Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова"
Институт математики и информатики

Кафедра дифференциальных уравнений

Ядрихинский Христофор Васильевич

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВНИЯ ОПЦИОНОВ С УЧЕТОМ ЗАТРАТ НА ИСПОЛНЕНИЕ

01.04.01 — Математика, профиль "Финансовая математика"

Автореферат магистерской диссертации

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Федоров,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Е. Егоров

ЯКУТСК — 2020

Общая характкристика работы

Актуальность темы исследования

Классические теории ценообразования опционов базируются на гипотезе совершенного рынка. В рамках этой гипотезы нет затрат на исполнение и участники рынка используют только сложившиеся на рынке цены и не могут своими операциями оказать влияния на цены — ни временно, ни постоянно.

Эти предположения, несмотря на очевидное противоречие рыночной практике, довольно широко используются и результирующие модели дают полезные результаты тогда, когда базовый актив ликвиден и номинал опциона не слишком большой для рынка.

Однако, в случае опционов для неликвидного актива или больших номиналов относительно обычно торгуемого объема на рынке уже нельзя исключать из рассмотрения влияние на рынок и затраты на исполнение.

Интерес к изучению моделей, которые учитывают затраты на исполнение, вызван теми ситуациями, когда цена высокочастотного хеджирования(high frequency hedging cost) недопустимо возрастает из-за затрат на исполнение, в то время как низкочастотное хеджирование ведет к большим ошибкам или погрешности отслеживания.

Степень разработанности темы исследования

Возможно, одной из первых работ по ценобразованию опционов была диссертация Л. Башелье 1900-го года. Л. Башелье рассчитал цены опционов на акции, предполагая изменение цены базового актива (акции) по законам броуновского движения, и сравнил их с текущими ценами.

В 1965 г. П. Самуэльсон было предложено для описания динамики цены акций использовать так называемое геометрическое (экономическое) броуновское движение.

Геометрическое броуновское движение послужило основой для модели Блэка — Шоулза — Мертона (1973) и широко известной формулы Блэка — Шоулза.

Ввиду того, что модель Блэка — Шоулза не учитывает затраты на исполнение и влияние сделок участников рынка на текущие цены, исследователями активно изучаются изменения в модели, которые могут их учитывать. Возникло два подхода учета влияния сделок на цены.

Первый подход обычно называется подходом «кривой предложения» (the «supply curve» approach). Он учитывает влияние на цену торгуемого актива операций большого объема или недостаточной ликвидности. Данный подход был разработан и получил дальнейшее развитие в работах P. Bank и D. Baum (2004) , U. Çetin, R. Jarrow и P. Protter (2004), U. Çetin и L. C. Rogers (2007).

Второй подход изучает наблюдающиеся на практике ситуации, связанные с влиянием дельта-хеджирования (динамического хеджирования) на динамику базового актива и вытекающим из этого эффектом обратной связи на цену опциона. S. Grossman (1998) написал одну из первых работ по данному направлению. Также изучению этого подхода посвящены работы E. Platen и M. Schweizer (1998), P. Schönbucher и P. Wilmott (2000), R. Sircar и G. Papanicolaou (1998) .

В работе H. E. Leland (1985) предложил одну из первых моделей, учитывающих транзакции при определении цены опционов. Модель G. Barles и H. M. Soner (1998), учитывающая транзакционные издержки и фактор неприятия риска хеджеров, была получена при использовании асимптотического анализа. В работе J. Cvitanić и I. Karatzas (1996) при помощи мартингального подхода получена формула для расчета минимального первоначального капитала, необходимого для хеджирования произвольного условного требования в модели с непрерывным временем и с учетом пропорциональных транзакционных издержек.

Вдобавок недавно появился подход, учитывающий транзакционные издержки и основанный на «теории оптимального исполнения». При данном подходе Rogers and Singh, T. M. Li and R. Almgren рассматривали затраты на исполнение, не являющиеся линейными относительно исполненного объема, а выпуклыми для учета влияния ликвидности.

Перечисленные модели исследовались многими авторами как численно, так и аналитически. Аналитическое исследование уравнения Блэка — Шоулза методами группового анализа проведено в работе Н.Х. Ибрагимова и Р.К. Газизова (1998). В работах L.A. Bordag с соавторами , М. М. Дышаева и В. Е. Федорова и других авторов изучены групповые свойства различных нелинейных моделей типа Блэка — Шоулза, осуществлен поиск их инвариантных решений и подмоделей.

В работе O. Guéant и J. Pu (2015) , посвящённой анализу ценообразования опционов с учетом транзакционных издержек и влияния операций на рынок, решается задача продажи кол-опциона банком или трейдером на рынке клиенту со сроком погашения T при предположениях:

1. Рассматривается постоянная безрисковая ставка r, параметр абсолютного избегания риска γ и волатильность σ.

2. Процесс рыночного объема торгов V_t считается детерминированным, неотрицательным и ограниченным.

3. Торговля ограничена максимальной степенью участия ρ_m и следовательно рассматриваются процессы v из множества допустимых стратегий A, которые имеет ограничение $|v_t| \leq \rho_m V_t$ почти всюду на $(0, T) \times \Omega$.

4. Количество акций в хеджируемом портфеле моделируется как $q_t = q_0 + \int_0^t v_s ds$.

5. Процесс цены моделируется как $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t + k v_t dt$, где μ — прогноз тренда, ожидаемая доходность базового актива, а k линейно моделирует

постоянное воздействие на рынок.

6. Для моделирования затрат на исполнения используют непрерывную неотрицательную функции $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, которая является четной, возрастающей на $\mathbb{R}_+$, $L(0) = 0$, строго выпуклой и коэрцитивной, т. е. $\lim_{\rho\to+\infty} \frac{L(\rho)}{\rho} = +\infty$.

7. Для любого $v \in A$ счет X меняется как $dX_t = rX_t dt - v_t S_t dt - V_t L(\frac{v_t}{V_t})dt$.

8. Функция штрафа (Penalty function) $\mathcal{L}(q, q')$ моделирует цену ликвидности при переходе от портфеля с q акциями к портфелю с q' акциями. Ее вид в работе специфицируется как $\mathcal{L}(q, q') = l(|q - q'|) + \frac{1}{2}k(q - q')^2$, где l — выпуклая и возрастающая функция.

.

При этих условиях поставлена задача оптимального стохастического контроля

$$\sup_{v\in A} \mathbb{E}\left[-\exp(-\gamma(X_T + q_T S_T - \Pi(q_T, S_T)))\right],$$

где $\mathbb{E}$ — математическое ожидание. Для нее определяют функцию значения и связанное с задачей уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана.

При отсутствии постоянного воздействия на рынок $k = 0$, получена фукция $\theta(t, S, q)$, которая моделирует цену безразличия кол-опциона, и при помощи введения функции $H(p) = \sup\limits_{|\rho|\le\rho_m} [p\rho - L(\rho)]$ выведено связанное с θ дифференциальное уравнение

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + V_t H(\theta_q).$$

Случай постоянного давления на рынок при $r = 0$, $\mu = 0$ сводится к предыдущему при помощи замены переменной.

В данной работе получена групповая классификация этого уравнения при различных спецификациях свободного элемента H. На ее основе для конкретных функций найдены инвариантные решения и подмодели.

1. Основное содержание выпускной квалификационной работы

Выпускная квалификационная работа содержит введение, теоретическую часть, решение из 10 глав и список литературы.

Во введении содержится обоснование актуальности темы исследования, ее исторический обзор с указанием работ и авторов, осуществлявших исследование в данной области.

В теоретической части содержится минимумальные необходимые для понимания работы.

В первой главе решения осуществлен поиск преобразований эквивалентности для уравнения

$$\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \frac{1}{2}\sigma^2\theta_{SS} - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2 + F(\theta_q), \tag{1.1}$$

где $\theta = \theta(t, S, q)$, $F(\theta_q)$ - произвольный элемент.

Теорема 1.0.1. *Базис алгебры Ли операторов групп преобразований эвивалентности уравнения* (1.1) *образуют операторы*

$$X_1 = \partial_\theta - r\partial_F, \quad X_2 = \partial_t + rq\partial_q + r\theta\partial_\theta + rF\partial_F,$$
$$X_3 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_4 = \partial_S + q\partial_\theta, \quad X_5 = e^{rt}\partial_\theta.$$

Также получаем сужение преобразований эвивалентности на произвольный элемент F и его аргумент θ_q

$$\bar{F} = e^{ra_2}(F - ra_1), \quad \bar{\theta_q} = \theta_q + a_4. \tag{1.2}$$

Во второй главе решения начинаем групповую классификацию и проводим разделение критерия инвариантности по переменным θ_S, θ_{SS}, θ, S.

В третьей главе решение предполагаем, что $F'' \neq 0$ откуда получаем условия на q и проводим разделение по переменной q. Далее решением классифицирующего соотношения находится спецификации свободного(произвольного) элемента $F = e^{\nu\theta_q}$ и $F = \theta_q^2$. При этом для произвольной нелинейной F, не эквивалентной $F = e^{\nu\theta_q}$ и $F = \theta_q^2$, и $F = e^{\nu\theta_q}$ найдены основные группы.

В четвертой главе решения дается сведение уравнения $N''(t) - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N(t) = -r^2Ke^{rt}$, возникшей при поиске группы для θ_q^2, к неоднородной функции Бесселя нулевого порядка.

В пятой главе решения проводится до конца групповая классификация изучаемого уравнения $F'' \neq 0$ и получены утверждения

Теорема 1.0.2. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + F(\theta_q)$, *где* F*-произвольная нелинейная функция, не эквивалентная* $e^{\nu\theta_q}$ *и* θ_q^2, *образуют операторы*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta.$$

Теорема 1.0.3. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + e^{\nu\theta_q}$ *образуют операторы*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_2 = \partial_q + S\partial_\theta, \quad X_3 = \nu\partial_t + r\partial_S + r\nu q\partial_q + (r\nu\theta + rq)\partial_\theta.$$

Теорема 1.0.4. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + \theta_q^2$ *образуют операторы*

$$X_1 = e^{rt}\partial_\theta, \quad X_5 = \partial_q + S\partial_\theta,$$

$$X_2 = \varphi_1(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^t \varphi_1(t)dt\partial_q +$$

$$+\left(-\left(\frac{\mu\varphi_1(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_1(t)q + S\left(\frac{\varphi_1' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^t \varphi_1 ds\right)\right)\partial_\theta,$$

$$X_3 = \varphi_2(t)\partial_S - 2\int_{t_0}^t \varphi_2(t)dt\partial_q +$$

$$+\left(-\left(\frac{\mu\varphi_2(t)e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \varphi_2(t)q + S\left(\frac{\varphi_2' e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^t \varphi_2 ds\right)\right)\partial_\theta,$$

$$X_4 = (\Psi(t) + e^{rt})\partial_S - 2\int_{t_0}^t \Psi(t)dt\partial_q +$$

$$+\left(-\left(\frac{\mu(\Psi(t) + e^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2}\right) + \Psi(t)q + S\left(\frac{(\Psi' + re^{rt})e^{r(t-T)}}{\gamma\sigma^2} - 2\int_{t_0}^t \Psi ds\right)\right)\partial_\theta.$$

где $\varphi_1(t) = I_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$ $\varphi_2(t) = K_0(\frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}e^{-rt/2})$ *ФСР уравнения* $N'' - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N = 0$, *а* $\Psi(t)$ *частное решение уравнения* $N'' - 2\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}N = -r^2 e^{rt}$ *и представляет собой замену от модифицированной функции Ломмеля. Ее выражение через функции Мейера имеет вид*

$$-K_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2}{2}G^{2,0}_{1,3}\left(-c^2e^{-rt}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) + I_0(ce^{-rt/2})\frac{c^2}{4}G^{3,0}_{1,3}\left(c^2e^{-rt}\,\middle|\,\begin{matrix}1\\0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right) - e^{rt},$$

где $c = \frac{2}{r}\sqrt{2\gamma\sigma^2 e^{rT}}$.

В шестой главе решения проводится поиск матрицы коммутаторов для случая $e^{\nu\theta_q}$ и найдены двумерные и одномерные оптимальные системы подалгебр для него. Для оптимальных подалгебр найдены инвариантные подмодели.

В седьмой главе решения проводится поиск матрицы коммутаторов для случая θ_q^2 и найдены одномерные оптимальные системы подалгебр для него. Для оптимальных подалгебр найдены инвариантные подмодели.

В восьмой главе решения проводится решение в случае $F'' = 0$ и следовательно с учетом преобразований эквивалентности при $F = c\theta_q$. Все уравнения, полученные в главе три, имеют производные вида $f_t(t,q) - cf_q(t,q)$ и следовательно проводится замена вида $u = t$, $v = q + ct$. Производные иного вида содержит только уравнение относящееся к той части оператора, которая бесконечно дифференцируема по θ и оно изучается отдельно. Получается и решается система дифференциальных уравнений по u.

В девятой главе решения проводится сведения нерешенного в восьмой главе решения уравнения уравнению теплопроводности. И получено утверждение

Теорема 1.0.5. *Базис основной алгебры Ли для уравнения* $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + c\theta_q$ *образуют операторы*

$$X_1 = de^{rt}\partial_\theta, \tag{1.3}$$

$$X_2 = n\gamma\sigma^2 e^{rT} t\partial_S + n(e^{rt}S + (\gamma\sigma^2 e^{rT}(tq - \frac{c}{r}t - \frac{c}{r^2}) - \mu t e^{rt}))\partial_\theta, \tag{1.4}$$

$$X_3 = b\partial_S + b(q - \frac{c}{r})\partial_\theta, \tag{1.5}$$

$$X_4 = h\partial_t - h\frac{c}{r}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}\partial_S + \tag{1.6}$$

$$+h(r\theta + (c - rq)S + \mu\frac{c}{r} + c\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-\frac{q}{r} + \frac{c}{2r^2}))\partial_\theta, \tag{1.7}$$

$$X_5 = w\partial_q + wS\partial_\theta, \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} X_6 = g2t\partial_t - g2ct\partial_q + g(S + (\mu t + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-2\frac{c}{r}t - \frac{c}{r^2})))\partial_S + \\ +g(2rt\theta + \mu(tq + t\frac{c}{r}) + \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(-qt\frac{2c}{r} + t\frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} - \frac{cq}{r^2}) + \\ +(-2rtq + q - \frac{c}{r})S)\partial_\theta, \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered} X_7 = f2\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\partial_t - f2c\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\partial_q + \\ +f(S2\gamma\sigma^2 e^{rT}t + (\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(-2\frac{c}{r}t^2 - 2\frac{c}{r^2}t))\partial_S + \\ +f((\gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rqt^2 + 2tq - \frac{2c}{r}t - \frac{2c}{r^2}) - 2\mu t e^{rt})S + e^{rt}S^2 - \\ -\sigma^2 t e^{rt} + \mu^2 t^2 e^{rt} + \mu\gamma\sigma^2 e^{rT}(t^2\frac{2c}{r} + \frac{2c}{r^2}t) + \\ +(\gamma\sigma^2 e^{rT})^2 e^{-rt}(t^2(\frac{c^2}{r^2} - \frac{2cq}{r}) + t(\frac{2c^2}{r^3} - \frac{2cq}{r^2}) + \frac{c^2}{r^4}) + 2r\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\theta)\partial_\theta. \end{gathered} \tag{1.10}$$

где d, n, h, b, w, g, f *- произвольные функции аргумента* $q + ct$. *И*

$$\begin{gathered} X_8 = \widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-u)} - \mu t), q + ct)\cdot \\ \cdot e^{-\mu\frac{c}{r^2}\gamma e^{r(T-t)} + \frac{\sigma^2 c^2}{4r^3}\gamma^2 e^{2r(T-t)} - \frac{c}{r}S\gamma e^{r(T-t)}} e^{S\gamma e^{r(T-t)}q + rt - \gamma e^{r(T-t)}\theta}\partial_\theta \end{gathered} \tag{1.11}$$

где $\widetilde{K}(\widetilde{u}, y, v)$ *- решение уровнения теплопроводности* $\widetilde{K}_{\widetilde{u}} = \widetilde{K}_{yy}$.

Группы для $F = 0$ будут

$$X_1 = de^{rt}\partial_\theta, \tag{1.12}$$

$$X_2 = n\gamma\sigma^2 e^{rT}t\partial_S + n(e^{rt}S + \gamma\sigma^2 e^{rT}tq - \mu t e^{rt})\partial_\theta, \tag{1.13}$$

$$X_3 = b\partial_S + bq\partial_\theta, \tag{1.14}$$

$$X_4 = h\partial_t + h(r\theta - rqS)\partial_\theta, \tag{1.15}$$

$$X_5 = w\partial_q + wS\partial_\theta, \tag{1.16}$$

$$X_6 = g2t\partial_t + g(S+\mu t)\partial_S + g(2rt\theta + \mu tq + (-2rtq+q)S)\partial_\theta, \tag{1.17}$$

$$\begin{gathered} X_7 = f2\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\partial_t + fS2\gamma\sigma^2 e^{rT}t\partial_S + \\ +f((\gamma\sigma^2 e^{rT}(-2rqt^2+2tq) - 2\mu te^{rt})S + e^{rt}S^2 - \sigma^2 te^{rt} + \mu^2 t^2 e^{rt} + \\ +2r\gamma\sigma^2 e^{rT}t^2\theta)\partial_\theta. \end{gathered} \tag{1.18}$$

где d, n, h, b, w, g, f - произвольные функции аргумента q. И

$$X_8 = \widetilde{K}(-t, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S-\mu t), q)e^{S\gamma e^{r(T-t)}q + rt - \gamma e^{r(T-t)}\theta}\partial_\theta \tag{1.19}$$

где $\widetilde{K}(\widetilde{u}, y, v)$ - решение уровнения теплопроводности $\widetilde{K}_{\widetilde{u}} = \widetilde{K}_{yy}$.

В десятой части решения получена замена приводящая уравнение вида $\theta_t = r\theta + (\mu - rS)q - \mu\theta_S - \sigma^2\theta_{SS}/2 - \gamma\sigma^2 e^{r(T-t)}(\theta_S - q)^2/2 + c\theta_q$ к уравнению теплопроводности. Замена имеет форму

$$\theta = Sq - \mu\frac{c}{r^2} + \frac{\sigma^2 c^2\gamma}{4r^3}e^{r(T-t)} - \frac{c}{r}S + \frac{e^{rt}}{\gamma e^{rT}}\ln K,$$

$$u = -t, \quad v = q + ct,$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}(S - \frac{c}{r^2}\gamma\sigma^2 e^{r(T-t)} - \mu t).$$