theta + \theta_S\xi_S + \alpha) - \eta_t + \theta_S\xi_t + \theta_q\alpha_t + \\ + \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + \theta_{SS}(\eta_\theta - 2\xi_S) - \theta_S\xi_{SS}) + \\ + (\tau_t - \eta_\theta)(r\theta + (\mu - rS)q - \\ - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F) = 0. \end{gathered} \tag{2.1.25}$$

Отделяя θ_{SS} получаем, вынеся общий множитель и на следующем шаге сократив $-\frac{1}{2}\sigma^2$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_\theta - 2\xi_S + \tau_t - \eta_\theta) = -\frac{1}{2}\sigma^2(-2\xi_S + \tau_t) = 0, \\ \tau_t = 2\xi_S. \tag{2.1.26}$$

Следовательно ввиду (2.1.26) так как $\tau_S = 0$ в (2.1.17), то

$$\xi_{SS} = 0. \tag{2.1.27}$$

Ввиду (2.1.24) начинаем дифференцирования ζ. Сначала дифференцируем уравнения (2.1.25) по θ_S с учетом (2.1.27)

$$r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\tau + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(-\eta_\theta + \xi_S) + \\ +\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_S - \theta_S\eta_\theta + \theta_S\xi_S + \alpha) + \\ +\xi_t + (\tau_t - \eta_\theta)(-\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)) = 0. \tag{2.1.28}$$

Сокращаем полученное, выносим общий множитель $(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))$ и сокращаем η_θ, для других слогаемых выносим $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$

$$\xi_t + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\xi_S - \tau_t) + \\ +\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}((\theta_S - q)r\tau - \eta_S - \theta_S\eta_\theta + \theta_S\xi_S + \alpha) = 0. \tag{2.1.29}$$

Так как θ_S содержится в выражениях с $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$, то при разделении переменных по θ_S его можно вынести и следовательно разделение переменных даст следующий результат

$$\theta_S : \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\xi_S - \tau_t + r\tau - \eta_\theta + \xi_S) = 0, \tag{2.1.30}$$

$$\xi_t + (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(\xi_S - \tau_t) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-qr\tau - \eta_S + \alpha) = 0. \tag{2.1.31}$$

В равенстве (2.1.30) после сокращения экспоненты $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$ суммирование всех ξ_S дает $2\xi_S$ и далее ввиду равенства (2.1.26) оно сразу сокращается с $-\tau_t$ и следовательно от (2.1.30) остается

$$\eta_\theta = r\tau. \tag{2.1.32}$$

С целью поиска α_q дифференцируем (2.1.31) по q, ввиду (2.1.24), (2.1.17) оно сократит уравнение до

$$-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\xi_S - \tau_t) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-r\tau + \alpha_q) = 0.$$

Сокращаая экспоненту $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$ и подставляя (2.1.26) $\xi_S = \tau_t/2$ и получаем

$$\alpha_q = r\tau + \xi_S - \tau_t = r\tau - \tau_t/2. \tag{2.1.33}$$

Сокращаем далее уравнение (2.1.25) с учетом отделения членов с θ_S и θ_{SS} и вычисления $\xi_{SS} = 0$ (2.1.27)

$$\begin{gathered} r\eta - rS\alpha - rq\xi + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2\tau + (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_S + \alpha) - \\ -\eta_t + \theta_q\alpha_t + \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2\eta_{SS} + (\tau_t - \eta_\theta)(r\theta + (\mu - rS)q - \\ -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F) = 0. \end{gathered} \tag{2.1.34}$$

Вспоминаем равенство из (2.1.24) $\eta_{t\theta} = \alpha_{tq}$. Подстановка в него ранее полученных уравнений (2.1.32), (2.1.33) дает $r\tau_t = r\tau_t - \tau_{tt}/2$. Сокращение приводит к уравнению на τ

$$\tau_{tt} = 0. \tag{2.1.35}$$

Далее диференцирование (2.1.34) по θ_q приводит к $\zeta_{\theta_q} + \alpha_t$. Ввиду того, что α_q по (2.1.33) известно и того, что по (2.1.24) $\zeta_q = 0$, то дифференцирование полученного по q дает $\alpha_{tq} = r\tau_t - \tau_{tt}/2 = 0$ и следовательно ввиду (2.1.35) получается

$$\tau_t = 0, \quad \alpha_{tq} = 0. \tag{2.1.36}$$

Дифференцируя (2.1.31) по S с учетом уравнений (2.1.17) и (2.1.27) получаем

$$\xi_{St} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\eta_{SS} = 0,$$

ввиду (2.1.26) $2\xi_S = \tau_t$ и (2.1.36) дающей $\tau_t = 0$ получаем, что $\xi_S = 0$ и следовательно $\xi_{St} = 0$, далее сокращение экспоненты перед оставшимся членом разности дает

$$\eta_{SS} = 0. \tag{2.1.37}$$

Из (2.1.17) дающей $\tau_S = 0$, $\tau_q = 0$, $\tau_\theta = 0$ и (2.1.36) дающей $\tau_t = 0$ следует, что $\tau = const$. Обозначаем $\tau = A$. Уравнение (2.1.26) дает $2\xi_S = \tau_t$ и ввиду (2.1.36) получаем $\xi_S = 0$, следовательно ξ имеет форму $\xi = B$, где $B_S = 0$. Из уравнений (2.1.17) $\xi_q = 0, \xi_\theta = 0$ получаем, что B зависит только от t. Так как по (2.1.33) $\alpha_q = r\tau - \tau_t/2$, то подстановка $\tau = A$ дает $\alpha_q = rA$ и следовательно интегрирование дает $\alpha = rAq + L$ где $L_q = 0$, и из (2.1.17) $\alpha_S = 0$, $\alpha_\theta = 0$ следует, что $L = L(t)$.

Интегрирование уравнения (2.1.37) дает вид $\eta = C(t,q,\theta)S + J(t,q,\theta)$. С целью определения переменных по которым изменяется C вспоминаем из (2.1.24), что $\eta_{S\theta} = 0$, $\eta_{Sq} = 0$ и следовательно $C = C(t)$. После подстановки полученного в уравнение (2.1.32) получаем, что $J_\theta = r\tau = rA$ и интегрирование дает, что $J = rA\theta + K(t,q)$. Подстановка в находящийся в (2.1.24) $\eta_{qq} = 0$ дает $K_{qq} = 0$ и следовательно его интегрирование дает $K = N(t)q + D(t)$. Далее подстановка в (2.1.24) $\eta_{tq} = 0$ дает $N_t = 0$ и следовательно $N = const$. Полученное формулируется в виде

$$\tau = A, \tag{2.1.38}$$

$$\xi = B(t), \tag{2.1.39}$$

$$\alpha = rAq + L(t), \tag{2.1.40}$$

$$\eta = rA\theta + Nq + D(t) + C(t)S. \tag{2.1.41}$$

Подставляем полученное в уравнение (2.1.34) и получаем

$$\begin{gathered} r^2A\theta + rNq + rD(t) + rC(t)S - rS(rAq + L(t)) - rqB(t) + \\ + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2A + (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-C(t) + rAq + L(t)) - D'(t) - \\ -C'(t)S + \theta_q L'(t) + \zeta - rA(r\theta + (\mu - rS)q - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2 + F) = 0. \end{gathered} \tag{2.1.42}$$

Ввиду уравнений на ζ (2.1.24) проводится дифференцирование полученного уравнения по S, q, θ. Дифференцирование по θ дает

$$r^2A - rAr = 0.$$

Дифференцирование по S дает

$$rC(t) - r(rAq + L(t)) - C'(t) - rA(-rq) = rC(t) - rL(t) - C'(t) = 0. \tag{2.1.43}$$

Дифференцирование по q дает

$$\begin{gathered} rN - r^2SA - rB(t) + r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}qA - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-C(t) + rAq + L(t)) + \\ +(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)rA - rA(\mu - rS - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q) = 0. \end{gathered}$$

Заметим, что в последней строке можно вынести $(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)$ и тогда ввиду $rA - rA = 0$ происходит сокращение. Если в первой строчке собрать все члены с $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$ под скобку, то получается, что в ней находятся $rAq + C(t) - rAq - L(t) = C(t) - L(t)$. При раскрытии последней скобки умножение $-rA$ на $-rS$ дает r^2SA и тогда он сократится с аналогичнм членом стоящим в начале первой строки. И следовательно сокращение даст

$$rN - rB(t) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(C(t) - L(t)) = 0. \tag{2.1.44}$$

Оставшееся в (2.1.42) после убирания членов содержащих θ, S, q

$$rD(t) + \mu(-C(t) + L(t)) - D'(t) + \theta_q L'(t) + \zeta - rAF = 0. \tag{2.1.45}$$

Дифференцируя его по θ_q получаем $L'(t) - \zeta_{\theta_q} = 0$, продифференцировав его далее по t с учетом (2.1.24) получаем $L''(t) = 0$ и следовательно интегрирование дает $L(t) = Ut + \widetilde{L}$.

$$L(t) = Ut + \widetilde{L}. \tag{2.1.46}$$

Далее подставляем (2.1.38)-(2.1.41) в (2.1.31)

$$\begin{aligned} &B' + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-qrA - C(t) + rAq + L(t)) = \\ &= B'(t) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-C(t) + L(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.1.47}$$

Подставляем (2.1.46) в (2.1.43) и получаем

$$C'(t) = rC(t) - rUt - r\widetilde{L}.$$

Его общее решение имеет вид

$$C(t) = \widetilde{C}e^{rt} + Ut + \widetilde{L} + U/r. \tag{2.1.48}$$

С другой стороны складывая (2.1.47) и (2.1.44) получаем

$$rN - rB(t) + B'(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$B(t) = \widetilde{B}e^{rt} + N. \tag{2.1.49}$$

Подстановка полученных B и C в (2.1.44) дает

$$\begin{aligned} &-r\widetilde{B}e^{rt} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\widetilde{C}e^{rt} + U/r) = 0, \\ &-r\widetilde{B}e^{rt} + \gamma\sigma^2 e^{rT}\widetilde{C} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}U/r = 0. \end{aligned} \tag{2.1.50}$$

При домножении на e^{rt} образуется многочлен от e^{rt} вида

$$P_2(e^{rt}) = -r\widetilde{B}e^{2rt} + \gamma\sigma^2 e^{rT+rt}\widetilde{C} + \gamma\sigma^2 e^{rT}U/r = 0. \tag{2.1.51}$$

Многочлены тождественно равны нулю только при равенству нулю всех своих коэффициентов и следовательно $\widetilde{B} = 0$, $\widetilde{C}$, $U = 0$. Тогда общие решения для L (2.1.46), для B (2.1.49) и для C (2.1.48) примут вид

$$L(t) = \widetilde{L}, \quad B(t) = N, \quad C(t) = \widetilde{L}. \tag{2.1.52}$$

Следовательно (2.1.38) - (2.1.41) записываются как

$$\tau = A, \tag{2.1.53}$$

$$\xi = N, \tag{2.1.54}$$

$$\alpha = rAq + \widetilde{L}, \tag{2.1.55}$$

$$\eta = rA\theta + Nq + D(t) + \widetilde{L}S. \tag{2.1.56}$$

Подставляем (2.1.52) в (2.1.45) и получаем

$$rD(t) - D'(t) + \zeta - rAF = 0. \tag{2.1.57}$$

Дифференцируя по t, и ввиду (2.1.24) $\zeta_t = 0$, получаем $rD'(t) - D''(t) = 0$ и следовательно $D(t) = De^{rt} + I$.

$$\tau = A, \tag{2.1.58}$$

$$\xi = N, \tag{2.1.59}$$

$$\alpha = rAq + \widetilde{L}, \tag{2.1.60}$$

$$\eta = rA\theta + Nq + \widetilde{L}S + De^{rt} + I, \tag{2.1.61}$$

$$\zeta = rAF - rI. \tag{2.1.62}$$

Следовательно получаем утверждение

Теорема 2.1.1. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эвивалентности уравнения* (2.1.1) *образуют операторы*

$$X_1 = \partial_\theta - r\partial_F, \quad X_2 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta + rF\partial_F,$$

$$X_3 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_4 = \partial_S + q\partial_\theta, \quad X_5 = e^{rt}\partial_\theta.$$

Решая уравнение Ли получаем

$$X_1 : \bar{\theta} = \theta + a_1, \bar{F} = F - ra_1. \tag{2.1.63}$$

$$X_2 : \bar{t} = a_2 + t, \bar{q} = e^{ra_2}q, \bar{\theta} = e^{ra_2}\theta, \bar{F} = e^{ra_2}F. \tag{2.1.64}$$

$$X_3 : \bar{q} = a_3 + q, \bar{\theta} = Sa_3 + \theta. \tag{2.1.65}$$

$$X_4 : \bar{S} = S + a_4, \bar{\theta} = qa_4 + \theta. \tag{2.1.66}$$

$$X_5 : \bar{\theta} = e^{rt}a_5 + \theta. \tag{2.1.67}$$

Многопараметрическая группа Ли

$$\bar{t} = a_2 + t, \tag{2.1.68}$$

$$\bar{S} = S + a_4, \tag{2.1.69}$$

$$\bar{q} = e^{ra_2}(q + a_3), \tag{2.1.70}$$

$$\bar{\theta} = e^{ra_2}(\theta + a_1 + (S + a_4)a_3 + qa_4 + e^{rt}a_5), \tag{2.1.71}$$

$$\bar{F} = e^{ra_2}(F - ra_1). \tag{2.1.72}$$

Продолжение оператора η^q равно $P + 2rA\theta_q - 2rA\theta_q = P$ и следовательно

$$\bar{\theta_q} = \theta_q + a_4. \tag{2.1.73}$$

И следовательно сужение преобразований эвивалентности на произвольный элемент F и его аргумент θ_q дает

$$\bar{F} = e^{ra_2}(F - ra_1), \quad \bar{\theta_q} = \theta_q + a_4. \tag{2.1.74}$$

2.2. Групповая классификация

На уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + F(\theta_q). \tag{2.2.1}$$

действуем вторым продолжением оператора $X = \tau\partial_t + \xi\partial_S + \alpha\partial_q + \eta\partial_\theta$.

$$\tilde{X} = X + \eta^q\partial_{\theta_q} + \eta^S\partial_{\theta_S} + \eta^t\partial_{\theta_t} + \eta^{SS}\partial_{\theta_{SS}}.$$

Где функции τ, ξ, α, η зависят от t, S, q, θ. Тогда получается

$$
\begin{gathered}
-\eta^t + r\eta + (\mu - rS)\alpha - rq\xi - \mu\eta^S - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS} - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\eta^S + \\
+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)\alpha + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + F'\eta^q|_M = \\
= -\eta^t + r\eta + (\mu - rS)\alpha - rq\xi - \mu\eta^S + \\
+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)(-\eta^S + \alpha + \frac{r}{2}(\theta_S - q)\tau) + F'\eta^q - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M = \\
-\eta^t + r\eta - rS\alpha - rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(-\eta^S + \alpha) + \\
+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + F'\eta^q - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^{SS}|_M = 0.
\end{gathered}
\tag{2.2.2}
$$

Подстановка формул продолжений (2.1.4) дает

$$
\begin{gathered}
-(\eta_t + \theta_t\eta_\theta - \theta_t(\tau_t + \theta_t\tau_\theta) - \theta_S(\xi_t + \theta_t\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_t + \theta_t\alpha_\theta)) + \\
+r\eta - rS\alpha - rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)) \cdot \\
\cdot(-(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_t(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta)) + \alpha) + \\
+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau + \\
+F'(\eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_t(\tau_q + \theta_q\tau_\theta) - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta)) - \\
-\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) + \\
+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_t\tau_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) - \\
-\theta_t(\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) - \theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \\
-\theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0.
\end{gathered}
\tag{2.2.3}
$$

Собираем члены с θ_t впереди уравнения

$$
\begin{gathered}
\theta_t((\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \eta_\theta + \tau_t + \theta_S\xi_\theta + \theta_q\alpha_\theta + \\
+\frac{1}{2}\sigma^2((\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) + \theta_{SS}\tau_\theta) - F'(\tau_q + \theta_q\tau_\theta)) + \theta_t^2\tau_\theta + \\
+r\eta - rS\alpha - rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)) \cdot \\
\cdot(-(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta)) + \alpha) -
\end{gathered}
\tag{2.2.4}
$$

$$-(\eta_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\alpha_t) + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau +$$
$$+F'(\eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta)) -$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) +$$
$$+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) -$$
$$-\theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta}))|_M = 0.$$

Переходим к многообразию подстановкой θ_t

$$(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + F)^2\tau_\theta +$$
$$+(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + F)\cdot$$
$$\cdot((\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) - \eta_\theta + \tau_t + \theta_S\xi_\theta + \theta_q\alpha_\theta +$$
$$+\frac{1}{2}\sigma^2((\tau_{SS} + 2\tau_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\tau_{\theta\theta}) + \theta_{SS}\tau_\theta) - F'(\tau_q + \theta_q\tau_\theta)) +$$
$$+r\eta - rS\alpha - rq\xi + (\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))\cdot$$
$$\cdot(-(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta)) + \alpha) - \qquad (2.2.5)$$
$$-(\eta_t - \theta_S\xi_t - \theta_q\alpha_t) + \frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2\tau +$$
$$+F'(\eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_S(\xi_q + \theta_q\xi_\theta) - \theta_q(\alpha_q + \theta_q\alpha_\theta)) -$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta} - 2\theta_{St}(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) +$$
$$+\theta_{SS}(\eta_\theta - \theta_q\alpha_\theta - 2\xi_S - 3\theta_S\xi_\theta) - 2\theta_{Sq}(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) -$$
$$-\theta_S(\xi_{SS} + 2\xi_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\xi_{\theta\theta}) - \theta_q(\alpha_{SS} + 2\alpha_{S\theta}\theta_S + \theta_S^2\alpha_{\theta\theta})) = 0.$$

Отделение θ_{Sq} и θ_{St} в (2.2.5) приводит к уравнениям $-2(\alpha_S + \theta_S\alpha_\theta) = 0$ и $-2(\tau_S + \theta_S\tau_\theta) = 0$ и их разделение дает $\tau_S = 0$, $\tau_\theta = 0$, $\alpha_S = 0$, $\alpha_\theta = 0$. Следовательно их зануление в уравнении (2.2.5) даст

$$(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + F)\cdot$$
$$\cdot(-\eta_\theta + \tau_t + \theta_S\xi_\theta - F'\tau_q) + r\eta - rS\alpha - rq\xi + \qquad (2.2.6)$$
$$+(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q))(-(\eta_S + \theta_S\eta_\theta - \theta_S(\xi_S + \theta_S\xi_\theta)) + \alpha) -$$

$$-(\eta_t-\theta_S\xi_t-\theta_q\alpha_t)+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2\tau+$$
$$+F'(\eta_q+\theta_q\eta_\theta-\theta_S(\xi_q+\theta_q\xi_\theta)-\theta_q\alpha_q)-$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS}+2\theta_S\eta_{S\theta}+\theta_S^2\eta_{\theta\theta}+\theta_{SS}(\eta_\theta-2\xi_S-3\theta_S\xi_\theta)-$$
$$-\theta_S(\xi_{SS}+2\xi_{S\theta}\theta_S+\theta_S^2\xi_{\theta\theta}))=0.$$

Полученные и ненумерованные ранее условия пронумеруем отдельно

$$\tau_S=0,\quad \tau_\theta=0,\quad \alpha_S=0,\quad \alpha_\theta=0. \tag{2.2.7}$$

Отделение в уравнении (2.2.6) θ_{SS} с учетом общего множителя $-\sigma^2/2$ приводит к

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sigma^2(-\eta_\theta+\tau_t+\theta_S\xi_\theta-F'\tau_q+\eta_\theta-2\xi_S-3\theta_S\xi_\theta)=\\=-\frac{1}{2}\sigma^2(\tau_t-F'\tau_q-2\xi_S-2\theta_S\xi_\theta)=0.\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Получаем отсюда отделением θ_S уравнение $\xi_\theta=0$ и дифференцированием по S уравнение $\xi_{SS}=0$ ввиду (2.2.7) и следовательно

$$\tau_t-F'\tau_q-2\xi_S=0,\quad \xi_{SS}=0,\quad \xi_\theta=0. \tag{2.2.9}$$

В ходе действий над (2.2.6) подставляем $\xi_\theta=0$, $\xi_{SS}=0$, раскрываем часть скобок, сокращаем множители с θ_{SS} и получаем

$$(r\theta+(\mu-rS)q-\mu\theta_S-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2/2+F)(-\eta_\theta+\tau_t-F'\tau_q)+$$
$$+r\eta-rS\alpha-rq\xi+(\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q))(-\eta_S-\theta_S\eta_\theta+\theta_S\xi_S+\alpha)-$$
$$-\eta_t+\theta_S\xi_t+\theta_q\alpha_t+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\theta_S-q)^2\tau+$$
$$+F'(\eta_q+\theta_q\eta_\theta-\theta_S\xi_q-\theta_q\alpha_q)-\frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS}+2\theta_S\eta_{S\theta}+\theta_S^2\eta_{\theta\theta})=0.$$

Вычисляем вспомогательное выражение

$$(\theta_S-q)(-\eta_S-\theta_S\eta_\theta+\theta_S\xi_S+\alpha)=$$
$$=\theta_S^2(\xi_S-\eta_\theta)+\theta_S(q\eta_\theta-q\xi_S-\eta_S+\alpha)+q(\eta_S-\alpha).$$

Далее раскрываем соответствующую скобку и скобки с $(\theta_S - q)^2/2$ и в слагаемом полученном ереходом к многообразию вносим знак внутрь скоби

$$
\begin{gathered}
(r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q\theta_S - \frac{\theta_S^2 + q^2}{2}) + F)(-\eta_\theta + \tau_t - F'\tau_q) + \\
+ r\eta - rS\alpha - rq\xi + \mu(-\eta_S - \theta_S\eta_\theta + \theta_S\xi_S + \alpha) + \\
+ \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S^2(\xi_S - \eta_\theta) + \theta_S(q\eta_\theta - q\xi_S - \eta_S + \alpha) + q(\eta_S - \alpha)) - \\
- \eta_t + \theta_S\xi_t + \theta_q\alpha_t + r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-q\theta_S + \frac{\theta_S^2 + q^2}{2})\tau + \\
+ F'(\eta_q + \theta_q\eta_\theta - \theta_S\xi_q - \theta_q\alpha_q) - \frac{1}{2}\sigma^2(\eta_{SS} + 2\theta_S\eta_{S\theta} + \theta_S^2\eta_{\theta\theta}) = 0.
\end{gathered}
\tag{2.2.10}
$$

Отделяем θ_S^2 и получаем

$$
-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_\theta + \tau_t - F'\tau_q) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\xi_S - \eta_\theta) + \frac{r\tau}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2\eta_{\theta\theta} = 0.
$$

Выносим экспоненту и расрываем скобки

$$
\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\eta_\theta/2 - (\tau_t - F'\tau_q)/2 - \eta_\theta + \xi_S + r\tau/2) - \frac{1}{2}\sigma^2\eta_{\theta\theta} = 0.
$$

Вычитаем η_θ и применяем (2.2.9) $2\xi_S = \tau_t - F'\tau_q$ и получаем с последующим сокращением

$$
\begin{gathered}
\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-2\xi_S/2 - \eta_\theta/2 + \xi_S + r\tau/2) - \frac{1}{2}\sigma^2\eta_{\theta\theta} = 0, \\
\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_\theta/2 + r\tau/2) - \frac{1}{2}\sigma^2\eta_{\theta\theta} = 0, \\
\gamma e^{r(T-t)}(-\eta_\theta + r\tau) - \eta_{\theta\theta} = 0
\end{gathered}
\tag{2.2.11}
$$

Отделяем θ_S в (2.2.10) и получаем

$$
\begin{gathered}
(-\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_\theta + \tau_t - F'\tau_q) + \\
+ \mu(-\eta_\theta + \xi_S) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q(\eta_\theta - \xi_S) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_S + \alpha) + \\
+ \xi_t - r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q\tau - F'\xi_q - \sigma^2\eta_{S\theta} = \\
= (-\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_\theta + \tau_t - F'\tau_q) + \\
+ (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_\theta + \xi_S) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_S + \alpha) + \\
+ \xi_t - r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q\tau - F'\xi_q - \sigma^2\eta_{S\theta} = 0.
\end{gathered}
$$

Применяем (2.2.9) и далее замечаем и выносим общий множитель $(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)$ с последующим сокращением внутри скобки и выносим множитель у двух других членов суммы $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$

$$(-\mu+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_\theta+2\xi_S)+(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_\theta+\xi_S)+$$
$$+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_S+\alpha)+\xi_t-r\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q\tau-F'\xi_q-\sigma^2\eta_{S\theta}=0,$$
$$(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_\theta+\xi_S+\eta_\theta-2\xi_S)+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_S+\alpha-r\tau q)+$$
$$+\xi_t-F'\xi_q-\sigma^2\eta_{S\theta}=0.$$

После сокращения получаем и далее раскрываеv скобку $(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)$ и выносим общий множитель $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$

$$-(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)\xi_S+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\eta_S+\alpha-r\tau q)+\xi_t-F'\xi_q-\sigma^2\eta_{S\theta}=0,$$
$$-\mu\xi_S+\xi_t+\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(\xi_S-r\tau)-\eta_S+\alpha)-F'\xi_q-\sigma^2\eta_{S\theta}=0. \tag{2.2.12}$$

Записываем оставшиеся члены суммы (2.2.10)

$$(r\theta+(\mu-rS)q-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2/2+F)(-\eta_\theta+\tau_t-F'\tau_q)+r\eta-rS\alpha-rq\xi+$$
$$+(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_S+\alpha)-\eta_t+\theta_q\alpha_t+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2\tau+$$
$$+F'(\eta_q+\theta_q\eta_\theta-\theta_q\alpha_q)-\frac{1}{2}\sigma^2\eta_{SS}=0. \tag{2.2.13}$$

Перед началом интегрированием собираем ранее полученные равенства (2.2.13), (2.2.11), (2.2.12), (2.2.9), (2.2.7) в одно место, предварительно заменив в (2.2.13) $\tau_t-F'\tau_q$ на $2\xi_S$ по (2.2.9).

$$\begin{gathered}(r\theta+(\mu-rS)q-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2/2+F)(-\eta_\theta+2\xi_S)+\\ +r\eta-rS\alpha-rq\xi+(\mu-\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-\eta_S+\alpha)-\eta_t+\theta_q\alpha_t+\\ +\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2\tau+F'(\eta_q+\theta_q\eta_\theta-\theta_q\alpha_q)-\frac{1}{2}\sigma^2\eta_{SS}=0,\end{gathered} \tag{2.2.14}$$

$$\xi_\theta=0,\xi_{SS}=0,\tau_S=0,\tau_\theta=0,\alpha_S=0,\alpha_\theta=0, \tag{2.2.15}$$

$$\tau_t-F'\tau_q-2\xi_S=0, \tag{2.2.16}$$

$$\gamma e^{(T-t)}(-\eta_\theta + r\tau) - \eta_{\theta\theta} = 0, \tag{2.2.17}$$

$$-\mu\xi_S + \xi_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(\xi_S - r\tau) - \eta_S + \alpha) - F'\xi_q - \sigma^2\eta_{S\theta} = 0. \tag{2.2.18}$$

Интегрируя (2.2.15) $\xi_{SS} = 0$ получаем $\xi = A(t,q,\theta)S + B(t,q,\theta)$. Из (2.2.15) $\xi_\theta = 0$ получаем, что $\xi = A(t,q)S + B(t,q)$. Ввиду того, что по (2.2.15) $\tau_\theta = 0$ уравнение (2.2.17) является дифференциальным уравнением для η_θ. Его решение дает
$\eta_\theta = r\tau + \widetilde{M}(t,S,q)\exp(-\gamma\exp(r(T-t))\theta)$. После дальнейшего интегрирования получаем $\eta_\theta = r\tau\theta - \widetilde{M}(t,S,q)\exp(-\gamma\exp(r(T-t))\theta)/(\gamma\exp(r(T-t))) + J(t,S,q)$. Выписываем полученное переобозначив $M = -\widetilde{M}(t,S,q)/(\gamma\exp(r(T-t)))$

$$\begin{gathered}\xi = A(t,q)S + B(t,q),\\ \eta = r\tau\theta + M(t,S,q)e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + J(t,S,q).\end{gathered} \tag{2.2.19}$$

Подставляем их в (2.2.18) и получаем

$$\begin{gathered}-\mu A + A_tS + B_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A - r\tau) -\\ -M_S e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} - J_S + \alpha) - F'(A_qS + B_q) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} M_S e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} = 0.\end{gathered}$$

Сокращение M_S даст

$$-\mu A + A_tS + B_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A - r\tau) - J_S + \alpha) - F'(A_qS + B_q) = 0. \tag{2.2.20}$$

его дифференцирование два раза по S дает ввиду (2.2.15) $J_{SSS} = 0$. Следовательно $J = C_2(t,q)S^2 + C_1(t,q)S + D(t,q)$. Подставляем его снова в (2.2.20) и получаем

$$-\mu A + A_tS + B_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A - r\tau) - 2C_2S - C_1 + \alpha) - F'(A_qS + B_q) = 0.$$

разделение по S дает

$$-\mu A + B_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A - r\tau) - C_1 + \alpha) - F'B_q = 0, \tag{2.2.21}$$

$$A_t - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} C_2 - F' A_q = 0. \tag{2.2.22}$$

Далее подставляем $J = C_2(t,q)S^2 + C_1(t,q)S + D(t,q)$ в (2.2.19)

$$\begin{gathered} \xi = A(t,q)S + B(t,q), \\ \eta = r\tau\theta + M(t,S,q)e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + D(t,q) + C_1(t,q)S + C_2(t,q)S^2. \end{gathered} \tag{2.2.23}$$

Подстановка ξ в (2.2.16) дает

$$\tau_t - F'\tau_q - 2A = 0 \tag{2.2.24}$$

Подставляем в (2.2.14) выражение (2.2.19), J подставим позже, когда отделим часть с бесконечной производной по θ

$$\begin{gathered} (r\theta + (\mu - rS)q - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2/2 + F)(-r\tau + \gamma M e^{r(T-t)} e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + \\ +2A) + r(r\tau\theta + M e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + J) - rS\alpha - rq(AS + B) + \\ +(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q)(-(M_S e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + J_S) + \alpha) - \\ -(r\tau_t\theta + M_t e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + r\gamma M e^{r(T-t)}\theta e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + J_t) + \theta_q\alpha_t + \\ +\frac{r}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2\tau - \frac{1}{2}\sigma^2(M_{SS} e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + J_{SS}) + \\ +F'((r\tau_q\theta + M_q e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + J_q) + \theta_q(r\tau - \gamma M e^{r(T-t)} e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}) - \theta_q\alpha_q) = 0 \end{gathered} \tag{2.2.25}$$

Стягиваем в (2.2.25) члены с $e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}$ отдельно и замечаем, что результат умножения $r\theta$ на $\gamma M e^{r(T-t)} e^{-\gamma r(T-t)\theta}$ имеет тот же вид, что и член суммы стоящий рядом с членом содержащим M_t и следовательно ввиду разности знаков они в дальнейшем сократятся

$$\begin{gathered} (r\theta + (\mu - rS)q - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q^2/2 + F)\gamma M e^{r(T-t)} e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + \\ +rM e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} - (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} q) M_S e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} - \\ -(M_t e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + r\gamma M e^{r(T-t)}\theta e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}) + \\ +F'(M_q e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} - \theta_q\gamma M e^{r(T-t)} e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}) - \frac{1}{2}\sigma^2 M_{SS} e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + \end{gathered} \tag{2.2.26}$$

$$
\begin{gathered}
+(r\theta+(\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2/2+F)(-r\tau+2A)+\\
+r(r\tau\theta+J)-rS\alpha-rq(AS+B)+\\
+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)(-J_S+\alpha)-(r\tau_t\theta+J_t)+\theta_q\alpha_t+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2\tau+\\
+F'((r\tau_q\theta+J_q)+\theta_qr\tau-\theta_q\alpha_q)-\frac{1}{2}\sigma^2J_{SS}=0
\end{gathered}
\tag{2.2.27}
$$

Выносим в (2.2.26) у стянутых членов множитель $e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta}$, умножаем $r\theta$ на $(-r\tau+2A)$, r на $(r\tau\theta+J)$ и далее сокращаем $r^2\tau\theta$

$$
\begin{gathered}
e^{-\gamma r(T-t)\theta}(((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2/2+F)(\gamma Me^{r(T-t)})+\\
+rM-(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)M_S-\\
-M_t+F'(M_q-\theta_q\gamma Me^{r(T-t)})-\frac{1}{2}\sigma^2M_{SS})+\\
+((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2/2+F)(-r\tau+2A)+\\
+2rA\theta+rJ-rS\alpha-rq(AS+B)+\\
+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)(-J_S+\alpha)-(r\tau_t\theta+J_t)+\theta_q\alpha_t+\frac{r}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2\tau+\\
+F'((r\tau_q\theta+J_q)+\theta_qr\tau-\theta_q\alpha_q)-\frac{1}{2}\sigma^2J_{SS}=0.
\end{gathered}
\tag{2.2.28}
$$

Дифференцируем два раза по θ и получаем

$$
\begin{gathered}
(\gamma e^{r(T-t)})^2e^{-\gamma r(T-t)\theta}(((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2/2+F)(\gamma Me^{r(T-t)})+\\
+rM-(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)M_S-M_t+F'(M_q-\theta_q\gamma Me^{r(T-t)})-\frac{1}{2}\sigma^2M_{SS})=0.
\end{gathered}
$$

Сокращение эспонент $(\gamma e^{r(T-t)})^2e^{-\gamma r(T-t)\theta}$ дает

$$
\begin{gathered}
((\mu-rS)q-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2/2+F)(\gamma Me^{r(T-t)})+\\
+rM-(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)M_S-M_t+F'(M_q-\theta_q\gamma Me^{r(T-t)})-\frac{1}{2}\sigma^2M_{SS}=0.
\end{gathered}
\tag{2.2.29}
$$

что в виду того что M не зависит от θ в точности равно коэффициенту перед $e^{-\gamma r(T-t)\theta}$ в (2.2.28) и следовательно оно перепишется в следующем виде, с учетом выноса общего множителя $\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}$

$$((\mu - rS)q + F)(-r\tau + 2A) + 2rA\theta + rJ - rS\alpha - rq(AS + B) +$$
$$+(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-J_S + \alpha) - (r\tau_t\theta + J_t) + \theta_q\alpha_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2(r\tau - A) +$$
$$+F'((r\tau_q\theta + J_q) + \theta_q r\tau - \theta_q\alpha_q) - \frac{1}{2}\sigma^2 J_{SS} = 0. \tag{2.2.30}$$

Отделяем в (2.2.30) переменную θ и получаем

$$-r\tau_t + F'r\tau_q + 2rA = 0. \tag{2.2.31}$$

что эквивалентно (2.2.24). Подставляем $J(t, S, q)$ в (2.2.30) и сокращаем члены имеющие множители с θ

$$((\mu - rS)q + F)(-r\tau + 2A) + r(D + C_1 S + C_2 S^2) - rS\alpha - rq(AS + B) +$$
$$+(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-(C_1 + 2C_2 S) + \alpha) - (D_t + (C_1)_t S + (C_2)_t S^2) +$$
$$+\theta_q\alpha_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2(r\tau - A) +$$
$$+F'((D_q + (C_1)_q S + (C_2)_q S^2) + \theta_q r\tau - \theta_q\alpha_q) - \sigma^2 C_2 = 0. \tag{2.2.32}$$

Разделяем по S

$$S^2 : rC_2 - (C_2)_t + F'(C_2)_q = 0, \tag{2.2.33}$$

$$\begin{aligned} S : -rq(-r\tau + 2A) + rC_1 - r\alpha - rqA - \\ -2C_2(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q) - (C_1)_t + F'(C_1)_q = 0, \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

$$(\mu q + F)(-r\tau + 2A) + rD - rqB + (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-C_1 + \alpha) - D_t +$$
$$+\theta_q\alpha_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2(r\tau - A) + F'(D_q + \theta_q r\tau - \theta_q\alpha_q) - \sigma^2 C_2 = 0. \tag{2.2.35}$$

Переписываем (2.2.21), (2.2.24), (2.2.23), (2.2.7), (2.2.9) перед предположениями на фунгцию F

$$S : A_t - F'A_q + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-2C_2) = 0, \tag{2.2.36}$$

$$-\mu A + B_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A - r\tau) - C_1 + \alpha) - F' B_q = 0, \tag{2.2.37}$$

$$\tau_t - F'\tau_q - 2A = 0, \tag{2.2.38}$$

$$\begin{gathered} \xi = A(t,q)S + B(t,q), \\ \eta = r\tau\theta + M(t,S,q)e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + D(t,q) + C_1(t,q)S + C_2(t,q)S^2, \end{gathered} \tag{2.2.39}$$

$$\tau_S = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \alpha_S = 0, \quad \alpha_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0. \tag{2.2.40}$$

2.3. Предположение $F'' \neq 0$

Предполагаем $F'' \neq 0$,

Дифференцируя по θ_q уравнение (2.2.29) получаем

$$F'\gamma M e^{r(T-t)} + F''(M_q - \theta_q\gamma M e^{r(T-t)}) - F'\gamma M e^{r(T-t)} = F''(M_q - \theta_q\gamma M e^{r(T-t)}) = 0,$$

и дальнейшее разделение дает $M = 0$. Далее дифференцирование уравнений (2.2.33), (2.2.34), (2.2.36), (2.2.37), (2.2.38) дает

$$(C_2)_q F'' = 0, \quad (C_1)_q F'' = 0, \quad -A_q F'' = 0 \quad - F'' B_q = 0, \quad -F''\tau_q = 0.$$

И следовательно по предположению, добавив $M = 0$, получаем

$$M = 0, \quad (C_2)_q = 0, \quad (C_1)_q = 0, \quad A_q = 0, \quad B_q = 0, \quad \tau_q = 0. \tag{2.3.1}$$

Затем дифференцируем уравнение (2.2.37) по q и получаем, что

$$-\mu A_q + B_{qt} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A_q - r\tau_q) + A - r\tau - (C_1)_q + \alpha_q) - F' B_{qq} = 0,$$

Далее сокращение с использованием выше полученных равенств (2.3.1) и $A = \tau_t/2$ ввиду (2.2.38) и (2.3.1) дает

$$\begin{gathered} \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-r\tau + A + \alpha_q) = 0, \\ \alpha_q = r\tau - A = r\tau - \tau_t/2, \quad \alpha_{qq} = 0, \quad A = \tau_t/2. \end{gathered} \tag{2.3.2}$$

Выражаем C_2 из (2.2.36) с учетом производных по q из (2.3.1)

$$C_2 = \frac{e^{r(t-T)}A_t}{2\gamma\sigma^2}. \tag{2.3.3}$$

Подставляем его в (2.2.33) с учетом производных по q из (2.3.1)

$$r\frac{e^{r(t-T)}A_t}{2\gamma\sigma^2} - r\frac{e^{r(t-T)}A_t}{2\gamma\sigma^2} - \frac{e^{r(t-T)}A_{tt}}{2\gamma\sigma^2} = -\frac{e^{r(t-T)}A_{tt}}{2\gamma\sigma^2} = 0. \tag{2.3.4}$$

Следовательно ввиду (2.2.38) $A_{tt} = \tau_{ttt}/2 = 0.$ и получаем

$$\tau_{ttt} = 0. \tag{2.3.5}$$

Рассмотрим (2.2.34), при дифференцировании по q получается с учетом (2.3.1)

$$-r(-r\tau + 2A) - r\alpha_q - rA + 2C_2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} = 0.$$

Подставляем в него (2.3.2) и $A = \tau_t/2$, (2.3.3) получаем

$$0 = -r(-r\tau + \tau_t) - r(r\tau - \tau_t/2) - r\tau_t/2 + 2\frac{e^{r(t-T)}\tau_{tt}}{4\gamma\sigma^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} =$$

$$= r^2\tau - r\tau_t - r^2\tau + r\tau_t/2 - r\tau_t/2 + \tau_{tt}/2 = 0,$$

$$-r\tau_t + \tau_{tt}/2 = 0. \tag{2.3.6}$$

Следовательно ввиду (2.3.5) получаем $\tau_t = 0$ и далее $A = \tau_t/2 = 0$ и (2.3.2) $\alpha_{qt} = (r\tau_t - \tau_{tt}/2) = 0.$

$$\tau_t = 0, \quad , A = 0, \quad \alpha_{qt} = 0. \tag{2.3.7}$$

Далее подставляем $A = 0$ в (2.2.36) и получаем $C_2 = 0$. Затем дифференцируем (2.2.35) по θ_q и получаем

$$F'(-r\tau + 2A) + \alpha_t + F'(r\tau - \alpha_q) + F''(D_q + \theta_q(r\tau - \alpha_q)) = 0,$$

$$F'(-\alpha_q + 2A) + \alpha_t + F''(D_q + \theta_q r\tau - \theta_q\alpha_q) = 0. \tag{2.3.8}$$

Далее его дифференцирование по q дает, с дальнейшим сокращением при помощи (2.3.1), (2.3.2), (2.3.7)

$$F'(-\alpha_{qq} + 2A_q) + \alpha_{qt} + F''(D_{qq} + \theta_q r\tau_q - \theta_q\alpha_{qq}) = F''D_{qq} = 0. \tag{2.3.9}$$

Следовательно $D_{qq}=0$. Собирая уравнения (2.3.2), (2.3.1), (2.3.7) выписываем

$$\tau_t=0,\quad \tau_q=0,\quad B_q=0,\quad M=0,\quad (C_1)_q=0,\quad \alpha_q=r\tau-\tau_t/2=r\tau,$$
$$\alpha_{qq}=0,\quad \alpha_{qt}=0,\quad C_2=0,\quad A=0. \tag{2.3.10}$$

Ввиду (2.2.40) и (2.3.10) $\tau=const$. Интегрироание $\alpha_q=r\tau$ дает $\alpha=r\tau q+L(t)$. Интегрирование $D_{qq}=0$ дает $D(t,q)=N(t)q+\bar{D}(t)$. Следовательно (2.2.39) с добавлением α и учетом (2.3.10) перепишется как, при переобозначении $C_1=C$

$$\begin{gathered}\tau=const,\\ \alpha=r\tau q+L(t),\\ \xi=B(t),\\ \eta=r\tau\theta+C(t)S+N(t)q+\bar{D}(t),\ \text{где } C_1=C.\end{gathered} \tag{2.3.11}$$

Переписываем уравнения (2.2.34) и (2.2.35), (2.2.37) с учетом (2.3.10) $C_2=0$, $A=0$, $\tau_t=0$

$$B_t+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-C(t)+L(t))=0. \tag{2.3.12}$$

$$-rq(-r\tau)+rC-r(r\tau q+L)+C_t=rC-rL-C_t=0. \tag{2.3.13}$$

$$\begin{gathered}-r\tau(\mu q+F)+rNq+r\bar{D}-rqB+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)(-C_1+r\tau q+L)-\\ -N_tq-\bar{D}_t+\theta_qL_t+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q^2r\tau+F'N=\\ =-r\tau q(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)-r\tau F+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)(-C_1+r\tau q+L)+\\ +rNq+r\bar{D}-rqB-N_tq-\bar{D}_t+\theta_qL_t+F'N=\\ =-Fr\tau+r\bar{D}+rNq-rqB+\\ +(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}q)(-C+L)-\bar{D}_t-N_tq+\theta_qL_t+F'N=0.\end{gathered} \tag{2.3.14}$$

Отделяем q в (2.3.14)

$$q: rN-rB-\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-C+L)-N_t=0. \tag{2.3.15}$$

$$-Fr\tau + r\bar{D} + \mu(-C + L) - \bar{D}_t + \theta_q L_t + F'N = 0. \tag{2.3.16}$$

Подставляем (2.3.12) в (2.3.15) и получаем после интегрирования

$$rN - rB - N_t + B_t = r(N - B) - (N - B)_t = 0, \tag{2.3.17}$$

$$B(t) = N(t) + Ke^{rt}. \tag{2.3.18}$$

Выписываем условия вместе, используя (2.3.18)

$$\begin{gathered}\tau = const,\ \xi(t) = N(t) + Ke^{rt},\ \alpha = r\tau q + L(t),\\ \eta = r\tau\theta + D(t) + N(t)q + C(t)S,\\ rC(t) - rL(t) = C_t(t),\\ N'(t) + rKe^{rt} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-C(t) + L(t)) = 0.\\ -Fr\tau + r\bar{D} + \mu(-C + L) - D_t + \theta_q L_t + F'N = 0.\end{gathered} \tag{2.3.19}$$

Выражаем $L(t)$

$$L(t) = -\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + C(t), \tag{2.3.20}$$

$$L'(t) = -r\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - \frac{(N''(t) + r^2Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + C'(t). \tag{2.3.21}$$

Подстановка в (2.3.19) дает

$$\begin{gathered}\tau = const,\ \xi(t) = N(t) + Ke^{rt},\ \alpha = r\tau q - \frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + C(t),\\ \eta = r\tau\theta + D(t) + N(t)q + C(t)S,\\ C_t(t) = r\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2},\\ L(t) = -\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + C(t),\\ L'(t) = -\frac{(N''(t) + r^2Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2},\\ -Fr\tau + r\bar{D} - \mu\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - D_t -\\ -\theta_q\frac{(N''(t) + r^2Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + F'N = 0.\end{gathered} \tag{2.3.22}$$

Последнее уравнение, определяющее вид функции F, имеет вид

$$\beta F' + \lambda F + \delta\theta_q + \varepsilon = 0. \tag{2.3.23}$$

1. Пусть $\beta = \lambda = 0$, тогда $\delta = \varepsilon = 0$ и этому уравнению удовлетворяет любая функция F, при этом $N = \tau = K = 0$, $D(t) = D_0 e^{rt}$. Следовательно, $\xi = 0$, $\alpha = C(t) \equiv C_0$, $\eta = C_0 S + D_0 e^{rt}$. Получены симметрии $X_1 = e^{rt}\partial_\theta$ и $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$.

2. Если $\beta = 0$, $\lambda \neq 0$, то F — линейная функция, что противоречит предположению $F'' \neq 0$. Пусть $\beta \neq 0$, $\lambda = 0$. Тогда в силу (2.3.23)

$$F(\theta_q) = -\frac{\delta}{2\beta}\theta_q^2 - \frac{\varepsilon}{\beta}\theta_q + F_0.$$

При $\delta = 0$ опять получаем противоречие, поэтому считаем, что $\delta \neq 0$. Если $\varepsilon \neq 0$, выделяем полный квадрат и за счет преобразования эквивалентности $\overline{\theta_q} = \theta_q + c$ получаем $F = \delta_1\theta_q^2 + F_0$. Используя преобразования эквивалентности $\overline{F} = aF + b$, получаем $F = \theta_q^2$. Подставляем эту функцию в (2.3.22) и расщепляя это уравнение по θ_q, получим $\tau = 0$, $N'' - 2\gamma\sigma^2 N e^{r(T-t)} = -r^2 K e^{rt}$,

3. Пусть теперь $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\delta = 0$. С использованием преобразований эквивалентности получим $F = F_0 e^{r\nu\theta_q}$ при $\nu \neq 0$. Тогда из (2.3.22) получаем расщеплением по θ_q, что $\tau = \nu N(t)$, $N' = 0$, $K = 0$, $D = D_0 e^{rt}$, $C(t) \equiv C_0$, $\xi = \text{const}$, $\tau = \nu\xi$, $\alpha = r\nu\xi q + C_0$, $\eta = r\nu\xi\theta + C_0 S + \xi q + D_0 e^{rt}$. Отсюда получаем симметрии $X_1 = e^{rt}\partial_\theta$ и $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$, $X_3 = \nu\partial_t + \partial_S + r\nu q\partial_q + (r\nu\theta + q)\partial_\theta$. Тогда для функции $F(\theta_q) = e^{\nu\theta_q}$ получим третий оператор в виде $X_3 = \nu\partial_t + r\partial_S + r\nu q\partial_q + (r\nu\theta + rq)\partial_\theta$.

4. При $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\delta \neq 0$ с помощью преобразований эквивалентности получим уравнение $F' - r\nu F + \kappa\theta_q = 0$, $\nu \neq 0$, для которого $F(\theta_q) = F_1 e^{\nu\theta_q} + \kappa\theta_q/\nu + \kappa/\nu^2$. Эту функцию теми же преобразованиями эквивалентности преобразуем к $F(\theta_q) = e^{r\nu\theta_q} + F_0\theta_q$, $\nu \neq 0$, $F_0 \neq 0$. Тогда в силу (2.3.22) $\tau = \nu N(t)$, $N' = 0$, $K = \tau = N = 0$, $D = D_0 e^{rt}$, $\xi = 0$, $\alpha = C_0$, $\eta = C_0 S + D_0 e^{rt}$. Отсюда получаем симметрии $X_1 = e^{rt}\partial_\theta$ и $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$.

Возьмем $F(\theta_q) = \theta_q^2$, тогда уравнение (1) примет вид

$$2N(t)\theta_q - r\tau\theta_q^2 - \frac{(N''(t) + r^2Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\theta_q - D'(t) + rD(t) - \\ - \frac{\mu(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = 0. \tag{2.3.24}$$

Отсюда $\tau = 0$,

$$N''(t) - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N(t) = -r^2Ke^{rt}. \tag{2.3.25}$$

2.4. Решение уравнения (2.3.25)

Делаем замену $N(t) = B(t) - Ke^{rt}$. Тогда уравнение (2.3.25) переписывается как

$$B''(t) - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}B(t) = -2K\gamma\sigma^2 e^{rT}. \tag{2.4.1}$$

Делаем замену $x = \frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}}$, $e^{-rt} = \frac{r^2x^2}{8\gamma\sigma^2 e^{rT}}$. Тогда результат вычисления производных

$$B_t = -B_x\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}} = -\frac{r}{2}B_x x, \tag{2.4.2}$$

$$B_{tt} = B_{xx}2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + \frac{r}{2}B_x\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}} = \\ = (\frac{r}{2})^2 B_{xx}x^2 + (\frac{r}{2})^2 B_x x. \tag{2.4.3}$$

Подстановка в уравнение (2.4.1) дает

$$(\frac{r}{2})^2 B_{xx}x^2 + (\frac{r}{2})^2 B_x x - (\frac{r}{2})^2 x^2 B = -2K\gamma\sigma^2 e^{rT},\ x > 0. \tag{2.4.4}$$

Тогда, если $k = -(\frac{2}{r})^2 2K\gamma\sigma^2 e^{rT}$ то получится

$$B_{xx}x^2 + B_x x - x^2 B = k,\ x > 0. \tag{2.4.5}$$

Эта функция является неоднородным модифицированным уравнением Бесселя индекса $\nu = 0$ или модифицированным уравнением Ломеля с $\mu = -1, \nu = 0$.

Обычно используемые представления частного решения уравнения Ломмеля не определенны при $\mu \pm \nu = -1, -3, -5, \ldots$, ввиду особых точек Гамма функции или равенству нулю знаменателя.

Фундаментальной системой решений уравнения $B_{xx}x^2 + B_x x - x^2 B = 0$ являются модифицированные функции Бесселя первого $I_0(x)$ и второго рода $K_0(x)$ (Коренев, Введение в теорию Бесселевых функций стр. 19-20).

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix),\ I_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m}}{(m!)^2}, \tag{2.4.6}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right], \nu \notin Z,\ K_n(x) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(x), \tag{2.4.7}$$

Их Вронскиан (Коренев, Введение в теорию Бесселевых функций, стр. 31)

$$W(x) = \begin{vmatrix} I_0(x) & K_0(x) \\ I_0'(x) & K_0'(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}. \tag{2.4.8}$$

Частное решение, по аналогии с решением уравнения Ломмеля, имеет вид

$$B_{\text{част}}(x) = kI_0(x)\int_{x_0}^{x} K_0(s)/sds - kK_0(x)\int_{x_0}^{x} I_0(s)/sds \tag{2.4.9}$$

$$B'_{\text{част}}(x) = kI'_0(x) \in_{x_0}^{x} tK_0(s)/sds - kK'_0(x)\int_{x_0}^{x} I_0(s)/sds \tag{2.4.10}$$

$$\begin{gathered} B''_{\text{част}}(x) = kI''_0(x)\int_{x_0}^{x} K_0(s)/sds - kK''_0(x)\int_{x_0}^{x} I_0(s)/sds + \\ + kI'_0(x)K_0(x)/x - kK'_0(x)I_0(x)/x = \\ = kI''_0(x)\int_{x_0}^{x} K_0(s)/sds - kK''_0(x)\int_{x_0}^{x} I_0(s)/sds - kW(x)/x. \end{gathered} \tag{2.4.11}$$

Модифицированаая интегральная функция Бесселя второго рода(Прудников Интералы и ряды. Том 3. Специальные функкции. Дополнительные главы. стр. 659)

$$Ki_\nu(x) = \int_{x}^{\infty} K_\nu(s)/sds. \tag{2.4.12}$$

Для нее есть представление в виде g функции Мейера(Прудников Интералы и ряды. Том 3. Специальные функкции. Дополнительные главы. стр. 567)

$$Ki_{\nu}(2\sqrt{x}) = \frac{1}{4}G^{3,0}_{1,3}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1\\ 0,\ \nu/2,\ -\nu/2\end{matrix}\right) \tag{2.4.13}$$

Функция $J_0(s)$ выражается через (Бейтман Высшие трансцедентные функции, формула 44, стр. 214 или Прудников, Интегралы и ряды. Том 3. пециальные функции. Дополнительные главы стр. 549 пункт 8.4.19)

$$x^{\mu}J_{\nu}(x) = 2^{\mu}G^{1,0}_{0,2}\left(\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\cdot\\ \mu/2+\nu/2,\ \mu/2-\nu/2\end{matrix}\right) \tag{2.4.14}$$

И следовательно

$$I_0(x) = J_0(ix) = G^{1,0}_{0,2}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\cdot\\ 0,\ 0\end{matrix}\right). \tag{2.4.15}$$

Далее повышаем порядок формулой понижения порядка (Прудников, Интегралы и ряды. Том 3. пециальные функции. Дополнительные главы стр. 521 формула 9)

$$G^{mn}_{pq}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p-1}), b_1\\ (b_q)\end{matrix}\right) = G^{m-1,n}_{p-1,q-1}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_{p-1})\\ b_2,\dots,b_q\end{matrix}\right) \tag{2.4.16}$$

И следовательно

$$I_0(x) = G^{1,0}_{0,2}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}\cdot\\ 0,\ 0\end{matrix}\right) = G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\ 1,\ 0,\ 0\end{matrix}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{x_0}^{x}\frac{1}{s}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}s^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\ 1,\ 0,\ 0\end{matrix}\right)ds = [l = -\frac{1}{4}s^2] =$$

$$= \int_{-\frac{1}{4}x_0^2}^{-\frac{1}{4}x^2}\frac{1}{2l}G^{2,0}_{1,3}\left(l\,\middle|\,\begin{matrix}1\\ 1,\ 0,\ 0\end{matrix}\right)dl$$

При $m \geq 1$ имеется формула дифференцирования (Прудников, Интегралы и ряды. Том 3. пециальные функции. Дополнительные главы стр. 523 формула 38)

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{-b_1}G^{m,n}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)\right] = (-1)^k z^{-b_1-k}G^{m,n}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\b_1+k, b_2, \ldots, b_q\end{matrix}\right) \quad (2.4.17)$$

И тогда при $b_1 = 0, k = 1$

$$\frac{d}{dl}G^{2,0}_{1,3}\left(l\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) = -\frac{1}{l}G^{2,0}_{1,3}\left(l\,\middle|\,\begin{matrix}1\\1,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) \quad (2.4.18)$$

Тогда результат интегрирования будет

$$\int_{x_0}^{x} I_0(s)/s ds = -\frac{1}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) + \frac{1}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x_0^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) \quad (2.4.19)$$

Следовательно (2.4.9) примет вид

$$B_{\text{част}} = kI_0(x)(Ki_0(x_0) - Ki_0(x)) -$$

$$-kK_0(x)(-\frac{1}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) + \frac{1}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x_0^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right)) =$$

$$= kI_0(x)(Ki_0(x_0) - \frac{1}{4}G^{3,0}_{1,3}\left(x^2/4\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right)) -$$

$$-kK_0(x)(-\frac{1}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) + \frac{1}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x_0^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right)).$$

И тогда общее решение (2.4.5) будет

$$B(x) = (\alpha_1 + kKi_0(x_0))I_0(x) + (\alpha_2 - \frac{k}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x_0^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right))K_0(x) +$$

$$+K_0(x)\frac{k}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) - I_0(x)\frac{k}{4}G^{3,0}_{1,3}\left(\frac{1}{4}x^2\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right).$$

(2.4.20)

Обратная замена переменных $x = \frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}}$ и подстановка $k = -(\frac{2}{r})^2 2K\gamma\sigma^2 e^{rT}$.

$$B(t) = \beta_1 I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}}) + \beta_2 K_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}}) -$$
$$-K_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}})\frac{4\gamma\sigma^2 e^{rT}K}{r^2} G_{1,3}^{2,0}\left(-\frac{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}}{r^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) +$$
$$+I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}})\frac{2\gamma\sigma^2 e^{rT}K}{r^2} G_{1,3}^{3,0}\left(\frac{2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}}{r^2}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right).$$

Введем обозначение $c = \frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}$ и тогда оно станет

$$B(t) = \beta_1 I_0(ce^{-rt/2}) + \beta_2 K_0(ce^{-rt/2}) - K_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2K}{2} G_{1,3}^{2,0}\left(-c^2e^{-rt}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) +$$
$$+I_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2K}{4} G_{1,3}^{3,0}\left(c^2e^{-rt}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right). \tag{2.4.21}$$

Вернем обратно $N(t) = B(t) - Ke^{rt}$ и тогда предыдущее уравнение перепишется

$$N(t) = \beta_1 I_0(ce^{-rt/2}) + \beta_2 K_0(ce^{-rt/2}) - K_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2K}{2} G_{1,3}^{2,0}\left(-c^2e^{-rt}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) +$$
$$+I_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2K}{4} G_{1,3}^{3,0}\left(c^2e^{-rt}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) - Ke^{rt}. \tag{2.4.22}$$

2.5. Решение уравнений для $F = \theta_q^2$

Снова перепишем (2.3.22) с учетом результатов (2.3.25)

$$\begin{gathered}
\tau = 0,\ \xi(t) = N(t) + Ke^{rt},\ \alpha = -\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + C(t),\\
\eta = D(t) + N(t)q + C(t)S,\\
C_t(t) = r\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2},\\
L(t) = -\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + C(t),\\
N''(t) - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N(t) = -r^2Ke^{rt},\\
rD(t) - \mu\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - D_t(t) = 0.
\end{gathered} \tag{2.5.1}$$

Обозначим полученное решение для (2.3.25) как $N(t) = \beta_1\varphi_1(t) + \beta_2\varphi_2(t) + K\Psi(t)$. Тогда интегрируем $C_t(t)$

$$C(t) = \widetilde{C} + \int_{t_0}^{t} r\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}ds \tag{2.5.2}$$

Формула интегрирования по частям

$$C(t) = \widetilde{C} + \frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{(N''(t) + r^2Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}ds \tag{2.5.3}$$

Применение уравнения для N (2.3.25) дает

$$C(t) = \widetilde{C} + \frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} 2Nds. \tag{2.5.4}$$

Подстановка в выражение при $L(t)$ из (2.5.1) дает

$$\begin{gathered}
\alpha = L(t) = \widetilde{C} + \frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} 2Nds-\\
-\frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} = \widetilde{C} + \frac{(N'(t_0) + rKe^{rt_0})e^{r(t_0-T)}}{\gamma\sigma^2} - \int_{t_0}^{t} 2Nds
\end{gathered} \tag{2.5.5}$$

Обозначаем дальше $\bar{C} = \widetilde{C} + \frac{(N'(t_0)+rKe^{rt_0})e^{r(t_0-T)}}{\gamma\sigma^2}$. При домножениии на e^{rt} уравнения для D из (2.5.1) дает

$$(e^{-rt}D(t))' = -\mu(\frac{N'(t) + rKe^{rt}}{\gamma\sigma^2})e^{-rT}. \tag{2.5.6}$$

Его интегрирование даст

$$D(t) = D_0 e^{rt} - \mu(\frac{N(t) + Ke^{rt}}{\gamma\sigma^2})e^{r(t-T)}. \tag{2.5.7}$$

Подстановка в найденные функции уравнения $N(t) = \beta_1\varphi_1(t) + \beta_2\varphi_2(t) + K\Psi(t)$ даст

$$\xi = \beta_1\varphi_1(t) + \beta_2\varphi_2(t) + K\Psi(t) + Ke^{rt},$$
$$\alpha = \bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} \beta_1\varphi_1(s) + \beta_2\varphi_2(s) + K\Psi(s)ds,$$
$$C(t) = \bar{C} + \frac{(\beta_1\varphi_1' + \beta_2\varphi_2' + K\Psi' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + K\Psi)ds,$$
$$D(t) = D_0e^{rt} - \mu(\frac{\beta_1\varphi_1(t) + \beta_2\varphi_2(t) + K\Psi(t) + Ke^{rt}}{\gamma\sigma^2})e^{r(t-T)}.$$

И следовательно

$$\begin{gathered}\eta = D_0e^{rt} + (\beta_1\varphi_1(t) + \beta_2\varphi_2(t) + K\Psi(t))q+ \\ +S(\bar{C} + \frac{(\beta_1\varphi_1' + \beta_2\varphi_2' + K\Psi' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - \\ -2\int_{t_0}^{t}(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + K\Psi)ds) - \mu(\frac{\beta_1\varphi_1(t) + \beta_2\varphi_2(t) + K\Psi(t) + Ke^{rt}}{\gamma\sigma^2})e^{r(t-T)}\end{gathered} \tag{2.5.8}$$

Отсюда получены оперторы

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \tag{2.5.9}$$

$$\begin{gathered}X_2 = \varphi_1(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1(t)dt\partial_q + \\ + \left(-\left(\frac{\mu\varphi_1(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_1(t)q + S\left(\frac{\varphi_1'e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\right)\right)\partial_\theta,\end{gathered} \tag{2.5.10}$$

$$\begin{gathered}X_3 = \varphi_2(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2(t)dt\partial_q + \\ + \left(-\left(\frac{\mu\varphi_2(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_2(t)q + S\left(\frac{\varphi_2'e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\right)\right)\partial_\theta,\end{gathered} \tag{2.5.11}$$

$$X_4 = (\Psi(t) + e^{rt})\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} \Psi(t)dt\partial_q +$$
$$+\left(-\left(\frac{\mu(\Psi(t) + e^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \Psi(t)q + S\left(\frac{(\Psi' + re^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t} \Psi ds\right)\right)\partial_\theta, \tag{2.5.12}$$

$$X_5 = \partial_q + S\partial_\theta. \tag{2.5.13}$$

Тогда полученное для $F'' \neq 0$ акумулируется в следующее утверждение

Теорема 2.5.1. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + F(\theta_q)$, *где F-произвольная нелинейная функция, не эквивалентная $e^{\nu\theta_q}$ и θ_q^2, образуют операторы*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

Теорема 2.5.2. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + e^{\nu\theta_q}$ *образуют операторы*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \nu\partial_t + r\partial_S + r\nu q\partial_q + (r\nu\theta + rq)\partial_\theta.$$

Теорема 2.5.3. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + \theta_q^2$ *образуют операторы*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_5 = \partial_q + S\partial_\theta,$$
$$X_2 = \varphi_1(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)dt\partial_q +$$
$$+\left(-\left(\frac{\mu\varphi_1(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_1(t)q + S\left(\frac{\varphi_1' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t} \varphi_1 ds\right)\right)\partial_\theta,$$
$$X_3 = \varphi_2(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} \varphi_2(t)dt\partial_q +$$
$$+\left(-\left(\frac{\mu\varphi_2(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_2(t)q + S\left(\frac{\varphi_2' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t} \varphi_2 ds\right)\right)\partial_\theta,$$
$$X_4 = (\Psi(t) + e^{rt})\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} \Psi(t)dt\partial_q +$$
$$+\left(-\left(\frac{\mu(\Psi(t) + e^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \Psi(t)q + S\left(\frac{(\Psi' + re^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t} \Psi ds\right)\right)\partial_\theta.$$

где $\varphi_1(t) = I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$ $\varphi_2(t) = K_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$ *ФСР уравнения* $N'' - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N = 0$, *а* $\Psi(t)$ *частное решение уравнения* $N'' - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N = -r^2 e^{rt}$ *и представляет собой замену от модифицированной функции Ломмеля. Ее выражение через функции Мейера имеет вид*

$$-K_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-c^2e^{-rt}\middle|\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) + I_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2}{4}G^{3,0}_{1,3}\left(c^2e^{-rt}\middle|\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) - e^{rt},$$

где $c = \frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}$.

2.6. Оптимальная система подалгебр для $F = e^{\nu\theta_q}$

Рассмотрим алгебру Ли L_3 с базисом

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \nu\partial_t + r\partial_S + r\nu q\partial_q + (r\nu\theta + rq)\partial_\theta. \tag{2.6.1}$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	0
X_2	0	0	$r\nu X_2$
X_3	0	$-r\nu X_2$	0

Запишем ее таблицу коммутаторов. Ненулевыми структурными константами являются $c^2_{23} = r\nu$, $c^2_{32} = -r\nu$. Получим два внутренних автоморфизма $E_1 : \bar{e}_2 = e_2 + a_1 e_3$ и $E_2 : \bar{e}_2 = e^{a_2}e_2$. Кроме того, нам понадобится «зеркальное» отображение $E_3 : \hat{e}_1 = -e_1$, которое также является внутренним автооморфизмом, поскольку при его действии таблица коммутаторов данной алгебры Ли L_3 не изменится. Найдем оптимальную систему одномерных подалгебр.

1. Если $e_3 \neq 0$, то с помощью E_1 получим $e_2 = 0$ и тогда после деления на e_3 и замены знака у e_1 с помощью E_3 полученная тройка $(e_1, e_2, e_3) = (b, 0, 1)$ соответствует оператору $bX_1 + X_3$, $b \leq 0$.

2. Если $e_3 = 0$, а $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, то с помощью E_3 сделаем коэффициенты e_1 и e_2 одного знака, затем с помощью E_2 выровняем их по длине и поделим на эту длину. Получим $(-1, 1, 0)$ или $-X_1+X_2$. Здесь же остались еще случаи X_1 и X_2.

Лемма 2.6.1. *Оптимальной системой одномерных подалгебр алгебры Ли L_3 является* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle -X_1 + X_2\rangle, \langle bX_1 + X_3\rangle, b \le 0\}$.

Найдем оптимальную систему двумерных подалгебр.

1. Для базисного вектора X_1 одномерной подалгебры $\langle X_1\rangle$ второй базисный вектор будем искать в виде $c_2X_2 + c_3X_3$, тогда $[X_1, c_2X_2 + c_3X_3] = 0$. Получили подалгебру $\langle X_1, c_2X_2 + c_3X_3\rangle$ при любых $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Используя E_3 получим в итоге подалгебры $\langle X_1, X_2\rangle$, $\langle X_1, X_3\rangle$.

2. Имеем $[X_2, c_1X_1+c_3X_3] = r\nu X_2$, поэтому получена подалгебра $\langle X_2, c_1X_1+c_3X_3\rangle$ при любых $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$. Рассмотрев случаи $c_3 = 0$ и $c_3 \ne 0$, получим подалгебры $\langle X_2, X_1\rangle$ (получена ранее), $\langle X_2, bX_1 + X_3\rangle$, $b \le 0$.

3. Считаем коммутатор: $[-X_1 + X_2, c_2X_2 + c_3X_3] = c_3r\nu X_2 = \alpha_1(-X_1 + X_2) + \alpha_2(c_2X_2 + c_3X_3)$. Отсюда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2c_3 = 0$. При $c_3 = 0$ получим частный случай для второго набора подалгебр. Поэтому $\alpha_2 = 0$, но тогда все равно $c_3 = 0$. Новых подалгебр здесь не получено.

4. Имеем $[bX_1 + X_3, c_1X_1 + c_2X_2] = -c_2r\nu X_2 = \alpha_1(bX_1 + X_3) + \alpha_2(c_1X_1 + c_2X_2)$. Константа $c_2 \ne 0$, иначе получим частный случай первого набора подалгебр. Имеем $\alpha_1 = 0$, поэтому $\alpha_2 \ne 0$, иначе $c_2 = 0$. Поэтому $c_1 = 0$ и получен частный случай второго набора подалгебр.

Лемма 2.6.2. *Оптимальной системой двумерных подалгебр алгебры Ли L_3 является* $\Theta_2 = \{\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle, \langle X_2, bX_1 + X_3\rangle, b \le 0\}$.

Ввиду присутствия оператора X_1 в $\langle X_1, X_2\rangle, \langle X_1, X_3\rangle$ у них отсутствует инвариантное решение.

Рассмотрим подалгебру $\langle X_2, bX_1 + X_3\rangle$. Для X_2 инвариантами являются функции $\Phi(t, S, \theta - Sq)$, обозначим $z = \theta - Sq$ и подействуем на такую функцию оператором $bX_1 + X_3$:

$$\nu\Phi_t + r\Phi_S + (be^{rt} + r\nu z)\Phi_z = 0.$$

Отсюда находим инварианты всей двумерной подалгебры $J_1 = rt - \nu S$, $J_2 = e^{-rt}z - bt/\nu$. Поэтому инвариантное решение уравнения будем искать в виде

$$\theta = Sq + \frac{b}{\nu}te^{rt} + e^{rt}\Phi(rt - \nu S). \tag{2.6.2}$$

Тогда

$$\theta_t = \frac{b}{\nu}e^{rt} + \frac{br}{\nu}te^{rt} + re^{rt}\Phi + re^{rt}\Phi', \quad \theta_q = S, \quad \theta_S = q - \nu e^{rt}\Phi', \quad \theta_{SS} = \nu^2 e^{rt}\Phi''$$

Подстановка дает

$$\begin{gathered}\frac{b}{\nu}e^{rt} + \frac{br}{\nu}te^{rt} + re^{rt}\Phi + re^{rt}\Phi' = r(Sq + \frac{b}{\nu}te^{rt} + e^{rt}\Phi) + (\mu - rS)q - \\ -\mu(q - \nu e^{rt}\Phi') - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2 e^{rt}\Phi'' - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q - \nu e^{rt}\Phi' - q)^2 + e^{\nu S}.\end{gathered} \tag{2.6.3}$$

Сокращаем

$$\frac{b}{\nu}e^{rt} + re^{rt}\Phi' = \mu\nu e^{rt}\Phi' - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2 e^{rt}\Phi'' - \frac{1}{2}\gamma\nu^2\sigma^2 e^{r(T+t)}\Phi'^2 + e^{\nu S}.$$

и при делении на $-\frac{1}{2}e^{rt}$ и с $v = rt - \nu S$ уравнение принимает вид

$$\sigma^2\nu^2\Phi'' + 2(r - \mu\nu)\Phi' + \gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}\Phi'^2 - 2e^{-v} + 2\frac{b}{\nu} = 0, \tag{2.6.4}$$

где $\Phi = \Phi(v)$.

Делаем замену

$$\Phi' = \frac{y'}{\gamma e^{rT}y} + \frac{\mu\nu - r}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}}, y \neq 0,$$
$$\Phi'' = \frac{y''}{\gamma e^{rT}y} - \frac{(y')^2}{\gamma e^{rT}y^2}.$$

Тогда (2.6.4) принимает вид

$$\begin{gathered}\sigma^2\nu^2(\frac{y''}{\gamma e^{rT}y} - \frac{(y')^2}{\gamma e^{rT}y^2}) + 2(r - \mu\nu)(\frac{y'}{\gamma e^{rT}y} + \frac{\mu\nu - r}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}}) + \\ +\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}(\frac{y'}{\gamma e^{rT}y} + \frac{\mu\nu - r}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}})^2 - 2e^{-v} + 2\frac{b}{\nu} = 0,\end{gathered}$$

Раскрываем и получаем

$$\frac{\sigma^2\nu^2 y''}{\gamma e^{rT}y} - \frac{\sigma^2\nu^2(y')^2}{\gamma e^{rT}y^2} + \frac{2(r - \mu\nu)y'}{\gamma e^{rT}y} - \frac{2(\mu\nu - r)^2}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}} +$$

$$+\frac{\sigma^2\nu^2(y')^2}{\gamma e^{rT}y^2}+\frac{2(\mu\nu-r)y'}{\gamma e^{rT}y}+\frac{(\mu\nu-r)^2}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}}-2e^{-v}+2\frac{b}{\nu}=0,$$

Сокращаем

$$\frac{\sigma^2\nu^2 y''}{\gamma e^{rT}y}-2e^{-v}+2\frac{b}{\nu}-\frac{(\mu\nu-r)^2}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}}=0,$$

Домножаем на $\gamma e^{rT}y/(\sigma^2\nu^2)$

$$y''-(e^{-v}\frac{2\gamma e^{rT}}{\sigma^2\nu^2}-2\frac{b\gamma e^{rT}}{\sigma^2\nu^3}+\frac{(\mu\nu-r)^2}{\sigma^4\nu^4})y=0,$$

Проводим замену

$$u=2e^{-v/2}\frac{\sqrt{2\gamma e^{rT}}}{\sigma\nu},u>0 \tag{2.6.5}$$

Производные равны

$$y_v=-e^{-v/2}\frac{\sqrt{2\gamma e^{rT}}}{\sigma\nu}y_u,$$
$$y_{vv}=e^{-v/2}\frac{\sqrt{2\gamma e^{rT}}}{\sigma\nu}y_u/2+e^{-v}\frac{2\gamma e^{rT}}{\sigma^2\nu^2}y_{uu}=uy_u/4+u^2y_{uu}/4.$$

Тогда

$$uy_u/4+u^2y_{uu}/4-(u^2/4-2\frac{b\gamma e^{rT}}{\sigma^2\nu^3}+\frac{(\mu\nu-r)^2}{\sigma^4\nu^4})y=0,$$

Домножение дает

$$u^2y_{uu}+uy_u-(u^2-\frac{8b\gamma e^{rT}}{\sigma^2\nu^3}+\frac{4(\mu\nu-r)^2}{\sigma^4\nu^4})y=0,$$

Оно является модифицированным уравнением Бесселя порядка p, где

$$p=\sqrt{-\frac{8b\gamma e^{rT}}{\sigma^2\nu^3}+\frac{4(\mu\nu-r)^2}{\sigma^4\nu^4}}. \tag{2.6.6}$$

Его фундаментольной системой решений являются модифицированные функции Бесселя первого $I_p(u)$ и второго рода $K_p(u)$. Следовательно решение имеет вид

$$y=\beta_1 I_p(u)+\beta_2 K_p(u). \tag{2.6.7}$$

Обратная замена

$$\Phi = \ln|y| + \frac{(\mu\nu - r)v}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}} + c,$$
$$u = 2e^{-v/2}\sqrt{2\gamma e^{rT}}.$$

дает при $m = 2\frac{\sqrt{2\gamma e^{rT}}}{\sigma\nu}$

$$\Phi = \ln|\beta_1 I_p(me^{-v/2}) + \beta_2 K_p(me^{-v/2})| + \frac{(\mu\nu - r)v}{\sigma^2\nu^2\gamma e^{rT}} + c. \tag{2.6.8}$$

Рассмотрим подалгебру $\langle X_1\rangle$ с оператором (2.6.1) $X_1 = e^{rt}\partial_\theta$.

Его инварианты t, S, q.

Так как инваарианты не зависят от θ, то инвариантных решений нет.

Рассмотрим подалгебру $\langle X_2\rangle$ с оператором (2.6.1) $X_2 = \partial_q + S\partial_\theta$. Ее инварианты $\theta - Sq, t, S$. Ищем решение в виде

$$\theta = Sq + e^{rt}\phi(t, S). \tag{2.6.9}$$

Его производные примут вид

$$\theta_S = q + e^{rt}\phi_S,$$
$$\theta_{SS} = e^{rt}\phi_{SS},$$
$$\theta_q = S,$$
$$\theta_t = e^{rt}\phi_t + re^{rt}\phi.$$

Их подстановка даст

$$e^{rt}\phi_t + re^{rt}\phi = r(Sq + e^{rt}\phi) + (\mu - rS)q-$$
$$-\mu(q + e^{rt}\phi_S) - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{rt}\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(e^{rt}\phi_S)^2 + e^{\nu S}.$$

После сокращения получится

$$e^{rt}\phi_t = -\mu e^{rt}\phi_S - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{rt}\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(e^{rt}\phi_S)^2 + e^{\nu S}.$$

Деление на e^{rt} даст

$$\phi_t = -\mu\phi_S - \frac{1}{2}\sigma^2\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}(\phi_S)^2 + e^{\nu S - rt}.$$

Делаем замену $u = t$, $z = \nu S - rt$. Ее производные равны

$$\phi_t = \phi_u - r\phi_z, \tag{2.6.10}$$

$$\phi_S = \nu\phi_z, \quad \phi_{SS} = \nu^2\phi_z^2. \tag{2.6.11}$$

Подстановка даст

$$\phi_u = (r - \mu\nu)\phi_z - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\phi_{zz} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}(\phi_z)^2 + e^z. \tag{2.6.12}$$

Делаем замену

$$\phi = \psi + \frac{r - \mu\nu}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} z + \frac{(r - \mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} u, \tag{2.6.13}$$

$$\phi_u = \psi_u + \frac{(r - \mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}}, \tag{2.6.14}$$

$$\phi_z = \psi_z + \frac{r - \mu\nu}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}}, \tag{2.6.15}$$

$$\phi_{zz} = \psi_{zz}. \tag{2.6.16}$$

Далее подставляем и раскрываем

$$\begin{gathered}
\psi_u + \frac{(r - \mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} = (r - \mu\nu)(\psi_z + \frac{r - \mu\nu}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}}) - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\psi_{zz} - \\
- \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}(\psi_z + \frac{r - \mu\nu}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}})^2 + e^z, \\
\psi_u + \frac{(r - \mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} = (r - \mu\nu)\psi_z + \frac{(r - \mu\nu)^2}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\psi_{zz} - \\
- \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}(\psi_z^2 + 2\frac{r - \mu\nu}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}}\psi_z + \frac{(r - \mu\nu)^2}{(\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT})^2}) + e^z,
\end{gathered} \tag{2.6.17}$$

$$\begin{gathered}
\psi_u + \frac{(r - \mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} = (r - \mu\nu)\psi_z + \frac{(r - \mu\nu)^2}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\psi_{zz} - \\
- \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}\psi_z^2 - (r - \mu\nu)\psi_z - \frac{(r - \mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}} + e^z.
\end{gathered} \tag{2.6.18}$$

Сокращение даст

$$\psi_u = -\frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\psi_{zz} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}\psi_z^2 + e^z. \tag{2.6.19}$$

В качестве ее частного решения можно взять логарифм от бесселевской функции. Следовательно объединяя замены (2.6.13), (2.6.9), (2.6.10) получаем

$$\theta = Sq + e^{rt}(\psi(t, \nu S - rt) + \frac{r - \mu\nu}{\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}}(\nu S - rt) + \frac{(r-\mu\nu)^2}{2\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}}t), \qquad (2.6.20)$$

где $\psi(u, z)$ - решение

$$\psi_u = -\frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\psi_{zz} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\nu^2 e^{rT}\psi_z^2 + e^z. \qquad (2.6.21)$$

Рассмотрим подалгебру $\langle -X_1 + X_2\rangle$ с оператором $-X_1 + X_2 = \partial_q + (S - e^{rt})\partial_\theta$. Его главные инварианты $t,\ S,\ \theta - (S - e^{rt})q$. Ищем решение в виде

$$\theta - (S - e^{rt})q = e^{rt}\phi(t, S). \qquad (2.6.22)$$

Его производные примут вид

$$\theta_S = q + e^{rt}\phi_S,$$
$$\theta_{SS} = e^{rt}\phi_{SS},$$
$$\theta_q = S - e^{rt},$$
$$\theta_t = -re^{rt}q + e^{rt}\phi_t + re^{rt}\phi.$$

Их подстановка даст

$$-re^{rt}q + e^{rt}\phi_t + re^{rt}\phi = r((S - e^{rt})q + e^{rt}\phi(t, S)) + (\mu - rS)q -$$
$$-\mu(q + e^{rt}\phi_S) - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{rt}\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(e^{rt}\phi_S)^2 + e^{\nu(S - e^{rt})}.$$

После сокращения получается

$$e^{rt}\phi_t = -\mu e^{rt}\phi_S - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{rt}\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}(\phi_S)^2 + e^{\nu(S - e^{rt})}.$$

После деления на e^{rt} получается следующая подмодель

$$\phi_t = -\mu\phi_S - \frac{1}{2}\sigma^2\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}(\phi_S)^2 + e^{\nu(S - e^{rt}) - rt}. \qquad (2.6.23)$$

Рассмотрим подалгебру $\langle bX_1 + X_3\rangle$ с оператором
$bX_1 + X_3 = \nu\partial_t + r\partial_S + r\nu q\partial_q + (r\nu\theta + rq + be^{rt})\partial_\theta$.

Его инваринты имеют вид $\Phi(\nu S - rt, qe^{-rt}, (\nu\theta - bte^{rt})/q - \nu S)$. Ищем решение в виде

$$\nu\frac{\theta}{q} - \frac{bte^{rt}}{q} - \nu S + be^{rt}/(rq) = \nu\phi(\nu S - rt, qe^{-rt})/(qe^{-rt}). \tag{2.6.24}$$

И следовательно $\theta = \frac{bte^{rt}}{\nu} + Sq + e^{rt}\phi(u,v)$, где $u = \nu S - rt$, $v = qe^{-rt}$. Оно схоже с (2.6.2) при $\phi_v = 0$ и частное решение можно получить оттуда. Его производные имеют вид

$$\theta_t = \frac{be^{rt}}{\nu} + \frac{rbte^{rt}}{\nu} + re^{rt}\phi - re^{rt}\phi_u - rq\phi_v, \tag{2.6.25}$$

$$\theta_S = q + \nu e^{rt}\phi_u, \quad \theta_{SS} = \nu^2 e^{rt}\phi_{uu}, \quad \theta_q = S + \phi_v. \tag{2.6.26}$$

Их подстановка даст

$$\begin{gathered}\frac{be^{rt}}{\nu} + \frac{rbte^{rt}}{\nu} + re^{rt}\phi - re^{rt}\phi_u - rq\phi_v = r\frac{bte^{rt}}{\nu} + rSq + re^{rt}\phi + \\ +(\mu - rS)q - \mu(q + \nu e^{rt}\phi_u) - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2 e^{rt}\phi_{uu} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}\nu^2\phi_u^2 + e^{\nu(S+\phi_v)}.\end{gathered} \tag{2.6.27}$$

Сокращение и деление на e^{-rt} даст

$$\frac{b}{\nu} - r\phi_u - rqe^{-rt}\phi_v = -\mu\nu\phi_u - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\phi_{uu} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\nu^2\phi_u^2 + e^{\nu(S+\phi_v)-rt}. \tag{2.6.28}$$

Обозначим $u = \nu S - rt$, $v = qe^{-rt}$ и получаем

$$\frac{b}{\nu} - rv\phi_v = (r - \mu\nu)\phi_u - \frac{1}{2}\sigma^2\nu^2\phi_{uu} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\nu^2\phi_u^2 + e^{u+\nu\phi_v}. \tag{2.6.29}$$

2.7. Оптимальная система подалгебр для $F = \theta_q^2$

Рассмотрим алгебру Ли L_5 с базисом

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_5 = \partial_q + S\partial_\theta, \tag{2.7.1}$$

$$\begin{gathered}X_2 = \varphi_1(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1(s)ds\partial_q + \\ + \left(-\left(\frac{\mu\varphi_1(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_1(t)q + S\left(\frac{\varphi_1' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\right)\right)\partial_\theta,\end{gathered} \tag{2.7.2}$$

$$X_3 = \varphi_2(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} \varphi_2(s)ds\partial_q +$$
$$+\left(-\left(\frac{\mu\varphi_2(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_2(t)q + S\left(\frac{\varphi_2' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\right)\right)\partial_\theta, \quad (2.7.3)$$

$$X_4 = (\Psi(t) + e^{rt})\partial_S - 2\int_{t_0}^{t} \Psi(s)ds\partial_q +$$
$$+\left(-\left(\frac{\mu(\Psi(t) + e^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \Psi(t)q + S\left(\frac{(\Psi' + re^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\Psi ds\right)\right)\partial_\theta. \quad (2.7.4)$$

Начинаем вычисление таблицы коммутаторов. Коммутаторы

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = 0, \quad [X_1, X_5] = 0, \quad (2.7.5)$$

равны нулю, так как операторы не содержат переменной θ и в них нет дифференцирования по t. Для коммутаторов с X_5 вычисления

$$[X_2, X_5] = \varphi_1\partial_\theta - \varphi_1\partial_\theta = 0, \quad [X_3, X_5] = \varphi_2\partial_\theta - \varphi_2\partial_\theta = 0, \quad (2.7.6)$$

$$[X_4, X_5] = (\Psi + e^{rt})\partial_\theta - \Psi\partial_\theta = X_1. \quad (2.7.7)$$

Далее вычисляем коммутаторы без подставновки значений функций φ_1, φ_2, Ψ. Их подставим в дальнейшем.

$$[X_2, X_3] = \varphi_1\left(\frac{\varphi_2' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\right)\partial_\theta - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1(t)dt\varphi_2\partial_\theta -$$
$$-\varphi_2\left(\frac{\varphi_1' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\right)\partial_\theta + 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2(t)dt\varphi_1\partial_\theta =$$
$$= \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')\partial_\theta,$$

$$[X_2, X_4] = \varphi_1\left(\frac{(\Psi' + re^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\Psi ds\right)\partial_\theta - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\Psi\partial_\theta -$$
$$-(\Psi(t) + e^{rt})\left(\frac{\varphi_1' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\right)\partial_\theta + 2\int_{t_0}^{t}\Psi ds\varphi_1\partial_\theta =$$
$$= \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\varphi_1(\Psi' + re^{rt}) - (\Psi(t) + e^{rt})\varphi_1')\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta,$$

$$[X_3,X_4]=\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\varphi_2(\Psi'+re^{rt})-(\Psi(t)+e^{rt})\varphi_2')\partial_\theta+2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta.$$

Также вспоминаем (2.4.9), (2.4.22), что $N(t)=B(t)+Ke^{rt}$,

$$\varphi_1(t)=I_0(ce^{-rt/2}),\quad \varphi_2(t)=K_0(ce^{-rt/2}),\quad \Psi=B(t)-e^{rt}=$$

$$=-(\frac{2}{r})^2 2\gamma\sigma^2 e^{rT}(I_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}}K_0(u)/udu-K_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}}I_0(u)/udu)-e^{rt},$$

где $c=\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2e^{rT}}$. Определитель Вронского для модифицировванных Бесселевых функций

$$W(x)=\begin{vmatrix}I_0(x) & K_0(x)\\ I_0'(x) & K_0'(x)\end{vmatrix}=-\frac{1}{x}. \tag{2.7.8}$$

Тогда

$$[X_2,X_3]=\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1')\partial_\theta=-\frac{cr}{2}e^{-rt/2}(I_0(ce^{-rt/2})K_0'(ce^{-rt/2})- \tag{2.7.9}$$

$$-I_0'(ce^{-rt/2})K_0(ce^{-rt/2}))\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\partial_\theta \tag{2.7.10}$$

что в точности образует определитель Вронского и следовательно

$$[X_2,X_3]=\frac{re^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}\partial_\theta=\frac{re^{-rT}}{2\gamma\sigma^2}X_1 \tag{2.7.11}$$

Далее считаем производную Ψ

$$\Psi'=\frac{2}{r}2\gamma\sigma^2e^{rT}ce^{-rt/2}(I_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}}K_0/udu-K_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}}I_0/udu)-$$
$$-re^{rt}.$$

Подсталяем в выражение для $[X_3,X_4]$

$$[X_3,X_4]=\frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(K_0(ce^{-rt/2})(\frac{2}{r}2\gamma\sigma^2e^{rT}ce^{-rt/2}(I_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}}K_0/udu-$$
$$-K_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}}I_0/udu))-$$

$$-\frac{r}{2}ce^{-rt/2}(-(\frac{2}{r})^2 2\gamma\sigma^2 e^{rT}(I_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))K_0'(ce^{-rt/2}))\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta =$$

$$= 2e^{rt}(K_0(ce^{-rt/2})(\frac{2}{r}ce^{-rt/2}(I_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))+$$

$$+\frac{r}{2}ce^{-rt/2}(-(\frac{2}{r})^2(I_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))K_0'(ce^{-rt/2}))\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta$$

Сокращение членов с K_0K_0' даст

$$[X_3, X_4] = \frac{2}{r}2e^{rt}c(e^{-rt/2}K_0(ce^{-rt/2})I_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$
$$-e^{-rt/2}K_0'(ce^{-rt/2})I_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu)\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta \qquad (2.7.12)$$

Делаем замену в интеграле от бесселевой функции

$$\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu = [u = ce^{-rs/2}] = -\frac{r}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{K_0(ce^{-rt/2})}{ce^{-rt/2}}ce^{-rt/2}ds =$$

$$= -\frac{r}{2}\int_{t_0}^{t} K_0(ce^{-rt/2})ds = -\frac{r}{2}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds$$

Тогда после выноса интеграла в (2.7.12) получаем

$$[X_3, X_4] = -2e^{rt}ce^{-rt/2}(K_0(ce^{-rt/2})I_0'(ce^{-rt/2}) - K_0'(ce^{-rt/2})I_0(ce^{-rt/2}))\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta +$$

$$+2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta$$

Выражение , ввиду (2.7.8), $(K_0(ce^{-rt/2})I_0'(ce^{-rt/2}) - K_0'(ce^{-rt/2})I_0(ce^{-rt/2})) = -W(ce^{-rt/2}) = \frac{1}{ce^{-rt/2}}$ образует определитель Вронского с минусом и следовательно

$$[X_3, X_4] = -2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta = 0. \qquad (2.7.13)$$

Далее подставляем для $[X_2, X_4]$

$$[X_2, X_4] = \frac{e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}(I_0(ce^{-rt/2})(\frac{2}{r}2\gamma\sigma^2 e^{rT}ce^{-rt/2}(I_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))-$$

$$-\frac{r}{2}ce^{-rt/2}(-(\frac{2}{r})^2 2\gamma\sigma^2 e^{rT}(I_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))I_0'(ce^{-rt/2}))\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds\partial_\theta =$$

$$= 2e^{rt}(I_0(ce^{-rt/2})(\frac{2}{r}ce^{-rt/2}(I_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))+$$

$$+\frac{r}{2}ce^{-rt/2}(-(\frac{2}{r})^2(I_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} K_0/udu-$$

$$-K_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))I_0'(ce^{-rt/2}))\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta.$$

Сокращение членов с $I_0 I_0'$ даст

$$[X_2, X_4] = 2e^{rt}(I_0(ce^{-rt/2})(\frac{2}{r}ce^{-rt/2}(-K_0'(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))+$$

$$+\frac{r}{2}ce^{-rt/2}(-(\frac{2}{r})^2(-K_0(ce^{-rt/2})\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu))I_0'(ce^{-rt/2}))\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta =$$

$$= -\frac{2}{r}2e^{rt}(ce^{-rt/2}\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu(I_0(ce^{-rt/2})K_0'(ce^{-rt/2}) - I_0'(ce^{-rt/2})K_0(ce^{-rt/2})))\partial_\theta +$$

$$+2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta.$$

Делаем замену в интеграле от бесселевой функции

$$\int_{ce^{-rt_0/2}}^{ce^{-rt/2}} I_0/udu = [u = ce^{-rs/2}] = -\frac{r}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{I_0(ce^{-rt/2})}{ce^{-rt/2}}ce^{-rt/2}ds =$$

$$= -\frac{r}{2}\int_{t_0}^{t} I_0(ce^{-rt/2})ds = -\frac{r}{2}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds$$

Подставвляем результат и определитель Вронсккого для Бесселевых функций и получаем

$$[X_2, X_4] = 2e^{rt}(ce^{-rt/2}\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds(I_0(ce^{-rt/2})K_0'(ce^{-rt/2}) - I_0'(ce^{-rt/2})K_0(ce^{-rt/2})))\partial_\theta +$$
$$+2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta = -2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta + 2e^{rt}\int_{t_0}^{t}\varphi_1 ds\partial_\theta = 0.$$

Тогда таблица коммутаторов имеет вид

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	0
X_2	0	0	$\frac{re^{-rT}}{2\gamma\sigma^2}X_1$	0	0
X_3	0	$-\frac{re^{-rT}}{2\gamma\sigma^2}X_1$	0	0	0
X_4	0	0	0	0	X_1
X_5	0	0	0	$-X_1$	0

Решение уравнений Ли дает внутренние автоморфизмы $E_2 : \bar{e}_1 = e_1 + \frac{re^{-rT}}{2\gamma\sigma^2}e_3 t_2$, $E_3 : \bar{e}_1 = e_1 - \frac{re^{-rT}}{2\gamma\sigma^2}e_2 t_3$, $E_4 : \bar{e}_1 = e_1 + e_5 t_4$, $E_5 : \bar{e}_1 = e_1 - e_4 t_5$. При $e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 \neq 0$ всегда имеется возможность занулить e_1.

1.Пусть $e_4 \neq 0$, тогда получаем при помощи E_5 что $e_1 = 0$ и делением на e_4 получаем $e_2 = b$, $e_3 = c$, $e_5 = d$ и получена пятерка $(0, b, c, 1, d)$.

2. Если $e_4 = 0$ и $e_2 \neq 0$, то при помощи E_3 и деления на e_2 получаем, что $e_3 = c$, $e_5 = d$ и получена пятерка $(0, 1, c, 0, d)$.

3. Если $e_4 = 0$, $e_2 = 0$ и $e_3 \neq 0$, то при помощи E_2 и деления на e_3 получаем, что $e_3 = 1$, $e_5 = d$ и получена пятерка $(0, 0, 1, 0, d)$.

4. Если $e_4 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$ и $e_5 \neq 0$, то при помощи E_4 и деления на e_5 получаем, что $e_5 = 1$ и получена пятерка $(0, 0, 0, 0, 1)$.

4. Если $e_4 = 0$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$, $e_5 = 0$ и $e_1 \neq 0$, то при помощи деления на e_1 получаем пятерку $(1, 0, 0, 0, 0)$.

Лемма 2.7.1. *Оптимальной системой одномерных подалгебр алгебры* L_5 *является* $\Theta_3 = \{\langle X_4 + bX_2 + cX_3 + dX_5\rangle, \langle X_2 + bX_3 + dX_5\rangle, \langle X_3 + dX_5\rangle, \langle X_5\rangle, \langle X_1\rangle, b, c, d \in R\}$.

Но в данном случае, ввиду того, что вид групп не упростился после решения дифференциального уранения на N $N'' - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N = -r^2Ke^{rt}$ и того, что оптимальная система подалгебр не сильно упростилась, кроме нескольких подалгебр, то целесообразно рассматривать группу в которой $N = \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + K\Psi$ как и было изначально и потом подставить соответствующие значения C, β_1, β_2, K.

$$(N(t) + Ke^{rt})\partial_S + (\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N(s)ds)\partial_q +$$
$$+(N(t)q + S(\bar{C} + \frac{(N'(t) + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^{t} N(s)ds) - \mu(\frac{N(t) + Ke^{rt}}{\gamma\sigma^2})e^{r(t-T)})\partial_\theta$$

Его независимые инварианты можно выбрать так при $N \neq 0$

$$t, \quad (-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} N(s)ds)S + (N(t) + Ke^{rt})q,$$
$$\theta - Sq - \frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} + \frac{\mu Se^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + \frac{q^2Ke^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} Nds)}.$$

Следовательно ищем инвариантное решение в виде

$$\theta = Sq + \frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{\mu Se^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - \frac{q^2Ke^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} Nds)} + \Phi(t, z). \tag{2.7.14}$$

где $z = (-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} N(s)ds)S + (N(t) + Ke^{rt})q$. Производные равны

$$\theta_t = \frac{S^2(N'' + r^2Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} + r\frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} -$$
$$-\frac{S^2(N' + rKe^{rt})^2e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2} - r\frac{\mu Se^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - r\frac{q^2Ke^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} Nds)} - \tag{2.7.15}$$
$$-\frac{q^2Ke^{rt}N}{(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} Nds)^2} + \Phi_t + \Phi_z(2NS + (N' + rKe^{rt})q),$$

$$\theta_S = q + \frac{S(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + \Phi_z(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} Nds), \tag{2.7.16}$$

$$\theta_{SS} = \frac{(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} + \Phi_{zz}(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} Nds)^2, \tag{2.7.17}$$

$$\theta_q = S - \frac{qKe^{rt}}{(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)} + \Phi_z(N + Ke^{rt}). \tag{2.7.18}$$

Так как N решение $N''(t) - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} N = -r^2 K e^{rt}$. То производная по t примет вид

$$\theta_t = \frac{S^2 N}{(N + Ke^{rt})} + r\frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{S^2(N' + rKe^{rt})^2 e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2} -$$
$$- r\frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - r\frac{q^2 K e^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)} - \frac{q^2 K e^{rt} N}{(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)^2} +$$
$$+ \Phi_t + \Phi_z(2NS + (N' + rKe^{rt})q), \tag{2.7.19}$$

Их подстановка в уравнение даст

$$\frac{S^2 N}{(N + Ke^{rt})} + r\frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{S^2(N' + rKe^{rt})^2 e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2} -$$
$$- r\frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - r\frac{q^2 K e^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)} - \frac{q^2 K e^{rt} N}{(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)^2} +$$
$$+ \Phi_t + \Phi_z(2NS + (N' + rKe^{rt})q) = rSq + r\frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} -$$
$$- r\frac{\mu S e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - r\frac{q^2 K e^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)} + r\Phi + (\mu - rS)q -$$
$$- \mu(q + \frac{S(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{\mu e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2} + \Phi_z(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} N ds)) -$$
$$- \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} + \Phi_{zz}(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} N ds)^2) -$$
$$- \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\frac{S(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N + Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + \Phi_z(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} N ds))^2 +$$
$$+ (S - \frac{qKe^{rt}}{(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)} + \Phi_z(N + Ke^{rt}))^2.$$

Сокращаем то, что связано с дифференцированием экспоненты и сдвигом функции θ на Sq

$$\frac{S^2 N}{(N + Ke^{rt})} - \frac{S^2(N' + rKe^{rt})^2 e^{r(t-T)}}{2(N + Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2} - \frac{q^2 K e^{rt} N}{(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} N ds)^2} +$$

$$+\Phi_t+\Phi_z(2NS+(N'+rKe^{rt})q)=r\Phi-$$
$$-\mu(\frac{S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+\Phi_z(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds))-$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}+\Phi_{zz}(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(\frac{S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+\Phi_z(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds))^2+$$
$$+(S-\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}+\Phi_z(N+Ke^{rt}))^2.$$

Раскрываем квадраты

$$\frac{S^2N}{(N+Ke^{rt})}-\frac{S^2(N'+rKe^{rt})^2e^{r(t-T)}}{2(N+Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2}-\frac{q^2Ke^{rt}N}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}+$$
$$+\Phi_t+\Phi_z(2NS+(N'+rKe^{rt})q)=r\Phi-$$
$$-\mu(\frac{S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+\Phi_z(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds))-$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}+\Phi_{zz}(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}((\frac{S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2})^2+(\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2})^2+\Phi_z^2(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2-$$
$$-2\frac{\mu S(N'+rKe^{rt})e^{2r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})(\gamma\sigma^2)^2}+2(\Phi_z\frac{S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2})-$$
$$-2(\frac{\mu e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\Phi_z(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)))+S^2+(-\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)})^2+\Phi_z^2(N+Ke^{rt})^2-$$
$$-2S\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}-2\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}\Phi_z(N+Ke^{rt})+2S\Phi_z^(N+Ke^{rt}).$$

Переносим члены и действуем над элементами полученными при раскрытии последнего квадрата за исключением элемента содержащего Φ_z^2 и расккрваем оставшиеся скобки

$$-\frac{S^2Ke^{rt}}{(N+Ke^{rt})}-\frac{S^2(N'+rKe^{rt})^2e^{r(t-T)}}{2(N+Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2}-\frac{q^2Ke^{rt}(N+Ke^{rt})}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}+2S\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}+$$

$$+\Phi_t+\Phi_z((N'+rKe^{rt})q-2\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}(N+Ke^{rt})+2SKe^{rt})=r\Phi-$$

$$-\mu\frac{S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}+\frac{\mu^2e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}-\mu\Phi_z(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)-$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2-$$

$$-(\frac{S^2(N'+rKe^{rt})^2e^{r(t-T)}}{2(N+Ke^{rt})^2\gamma\sigma^2})-\frac{\mu^2e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2+$$

$$+\frac{\mu S(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\Phi_z\frac{S(N'+rKe^{rt})(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)}{(N+Ke^{rt})}+$$

$$+\mu\Phi_z(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)+\Phi_z^2(N+Ke^{rt})^2.$$

Сокращаем одинаковые элементы

$$-\frac{S^2Ke^{rt}}{(N+Ke^{rt})}-\frac{q^2Ke^{rt}(N+Ke^{rt})}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}+2S\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}+$$

$$+\Phi_t+\Phi_z((N'+rKe^{rt})q-2\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}(N+Ke^{rt})+2SKe^{rt})=r\Phi+\frac{\mu^2e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2-$$

$$-\Phi_z\frac{S(N'+rKe^{rt})(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)}{(N+Ke^{rt})}+\Phi_z^2(N+Ke^{rt})^2.$$

Рассмотрим первую строку, если из него вынести $-Ke^{rt}$ и привести к общему знаменателю то получится квадрат разности

$$-\frac{Ke^{rt}}{(N+Ke^{rt})(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}(S^2(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2+q^2(N+Ke^{rt})^2-$$

$$-2Sq(N+Ke^{rt})(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds))=-\frac{Ke^{rt}(q(N+Ke^{rt})+S(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds))^2}{(N+Ke^{rt})(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}.$$

что в точности является одним из независимых инвариантов, который уже обозначили как z

$$-\frac{Ke^{rt}(q(N+Ke^{rt})+S(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds))^2}{(N+Ke^{rt})(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}=-\frac{Ke^{rt}z^2}{(N+Ke^{rt})(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}.$$

Рассмотрим выражения стоящие перед всеми Φ_z с переносом слагаемого стоящего в левой части

$$(N'+rKe^{rt})q-2\frac{qKe^{rt}}{(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)}(N+Ke^{rt})+2SKe^{rt}+$$
$$+\frac{S(N'+rKe^{rt})(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)}{(N+Ke^{rt})}$$

Выносим $\frac{(N'+rKe^{rt})}{(N+Ke^{rt})}+2\frac{Ke^{rt}}{(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)}$ и получаем

$$(\frac{(N'+rKe^{rt})}{(N+Ke^{rt})}+2\frac{Ke^{rt}}{(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)})(q(N+Ke^{rt})+S(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds))=$$
$$=(\frac{(N'+rKe^{rt})}{(N+Ke^{rt})}+2\frac{Ke^{rt}}{(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)})z.$$

Их подстановка в подмодель даст

$$-\frac{Ke^{rt}z^2}{(N+Ke^{rt})(\bar{C}-2\int_{t_0}^{t}Nds)^2}+$$
$$+\Phi_t+\Phi_z(\frac{(N'+rKe^{rt})}{(N+Ke^{rt})}+2\frac{Ke^{rt}}{(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)})z=r\Phi+\frac{\mu^2e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{(N'+rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2-$$
$$-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-\bar{C}+2\int_{t_0}^{t}Nds)^2+\Phi_z^2(N+Ke^{rt})^2.$$

Замена вида

$$\Phi=\widetilde{\Phi}+\frac{\mu^2te^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\ln(N+Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}.$$

Убирает слагаемые, которые зависят только от t. И следовательно инвариантное решение имеет вид

$$\theta = Sq + \frac{S^2(N' + rKe^{rt})e^{r(t-T)}}{2(N+Ke^{rt})\gamma\sigma^2} - \frac{\mu S e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2} - \frac{q^2Ke^{rt}}{2(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} Nds)} + \\ + \frac{\mu^2 t e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\ln(N+Ke^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + \Phi(t,z). \tag{2.7.20}$$

где $z = (-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} N(s)ds)S + (N(t) + Ke^{rt})q$ и $\Phi(t,z)$ решение

$$-\frac{Ke^{rt}z^2}{(N+Ke^{rt})(\bar{C} - 2\int_{t_0}^{t} Nds)^2} + \Phi_z(\frac{(N' + rKe^{rt})}{(N+Ke^{rt})} + 2\frac{Ke^{rt}}{(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} Nds)})z + \\ + \Phi_t = r\Phi - \frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} Nds)^2 - \\ -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-\bar{C} + 2\int_{t_0}^{t} Nds)^2 + \Phi_z^2(N+Ke^{rt})^2. \tag{2.7.21}$$

Если $N = 0$, то $K = 0$ и группа имеет вид

$$\partial_q + S\partial_\theta \tag{2.7.22}$$

Его независимые инварианты $\theta - Sq, \quad t, \quad S$. Ишем решения в виде $\theta = Sq + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi(t,S)$. Производные равны

$$\theta_t = r\frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi_t, \tag{2.7.23}$$

$$\theta_S = q + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi_S, \quad \theta_{SS} = \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi_{SS}, \quad \theta_q = S. \tag{2.7.24}$$

Их подстановка в рассматриваемое уравнения даст

$$r\frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi_t = rSq + r\frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi + (\mu - rS)q - \mu(q + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi_S) - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\phi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\frac{e^{2rt}}{\gamma^2 e^{2rT}}\phi_S^2 + S^2. \tag{2.7.25}$$

Сокращение и деление на e^{rt} и домножение на γe^{rT} даст

$$\phi_t = -\mu\phi_S - \frac{1}{2}\sigma^2\phi_{SS} - \frac{1}{2}\sigma^2\phi_S^2 + S^2\gamma e^{r(T-t)}. \tag{2.7.26}$$

Делаем замену вида

$$\phi = \ln\psi + \frac{w'}{2\sigma^2 w}S^2 + S(\frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2}) - \frac{\ln w}{2} - \int \frac{\sigma^2}{2w^2}dt + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t, \qquad (2.7.27)$$

где $w = I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$ решение $w'' - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}w = 0$. Производные имеют вид

$$\phi_t = \frac{\psi_t}{\psi} + (\frac{w''}{2\sigma^2 w} - \frac{(w')^2}{2\sigma^2 w^2})S^2 - S\frac{w'}{w^2} - \frac{w'}{2w} - \frac{\sigma^2}{2w^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}, \qquad (2.7.28)$$

$$\phi_S = \frac{\psi_S}{\psi} + \frac{w'}{\sigma^2 w}S + \frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2}, \qquad (2.7.29)$$

$$\phi_{SS} = \frac{\psi_{SS}}{\psi} - \frac{(\psi_S)^2}{\psi^2} + \frac{w'}{\sigma^2 w}. \qquad (2.7.30)$$

Их подстановка даст

$$\begin{gathered}\frac{\psi_t}{\psi} + (\frac{w''}{2\sigma^2 w} - \frac{(w')^2}{2\sigma^2 w^2})S^2 - S\frac{w'}{w^2} - \frac{w'}{2w} - \frac{\sigma^2}{2w^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = \\ = -\mu(\frac{\psi_S}{\psi} + \frac{w'}{\sigma^2 w}S + \frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2}) - \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{\psi_{SS}}{\psi} - \frac{(\psi_S)^2}{\psi^2} + \frac{w'}{\sigma^2 w}) - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{\psi_S}{\psi} + \frac{w'}{\sigma^2 w}S + \frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2})^2 + \gamma e^{r(T-t)}S^2.\end{gathered} \qquad (2.7.31)$$

Раскрываем скобки, с учетом того, что

$$\begin{gathered}\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{w''}{2\sigma^2 w}S^2 - \frac{(w')^2}{2\sigma^2 w^2}S^2 - S\frac{w'}{w^2} - \frac{w'}{2w} - \frac{\sigma^2}{2w^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\mu\frac{\psi_S}{\psi} - \mu\frac{w'}{\sigma^2 w}S - \\ -\mu\frac{1}{w} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\psi_{SS}}{\psi} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{(\psi_S)^2}{\psi^2} - \frac{w'}{2w} - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2((\frac{\psi_S}{\psi})^2 + \frac{(w')^2}{\sigma^4 w^2}S^2 + \frac{1}{w^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^4} + 2\frac{\psi_S}{\psi}(\frac{w'}{\sigma^2 w}S + \frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2}) + \\ +2\frac{w'}{\sigma^2 w^2}S - \frac{2\mu w'}{\sigma^4 w}S - \frac{2\mu}{\sigma^2 w}) + \gamma e^{r(T-t)}S^2, \\ \frac{\psi_t}{\psi} + \frac{w''}{2\sigma^2 w}S^2 - \frac{(w')^2}{2\sigma^2 w^2}S^2 - S\frac{w'}{w^2} - \frac{w'}{2w} - \frac{\sigma^2}{2w^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\mu\frac{\psi_S}{\psi} - \mu\frac{w'}{\sigma^2 w}S - \\ -\mu\frac{1}{w} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\psi_{SS}}{\psi} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{(\psi_S)^2}{\psi^2} - \frac{w'}{2w} - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{\psi_S}{\psi})^2 - \frac{(w')^2}{2\sigma^2 w^2}S^2 - \frac{\sigma^2}{2w^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\psi_S}{\psi}(\frac{w'}{w}S + \frac{\sigma^2}{w} - \mu) -\end{gathered}$$

$$(2.7.32)$$

$$-\frac{w'}{w^2}S + \frac{\mu w'}{\sigma^2 w}S + \frac{\mu}{w} + \gamma e^{r(T-t)}S^2. \tag{2.7.33}$$

Сокращение одинакоывх элементов даст

$$\begin{gathered}\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{w''}{2\sigma^2 w}S^2 + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = -\mu\frac{\psi_S}{\psi} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\psi_{SS}}{\psi} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \\ -\frac{\psi_S}{\psi}(\frac{w'}{w}S + \frac{\sigma^2}{w} - \mu) + \gamma e^{r(T-t)}S^2.\end{gathered} \tag{2.7.34}$$

Выделим слагаемые содержащие S^2 : $\frac{w''}{2\sigma^2 w}S^2 - \gamma e^{r(T-t)}S^2 = \frac{w''-2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}w}{2\sigma^2 w}S^2 = 0$. И сократим, то что складывается

$$\begin{gathered}\frac{\psi_t}{\psi} = -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\psi_{SS}}{\psi} + \frac{\psi_S}{\psi}(-\frac{w'}{w}S - \frac{\sigma^2}{w}). \\ \psi_t = -\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{SS} + \psi_S(-\frac{w'}{w}S - \frac{\sigma^2}{w}).\end{gathered} \tag{2.7.35}$$

Замена $u = t, y = -\ln(w)S - \int \frac{\sigma^2}{w}dt$. Производные

$$\psi_t = \psi_u + \psi_S(-\frac{w'}{w}S - \frac{\sigma^2}{w}), \tag{2.7.36}$$

$$\psi_S = -\ln(w)\psi_y, \tag{2.7.37}$$

$$\psi_{SS} = \ln^2(w)\psi_{yy}. \tag{2.7.38}$$

Подстановка дает

$$-\psi_u = \frac{\sigma^2\ln^2(w)}{2}\psi_{yy}. \tag{2.7.39}$$

Тогда вспомнив (2.7.27), (2.7.23), получаем замену

$$\theta = Sq + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}(\ln\psi + \frac{w'}{2\sigma^2 w}S^2 + S(\frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2}) - \frac{\ln w}{2} - \int\frac{\sigma^2}{2w^2}dt + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t), \tag{2.7.40}$$

где ψ решение (2.7.35) и $w = I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$.

Следовательно группа $\langle X_1\rangle$, где $X_1 = e^{rt}\partial_\theta$ не обладает инввариантыми решениями, так как его инварианты не зависят от θ.

Далее группе $\langle X_4+bX_2+cX_3+dX_5\rangle$ соответствует при $N=b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi$ и $C=d$

$$\begin{gathered}\theta = Sq+\frac{S^2(b\varphi_1'+c\varphi_2'+\Psi'+re^{rt})e^{r(t-T)}}{2(b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi+e^{rt})\gamma\sigma^2}-\frac{\mu S e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2}- \\ -\frac{q^2e^{rt}}{2(d-2\int_{t_0}^t b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi ds)}+\frac{\mu^2 t e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}- \\ -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\ln(b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi+e^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+\Phi(t,z).\end{gathered} \tag{2.7.41}$$

где $z=(-d+2\int_{t_0}^t b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi(s)ds)S+(b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi+e^{rt})q$ и $\Phi(t,z)$ решение

$$\begin{gathered}-\frac{e^{rt}z^2}{(b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi+e^{rt})(d-2\int_{t_0}^t b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi ds)^2}+ \\ +\Phi_z(\frac{(b\varphi_1'+c\varphi_2'+\Psi'+re^{rt})}{(b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi+e^{rt})}+2\frac{e^{rt}}{(-d+2\int_{t_0}^t b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi ds)})z+ \\ +\Phi_t = r\Phi-\frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-d+2\int_{t_0}^t b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi ds)^2- \\ -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-d+2\int_{t_0}^t b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi ds)^2+\Phi_z^2(b\varphi_1+c\varphi_2+\Psi+e^{rt})^2.\end{gathered} \tag{2.7.42}$$

Далее группе $\langle X_2+bX_3+dX_5\rangle$ соответствует при $N=\varphi_1+b\varphi_2$, $K=0$ и $C=d$

$$\begin{gathered}\theta = Sq+\frac{S^2(\varphi_1'+b\varphi_2')e^{r(t-T)}}{2(\varphi_1+b\varphi_2)\gamma\sigma^2}-\frac{\mu S e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2}+ \\ +\frac{\mu^2 t e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2}-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\ln(\varphi_1+b\varphi_2)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}+\Phi(t,z).\end{gathered} \tag{2.7.43}$$

где $z=(-d+2\int_{t_0}^t \varphi_1+b\varphi_2 ds)S+(\varphi_1+b\varphi_2)q$ и $\Phi(t,z)$ решение

$$\begin{gathered}\Phi_z(\frac{(\varphi_1'+b\varphi_2')}{(\varphi_1+b\varphi_2)})z+\Phi_t = r\Phi-\frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-d+2\int_{t_0}^t \varphi_1+b\varphi_2 ds)^2- \\ -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-d+2\int_{t_0}^t \varphi_1+b\varphi_2 ds)^2+\Phi_z^2(\varphi_1+b\varphi_2)^2.\end{gathered} \tag{2.7.44}$$

Рассмотрим $\langle X_3 + dX_5\rangle$ с $N = \varphi_2$, $K = 0$ и $\bar{C} = d$

$$\begin{aligned}\theta = Sq + \frac{S^2(\varphi_2')e^{r(t-T)}}{2(\varphi_2)\gamma\sigma^2} - \frac{\mu S e^{r(T-t)}}{\gamma\sigma^2} + \\ + \frac{\mu^2 t e^{r(t-T)}}{2\gamma\sigma^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\ln(\varphi_2)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} + \Phi(t,z).\end{aligned} \tag{2.7.45}$$

где $z = (-d + 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds)S + \varphi_2 q$ и $\Phi(t,z)$ решение

$$\begin{aligned}\Phi_z\frac{(\varphi_2')}{(\varphi_2)}z + \Phi_t = r\Phi - \frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{zz}(-d + 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds)^2 - \\ -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\Phi_z^2(-d + 2\int_{t_0}^{t}\varphi_2 ds)^2 + \Phi_z^2(\varphi_2)^2.\end{aligned} \tag{2.7.46}$$

Рассмотрим подалгебру $\langle X_5\rangle$. Она имеет инвариантную подмодель

$$\theta = Sq + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}(\ln\psi + \frac{w'}{2\sigma^2 w}S^2 + S(\frac{1}{w} - \frac{\mu}{\sigma^2}) - \frac{\ln w}{2} - \int\frac{\sigma^2}{2w^2}dt + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}t), \tag{2.7.47}$$

где $w = I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$ и ψ решение

$$\psi_t = -\frac{1}{2}\sigma^2\psi_{SS} + \psi_S(-\frac{w'}{w}S - \frac{\sigma^2}{w}). \tag{2.7.48}$$

2.8. Случай $F'' = 0$

Предположим $F'' = 0$, тогда $F' = const$ и она принимает вид $F = c\theta_q + b$. Преобразование эвивалентности сдвига убирает b и следовательно $F = c\theta_q$. Перепишем (2.2.33)-(2.2.40) и (2.2.29).

$$\begin{aligned}((\mu - rS)q - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2/2 + c\theta_q)(\gamma M e^{r(T-t)}) + \\ + rM - (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)M_S - M_t + c(M_q - \theta_q\gamma M e^{r(T-t)}) - \frac{1}{2}\sigma^2 M_{SS} = 0.\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

$$rC_2 - (C_2)_t + c(C_2)_q = 0, \tag{2.8.2}$$

$$\begin{aligned}-rq(-r\tau + 2A) + rC_1 - r\alpha - rqA - \\ -2C_2(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q) - (C_1)_t + c(C_1)_q = 0,\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

$$(\mu q + c\theta_q)(-r\tau + 2A) + rD - rqB + (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q)(-C_1 + \alpha) - D_t +$$
$$+\theta_q\alpha_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}q^2(r\tau - A) + c(D_q + \theta_q r\tau - \theta_q\alpha_q) - \sigma^2 C_2 = 0. \tag{2.8.4}$$

$$A_t - cA_q + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-2C_2) = 0, \tag{2.8.5}$$

$$-\mu A + B_t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q(A - r\tau) - C_1 + \alpha) - cB_q = 0, \tag{2.8.6}$$

$$\tau_t - c\tau_q - 2A = 0, \tag{2.8.7}$$

$$\begin{gathered} \xi = A(t,q)S + B(t,q), \\ \eta = r\tau\theta + M(t,S,q)e^{-\gamma e^{r(T-t)}\theta} + D(t,q) + C_1(t,q)S + C_2(t,q)S^2, \end{gathered} \tag{2.8.8}$$

$$\tau_S = 0, \quad \tau_\theta = 0, \quad \alpha_S = 0, \quad \alpha_\theta = 0, \quad \xi_\theta = 0. \tag{2.8.9}$$

Получаем дополнительное уравнение дифференцированием (2.8.4) по θ_q

$$c(-r\tau + 2A) + \alpha_t + c(r\tau - \alpha_q) = \alpha_t + c(2A - \alpha_q) = 0. \tag{2.8.10}$$

Ввиду того, что уравнения (2.8.2)-(2.8.10) содержат производные только в виде комбинации производных по q и t, которые можно выписать в виде оператора $\partial_t - c\partial_q$, то имеет смысл сделать замену

$$u = t, \quad v = q + ct, \tag{2.8.11}$$

$$t = u, \quad q = v - cu. \tag{2.8.12}$$

Производные, к примеру, для C_2

$$(C_2)_t = (C_2)_u + c(C_2)_v,$$
$$(C_2)_q = (C_2)_v.$$

Тогда выражение изменится так $(C_2)_t - c(C_2)_q = (C_2)_u$. Следовательно (2.8.2), (2.8.2), (2.8.3), (2.8.4), (2.8.5), (2.8.6), (2.8.7), (2.8.10) перепишутся как

$$rC_2 - (C_2)_u = 0, \tag{2.8.13}$$

$$\begin{gathered} -r(v - cu)(-r\tau + 2A) + rC_1 - r\alpha - r(v - cu)A - \\ -2C_2(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v - cu)) - (C_1)_u = 0, \end{gathered} \tag{2.8.14}$$

$$A_u + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(-2C_2) = 0, \tag{2.8.15}$$

$$-\mu A + B_u + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}((v-cu)(A-r\tau) - C_1 + \alpha) = 0, \tag{2.8.16}$$

$$\tau_u - 2A = 0, \tag{2.8.17}$$

$$\alpha_u + 2cA = 0. \tag{2.8.18}$$

$$\mu(v-cu)(-r\tau+2A) + rD - r(v-cu)B + (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu))(-C_1+\alpha) -$$
$$-D_u + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(v-cu)^2(r\tau - A) - \sigma^2 C_2 = 0. \tag{2.8.19}$$

$$\begin{gathered}((\mu - rS)(v-cu) - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(v-cu)^2/2)\gamma M e^{r(T-u)} + \\ + rM - (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu))M_S - M_u - \frac{1}{2}\sigma^2 M_{SS} = 0.\end{gathered} \tag{2.8.20}$$

Следовательно образуется разрешимая система дифференциальных уравнений относительно переменной u ввиду того, что уравнения можно решить последовательно и на каждом шаге в них будет только одна неизвестная функция. Порядок решения следующий. Сначала найти C_2 из (2.8.13), далее оно подставляется в (2.8.15), где неизвестна, только A и находим его. Затем подстановкой A в (2.8.18), (2.8.17) находим τ и α. Далее в уравнении (2.8.14) неизвестна только C_1, после его получения находим B из уравнения (2.8.16) и далее D из (2.8.16). В следующей секции уравнения для M (2.8.20) будет сведено к уравнению теплопроводности. Начинаем с решения (2.8.13)

$$C_2 = fe^{ru}, \text{ где } f = f(v). \tag{2.8.21}$$

Подставляем его в (2.8.15) и получаем

$$A_u - 2f\gamma\sigma^2 e^{rT} = 0,$$
$$A = 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}u + g, \text{ где } g = g(v). \tag{2.8.22}$$

Далее оно подставляется в (2.8.17) и (2.8.18)

$$\tau_u = 4f\gamma\sigma^2 e^{rT}u + 2g,$$

$$\alpha_u = -4cf\gamma\sigma^2 e^{rT}u - 2cg.$$

Их интегрирование дает

$$\tau = 2f\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 + 2gu + h, \tag{2.8.23}$$

$$\alpha = -2cf\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 - 2cgu + w, \tag{2.8.24}$$

где h, w зависят от v. Ввиду линейности уравнений и их большого размера, частные решения по каждой произвольной функции далее будем искать отдельно. Рассмотрим уравнение (2.8.14). Его общее решение образует решение уравнения

$rC_1 - (C_1)_u = 0$ и оно равно $C_1 = ne^{ru}$, где $n = n(v)$. Выпишем для уже найденных функций, компоненты с соответствующимим произвольными функциями

	f	g	h	w
C_2	e^{ru}	0	0	0
A	$2\gamma\sigma^2 e^{rT}u$	1	0	0
τ	$2\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2$	$2u$	1	0
α	$-2c\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2$	$-2cu$	0	1

(2.8.25)

Далее рассмотрим члены уравнений (2.8.22), (2.8.21), (2.8.23), (2.8.24) с функцией f Их подстановка в (2.8.14) дает

$$\begin{gathered} -r(v-cu)(-r2\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 + 4\gamma\sigma^2 e^{rT}u) + rC_1 + r2c\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 - \\ -r(v-cu)2\gamma\sigma^2 e^{rT}u - 2e^{ru}(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu)) - (C_1)_u = 0, \end{gathered} \tag{2.8.26}$$

Раскрытие скобок даст

$$\begin{gathered} 2r^2v\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 - 4rv\gamma\sigma^2 e^{rT}u - 2r^2c\gamma\sigma^2 e^{rT}u^3 + 4rc\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 + \\ +rC_1 + r2c\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 - 2rv\gamma\sigma^2 e^{rT}u + 2rc\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2 - \\ -2\mu e^{ru} + 2\gamma\sigma^2 e^{rT}v - 2\gamma\sigma^2 e^{rT}cu - (C_1)_u = 0, \end{gathered} \tag{2.8.27}$$

Сокращение даст

$$
\begin{gathered}
2r^2v\gamma\sigma^2e^{rT}u^2-6rv\gamma\sigma^2e^{rT}u-2r^2c\gamma\sigma^2e^{rT}u^3+8rc\gamma\sigma^2e^{rT}u^2+\\
+rC_1-2\mu e^{ru}+2v\gamma\sigma^2e^{rT}-2c\gamma\sigma^2e^{rT}u-(C_1)_u=0,
\end{gathered}
\tag{2.8.28}
$$

Выносим $\gamma\sigma^2e^{rT}$

$$
\begin{gathered}
\gamma\sigma^2e^{rT}(2r^2vu^2-6rvu-2r^2cu^3+8rcu^2+2v-2cu)+\\
+rC_1-2\mu e^{ru}-(C_1)_u=0,
\end{gathered}
\tag{2.8.29}
$$

Группируем по степеням u

$$
\begin{gathered}
\gamma\sigma^2e^{rT}(-2r^2cu^3+(8rc+2r^2v)u^2-(6rv+2c)u+2v)+\\
+rC_1-2\mu e^{ru}-(C_1)_u=0,
\end{gathered}
\tag{2.8.30}
$$

Частное решение ищется по формуле поиска частного решения в виде интеграла

$$
\begin{gathered}
e^{ru}\int e^{-ru}(\gamma\sigma^2e^{rT}(-2r^2cu^3+(8rc+2r^2v)u^2-(6rv+2c)u+2v)-\\
-2\mu e^{ru})du
\end{gathered}
\tag{2.8.31}
$$

Разбиваем интеграл на части и интегрируем их отдельно

$$
\int e^{-ru}(-2r^2cu^3+(8rc+2r^2v)u^2-(6rv+2c)u+2v)du,
\tag{2.8.32}
$$

$$
\mu\int e^{-ru}e^{ru}du=\mu u.
\tag{2.8.33}
$$

Формула интегрирования подобного вида интегралов

$$
\begin{gathered}
\int e^{-ru}(Au^3+Bu^2+Cu+D)du=\\
=-e^{-ru}(\frac{Au^3}{r}+(\frac{3A}{r^2}+\frac{B}{r})u^2+(\frac{6A}{r^3}+\frac{2B}{r^2}+\frac{C}{r})u+\frac{6A}{r^4}+\frac{2B}{r^3}+\frac{C}{r^2}+\frac{D}{r}).
\end{gathered}
$$

Подстанова в нее дает

$$
\begin{gathered}
-e^{-ru}(\frac{-2r^2cu^3}{r}+(\frac{-6r^2c}{r^2}+\frac{8rc+2r^2v}{r})u^2+\\
+(\frac{-12r^2c}{r^3}+\frac{16rc+4r^2v}{r^2}-\frac{(6rv+2c)}{r})u+\\
+\frac{-12r^2c}{r^4}+\frac{16rc+4r^2v}{r^3}-\frac{(6rv+2c)}{r^2}+\frac{2v}{r})
\end{gathered}
\tag{2.8.34}
$$

Сокращение даст

$$-e^{-ru}(-2rcu^3+(2c+2rv)u^2+(\frac{4c+4rv}{r}-\frac{(6rv+2c)}{r})u+$$
$$+\frac{4c+4rv}{r^2}-\frac{(6rv+2c)}{r^2}+\frac{2v}{r})=-e^{-ru}(-2rcu^3+(2c+2rv)u^2+ \tag{2.8.35}$$
$$+\frac{2c-2rv}{r}u+\frac{2c}{r^2})=e^{-ru}(2rcu^3-(2c+2rv)u^2+\frac{-2c+2rv}{r}u-\frac{2c}{r^2})$$

Следовательно интеграл (2.8.31) равен

$$\gamma\sigma^2e^{rT}(2rcu^3-(2c+2rv)u^2+\frac{-2c+2rv}{r}u-\frac{2c}{r^2})-2\mu ue^{ru}+conste^{ru}. \tag{2.8.36}$$

Теперь подставляем компоненты с g из (2.8.25) в (2.8.14)

$$-r(v-cu)(-2ru+2)+rC_1+2rcu-r(v-cu)-(C_1)_u=0. \tag{2.8.37}$$

Раскрытие собок дает

$$-2rv+2rcu+2r^2vu-2r^2cu^2+rC_1+2rcu-rv+rcu-(C_1)_u=0. \tag{2.8.38}$$

Сокращение даст

$$-3rv+2r^2vu-2r^2cu^2+rC_1+5rcu-(C_1)_u=0. \tag{2.8.39}$$

Частное решение ищем в виде

$$e^{ru}\int e^{-ru}(-2r^2cu^2+(5rc+2r^2v)u-3rv)du \tag{2.8.40}$$

После интегрирования получается

$$e^{ru}(-e^{-ru}(-2rcu^2+(5c-4c+2rv)u+\frac{5c-4c}{r}+2v-3v))+conste^{ru}=$$
$$=(2rcu^2+(-c-2rv)u-\frac{c}{r}+v)+conste^{ru}. \tag{2.8.41}$$

h и w подставляем сразу в (2.8.14)

$$-r(v-cu)(-rh)+rC_1-rw-(C_1)_u=0. \tag{2.8.42}$$

Частное решение получается как интеграл

$$e^{ru}\int e^{-ru}(r^2h(v-cu)-rw)du = e^{ru}(e^{-ru}(-r^2h(\frac{v}{r}-\frac{c}{r^2}-\frac{c}{r}u)+w)) =$$
$$= h(-vr+c+cru)+w. \tag{2.8.43}$$

Тогда собираем решение C_1 используя (2.8.36), (2.8.41), (2.8.43)

$$C_1 = ne^{ru} + h(-vr+c+cru) + w + g(2rcu^2 + (-c-2rv)u - \frac{c}{r} + v) +$$
$$+ f(\gamma\sigma^2 e^{rT}(2rcu^3 - (2c+2rv)u^2 + \frac{-2c+2rv}{r}u - \frac{2c}{r^2}) - 2\mu u e^{ru}), \tag{2.8.44}$$

где $n = n(v)$. Теперь выражаем B_u из (2.8.16)

$$B_u = \mu A + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(-(v-cu)(A-r\tau) + C_1 - \alpha). \tag{2.8.45}$$

Подставляем слагаемые содержащие f из (2.8.44), (2.8.25)

$$2\mu\gamma\sigma^2 e^{rT}u + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(-(v-cu)(2\gamma\sigma^2 e^{rT}u - r2\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2) +$$
$$+(\gamma\sigma^2 e^{rT}(2rcu^3 - (2c+2rv)u^2 + \frac{-2c+2rv}{r}u - \frac{2c}{r^2}) - 2\mu u e^{ru}) + \tag{2.8.46}$$
$$+2c\gamma\sigma^2 e^{rT}u^2)$$

Выносим $\gamma\sigma^2 e^{rT}$, вносим e^{-ru} для сокращения e^{ru} и получаем

$$\gamma\sigma^2 e^{rT}(2\mu u + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(-(v-cu)(2u-2ru^2) +$$
$$+(2rcu^3 - (2c+2rv)u^2 + \frac{-2c+2rv}{r}u - \frac{2c}{r^2}) + 2cu^2) - 2\mu u). \tag{2.8.47}$$

Сокращаем $2\mu u$ и $2cu^2$, также раскрываем скобку

$$\gamma\sigma^2 e^{rT}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(2cu^2 - 2uv - 2rcu^3 + 2rvu^2 + 2rcu^3 - 2rvu^2 +$$
$$+\frac{-2c+2rv}{r}u - \frac{2c}{r^2}) = (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-ru}(2cu^2 - 2\frac{c}{r}u - \frac{2c}{r^2}). \tag{2.8.48}$$

Подстанова в формулу дает

$$-(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-ru}(2\frac{c}{r}u^2 + 2\frac{c}{r^2}u) \tag{2.8.49}$$

Далее рассмотрим подстановку в (2.8.45) слагаемых с g

$$\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(-(v-cu)(1-2ru)+2rcu^2+(-c-2rv)u-\frac{c}{r}+v+2cu) \tag{2.8.50}$$

Раскрыаем скобки

$$\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(cu-v+2rvu-2rcu^2+2rcu^2-cu-2rvu-\frac{c}{r}+v+2cu) \tag{2.8.51}$$

Сокращение даст

$$\mu+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(-\frac{c}{r}+2cu) \tag{2.8.52}$$

Его интегрирование по формуле даст

$$\mu u+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(-2\frac{c}{r}u-\frac{c}{r^2}) \tag{2.8.53}$$

Далее подставляем компоненты с h

$$\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}((v-cu)r-vr+c+cru)=c\gamma\sigma^2e^{r(T-u)} \tag{2.8.54}$$

Его интегрирование даст

$$-\frac{c}{r}\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}. \tag{2.8.55}$$

Далее подставляем компоненты с w и n

$$\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(ne^{ru}+w-w)=n\gamma\sigma^2e^{rT}. \tag{2.8.56}$$

Его интегрирование даст

$$n\gamma\sigma^2e^{rT}u \tag{2.8.57}$$

Общее решение уравнения $B_u=0$ будет $B_{\text{общее}}=b(v)$. Следовательно, учитывая (2.8.49), (2.8.53), (2.8.55), (2.8.57), B равен

$$\begin{gathered}B=b(v)+n\gamma\sigma^2e^{rT}u-\frac{c}{r}h\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}+g(\mu u+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(-2\frac{c}{r}u-\frac{c}{r^2}))+\\+f(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-ru}(-2\frac{c}{r}u^2-2\frac{c}{r^2}u)\end{gathered} \tag{2.8.58}$$

Перепишем уравнение (2.8.19)

$$\mu(v-cu)(-r\tau+2A)-r(v-cu)B+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(-C_1+\alpha)-$$
$$-D_u+rD+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu)^2(r\tau-A)-\sigma^2C_2=0. \tag{2.8.59}$$

Заметим, что в нем, ввиду схожести множителей $(r\tau-A)$ и $(-r\tau+2A)$, можно вынести множитель $(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))$ и перепишем его в виде

$$\begin{gathered}\mu(v-cu)A+rD-D_t-\sigma^2C_2-r(v-cu)B+\\+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(-C_1+\alpha-r(v-cu)\tau+(v-cu)A)=0.\end{gathered} \tag{2.8.60}$$

Подставляем компоненты с произвольными функциями по очереди из уже найденных (2.8.25), (2.8.44), (2.8.58). При его вычислении при поиске частных решений по той или иной произвольной функции константы интегрирования будут опускаться, ввиду того что они переходят в общее решение. Начинаем с f

$$\begin{gathered}\mu(v-cu)2\gamma\sigma^2e^{rT}u+rD-D_t-\sigma^2e^{ru}-r(v-cu)(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-ru}(-2\frac{c}{r}u^2-2\frac{c}{r^2}u)+\\+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(\gamma\sigma^2e^{rT}(-2rcu^3+(2c+2rv)u^2-\frac{-2c+2rv}{r}u+\frac{2c}{r^2})+\\+2\mu ue^{ru}-2c\gamma\sigma^2e^{rT}u^2-r(v-cu)2\gamma\sigma^2e^{rT}u^2+(v-cu)2\gamma\sigma^2e^{rT}u)=0.\end{gathered} \tag{2.8.61}$$

В множителе при выражении $(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))$ выносим общий множитель $\gamma\sigma^2e^{rT}$

$$\begin{gathered}\mu(v-cu)2\gamma\sigma^2e^{rT}u+rD-D_t-\sigma^2e^{ru}-r(v-cu)(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-ru}(-2\frac{c}{r}u^2-2\frac{c}{r^2}u)+\\+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(\gamma\sigma^2e^{rT}(-2rcu^3+(2c+2rv)u^2-\frac{-2c+2rv}{r}u+\\+\frac{2c}{r^2}-2cu^2-r(v-cu)2u^2+(v-cu)2u)+2\mu ue^{ru})=0.\end{gathered} \tag{2.8.62}$$

Раскрываем скобки

$$\mu 2\gamma\sigma^2 e^{rT}(v-cu)u + rD - D_t - \sigma^2 e^{ru} + (v-cu)(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-ru}(2cu^2 + 2\frac{c}{r}u) +$$
$$+(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu))(\gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rcu^3 + 2cu^2 + 2rvu^2 + 2\frac{c}{r}u - 2vu +$$
$$+\frac{2c}{r^2} - 2cu^2 - 2rvu^2 + 2rcu^3 + 2vu - 2cu^2) + 2\mu u e^{ru}) = 0. \tag{2.8.63}$$

Сокращение даст

$$\mu 2\gamma\sigma^2 e^{rT}(v-cu)u + rD - D_t - \sigma^2 e^{ru} + (v-cu)(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-ru}(2cu^2 + 2\frac{c}{r}u) +$$
$$+(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu))(\gamma\sigma^2 e^{rT}(2\frac{c}{r}u + \frac{2c}{r^2} - 2cu^2) + 2\mu u e^{ru}) = 0. \tag{2.8.64}$$

Раскрываем $(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu))$ и выносим $\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu)$

$$\begin{gathered} rD - D_t - \sigma^2 e^{ru} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu)(-\gamma\sigma^2 e^{rT}(2\frac{c}{r}u + \frac{2c}{r^2} - 2cu^2) - \\ -2\mu u e^{ru} + 2\mu e^{ru}u + (2cu^2 + 2\frac{c}{r}u)\gamma\sigma^2 e^{rT}) + \\ +\mu(\gamma\sigma^2 e^{rT}(2\frac{c}{r}u + \frac{2c}{r^2} - 2cu^2) + 2\mu u e^{ru}) = 0. \end{gathered} \tag{2.8.65}$$

Сокращение даст

$$\begin{gathered} rD - D_t - \sigma^2 e^{ru} + \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu)(\gamma\sigma^2 e^{rT}(-\frac{2c}{r^2} + 4cu^2)) + \\ +\mu(\gamma\sigma^2 e^{rT}(2\frac{c}{r}u + \frac{2c}{r^2} - 2cu^2) + 2\mu u e^{ru}) = 0. \end{gathered} \tag{2.8.66}$$

Раскрытие скобок даст

$$\begin{gathered} rD - D_t - \sigma^2 e^{ru} + (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-ru}(-\frac{2cv}{r^2} + 4cvu^2 + \frac{2c^2}{r^2}u - 4c^2u^3) + \\ +\mu\gamma\sigma^2 e^{rT}(2\frac{c}{r}u + \frac{2c}{r^2} - 2cu^2) + 2\mu^2 u e^{ru} = 0. \end{gathered} \tag{2.8.67}$$

Для нахождения частных решений нужно вычислить три интеграла

$$\begin{gathered} e^{ru}\int e^{-2ru}(-\frac{2cv}{r^2} + 4cvu^2 + \frac{2c^2}{r^2}u - 4c^2u^3)du, \\ e^{ru}\int e^{-ru}(-\sigma^2 e^{ru} + 2\mu^2 u e^{ru})du, \\ e^{ru}\int e^{-ru}(2\frac{c}{r}u + \frac{2c}{r^2} - 2cu^2)du. \end{gathered} \tag{2.8.68}$$

Вычисление первого интеграла по формуле дает

$$
\begin{gathered}
-e^{ru}e^{-2ru}(u^3(-\frac{4c^2}{2r})+u^2(-\frac{12c^2}{4r^2}+\frac{4cv}{2r})+ \\
+u(-\frac{24c^2}{8r^3}+\frac{8cv}{4r^2}+\frac{2c^2}{2r^3})-\frac{24c^2}{16r^4}+\frac{8cv}{8r^3}+\frac{2c^2}{4r^4}-\frac{2cv}{2r^3})
\end{gathered} \tag{2.8.69}
$$

Сокращение даст

$$
-e^{-ru}(u^3(-\frac{2c^2}{r})+u^2(-\frac{3c^2}{r^2}+\frac{2cv}{r})+u(-\frac{2c^2}{r^3}+\frac{2cv}{r^2})-\frac{c^2}{r^4}) \tag{2.8.70}
$$

Подстановка третьего интеграла даст

$$
-e^{ru}e^{-ru}(-u^2\frac{2c}{r}+u(-\frac{4c}{r^2}+2\frac{c}{r^2})-\frac{4c}{r^3}+2\frac{c}{r^3}+\frac{2c}{r^3}) \tag{2.8.71}
$$

Сокращение даст

$$
-(-u^2\frac{2c}{r}-\frac{2c}{r^2}u)=(u^2\frac{2c}{r}+\frac{2c}{r^2}u) \tag{2.8.72}
$$

Интегрирование второго интеграла даст

$$
-\sigma^2ue^{ru}+\mu^2u^2e^{ru} \tag{2.8.73}
$$

Тогда при f частное решение получается

$$
\begin{gathered}
-\sigma^2ue^{ru}+\mu^2u^2e^{ru}+\mu\gamma\sigma^2e^{rT}(u^2\frac{2c}{r}+\frac{2c}{r^2}u)+ \\
+(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-ru}(u^3\frac{2c^2}{r}+u^2(\frac{3c^2}{r^2}-\frac{2cv}{r})+u(\frac{2c^2}{r^3}-\frac{2cv}{r^2})+\frac{c^2}{r^4})
\end{gathered} \tag{2.8.74}
$$

Теперь подставляем компоненты с неизвестной g из (2.8.25), (2.8.44), (2.8.58)

$$
\begin{gathered}
\mu(v-cu)+rD-D_t-r(v-cu)(\mu u+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(-2\frac{c}{r}u-\frac{c}{r^2}))+ \\
+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(-2rcu^2+cu+2rvu+\frac{c}{r}-v-2cu-r(v-cu)2u+(v-cu))
\end{gathered} \tag{2.8.75}
$$

Расрытие собок дает

$$
\begin{gathered}
\mu(v-cu)+rD-D_t+(-\mu r(v-cu)u+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu)(2cu+\frac{c}{r}))+ \\
+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(-2rcu^2+cu+2rvu+\frac{c}{r}-v- \\
-2cu-2rvu+2rcu^2+v-cu)
\end{gathered} \tag{2.8.76}
$$

Сокращение даст

$$\begin{gathered}\mu(v-cu)+rD-D_t-\mu r(v-cu)u+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu)(2cu+\frac{c}{r})+\\+(\mu-\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu))(\frac{c}{r}-2cu)\end{gathered}\tag{2.8.77}$$

Вынесем μ и $\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu)$

$$\begin{gathered}\mu((v-cu)-r(v-cu)u+(\frac{c}{r}-2cu))+rD-D_t+\\+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu)((2cu+\frac{c}{r})-(\frac{c}{r}-2cu))\end{gathered}\tag{2.8.78}$$

Тогда получится

$$\begin{gathered}\mu(v-rvu+rcu^2+\frac{c}{r}-3cu)+rD-D_t+\\+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(v-cu)4cu\end{gathered}\tag{2.8.79}$$

Для нахождения частного решения нужно вычислить два интеграла

$$e^{ru}\int e^{-ru}(v-rvu+rcu^2+\frac{c}{r}-3cu)du,\tag{2.8.80}$$

$$e^{ru}\int e^{-2ru}(4cuv-4c^2u^2)du\tag{2.8.81}$$

Подстановка в формулу первого интеграла даст

$$\begin{gathered}-e^{ru}e^{-ru}(u^2(\frac{rc}{r})+u(\frac{2rc}{r^2}+\frac{-rv}{r}+\frac{-3c}{r})+\frac{2rc}{r^3}+\frac{-rv}{r^2}+\frac{-3c}{r^2}+\frac{c}{r^2}+\frac{v}{r})=\\=-cu^2+u(v+\frac{c}{r}).\end{gathered}\tag{2.8.82}$$

Вычисление второго интеграла даст

$$-e^{ru}e^{-2ru}(-u^2\frac{4c^2}{2r}+u(-\frac{8c^2}{4r^2}+\frac{4cv}{2r})-\frac{8c^2}{8r^3}+\frac{4cv}{4r^2})=\tag{2.8.83}$$

$$=-e^{-ru}(-u^2\frac{2c^2}{r}+u(-\frac{2c^2}{r^2}+\frac{2cv}{r})-\frac{c^2}{r^3}+\frac{cv}{r^2}).\tag{2.8.84}$$

Тогда общее решение для членов содержащих произольную функцию g будет

$$\mu(-cu^2+u(v+\frac{c}{r}))+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(u^2\frac{2c^2}{r}+u(\frac{2c^2}{r^2}-\frac{2cv}{r})+\frac{c^2}{r^3}-\frac{cv}{r^2})\tag{2.8.85}$$

Далее подставляем с произвольной функцией h

$$rD - D_t - r(v - cu)(-\frac{c}{r}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)})+ \\ +(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v - cu))(vr - c - cru - r(v - cu)) = 0. \tag{2.8.86}$$

Сокращение даст

$$rD - D_t + c(v - cu)\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}+ \\ +(-\mu c + c\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v - cu)) = 0. \tag{2.8.87}$$

и далее

$$rD - D_t - \mu c + 2c\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v - cu) = 0. \tag{2.8.88}$$

Вычисление интеграла

$$e^{ru}\int e^{-2ru}(v - cu)du \tag{2.8.89}$$

даст

$$-e^{ru}e^{-2ru}(\frac{v}{2r} - \frac{c}{4r^2} - \frac{c}{2r}u) = e^{-ru}(-\frac{v}{2r} + \frac{c}{4r^2} + \frac{c}{2r}u) \tag{2.8.90}$$

Тогда частное решение по h будет

$$\mu\frac{c}{r} + c\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(-\frac{v}{r} + \frac{c}{2r^2} + \frac{c}{r}u) \tag{2.8.91}$$

Далее b, n, w пподставляются разом

$$rD - D_t - r(v - cu)(b + n\gamma\sigma^2 e^{rT}u)+ \\ +(\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v - cu))(-ne^{ru} - w + w) = 0. \tag{2.8.92}$$

Сокращение и раскрытие скобок даст

$$rD - D_t - r(v - cu)b - r(v - cu)n\gamma\sigma^2 e^{rT}u - \mu n e^{ru} + \gamma\sigma^2 e^{rT}(v - cu)n = 0. \tag{2.8.93}$$

Выносим $n\gamma\sigma^2 e^{rT}$

$$rD - D_t - r(v - cu)b + n\gamma\sigma^2 e^{rT}(-ruv + rcu^2 + v - cu) - \mu n e^{ru} = 0. \tag{2.8.94}$$

Рассмотрим интеграл

$$e^{ru}\int e^{-ru}(-r(v-cu)b+n\gamma\sigma^2e^{rT}(-ruv+rcu^2+v-cu)-\mu ne^{ru})du \tag{2.8.95}$$

Его решение

$$((v-cu-\frac{c}{r})b+n\gamma\sigma^2e^{rT}(-cu^2-\frac{c}{r}u-\frac{c}{r^2}+uv)-\mu nue^{ru}) \tag{2.8.96}$$

Общее решение уравнения $rD-D_t=0$ является

$$d(v)e^{ru} \tag{2.8.97}$$

Следовательно решение уравнения (2.8.19) ввиду (2.8.74), (2.8.85), (2.8.91), (2.8.96) является

$$\begin{gathered}D=de^{ru}+(v-cu-\frac{c}{r})b+n(\gamma\sigma^2e^{rT}(-cu^2-\frac{c}{r}u-\frac{c}{r^2}+uv)-\mu ue^{ru})+\\+f(-\sigma^2ue^{ru}+\mu^2u^2e^{ru}+\mu\gamma\sigma^2e^{rT}(u^2\frac{2c}{r}+\frac{2c}{r^2}u)+\\+(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-ru}(u^3\frac{2c^2}{r}+u^2(\frac{3c^2}{r^2}-\frac{2cv}{r})+u(\frac{2c^2}{r^3}-\frac{2cv}{r^2})+\frac{c^2}{r^4}))+\\+g(\mu(-cu^2+u(v+\frac{c}{r}))+\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(u^2\frac{2c^2}{r}+u(\frac{2c^2}{r^2}-\frac{2cv}{r})+\frac{c^2}{r^3}-\frac{cv}{r^2}))+\\+h(\mu\frac{c}{r}+c\gamma\sigma^2e^{r(T-u)}(-\frac{v}{r}+\frac{c}{2r^2}+\frac{c}{r}u)).\end{gathered} \tag{2.8.98}$$

Делаем обратную замену (2.8.11) $v=t+cq, u=t$ в (2.8.22), (2.8.21), (2.8.24), (2.8.23), (2.8.44), (2.8.58)

$$C_2=f(q+ct)e^{rt}, \tag{2.8.99}$$

$$A=2f(q+ct)\gamma\sigma^2e^{rT}t+g(q+ct), \tag{2.8.100}$$

$$\tau=2f(q+ct)\gamma\sigma^2e^{rT}t^2+2g(q+ct)t+h(q+ct), \tag{2.8.101}$$

$$\alpha=-2cf(q+ct)\gamma\sigma^2e^{rT}t^2-2cg(q+ct)t+w(q+ct), \tag{2.8.102}$$

$$\begin{gathered}C_1=n(q+ct)e^{rt}+h(q+ct)(c-rq)+w(q+ct)+g(q+ct)(-2rtq+q-\frac{c}{r})+\\+f(q+ct)(\gamma\sigma^2e^{rT}(-2rqt^2+2tq-\frac{2c}{r}t-\frac{2c}{r^2})-2\mu te^{rt}),\end{gathered} \tag{2.8.103}$$

$$B=b(q+ct)+n(q+ct)\gamma\sigma^2e^{rT}t-\frac{c}{r}h(q+ct)\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}+$$
$$+g(q+ct)(\mu t+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-2\frac{c}{r}t-\frac{c}{r^2}))+ \tag{2.8.104}$$
$$+f(q+ct)(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-rt}(-2\frac{c}{r}t^2-2\frac{c}{r^2}t),$$

$$D=d(q+ct)e^{rt}+(q-\frac{c}{r})b(q+ct)+n(q+ct)(\gamma\sigma^2e^{rT}(tq-\frac{c}{r}t-\frac{c}{r^2})-\mu te^{rt})+$$
$$+f(q+ct)(-\sigma^2te^{rt}+\mu^2t^2e^{rt}+\mu\gamma\sigma^2e^{rT}(t^2\frac{2c}{r}+\frac{2c}{r^2}t)+$$
$$+(\gamma\sigma^2e^{rT})^2e^{-rt}(t^2(\frac{c^2}{r^2}-\frac{2cq}{r})+t(\frac{2c^2}{r^3}-\frac{2cq}{r^2})+\frac{c^2}{r^4}))+$$
$$+g(q+ct)(\mu(tq+t\frac{c}{r})+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-qt\frac{2c}{r}+t\frac{c^2}{r^2}+\frac{c^2}{r^3}-\frac{cq}{r^2}))+$$
$$+h(q+ct)(\mu\frac{c}{r}+c\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-\frac{q}{r}+\frac{c}{2r^2})). \tag{2.8.105}$$

Следовательно по (2.8.8) ввиду того, что оператор с M находится в отдельном от других функций уравнении, то применением обратной замены найдены операторы

$$d(q+ct):e^{rt}\partial_\theta, \tag{2.8.106}$$
$$n(q+ct):\gamma\sigma^2e^{rT}t\partial_S+(e^{rt}S+(\gamma\sigma^2e^{rT}(tq-\frac{c}{r}t-\frac{c}{r^2})-\mu te^{rt}))\partial_\theta, \tag{2.8.107}$$
$$b(q+ct):\partial_S+(q-\frac{c}{r})\partial_\theta, \tag{2.8.108}$$
$$h(q+ct):\partial_t-\frac{c}{r}\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}\partial_S+(r\theta+(c-rq)S+\mu\frac{c}{r}+c\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-\frac{q}{r}+\frac{c}{2r^2}))\partial_\theta, \tag{2.8.109}$$
$$w(q+ct):\partial_q+S\partial_\theta, \tag{2.8.110}$$
$$g(q+ct):2t\partial_t-2ct\partial_q+(S+(\mu t+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-2\frac{c}{r}t-\frac{c}{r^2})))\partial_S+$$
$$+(2rt\theta+\mu(tq+t\frac{c}{r})+\gamma\sigma^2e^{r(T-t)}(-qt\frac{2c}{r}+t\frac{c^2}{r^2}+\frac{c^2}{r^3}-\frac{cq}{r^2})+ \tag{2.8.111}$$
$$+(-2rtq+q-\frac{c}{r})S)\partial_\theta,$$

$$
\begin{gathered}
f(q+ct) : 2\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2 \partial_t - 2c\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2 \partial_q + \\
+(S 2\gamma\sigma^2 e^{rT} t + (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(-2\frac{c}{r}t^2 - 2\frac{c}{r^2}t))\partial_S + \\
+((\gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rqt^2 + 2tq - \frac{2c}{r}t - \frac{2c}{r^2}) - 2\mu t e^{rt})S + e^{rt}S^2 - \\
-\sigma^2 t e^{rt} + \mu^2 t^2 e^{rt} + \mu\gamma\sigma^2 e^{rT}(t^2\frac{2c}{r} + \frac{2c}{r^2}t) + \\
+(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(t^2(\frac{c^2}{r^2} - \frac{2cq}{r}) + t(\frac{2c^2}{r^3} - \frac{2cq}{r^2}) + \frac{c^2}{r^4}) + 2r\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2 \theta)\partial_\theta .
\end{gathered} \tag{2.8.112}
$$

Для нужд проверки считаются продолжения операторов

$$
d(q+ct) : re^{rt}\partial_{\theta_t}, \tag{2.8.113}
$$

$$
\begin{gathered}
n(q+ct) : (re^{rt}S + \gamma\sigma^2 e^{rT}(q - \frac{c}{r}) - r\mu t e^{rt} - \mu e^{rt} - \theta_S(\gamma\sigma^2 e^{rT}))\partial_{\theta_t} + e^{rt}\partial_{\theta_S} + \\
+\gamma\sigma^2 e^{rT} t \partial_{\theta_q},
\end{gathered} \tag{2.8.114}
$$

$$
b(q+ct) : \partial_{\theta_q}, \tag{2.8.115}
$$

$$
\begin{gathered}
h(q+ct) : (r\theta_t - c\theta_S\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} + c\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q - \frac{c}{2r}))\partial_{\theta_t} + \\
+(c - rq + r\theta_S)\partial_{\theta_S} + (-rS + r\theta_q - \frac{c}{r}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)})\partial_{\theta_q} + r\theta_{SS}\partial_{\theta_{SS}},
\end{gathered} \tag{2.8.116}
$$

$$
w(q+ct) : \partial_{\theta_S}, \tag{2.8.117}
$$

$$
\begin{gathered}
g(q+ct) : (2r\theta + \mu(q + \frac{c}{r}) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(qt2c - t\frac{c^2}{r} - q\frac{c}{r}) + \\
+2rt\theta_t - 2\theta_t + 2c\theta_q - \theta_S(\mu + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(2ct - \frac{c}{r})) - 2rqS)\partial_{\theta_t} + \\
+(-2rtq + q - \frac{c}{r} + 2rt\theta_S - \theta_S)\partial_{\theta_S} + (2rt - 2)\theta_{SS}\partial_{\theta_{SS}} + \\
+(\mu t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\frac{2ct}{r} - \frac{c}{r^2}) + S(1 - 2rt) + 2rt\theta_q)\partial_{\theta_q}
\end{gathered} \tag{2.8.118}
$$

Продолжения для $f(q+ct)$

$$\eta^t = (\gamma\sigma^2 e^{rT}(-4rqt + 2q - \frac{2c}{r}) - 2\mu e^{rt} - 2r\mu t e^{rt})S + re^{rt}S^2 -$$
$$-r\sigma^2 t e^{rt} - \sigma^2 e^{rt} + r\mu^2 t^2 e^{rt} + 2\mu^2 t e^{rt} + \mu\gamma\sigma^2 e^{rT}(t\frac{4c}{r} + \frac{2c}{r^2}) +$$
$$+(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(t^2(2cq - \frac{c^2}{r}) - \frac{2cq}{r}t + \frac{c^2}{r^3} - \frac{2cq}{r^2}) + 4r\gamma\sigma^2 e^{rT} t\theta + \quad (2.8.119)$$
$$+2r\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2\theta_t - \theta_t 4\gamma\sigma^2 e^{rT} t + \theta_q 4c\gamma\sigma^2 e^{rT} t -$$
$$-\theta_S(S2\gamma\sigma^2 e^{rT} + (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(2ct^2 - 2\frac{c}{r}t - 2\frac{c}{r^2})),$$

$$\eta^S = \gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rqt^2 + 2tq - \frac{2c}{r}t - \frac{2c}{r^2}) - 2\mu t e^{rt} + 2e^{rt}S + 2r\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2\theta_S -$$
$$-2\gamma\sigma^2 e^{rT} t\theta_S, \quad (2.8.120)$$

$$\eta^q = \gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rt^2 + 2t)S + (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(-t^2\frac{2c}{r} - t\frac{2c}{r^2}) + 2r\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2\theta_q, \quad (2.8.121)$$

$$\eta^{SS} = 2e^{rt} + \theta_{SS}(2r\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2 - 4\gamma\sigma^2 e^{rT} t). \quad (2.8.122)$$

2.9. Сведение M к уравнению теплопроводности

Выписываем уравнение (2.8.20)

$$((\mu - rS)(v - cu) - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu)^2/2)\gamma M e^{r(T-u)} +$$
$$+rM - (\mu - \gamma\sigma^2 e^{r(T-u)}(v-cu))M_S - M_u - \frac{1}{2}\sigma^2 M_{SS} = 0. \quad (2.9.1)$$

Главная цель сократит S стоящую при M. Все остальное сокращается заменой вида $\widetilde{S} = S + a(t)$, $M = \widetilde{M}b(t)$. Делаем замену

$$M = \widetilde{M} e^{S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu) + ru}. \quad (2.9.2)$$

Его производные

$$M_S = e^{S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)+ru}(\widetilde{M}_S + \widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)), \quad (2.9.3)$$

$$M_{SS} = e^{S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)+ru}(\widetilde{M}_{SS} + 2\widetilde{M}_S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu) + \widetilde{M}\gamma^2 e^{2r(T-u)}(v-cu)^2), \quad (2.9.4)$$

$$M_u = e^{S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)+ru}(\widetilde{M}_u - rS\widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)}(v-cu) + r\widetilde{M} - cS\widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)}). \tag{2.9.5}$$

Перед подстановкой перегруппируем уравнение (2.9.1), вынесем общий множитель $-\frac{1}{2}\sigma^2$ и μ

$$\begin{gathered}-rS(v-cu)\gamma Me^{r(T-u)} + rM - M_u - \mu(M_S - \gamma(v-cu)Me^{r(T-u)}) - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(M_{SS} - 2\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)M_S + \gamma^2 e^{2r(T-u)}(v-cu)^2 M) = 0.\end{gathered} \tag{2.9.6}$$

Так как экспоненту $\exp(S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)+ru)$ содержат все слогаемые один раз, то можно подставлять уже без экспоненты

$$\begin{gathered}-rS(v-cu)\gamma Me^{r(T-u)} + rM - \widetilde{M}_u + rS\widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)}(v-cu) - r\widetilde{M} + cS\widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)} - \\ -\mu(\widetilde{M}_S + \widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)}(v-cu) - \gamma(v-cu)e^{r(T-u)}\widetilde{M}) - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(\widetilde{M}_{SS} + 2\widetilde{M}_S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu) + \widetilde{M}\gamma^2 e^{2r(T-u)}(v-cu)^2 - \\ -2\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)(\widetilde{M}_S + \widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)) + \gamma^2 e^{2r(T-u)}(v-cu)^2\widetilde{M}) = 0.\end{gathered} \tag{2.9.7}$$

Сокращение даст

$$-\widetilde{M}_u + cS\widetilde{M}\gamma e^{r(T-u)} - \mu\widetilde{M}_S - \frac{1}{2}\sigma^2\widetilde{M}_{SS} = 0. \tag{2.9.8}$$

Далее делаем замену

$$\widetilde{M} = Ke^{-\frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-u)}}. \tag{2.9.9}$$

Его производные

$$\widetilde{M}_u = (K_u + cS\gamma e^{r(T-u)}K)e^{-\frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-u)}}. \tag{2.9.10}$$

$$\widetilde{M}_S = (K_S - \frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)}K)e^{-\frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-u)}}. \tag{2.9.11}$$

$$\widetilde{M}_{SS} = (K_{SS} - 2\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)}K_S + K\frac{c^2}{r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)})e^{-\frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-u)}}. \tag{2.9.12}$$

Подстановка в (2.9.8) с уже сокращенной экспонентой дает

$$\begin{gathered}-K_u - cS\gamma e^{r(T-u)}K + cSK\gamma e^{r(T-u)} - \mu(K_S - \frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)}K) - \\ -\frac{1}{2}\sigma^2(K_{SS} - 2\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)}K_S + K\frac{c^2}{r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)}) = 0.\end{gathered} \tag{2.9.13}$$

Следовательно после сокращения выражений с S оно переходит в

$$-K_u + K(\mu\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)} - \frac{\sigma^2 c^2}{2r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)}) + (-\mu + \sigma^2\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)})K_S - \frac{1}{2}\sigma^2 K_{SS} = 0. \tag{2.9.14}$$

Меняем знак

$$K_u + K(-\mu\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{2r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)}) + (\mu - \sigma^2\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)})K_S + \frac{1}{2}\sigma^2 K_{SS} = 0. \tag{2.9.15}$$

Следующая замена

$$K = \widetilde{K} e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-u)}}. \tag{2.9.16}$$

Производные по K

$$K_u = (\widetilde{K}_u + (\mu\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)} - \frac{\sigma^2 c^2}{2r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)})\widetilde{K})e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-u)}}, \tag{2.9.17}$$

$$K_S = \widetilde{K}_S e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-u)}}, \tag{2.9.18}$$

$$K_{SS} = \widetilde{K}_{SS} e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-u)}}. \tag{2.9.19}$$

Подстановка даст

$$\widetilde{K}_u + (\mu\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)} - \frac{\sigma^2 c^2}{2r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)})\widetilde{K} + \widetilde{K}(-\mu\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{2r^2}\gamma^2 e^{2r(T-u)}) + \\ + (\mu - \sigma^2\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)})\widetilde{K}_S + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{K}_{SS} = 0. \tag{2.9.20}$$

После сокращения стоящих при $\widetilde{K}$ получается

$$\widetilde{K}_u + (\mu - \sigma^2\frac{c}{r}\gamma e^{r(T-u)})\widetilde{K}_S + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{K}_{SS} = 0. \tag{2.9.21}$$

Следующая замена

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu u). \tag{2.9.22}$$

Производные

$$\widetilde{K}_S = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\widetilde{K}_y,$$
$$\widetilde{K}_{SS} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\widetilde{K}_{yy},$$
$$\widetilde{K}_u = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\widetilde{K}_u + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(\frac{c}{r}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu)\widetilde{K}_y.$$

Подстановка дает

$$\widetilde{K}_u + \widetilde{K}_{yy} = 0. \tag{2.9.23}$$

Последняя замена

$$\widetilde{u} = -u. \tag{2.9.24}$$

Меняет производную только по u и следовательно получается уравнение теплопроводности

$$-\widetilde{K}_{\widetilde{u}} + \widetilde{K}_{yy} = 0. \tag{2.9.25}$$

К его решению $\widetilde{K}(\widetilde{u}, y, v)$ последовательно применяем сначала обратные замены (2.9.24), (2.9.22), (2.9.16), (2.9.9) и получаем

$$\widetilde{M} = \widetilde{K}(-u, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu u), v)e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-u)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-u)}}. \tag{2.9.26}$$

Применение (2.9.2) дает

$$M = \widetilde{K}(-u, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu u), v)e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-u)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-u)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-u)}}\cdot$$
$$\cdot e^{S\gamma e^{r(T-u)}(v-cu)+ru}. \tag{2.9.27}$$

Взвращаемся у переменным t, q (2.8.11)

$$\begin{gathered} M = \widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu t), q + ct)\cdot \\ \cdot e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-t)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-t)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-t)}} \ e^{S\gamma e^{r(T-t)}q+rt}. \end{gathered} \tag{2.9.28}$$

Следовательно вспоминая группы (2.8.106)-(2.8.112) то результат формулируется в виде теоремы

Теорема 2.9.1. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + c\theta_q$ *образуют операторы*

$$X_1 = de^{rt}\partial_\theta, \tag{2.9.29}$$

$$X_2 = n\gamma\sigma^2 e^{rT} t\partial_S + n(e^{rt}S + (\gamma\sigma^2 e^{rT}(tq - \frac{c}{r}t - \frac{c}{r^2}) - \mu te^{rt}))\partial_\theta, \tag{2.9.30}$$

$$X_3 = b\partial_S + b(q - \frac{c}{r})\partial_\theta, \tag{2.9.31}$$

$$X_4 = h\partial_t - h\frac{c}{r}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\partial_S + \tag{2.9.32}$$

$$+h(r\theta + (c - rq)S + \mu\frac{c}{r} + c\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\frac{q}{r} + \frac{c}{2r^2}))\partial_\theta, \tag{2.9.33}$$

$$X_5 = w\partial_q + wS\partial_\theta, \tag{2.9.34}$$

$$\begin{gathered} X_6 = g2t\partial_t - g2ct\partial_q + g(S + (\mu t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-2\frac{c}{r}t - \frac{c}{r^2})))\partial_S + \\ +g(2rt\theta + \mu(tq + t\frac{c}{r}) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-qt\frac{2c}{r} + t\frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} - \frac{cq}{r^2}) + \\ +(-2rtq + q - \frac{c}{r})S)\partial_\theta, \end{gathered} \tag{2.9.35}$$

$$\begin{gathered} X_7 = f2\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\partial_t - f2c\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\partial_q + \\ +f(S2\gamma\sigma^2 e^{rT}t + (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(-2\frac{c}{r}t^2 - 2\frac{c}{r^2}t))\partial_S + \\ +f((\gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rqt^2 + 2tq - \frac{2c}{r}t - \frac{2c}{r^2}) - 2\mu te^{rt})S + e^{rt}S^2 - \\ -\sigma^2 te^{rt} + \mu^2 t^2 e^{rt} + \mu\gamma\sigma^2 e^{rT}(t^2\frac{2c}{r} + \frac{2c}{r^2}t) + \\ +(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(t^2(\frac{c^2}{r^2} - \frac{2cq}{r}) + t(\frac{2c^2}{r^3} - \frac{2cq}{r^2}) + \frac{c^2}{r^4}) + 2r\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\theta)\partial_\theta. \end{gathered} \tag{2.9.36}$$

где d, n, h, b, w, g, f *- произвольные функции аргумента* $q + ct$. *И*

$$\begin{gathered} X_8 = \widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu t), q + ct)\cdot \\ \cdot e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-t)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-t)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-t)}} e^{S\gamma e^{r(T-t)}q + rt - \gamma e^{r(T-t)}\theta}\partial_\theta \end{gathered} \tag{2.9.37}$$

где $\widetilde{K}(\widetilde{u}, y, v)$ *- решение уровнения теплопроводности* $\widetilde{K}_{\widetilde{u}} = \widetilde{K}_{yy}$.

Группы для $F = 0$ будут

$$X_1 = de^{rt}\partial_\theta, \tag{2.9.38}$$

$$X_2 = n\gamma\sigma^2 e^{rT} t\partial_S + n(e^{rt}S + \gamma\sigma^2 e^{rT} tq - \mu t e^{rt})\partial_\theta, \tag{2.9.39}$$

$$X_3 = b\partial_S + bq\partial_\theta, \tag{2.9.40}$$

$$X_4 = h\partial_t + h(r\theta - rqS)\partial_\theta, \tag{2.9.41}$$

$$X_5 = w\partial_q + wS\partial_\theta, \tag{2.9.42}$$

$$X_6 = g2t\partial_t + g(S + \mu t)\partial_S + g(2rt\theta + \mu tq + (-2rtq + q)S)\partial_\theta, \tag{2.9.43}$$

$$\begin{gathered} X_7 = f2\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2\partial_t + fS2\gamma\sigma^2 e^{rT} t\partial_S + \\ +f((\gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rqt^2 + 2tq) - 2\mu t e^{rt})S + e^{rt}S^2 - \sigma^2 t e^{rt} + \mu^2 t^2 e^{rt} + \\ +2r\gamma\sigma^2 e^{rT} t^2\theta)\partial_\theta. \end{gathered} \tag{2.9.44}$$

где d, n, h, b, w, g, f - произвольные функции аргумента q. И

$$X_8 = \widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \mu t), q)e^{S\gamma e^{r(T-t)}q + rt - \gamma e^{r(T-t)}\theta}\partial_\theta \tag{2.9.45}$$

где $\widetilde{K}(\widetilde{u}, y, v)$ - решение уровнения теплопроводности $\widetilde{K}_{\widetilde{u}} = \widetilde{K}_{yy}$.

2.10. Сведение уравнения при $F'' = 0$ к уравнению теплопроводности

Рассмотрим уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + c\theta_q. \tag{2.10.1}$$

Делаем замену $\theta = Sq + e^{rt}\varphi$. Его производные

$$\theta_t = re^{rt}\varphi + e^{rt}\varphi_t, \tag{2.10.2}$$

$$\theta_S = q + e^{rt}\varphi_S, \tag{2.10.3}$$

$$\theta_{SS} = e^{rt}\varphi_{SS}, \tag{2.10.4}$$

$$\theta_q = S + e^{rt}\varphi_q. \tag{2.10.5}$$

Их подстановка дает

$$re^{rt}\varphi + e^{rt}\varphi_t = r(Sq + e^{rt}\varphi) + (\mu - rS)q - \mu(q + e^{rt}\varphi_S) - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{rt}\varphi_{SS} - \\ -\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(q + e^{rt}\varphi_S - q)^2 + cS + ce^{rt}\varphi_q. \tag{2.10.6}$$

После сокращения получится

$$e^{rt}\varphi_t = -\mu e^{rt}\varphi_S - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{rt}\varphi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T+t)}\varphi_S^2 + cS + ce^{rt}\varphi_q. \tag{2.10.7}$$

Сокращаем на e^{-rt}

$$\varphi_t = -\mu\varphi_S - \frac{1}{2}\sigma^2\varphi_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{rT}\varphi_S^2 + cSe^{-rt} + c\varphi_q. \tag{2.10.8}$$

применяем к нему замену $\varphi = \ln y/(\gamma e^{rT})$. Его производные

$$\varphi_t = \frac{y_t}{y\gamma e^{rT}}, \tag{2.10.9}$$

$$\varphi_S = \frac{y_S}{y\gamma e^{rT}}, \tag{2.10.10}$$

$$\varphi_q = \frac{y_q}{y\gamma e^{rT}}, \tag{2.10.11}$$

$$\varphi_{SS} = \frac{y_{SS}}{y\gamma e^{rT}} - \frac{y_S^2}{y^2\gamma e^{rT}}. \tag{2.10.12}$$

Вынесем $-\frac{1}{2}\sigma^2$ и подставим производные

$$\frac{y_t}{y\gamma e^{rT}} = -\mu\frac{y_S}{y\gamma e^{rT}} - \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{y_{SS}}{y\gamma e^{rT}} - \frac{y_S^2}{y^2\gamma e^{rT}} + \gamma e^{rT}\left(\frac{y_S}{y\gamma e^{rT}}\right)^2\right) + cSe^{-rt} + c\frac{y_q}{y\gamma e^{rT}}. \tag{2.10.13}$$

Домножение на $y\gamma e^{rT}$ дает

$$y_t = -\mu y_S - \frac{1}{2}\sigma^2 y_{SS} + cS\gamma e^{r(T-t)}y + cy_q. \tag{2.10.14}$$

Далее применяем замену (2.8.11)

$$y_u = -\mu y_S - \frac{1}{2}\sigma^2 y_{SS} + cS\gamma e^{r(T-u)}y. \tag{2.10.15}$$

Получилось уравнение аналогичное (2.9.8) с заменой (2.9.26). Применяем к (2.9.26) замену (2.8.11) и получаем

$$y = \widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \mu t), q + ct)e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-t)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-t)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-t)}}. \tag{2.10.16}$$

Далее считаем $\ln y$

$$\begin{gathered} \ln y = \ln(\widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \mu t), q + ct)) - \mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-t)} + \\ + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-t)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-t)}. \end{gathered} \tag{2.10.17}$$

Далее подставляем его в $\theta = Sq + e^{rt}\ln y/(\gamma e^{rT})$

$$\begin{gathered} \theta = Sq + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\ln(\widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \mu t), q + ct)) - \mu\frac{c}{r^2} + \\ + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma e^{r(T-t)} - \frac{c}{r}S. \end{gathered} \tag{2.10.18}$$

где $\widetilde{K}(\widetilde{u}, y, v)$ решение $\widetilde{K}_{\widetilde{u}} = K_{yy}$. И следовательно замена имеет вид

$$\theta = Sq - \mu\frac{c}{r^2} + \frac{\sigma^2 c^2 \gamma}{4r^3}e^{r(T-t)} - \frac{c}{r}S + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\ln K,$$

$$u = -t, \quad v = q + ct,$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \mu t).$$

Список литературы

[1] Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, Ф. Эрдейи, перевод: Н. А. Виленкина —М.: Наука, 1970. —328 с.

[2] Головин, С. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / С. В. Головин, А. А. Чесноков // Новосиб. гос. ун-т. — 2009. — 119 с.

[3] Дышаев, М. М. Групповой анализ одного нелинейного обобщения уравнения Блэка — Шоулза / М. М. Дышаев // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 7–14.

[4] Дышаев, М. М. Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов / М. М. Дышаев, В. Е. Федоров // Уфим. мат. журн. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 29–41.

[5] Дышаев, М. М. Симметрийный анализ и точные решения одной нелинейной модели теории финансовых рынков / М. М. Дышаев, В. Е. Федоров // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2016. — Т. 23, № 1 (89). — С. 28–45.

[6] Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[7] Коренев, Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б. Г. Коренев — М.: Наука, 1971. —288 с.

[8] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[9] Чиркунов, Ю. А. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. — 659 с.

[10] Almgren, R. Optimal execution of portfolio transactions / R. Almgren, N. Chriss // Journal of Risk. — 2001. — Vol. 3, — P. 5–40.

[11] Almgren, R. Closed-Form Solutions for Option Hedging with Market Impact / T. M. Li, R. Almgren // SSRN Electronic Journal, , — December 12, 2012. — Режим доступа: https://ssrn.com/abstract=2318897 или http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2318897.

[12] Bachelier, L. Théorie de la spaculation / Louis Bachelier // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. —1900. — V. 17. —P. 21–86.

[13] Bank, P. Hedging and portfolio optimization in financial markets with a large trader / P. Bank, D. Baum // Mathematical Finance. — 2004. — Vol. 14. — P. 1–18.

[14] Barles, G. Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation / G. Barles, H. M. Soner // Finance and Stochastics. — 1998. —Vol. 2. — P. 369–397.

[15] Black, F. The pricing of Commodity Contracts / F. Black // J. of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 167–179.

[16] Black, F. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // J. of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–659.

[17] Board, J. The Effects of Trade Transparency in the London Stock Exchange: A Summary / J. Board, C. Sutcliffe // Spec. Paper 67, Financial Markets Group, London School of Economics. — 1995. — January. — 30 p.

[18] Bordag, L. A. On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model / L. A. Bordag. — Mathematical Control Theory and Finance / eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M. R. Grossinho. — Springer, 2008. — P. 71–94.

[19] Bordag, L. A. Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives / L. A. Bordag, A. Y. Chmakova // International J. of Theoretical and Applied Finance. — 2007. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–21.

[20] Bordag, L. A. Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions / L. A. Bordag, R. Frey. — Chapter 3 in Nonlinear Models in Mathematical Finance: Research Trends in Option Pricing / ed. M. Ehrhardt. — Nova Science Publ., 2008. — P. 83–109.

[21] Bordag, L. A. Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions / L. A. Bordag, A. Mikaelyan // J. Letters in Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 96, no. 1–3. — P. 191–207.

[22] Çetin, U. Liquidity risk and arbitrage pricing theory / U. Çetin, R. Jarrow, P. Protter // Finance and Stochastic. — 2004. — Vol. 8. — P. 311–341.

[23] Çetin, U. Modelling liquidity effects in discrete time / U. Çetin, L. C. Rogers // Mathematical Finance. — 2007. — Vol. 17. — P. 15–29.

[24] Cox, J. Option pricing: a simplified approach / J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein // J. of Financial Economics. — 1979. — Vol. 7. — P. 229–263.

[25] Cvitanić, J. Hedging and portfolio optimization under transaction costs: a martingale approach / J. Cvitanić, I. Karatzas // Mathematical Finance. — 1996. — Vol. 6. — P. 133–165.

[26] Fedorov, V. E. Group classification for a general nonlinear model of option pricing / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Ural Mathematical J. — 2016. — Vol. 2, no. 2. — P. 37–44.

[27] Fedorov, V. E. Group classification for a general nonlinear model of option pricing / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Ural Mathematical J. — 2016. — Vol. 2, no. 2. — P. 37–44.

[28] Fedorov, V. E. Invariant solutions for nonlinear models in illiquid markets / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2018. — Vol. 41, no. 18. — P. 378963–8972.

[29] Gazizov, R. K. Lie symmetry analysis of differential equations in finance / R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov // Nonlinear Dynamics. — 1998. — Vol. 17. — P. 387–407.

[30] Grossman, S. An Analysis of the Implications for Stock and Futures Price Volatility of Program Trading and Dynamic Hedging Strategies / S. Grossman // The Journal of Business, — 1998. — Vol. 61. — No. 3. — P. 275–298.

[31] Guéant, O. Option pricing and hedging with execution costs and market impact / O. Guéant, J. Pu // Preprint, — April 2015. — Режим доступа:http://arxiv.org/abs/1311.4342.

[32] Leland, H. E. Option pricing and replication with transactions costs / H. E. Leland // The J. of Finance. — 1985. — Vol. 40. — P. 1283–1301.

[33] Liu, H. Option pricing with an illiquid underlying asset market / H. Liu, J. Yong // J. of Economic Dynamics and Control. — 2005. — Vol. 29, no. 12. — P. 2125–2156.

[34] Merton, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous / R. C. Merton // Journal of financial economics. — 1976. — Vol. 3. — no. 1-2. — P. 125–144.

[35] Merton, R. C. Theory of Rational Option Pricing / R. C. Merton // Bell Journal of Economics and Management Science. —1973. — No 4. — P. 141–183.

[36] Mikaelyan, A. Analytical Study of the Schönbucher–Wilmott Model of the Feedback Effect in Illiquid Markets: Master's thesis in financial mathematics / A. Mikaelyan. — Halmstad: Halmstad University, 2009. — viii+67 p.

[37] Platen, E. On feedback effects from hedging derivatives / E. Platen, M. Schweizer // Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 8. — P. 67–84.

[38] Rogers, L. The cost of illiquidity and its effects on hedging / L. C. Rogers, L. S. Singh // Mathematical Finance. — October 2010. — Vol. 20, Issue 4. — P. 597–615.

[39] Samuelson, P. A. Rational theory of warrant pricing / P. A. Samuelson // Industrial Management Review. — 1965. — V. 6. — P. 13–31.

[40] Schönbucher, P. The feedback-effect of hedging in illiquid markets / P. Schönbucher, P. Wilmott // SIAM J. on Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 61. — P. 232–272.

[41] Sircar, R. Generalized Black — Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies / R. Sircar, G. Papanicolaou // Applied Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 5, no. 1. — P. 45–82.