

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»
Институт точных наук и информационных технологий
Кафедра математического моделирования и кибернетики

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Выпускная квалификационная работа по направлению подготовки
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Выполнил
студент 149 группы _____ А.В. Надуткина

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент _____ Н.А. Беяева

Заведующий кафедрой ММиК
к.ф.-м.н., доцент _____ Ю.Н. Беяев

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	4
1.1. Уравнение движения несжимаемой жидкости.	4
1.2. Уравнение переноса тепла.	5
1.3. Безразмерная модель течения.	6
2. Численное решение задачи	9
2.1. Дискретная модель.	9
2.2. Алгоритм решения.	10
3. Результаты численных экспериментов	13
Заключение	18
Список литературы	19
Приложение 1. Графики распределения скорости и температуры течения	20
Приложение 2. Программа численного алгоритма	28

Аннотация

Построена математическая модель неизотермического напорного течения вязкой жидкости в безразмерном виде. Разработан алгоритм на основе метода прогонки и составлена программа численного решения. Приводятся результаты численных экспериментов и проведен численный анализ при варьировании параметров.

Введение

Гидродинамика изучает законы движения жидкостей. Процесс построения и изучения математических моделей течений жидкостей в различных условиях является важной задачей гидродинамики. Работа с математической моделью дает возможность исследовать поведение, свойства изучаемого объекта.

Цель работы — построение математической модели, описывающей неизотермическое напорное течение вязкой жидкости по каналу кругового сечения.

Задачи исследования:

- изучить источники литературы по исследуемой теме;
- определить в общем виде систему уравнений для описания течения;
- привести физические параметры системы в безразмерный вид;
- разработать алгоритм численного решения;
- составить программу численного решения;
- провести численный эксперимент;
- провести численный анализ безразмерной модели при варьировании параметров.

Рассматриваются вязкие жидкости, например, нефтяные жидкости, сосудистые течения и так далее. Поэтому исследуемая модель актуальна для многих областей: техническая, медицинская.

В работах [1; 2; 3; 6] представлена модель течения, которая описывается уравнением движения Навье-Стокса [4] и уравнением переноса тепла [5].

1. Постановка задачи

Рассматривается неизотермическое напорное течение вязкой жидкости по каналу кругового сечения, в круглой трубе [1; 2; 3; 6]. Математическая модель строится при следующих предположениях: осесимметричное течение по трубе происходит под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси трубы z :

$$p = p(z), \quad b = -\frac{dp}{dz} = \text{const}; \quad (1.1)$$

считаем отличной от нуля лишь осевую составляющую скорости, зависящую от удаления r от оси трубы и времени t :

$$\vec{V} = (0, 0, V(r, t)); \quad (1.2)$$

зависимость вязкости от температуры $T = T(r, t)$ задаем в виде:

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \exp(-\beta(T - T_0)), \quad (1.3)$$

где T_0 — температура окружающей среды, μ_0 — значение вязкости при $T = T_0$; жидкость несжимаема, то есть

$$\rho = \text{const}; \quad (1.4)$$

в рассматриваемом случае течения (1.2) условие неразрывности $\text{div } \vec{V} = 0$ (в цилиндрической системе координат) выполняется:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rV_z)}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \cdot 0)}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r \cdot V(r, t))}{\partial z} \right] = 0. \quad (1.5)$$

1.1. Уравнение движения несжимаемой жидкости. Течение описывается уравнением движения Навье - Стокса, которое при условии неразрывности $\text{div } \vec{V} = 0$, в дифференциальных операторах, имеет вид [4]:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} \right] = -\text{grad } p + \mu \Delta \vec{V} + 2(\text{grad } \mu, \nabla) \vec{V} + \text{grad } \mu \times \text{rot } \vec{V} + \rho \vec{F}, \quad (1.6)$$

где ρ — плотность, \vec{V} — векторное поле скорости, t — время, ∇ — оператор Гамильтона, p — давление, μ — коэффициент вязкости, Δ — векторный оператор Лапласа, rot — векторный дифференциальный оператор над векторным полем, \vec{F} — векторное поле массовых сил.

Распишем слагаемые уравнения (1.6) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , при отсутствии массовых сил $\vec{F} = 0$:

$$\begin{aligned} (\vec{V}, \nabla) \vec{V} &= \left(V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (V_r \vec{e}_r + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{e}_z) = \\ &= \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} V_\varphi \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} V_r V_\varphi + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} V_\varphi \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\varphi + \\ &+ \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{r} V_\varphi \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \vec{e}_z = \left(0 \cdot \frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot 0 \cdot \frac{\partial 0}{\partial \varphi} + V(r, t) \cdot \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{0}{r} \right) \vec{e}_r + \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot 0 \cdot \frac{\partial 0}{\partial \varphi} + V(r, t) \cdot \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \vec{e}_\varphi + \\ &+ \left(0 \cdot \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot 0 \cdot \frac{\partial V(r, t)}{\partial \varphi} + V(r, t) \cdot \frac{\partial V(r, t)}{\partial z} \right) \vec{e}_z; \Rightarrow (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = (0, 0, 0); \end{aligned} \quad (1.7)$$

градиент давления запишется

$$\text{grad } p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{\partial p}{\partial z} \right); \text{ grad } p = \left(0, 0, \frac{dp}{dz} \right); \text{ grad } p = (0, 0, -b); \quad (1.8)$$

выражение для оператора Лапласа от поля скорости имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi}, \Delta V_z \right) = (0, 0, \Delta V_z); \\ \Delta V_z &= \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r}; \quad \Delta V_z = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Rightarrow \\ \mu \Delta \vec{V} &= \left(0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right); \quad \text{grad } \mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mu}{\partial z} \right); \quad \text{grad } \mu = (0, 0, 0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Проекция уравнения Навье-Стокса на ось z с учетом преобразований (1.7) – (1.9) принимает вид:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) + b. \quad (1.10)$$

1.2. Уравнение переноса тепла. Рассмотрим уравнение переноса тепла [5]:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \text{ grad } T \right) = \text{div}(\kappa \text{ grad } T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k}, \quad (1.11)$$

где T – температура, t – время, \vec{V} – векторное поле скорости, grad – градиент, div – дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное, σ'_{ik} – тензор напряжений; c – теплоемкость, ρ – плотность жидкости, κ – коэффициент теплопроводности будем считать постоянными.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) получаем:

$$\begin{aligned} \text{grad } T &= \left(\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial r}, 0, 0 \right); \quad \vec{V} \text{ grad } T = 0; \\ \text{div}(\text{grad } T) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial 0}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right); \\ \text{div}(\kappa \text{ grad } T) &= \kappa \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right); \end{aligned} \quad (1.12)$$

компоненты симметричного тензора напряжений в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik} &= \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} & \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \right) & 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} \right) & \mu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right) & 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}; \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

одна ненулевая компонента

$$\begin{aligned}\sigma'_{ik} \rightarrow \sigma'_{rz} = \sigma'_{zr} &= \mu(T) \frac{\partial V_z}{\partial r} = \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r}; \\ \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial r} &= \frac{\partial V}{\partial r}; \\ \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} &= \mu(T) \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2.\end{aligned}\tag{1.13}$$

После преобразований (1.12) – (1.13) получаем следующее уравнение:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu(T) \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2.\tag{1.14}$$

Таким образом, из уравнений (1.10) и (1.14) получим систему дифференциальных уравнений для определения скорости и температуры течения:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) + b;\tag{1.15}$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) + \mu(T) \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2;\tag{1.16}$$

с начальными:

$$V|_{t=0} = 0; T|_{t=0} = T_0;\tag{1.17}$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0;\tag{1.18}$$

$$V|_{r=R} = 0; T|_{r=R} = T_0.\tag{1.19}$$

1.3. Безразмерная модель течения. Приведем систему (1.15) – (1.19) к безразмерному виду. Обезразмеривание необходимо для того, чтобы упростить систему уравнений, исключив множество физических параметров. Безразмерная величина — это величина с размерностью единица.

Рассмотрим уравнение (1.15), положим:

$$\theta = \beta(T - T_0), [T - T_0] = \text{град}, [\beta] = \frac{1}{\text{град}}, \Rightarrow [\theta] = \frac{\text{град}}{\text{град}},$$

$\Rightarrow \theta$ — безразмерная величина;

$$0 \leq r \leq R(: R), x = \frac{r}{R}, \Rightarrow 0 \leq x \leq 1, \Rightarrow [x] = \frac{\text{м}}{\text{м}},$$

$\Rightarrow x$ — безразмерная величина. Разделим обе части (1.15) на b и используем полученные безразмерные величины, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{b} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{xR} \frac{\partial}{\partial(xR)} \left(xR \exp(-\theta) \frac{\partial}{\partial(xR)} \left(\frac{V\mu_0}{b} \right) \right) + 1; \\ \Rightarrow \frac{\rho}{b} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \exp(-\theta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V\mu_0}{bR^2} \right) \right) + 1.\end{aligned}$$

Пусть

$$u = \frac{V\mu_0}{bR^2}, [V] = \frac{\text{м}}{\text{с}}, [\mu_0] = \text{Па} \times \text{с} = \frac{\text{кг} \times \text{с}}{\text{м} \times \text{с}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \times \text{с}}, [b] = \frac{\text{Па}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \times \text{с}^2}, [R] = \text{м},$$

$$\Rightarrow [u] = \frac{\text{м} \times \text{кг} \times \text{м}^2 \times \text{с}^2}{\text{с} \times \text{м} \times \text{с} \times \text{кг} \times \text{м}^2},$$

$\Rightarrow u$ — безразмерная величина, отсюда

$$V = \frac{ubR^2}{\mu_0};$$

тогда

$$\frac{\rho}{b} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\rho}{b} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ubR^2}{\mu_0} \right) = \frac{\rho R^2}{\mu_0} \frac{\partial u}{\partial t}, [\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \left[\frac{\rho R^2}{\mu_0} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\text{кг} \times \text{м}^2 \times \text{м} \times \text{с}}{\text{м}^3 \times \text{кг} \times \text{с}};$$

$$\Rightarrow \frac{\rho R^2}{\mu_0} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \exp(-\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 1. \quad (1.20)$$

Рассмотрим уравнение (1.16):

$$T = \frac{1}{\beta} \theta + T_0, \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial t};$$

$$c\rho \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{1}{xR} \frac{\partial}{\partial (xR)} \left(xR \frac{1}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial (xR)} \right) + \mu_0 \exp(-\theta) \left(\frac{\partial}{\partial (xR)} \left(\frac{ubR^2}{\mu_0} \right) \right)^2;$$

$$\Rightarrow \frac{c\rho}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\kappa R}{xR^2\beta R} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \mu_0 \exp(-\theta) \frac{b^2 R^4}{\mu_0^2 R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2;$$

$$\frac{c\rho}{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\kappa}{xR^2\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{b^2 R^2}{\mu_0} \exp(-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2; \left(: \frac{\kappa}{R^2\beta} \right)$$

$$\frac{c\rho R^2}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{b^2 \beta R^4}{\kappa \mu_0} \exp(-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Пусть

$$\tau = \frac{\kappa t}{c\rho R^2}, \tau \geq 0; \quad (1.21)$$

$$[\kappa] = \frac{\text{м} \times \text{кг}}{\text{с}^3 \times \text{град}}, [t] = \text{с}, [c] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \times \text{град}}, [\tau] = \left[\frac{\kappa t}{c\rho R^2} \right] = \frac{\text{м} \times \text{кг} \times \text{с} \times \text{с}^2 \times \text{град} \times \text{м}^3}{\text{с}^3 \times \text{град} \times \text{м}^2 \times \text{кг} \times \text{м}^2},$$

$\Rightarrow \tau$ — безразмерная величина;

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{b^2 \beta R^4}{\kappa \mu_0} \exp(-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2;$$

обозначим:

$$\delta = \frac{R^4 \beta b^2}{\kappa \mu_0}, [\delta] = \left[\frac{R^4 \beta b^2}{\kappa \mu_0} \right] = \frac{\text{м}^4 \times \text{кг}^2 \times \text{с}^3 \times \text{град} \times \text{м} \times \text{с}}{\text{град} \times \text{м}^4 \times \text{с}^4 \times \text{м} \times \text{кг} \times \text{кг}},$$

$\Rightarrow \delta$ — безразмерная величина;

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \delta \exp(-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (1.22)$$

Из выражения (1.21):

$$t = \frac{c\rho R^2 \tau}{\kappa}.$$

Подставляем в (1.20):

$$\frac{\rho R^2}{\mu_0} \frac{\partial u}{\partial \left(\frac{c\rho R^2 \tau}{\kappa} \right)} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \exp(-\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 1;$$

$$\frac{\kappa}{c\mu_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \exp(-\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 1;$$

пусть

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{c\mu_0}, \quad [\varepsilon] = \left[\frac{\kappa}{c\mu_0} \right] = \frac{\text{м} \times \text{кг} \times \text{с}^2 \times \text{град} \times \text{м} \times \text{с}}{\text{с}^3 \times \text{град} \times \text{м}^2 \times \text{кг}},$$

$\Rightarrow \varepsilon$ — безразмерная величина;

$$\Rightarrow \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \exp(-\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 1. \quad (1.23)$$

Из уравнений (1.22) — (1.23) получим систему безразмерных уравнений:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \exp(-\theta) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 1; \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \delta \exp(-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2; \quad (1.25)$$

с начальными:

$$u|_{\tau=0} = 0; \quad \theta|_{\tau=0} = 0; \quad (1.26)$$

и граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad (1.27)$$

$$u|_{x=1} = 0; \quad \theta|_{x=1} = 0; \quad (1.28)$$

где u — безразмерная скорость, θ — безразмерная температура, x — безразмерная пространственная координата, τ — безразмерное время, ε и τ — безразмерные параметры жидкости.

2. Численное решение задачи

2.1. Дискретная модель. Для того, чтобы описать модель (1.24) – (1.28) с помощью численных методов, необходимо заменить область непрерывного изменения областью дискретного, то есть перейти от непрерывной модели к дискретной. Для этого нужно разбить осевой и временной отрезки, ввести разностную схему. После осуществления такой процедуры мы приходим к алгебраической системе уравнений [7].

Рассмотрим множество функций двух аргументов (x, τ) . В качестве области определения возьмем прямоугольник:

$$D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq t_{max}\}.$$

Разобьем отрезки $[0, 1]$ на оси x и $[0, t_{max}]$ на оси τ на n и m частей соответственно. Через точки деления проводим прямые, параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получаем узлы (x_i, τ_j) , которые образуют пространственно-временную сетку:

$$\begin{aligned} 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1, \\ x_{i+1} - x_i = \Delta x, \quad i \in 0..n; \\ \tau_j = j\Delta\tau \geq 0, \quad \Delta\tau = \tau_{j+1} - \tau_j, \quad j \in 0..m \end{aligned}$$

– временной шаг.

Для уравнения (1.24) заменим производные следующими разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &\approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta\tau}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &\approx \frac{\theta_{i+1,j-1} - \theta_{i,j-1}}{\Delta x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Аналогично, для уравнения (1.25) заменим производные разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &\approx \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta\tau}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &\approx \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}}{\Delta x}; \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &\approx \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta x^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &\approx \frac{u_{i+1,j}^2 - 2u_{i+1,j}u_{i,j} + u_{i,j}^2}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, непрерывная модель (1.24) – (1.28) преобразуется в дискретную модель:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta\tau} \right) &= \frac{1}{x_i} \left[\exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) - x_i \exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{\theta_{i+1,j-1} - \theta_{i,j-1}}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + x_i \exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) \right] + 1; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta\tau} = & \frac{1}{x_i} \left[\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}}{\Delta x} + x_i \left(\frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) \right] + \\ & + \delta \exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{u_{i+1,j}^2 - 2u_{i+1,j}u_{i,j} + u_{i,j}^2}{\Delta x^2} \right); \end{aligned} \quad (2.2)$$

с начальными:

$$u_{i,0} = 0, \theta_{i,0} = 0; \quad (2.3)$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} \approx \left. \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow u_{1,j} = u_{0,j}; \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} \approx \left. \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}}{\Delta x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \theta_{1,j} = \theta_{0,j}; \quad (2.5)$$

$$u_{n,j} = 0, \theta_{n,j} = 0. \quad (2.6)$$

2.2. Алгоритм решения. Математическая модель (2.1) – (2.6) решается численно с помощью метода прогонки.

Выполним некоторые преобразования для (2.1):

$$\begin{aligned} u_{i,j} - u_{i,j-1} = & \frac{\Delta\tau}{x_i \varepsilon} \left[\exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) - x_i \exp(-\theta_{i,j-1}) \cdot \right. \\ & \cdot \frac{\theta_{i+1,j-1}u_{i+1,j} - \theta_{i+1,j-1}u_{i,j} - \theta_{i,j-1}u_{i+1,j} + \theta_{i,j-1}u_{i,j}}{\Delta x^2} + \\ & \left. + x_i \exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) \right] + \frac{\Delta\tau}{\varepsilon}; \\ u_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2 \varepsilon} \exp(-\theta_{i,j-1}) (\Delta x - x_i \theta_{i+1,j-1} + x_i \theta_{i,j-1} + 2x_i) \right] = & u_{i+1,j} \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2 \varepsilon} \exp(-\theta_{i,j-1}) \cdot \\ & \cdot (\Delta x - x_i \theta_{i+1,j-1} + x_i \theta_{i,j-1} + x_i) + \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2 \varepsilon} \exp(-\theta_{i,j-1}) u_{i-1,j} x_i + u_{i,j-1} + \frac{\Delta\tau}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Вводим следующие обозначения:

$$g_{i,j-1} = u_{i,j-1} + \frac{\Delta\tau}{\varepsilon};$$

значения функции $\theta_{i,j}$ берем с предыдущего слоя $j-1$, так как они неизвестны:

$$k_{\theta,j-1}^1 = \exp(-\theta_{i,j-1});$$

$$k_{\theta,j-1}^2 = \Delta x - x_i \theta_{i+1,j-1} + x_i \theta_{i,j-1} + x_i.$$

После получаем:

$$\begin{aligned} u_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta\tau}{\varepsilon} \frac{k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i)}{x_i \Delta x^2} \right] = & u_{i+1,j} \frac{\Delta\tau}{\varepsilon} \frac{k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2}{x_i \Delta x^2} + \\ & + u_{i-1,j} \frac{\Delta\tau}{\varepsilon} \frac{k_{\theta,j-1}^1 x_i}{x_i \Delta x^2} + g_{i,j-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для нахождения сеточного значения функции $u_{i,j}$ по формуле (2.7) используем прогоночную формулу:

$$u_{i+1,j} = E_{i+1} u_{i,j} + F_{i+1,j}, \quad (2.8)$$

где E_{i+1} , $F_{i+1,j}$ — прогоночные коэффициенты. Подставим (2.8) в (2.7) и после преобразований получим выражение для искомой функции $u_{i,j}$ в следующем виде:

$$u_{i,j} = u_{i-1,j} \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 x_i}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i - E_{i+1} k_{\theta,j-1}^2)} + \frac{F_{i+1,j} \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2 + \varepsilon x_i \Delta x^2 g_{i,j-1}}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i - E_{i+1} k_{\theta,j-1}^2)}. \quad (2.9)$$

Воспользуемся следствием прогоночной формулы:

$$u_{i,j} = E_i u_{i-1,j} + F_{i,j} \quad (2.10)$$

и из (2.9) получим выражения для прогоночных коэффициентов E_i , $F_{i,j}$, которые представляют рекуррентные соотношения:

$$E_i = \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 x_i}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i - E_{i+1} k_{\theta,j-1}^2)}; \quad (2.11)$$

$$F_{i,j} = \frac{F_{i+1,j} \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2 + \varepsilon x_i \Delta x^2 g_{i,j-1}}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i - E_{i+1} k_{\theta,j-1}^2)}. \quad (2.12)$$

Преобразуем (2.2):

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} - \theta_{i,j-1} &= \frac{\Delta\tau}{x_i} \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}}{\Delta x} + x_i \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \\ &+ \delta \Delta\tau \exp(-\theta_{i,j-1}) \left(\frac{u_{i+1,j}^2 - 2u_{i+1,j}u_{i,j} + u_{i,j}^2}{\Delta x^2} \right); \\ \theta_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2} (\Delta x + 2x_i) \right] &= \theta_{i+1,j} \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2} (\Delta x + x_i) + \\ + \theta_{i-1,j} \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2} x_i + \theta_{i,j-1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \delta \exp(-\theta_{i,j-1}) &(u_{i+1,j}^2 - 2u_{i+1,j}u_{i,j} + u_{i,j}^2). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$h_{i,j-1} = \theta_{i,j-1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \delta k_{\theta,j-1}^1 (u_{i+1,j}^2 - 2u_{i+1,j}u_{i,j} + u_{i,j}^2);$$

и получаем:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2} (\Delta x + 2x_i) \right] &= \theta_{i+1,j} \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2} (\Delta x + x_i) + \\ + \theta_{i-1,j} \frac{\Delta\tau}{x_i \Delta x^2} x_i + h_{i,j-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Воспользуемся прогоночной формулой для нахождения сеточного значения функции $\theta_{i,j}$:

$$\theta_{i+1,j} = G_{i+1} \theta_{i,j} + H_{i+1,j}, \quad (2.14)$$

где G_{i+1} , $H_{i+1,j}$ — прогоночные коэффициенты. Подставим (2.14) в (2.13) и получим выражение для искомой функции $\theta_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} &= \theta_{i-1,j} \frac{\Delta\tau x_i}{x_i \Delta x^2 + \Delta\tau (\Delta x + 2x_i - G_{i+1} (\Delta x + x_i))} + \\ &+ \frac{H_{i+1,j} \Delta\tau (\Delta x + x_i) + x_i \Delta x^2 h_{i,j-1}}{x_i \Delta x^2 + \Delta\tau (\Delta x + 2x_i - G_{i+1} (\Delta x + x_i))}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из (2.14) следует:

$$\theta_{i,j} = G_i \theta_{i-1,j} + H_{i,j}; \quad (2.16)$$

тогда получаем выражения для прогоночных коэффициентов G_i , $H_{i,j}$:

$$G_i = \frac{\Delta \tau x_i}{x_i \Delta x^2 + \Delta \tau (\Delta x + 2x_i - G_{i+1} (\Delta x + x_i))}; \quad (2.17)$$

$$H_{i,j} = \frac{H_{i+1,j} \Delta \tau (\Delta x + x_i) + x_i \Delta x^2 h_{i,j-1}}{x_i \Delta x^2 + \Delta \tau (\Delta x + 2x_i - G_{i+1} (\Delta x + x_i))}. \quad (2.18)$$

Начальные условия (2.3) позволяют определить сеточные значения в нулевом слое:

$$u_{i,0} = 0, \theta_{i,0} = 0. \quad (2.19)$$

В каждой точке j -го слоя, двигаясь справа налево (от i к $i-1$) определяем прогоночные коэффициенты с учетом правого граничного условия (2.6), из прогоночных формул получаем:

$$u_{n,j} = E_n u_{n-1,j} + F_{n,j};$$

$$\theta_{n,j} = G_n \theta_{n-1,j} + H_{n,j};$$

следовательно,

$$E_n = 0, F_{n,j} = 0; \quad (2.20)$$

$$G_n = 0, H_{n,j} = 0. \quad (2.21)$$

Двигаясь слева направо, с учетом левого граничного условия (2.4)–(2.5), из прогоночных формул находим:

$$u_{1,j} = E_1 u_{0,j} + F_{1,j};$$

$$\theta_{1,j} = G_1 \theta_{0,j} + H_{1,j};$$

откуда

$$u_{0,j} = \frac{F_{1,j}}{1 - E_1}; \quad (2.22)$$

$$\theta_{0,j} = \frac{H_{1,j}}{1 - G_1}. \quad (2.23)$$

3. Результаты численных экспериментов

Задача численного эксперимента состояла в определении оптимальных значений n (числа точек разбиения по оси x), m (числа точек разбиения по оси τ), при которых течение устанавливается, становится стационарным, а также в определении влияния ε , δ — безразмерных параметров жидкости на течение. В приложении 1 представлены некоторые результаты численных экспериментов для неизотермического напорного течения вязкой жидкости. Листинг программы представлен в приложении 2. Программа численного решения выполнена на языке C# в среде разработки Visual Studio.

Сначала определяем базовый график (рис. 1), относительно которого будут проводиться эксперименты. На рис. 1 изображены кривые распределения скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$ неизотермического напорного течения вязкой жидкости при следующих входных данных: $n = 100$, $m = 100$, $t_{max} = 30$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.1$; кривые построены в следующие моменты времени: 1($\tau = 0.3$), 2($\tau = 0.9$), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6). Кривая 4 на рис. 1 соответствует стационарному режиму, то есть последующие кривые (при $\tau \geq 2.7$) совпадают с кривой 4 и не зависят от времени, течение устанавливается.

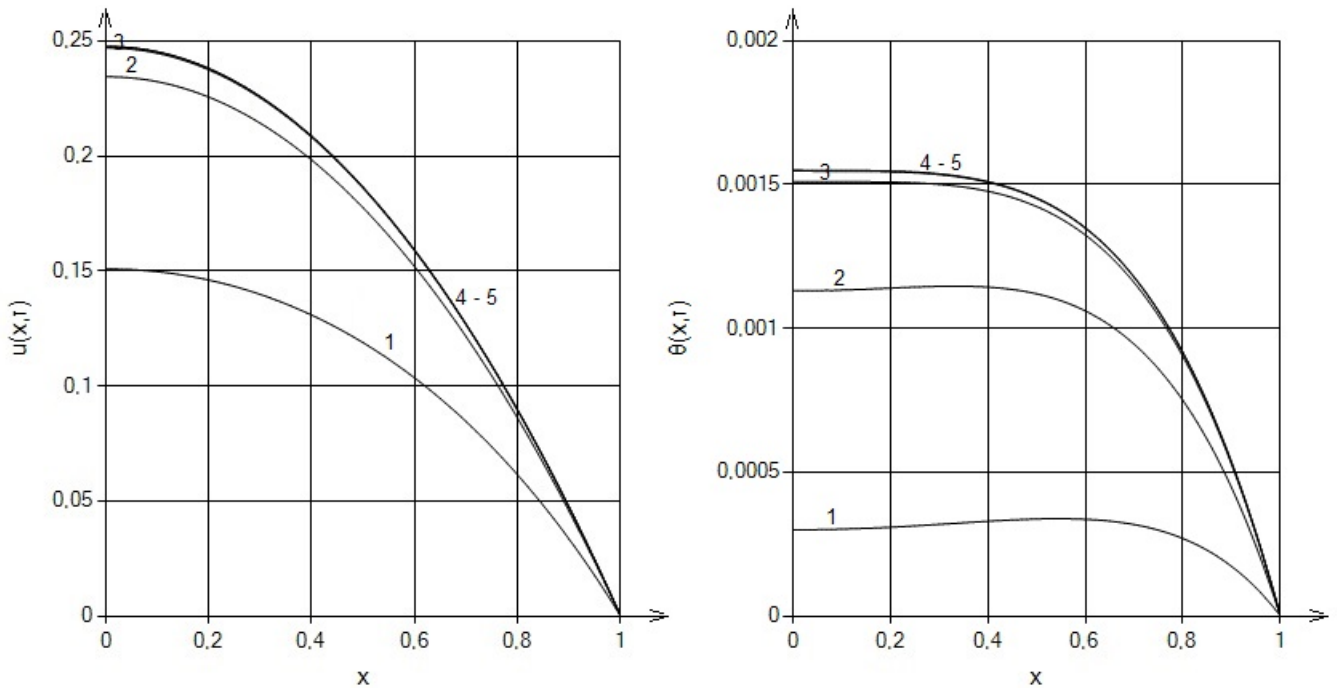


Рисунок 1. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6)

Теперь определяем оптимальное значение n , с помощью экспериментов. Необходимо варьировать n до тех пор, пока кривые не перестанут меняться, при этом остальные параметры оставляем неизменными: $m = 100$, $t_{max} = 30$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.1$. Как видно из рис. 2 и рис. 9-14, при $n = 700$ кривые уже практически не изменяются. Следовательно, данного числа точек разбиения по оси x достаточно. Кривая 4 на рис. 2, рис. 9-14 соответствует стационарному режиму при $\tau = 2.7$.

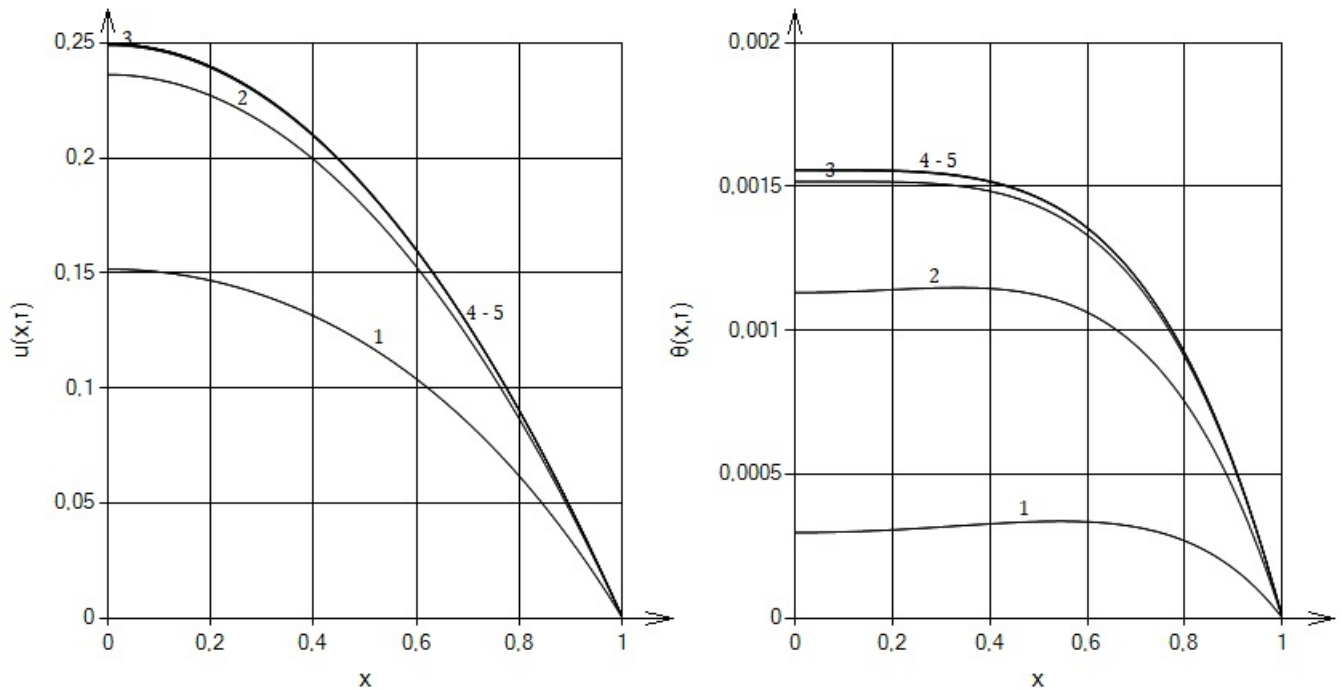


Рисунок 2. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=700$

Далее, рис. 3 и рис. 15-23, варьируем m и смотрим меняются ли графики в те же моменты времени. На рис. 3 и рис. 15-23 видно, что кривая 3 соответствует стационарному режиму при $\tau = 1.8$. С увеличением m изменяются численные значения кривых. При $m = 9000$ (рис. 3) кривые перестают качественно изменяться. Таким образом, $m = 9000$ является оптимальным значением.

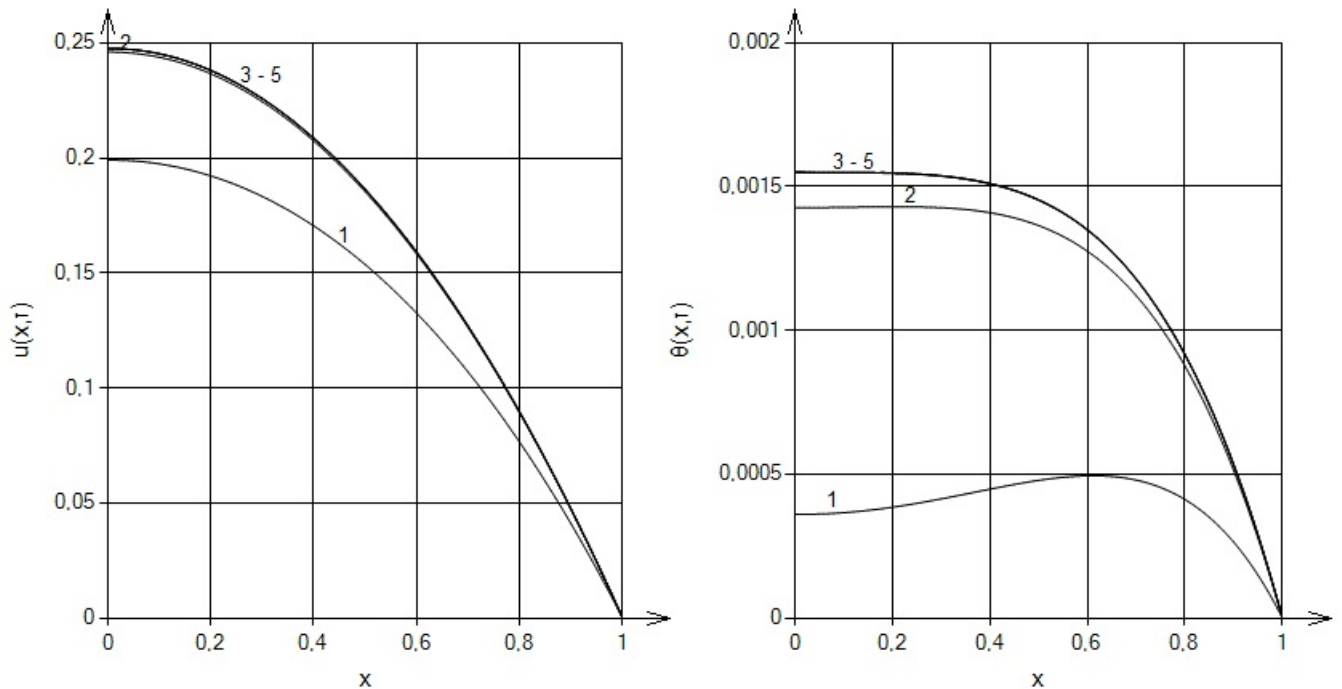


Рисунок 3. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=9000$

Изменяем безразмерный параметр ε , рис. 4-6. При $\varepsilon = 0.001$ кривые становятся более

крутыми, в момент времени $\tau = 0.3$ скорость устанавливается, а температура перестает меняться при $\tau = 2.1$.

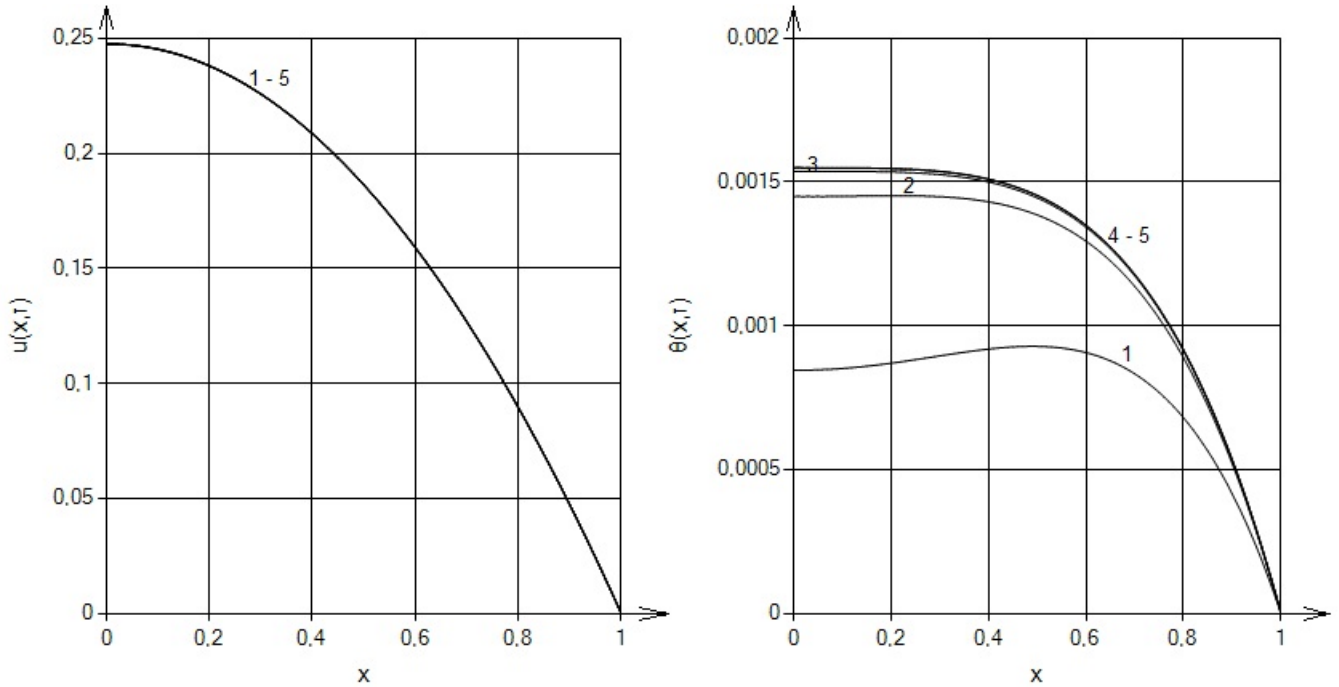


Рисунок 4. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.5), 4(2.1), 5(2.7); $\varepsilon=0.001$

Если $\varepsilon = 0.1$ (рис. 5) при $\tau = 0.9$ скорость устанавливается, кривая 2, а температура перестает меняться в момент времени $\tau = 2.1$. То есть, при уменьшении ε кривые выходят на тот же стационар быстрее и увеличивается кривизна.

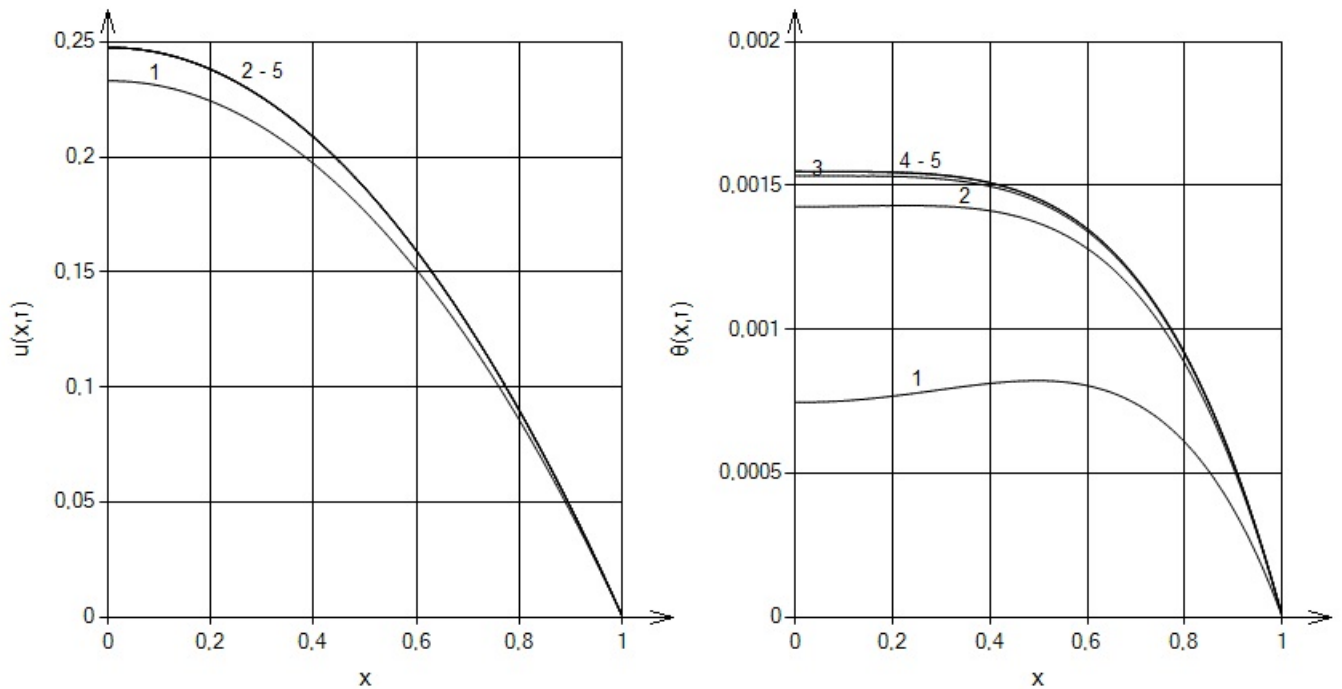


Рисунок 5. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.5), 4(2.1), 5(2.7); $\varepsilon=0.1$

При $\varepsilon = 10$ кривые также выходят на тот же стационарный режим, но позже, в момент времени $\tau = 12$. Внешний вид кривых при варьировании параметра ε значительно не изменяется.

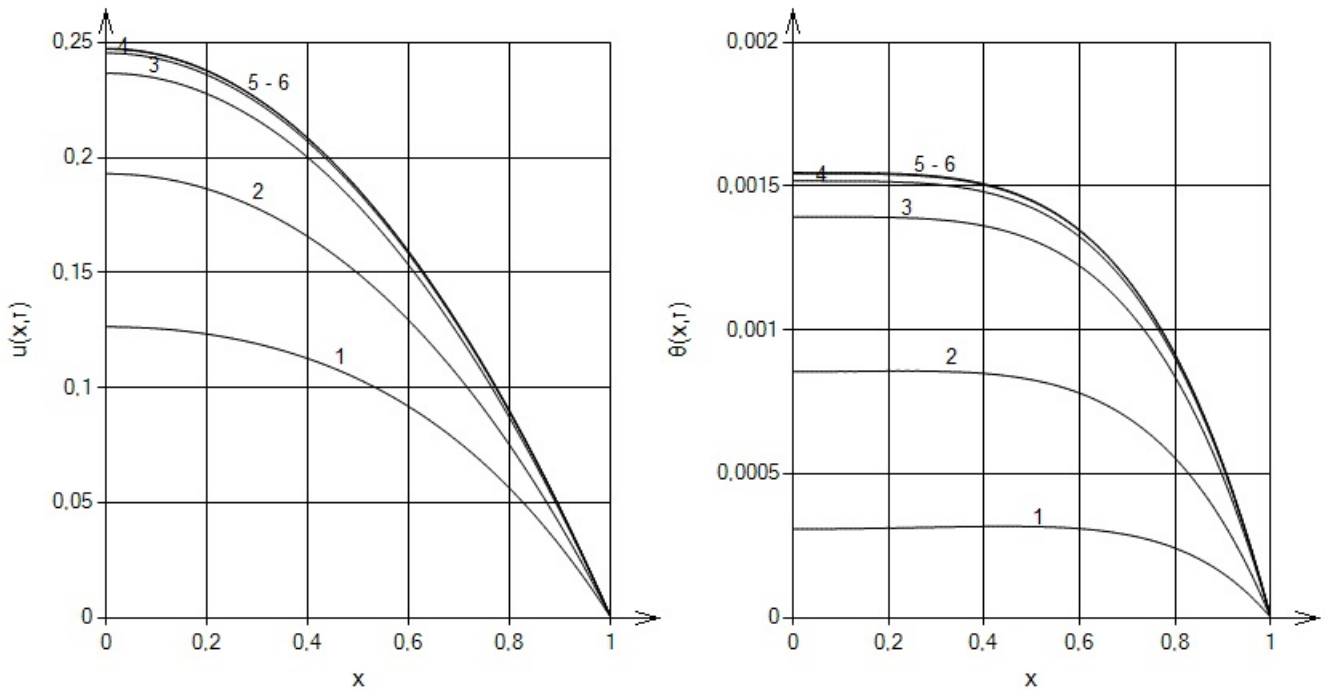


Рисунок 6. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=1.5$), 2(3), 3(6), 4(9), 5(12), 6(13.5); $\varepsilon=10$

Безразмерный параметр δ оказывает прямое влияние на температуру процесса, соответственно изменяются численные значения, что видно по рис. 7-8. При $\delta = 0.001$ (рис. 7) скорость течения устанавливается в момент времени $\tau = 2.1$ (кривая 4), температура выходит на стационар при $\tau = 2.7$. При увеличении δ , скорость и температура быстрее выходят на стационарный режим, при $\tau = 1.5$ и $\tau = 2.1$ соответственно.

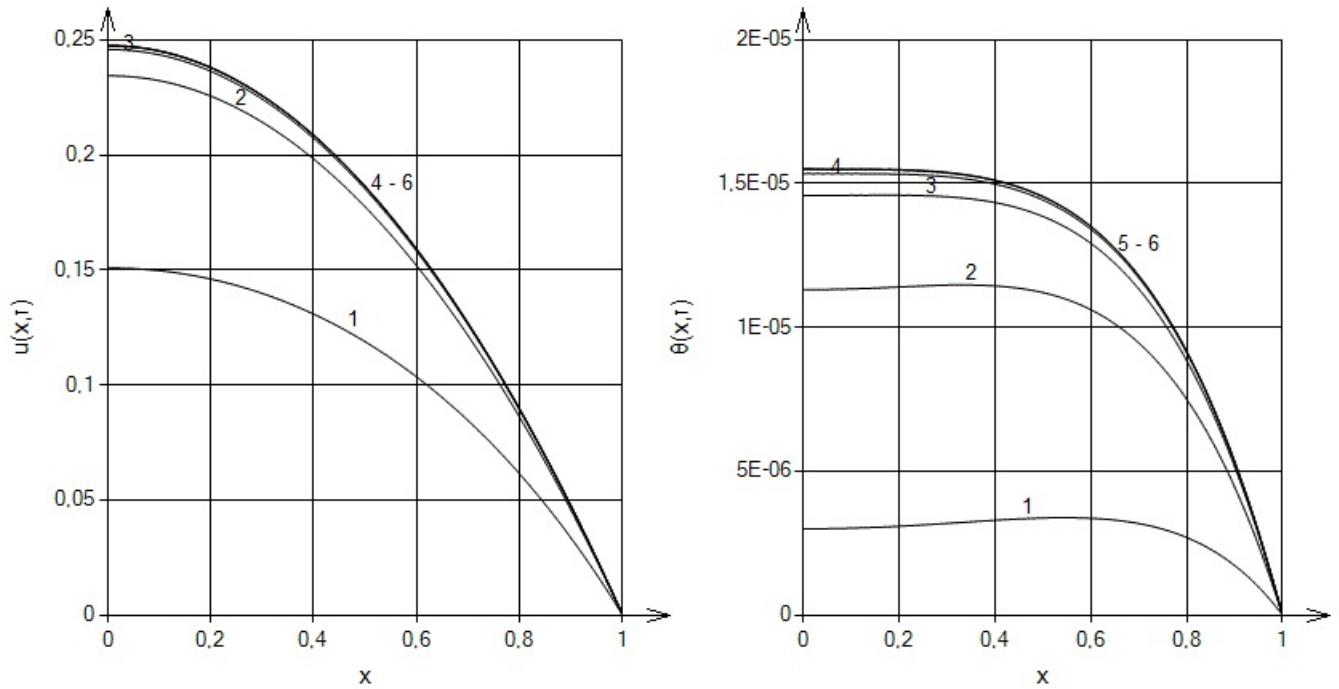


Рисунок 7. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.5), 4(2.1), 5(2.7), 6(3.3); $\delta=0.001$

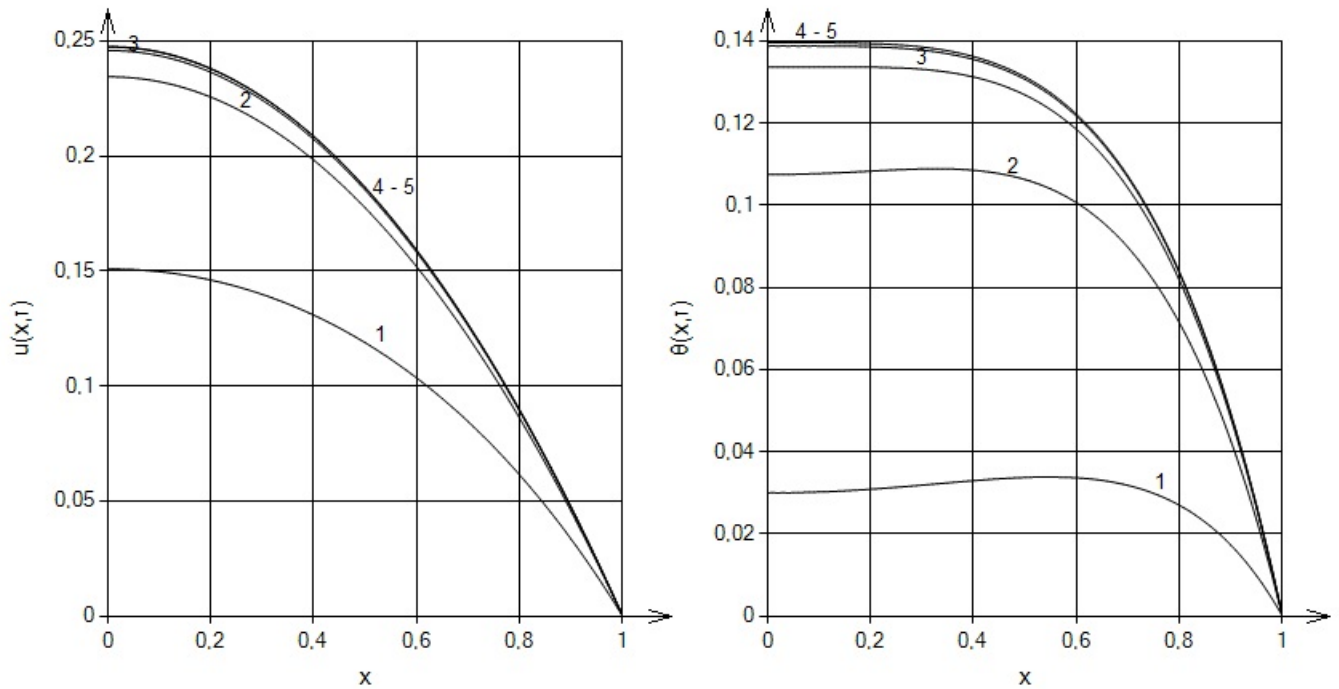


Рисунок 8. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.5), 4(2.1), 5(2.7); $\delta=10$

На рис. 1-23 кривые скорости монотонно убывают, свое максимальное значение достигают на оси симметрии трубы $x = 0$. На стенке трубы, при $x = 1$, скорость и температура равны нулю, тем самым выполняются граничные условия прилипания.

Таким образом, на рис. 1-23 представлены некоторые результаты численных экспериментов.

Заключение

Таким образом, в работе исследована математическая модель неизотермического напорного течения вязкой жидкости. Составлен алгоритм численного расчета, основанный на методе прогонки и программа численного решения, выполненная на языке C#. Проведены численные эксперименты при варьировании параметров задачи.

Результаты работы были представлены на конференциях: 3-я Национальная (Всероссийская) научно-практическая конференция «Математическое моделирование и информационные технологии» (Сыктывкар, 2019); Национальная конференция XXVII годичной сессии Ученого совета (Февральские чтения-2020), посвященной годовщине победы в Великой Отечественной войне (Сыктывкар, 2020) и опубликованы в открытой печати [1], [2], [3].

Список литературы

- [1] **Беляева Н.А., Надуткина А.В.** Неизотермическое напорное течение вязкой жидкости по каналу кругового сечения//Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (7–9 ноября 2019 г., г. Сыктывкар): сборник материалов. Сыктывкар: Издательство СГУ им. Питирима Сорокина. 2019. С. 8.
- [2] **Беляева Н.А., Надуткина А.В.** Неизотермическое течение вязкой жидкости//Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. Вып. 32. 2019. С. 20-30.
- [3] **Надуткина А.В., Беляева Н.А.** Математическое моделирование неизотермического течения вязкой жидкости//Национальная конференция XXVII годичной сессии Ученого совета (Февральские чтения – 2020), посвященной годовщине победы в Великой Отечественной войне: сборник материалов. 2020. Принято к публикации.
- [4] **Беляева Н.А.** Основы гидродинамики в моделях: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2011. 147 с.
- [5] **Беляева Н.А.** Математическое моделирование: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2014. 116 с.
- [6] **Худяев С.И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит. 2003. 272 с.
- [7] **Самарский А.А.** Теория разностных схем: учебное пособие. М.: Наука. 1977. 656 с.

Приложение 1. Графики распределения скорости и температуры течения

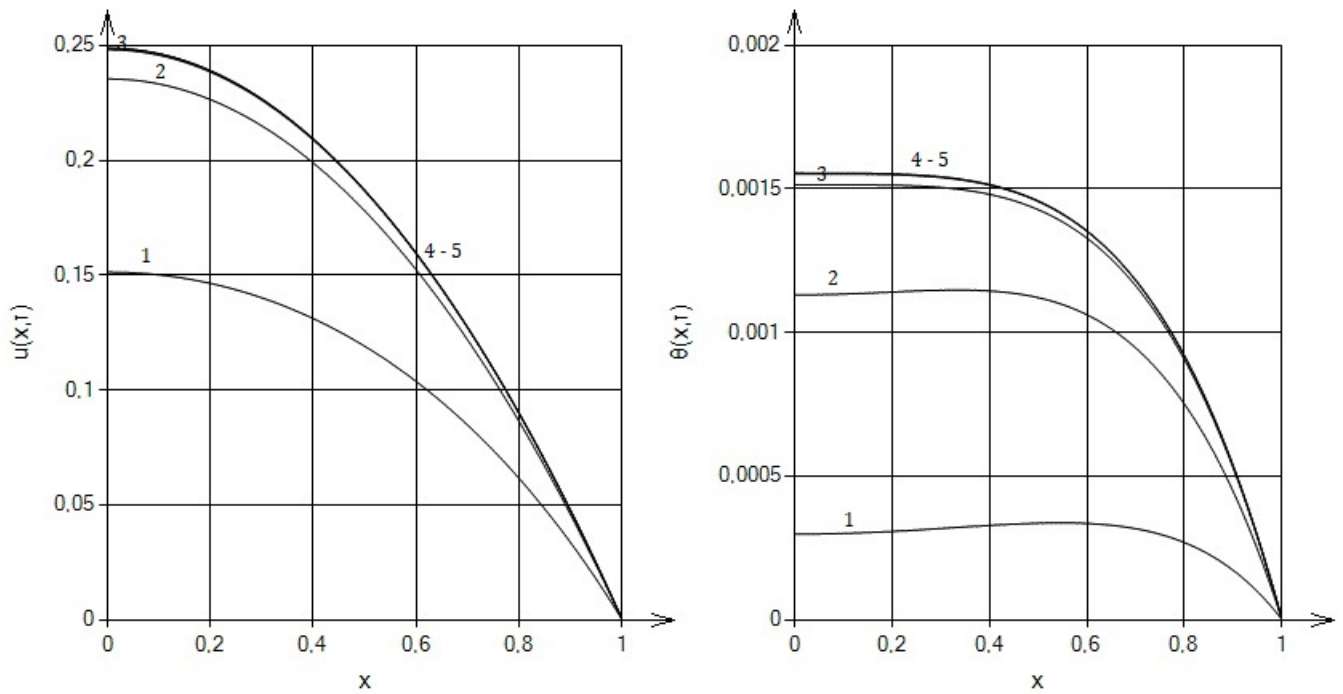


Рисунок 9. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=200$

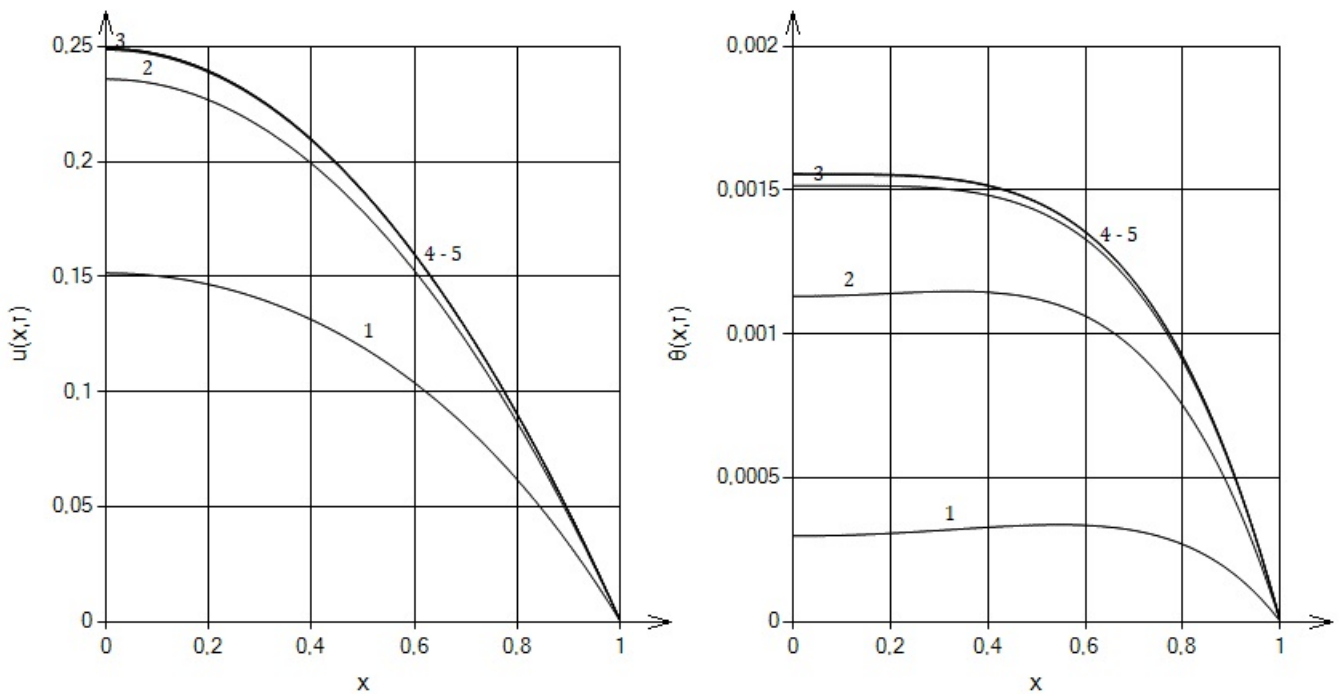


Рисунок 10. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=300$

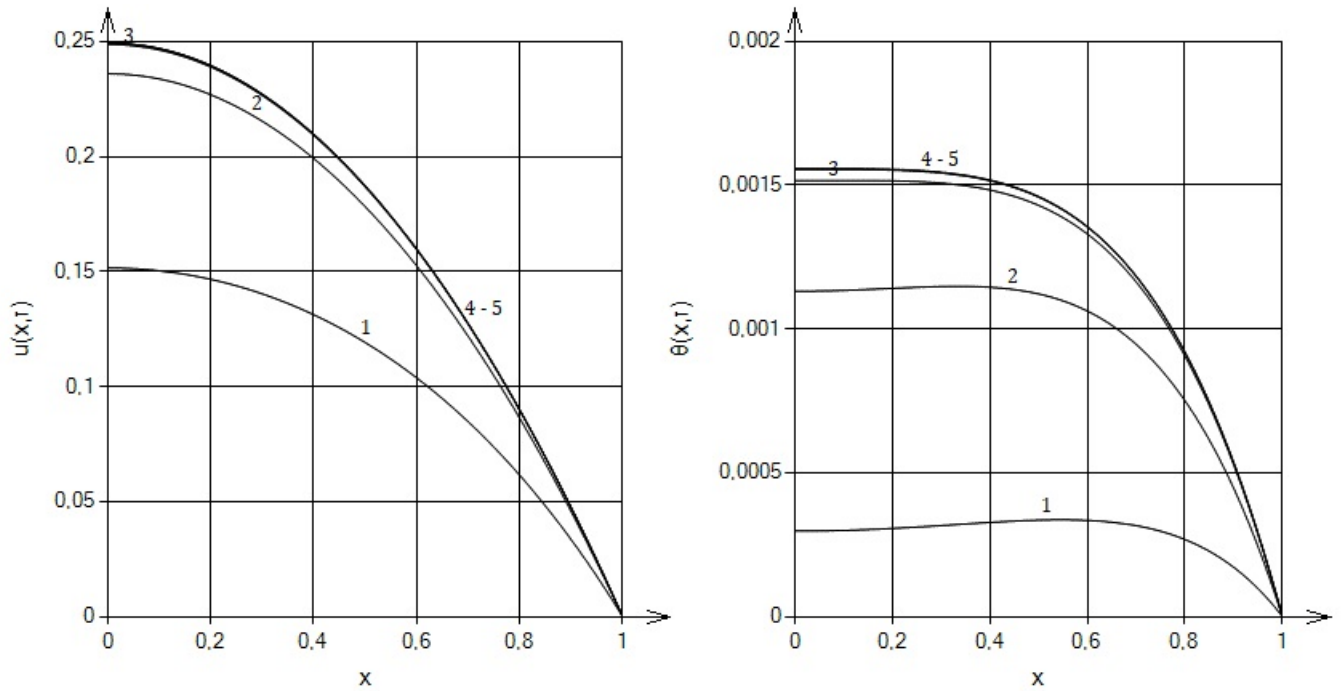


Рисунок 11. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=400$

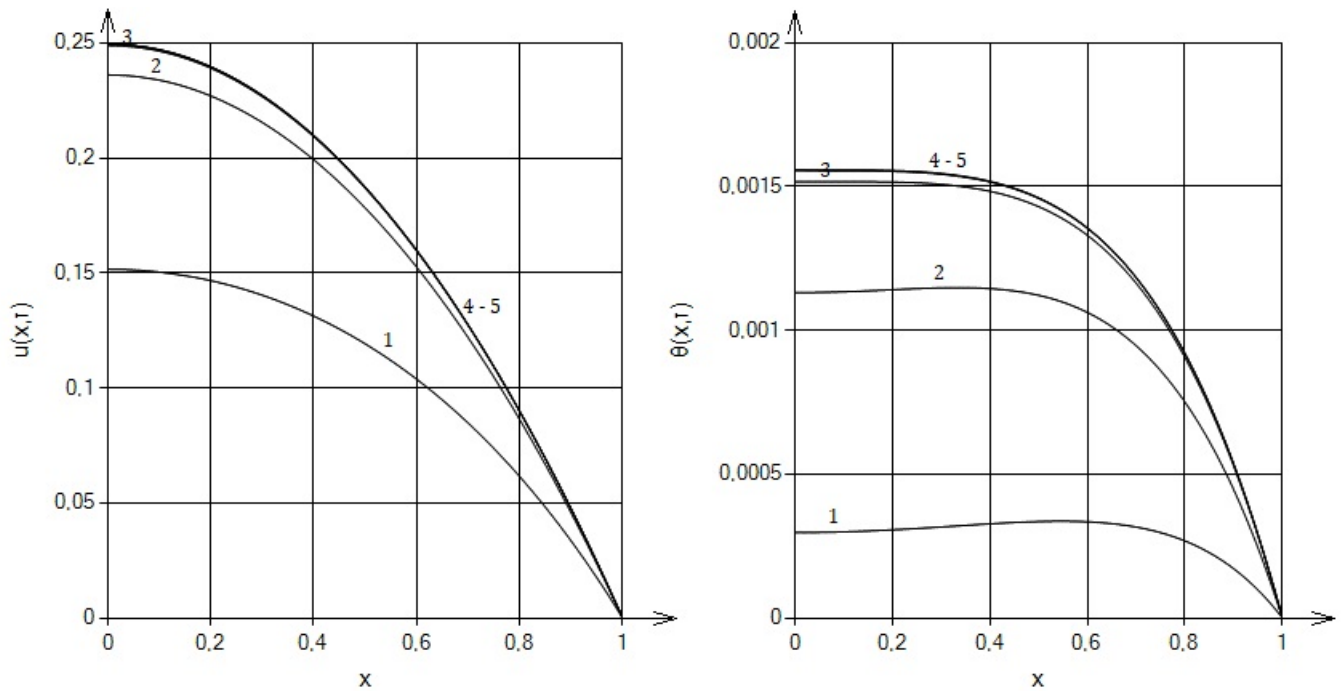


Рисунок 12. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=500$

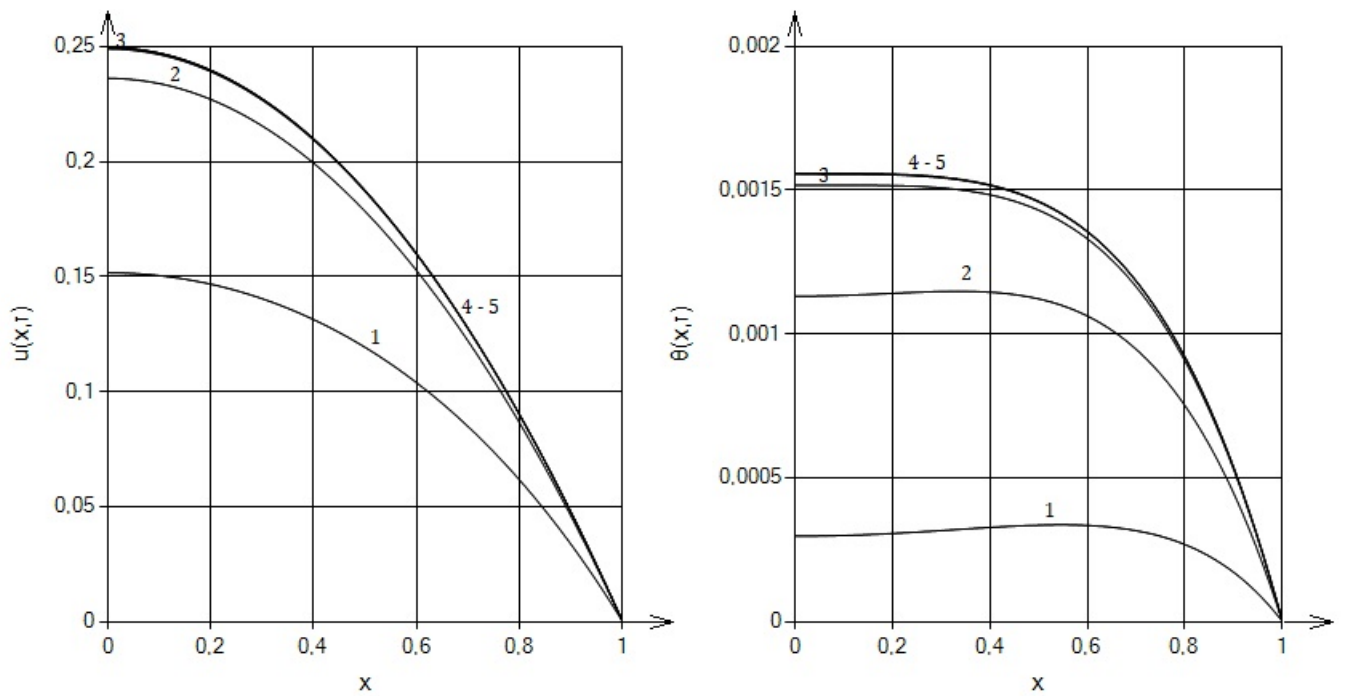


Рисунок 13. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=600$

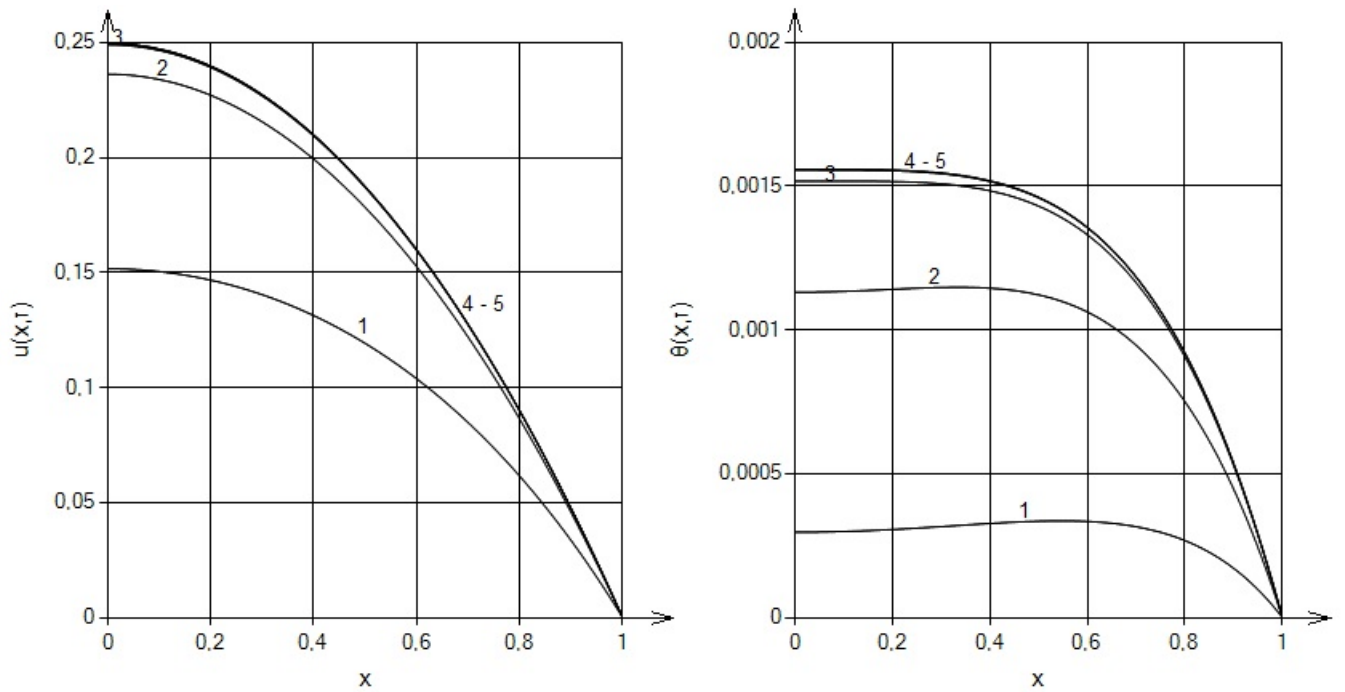


Рисунок 14. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $n=710$

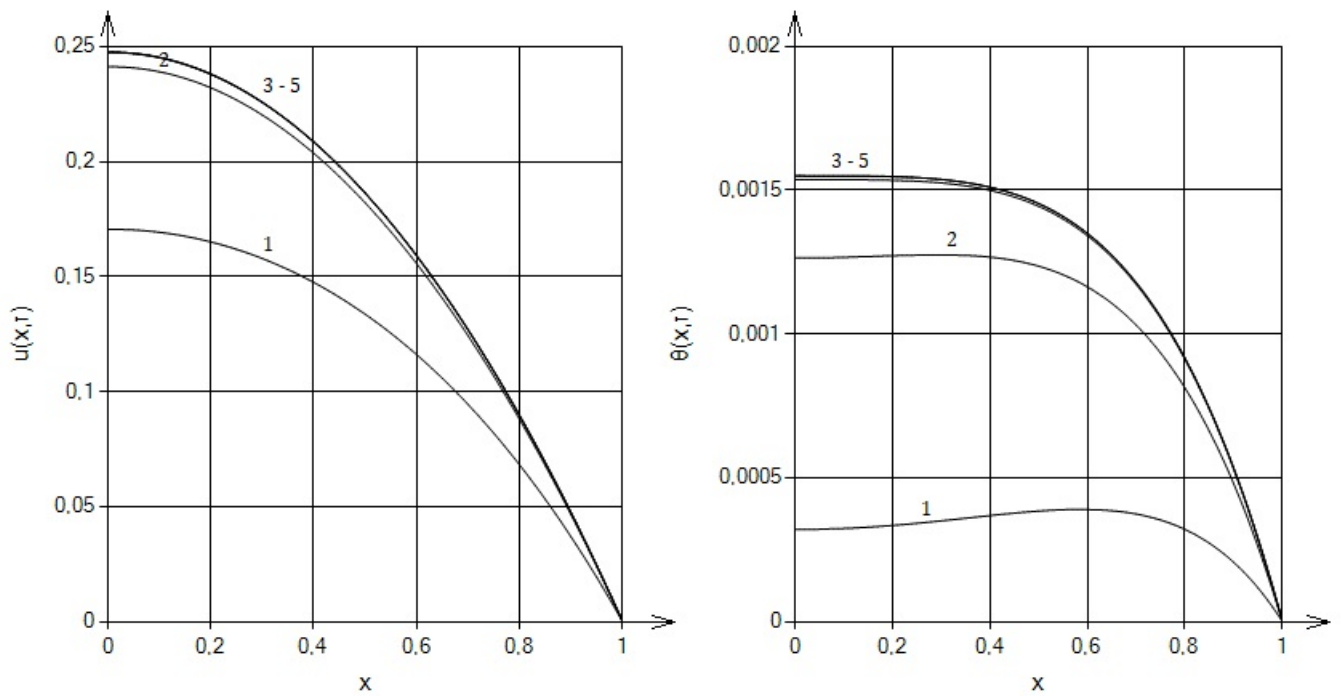


Рисунок 15. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=200$

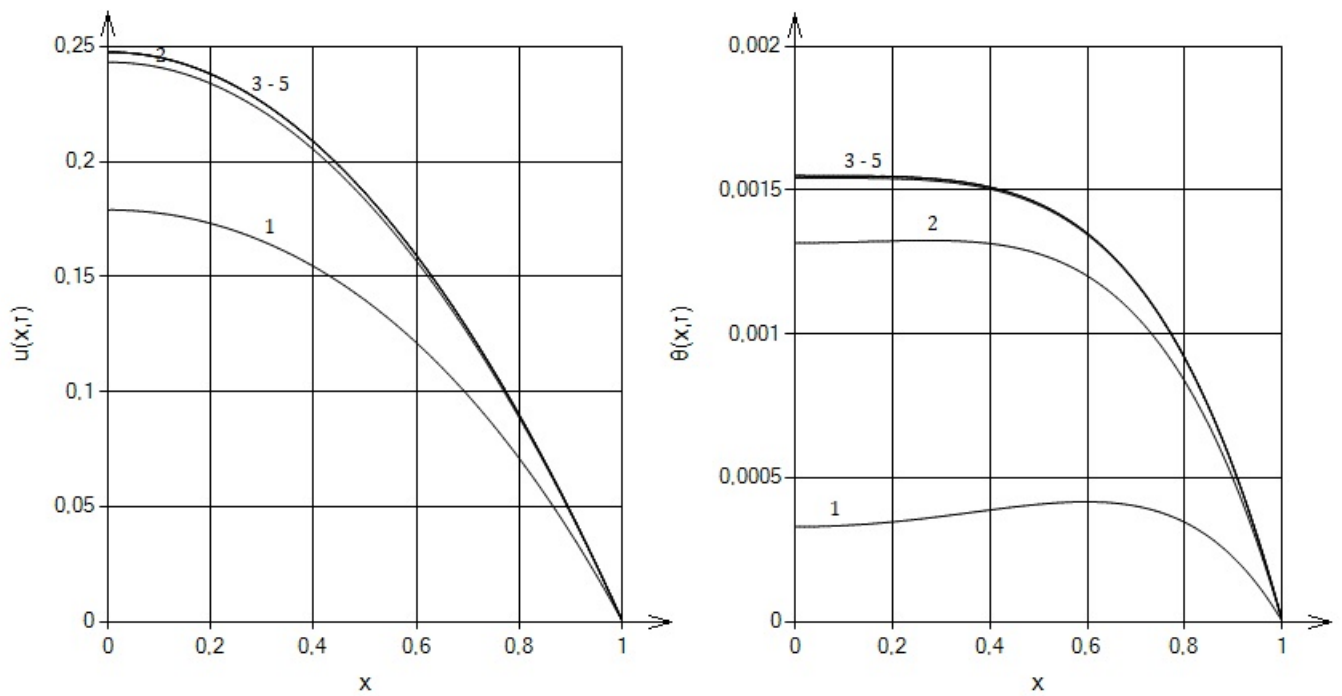


Рисунок 16. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=300$

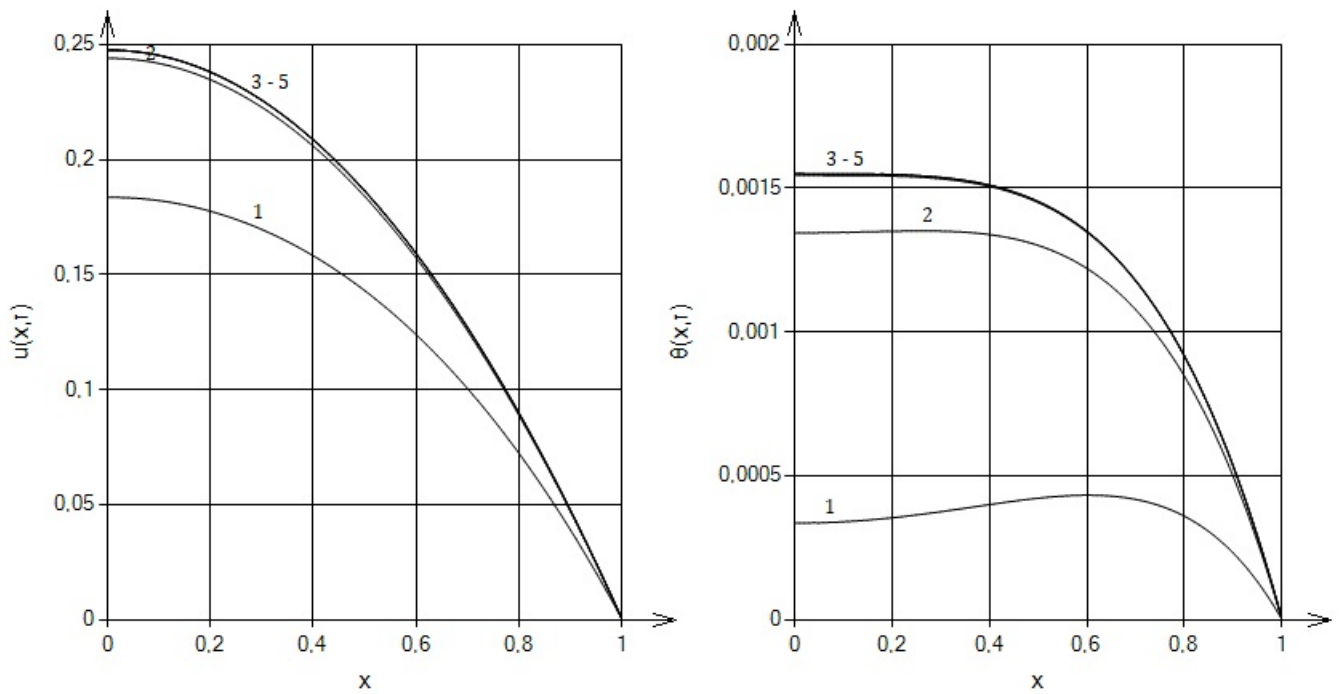


Рисунок 17. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=400$

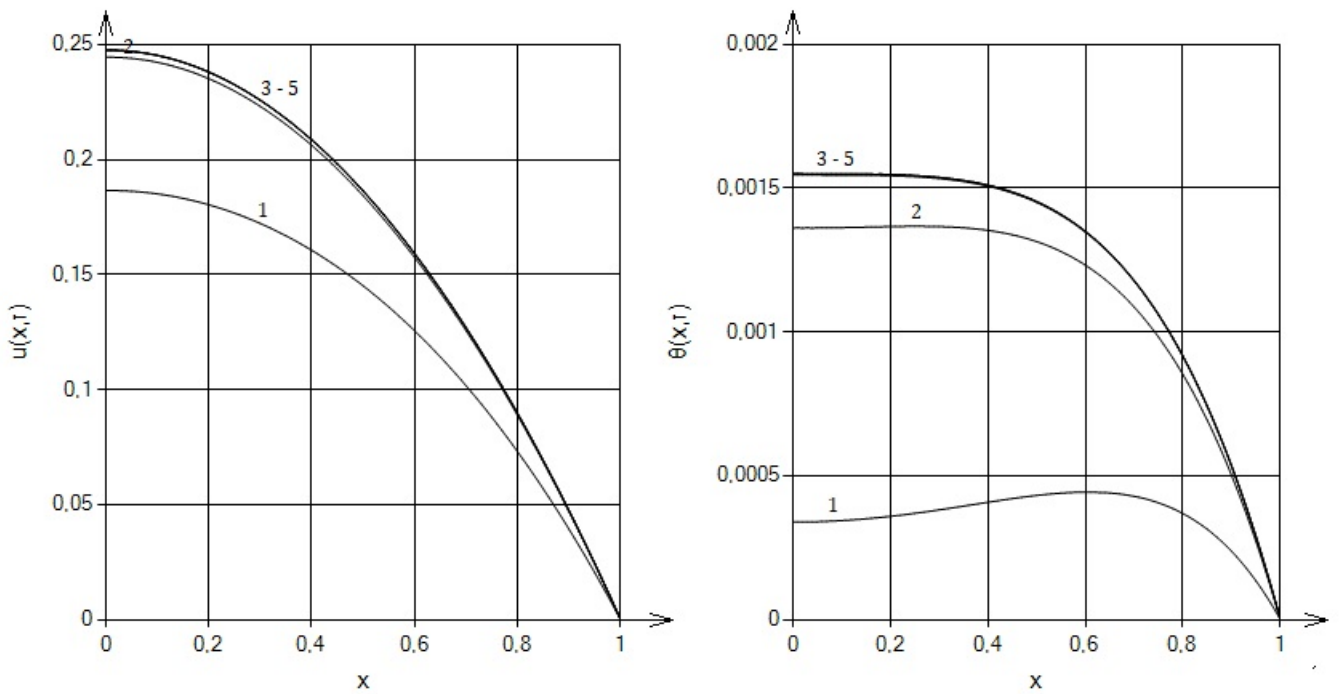


Рисунок 18. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=500$

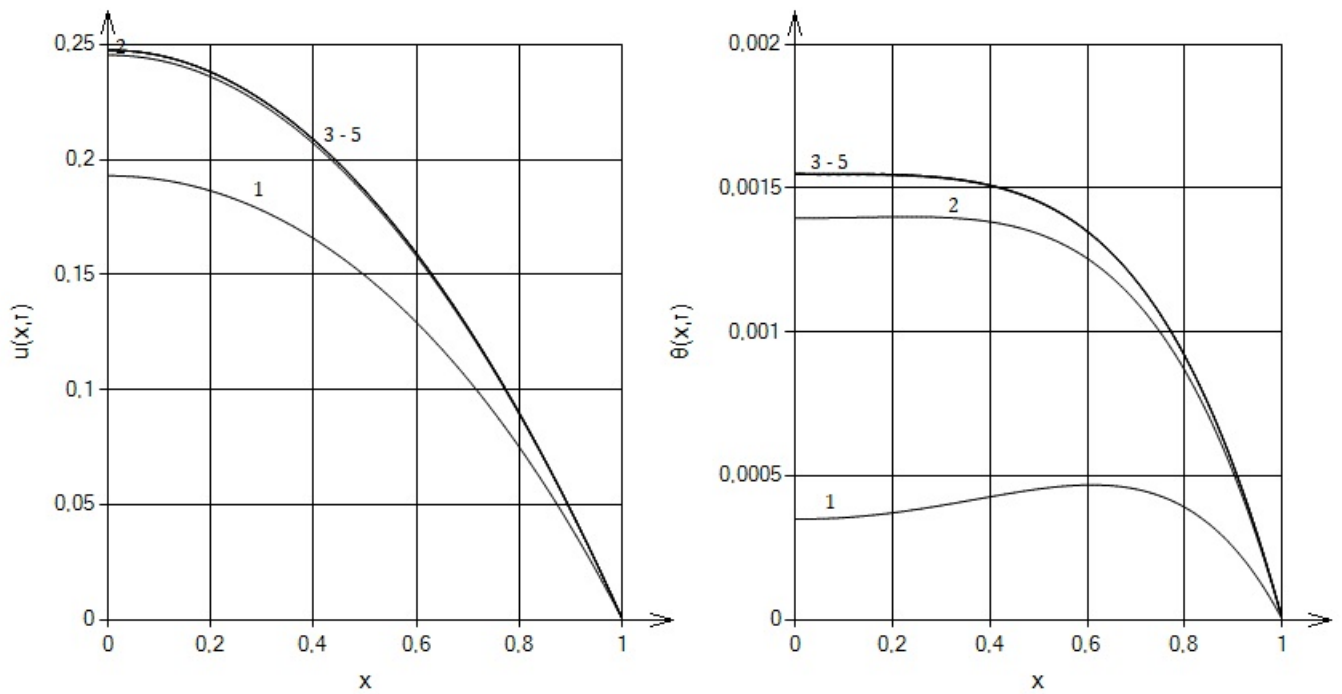


Рисунок 19. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=1000$

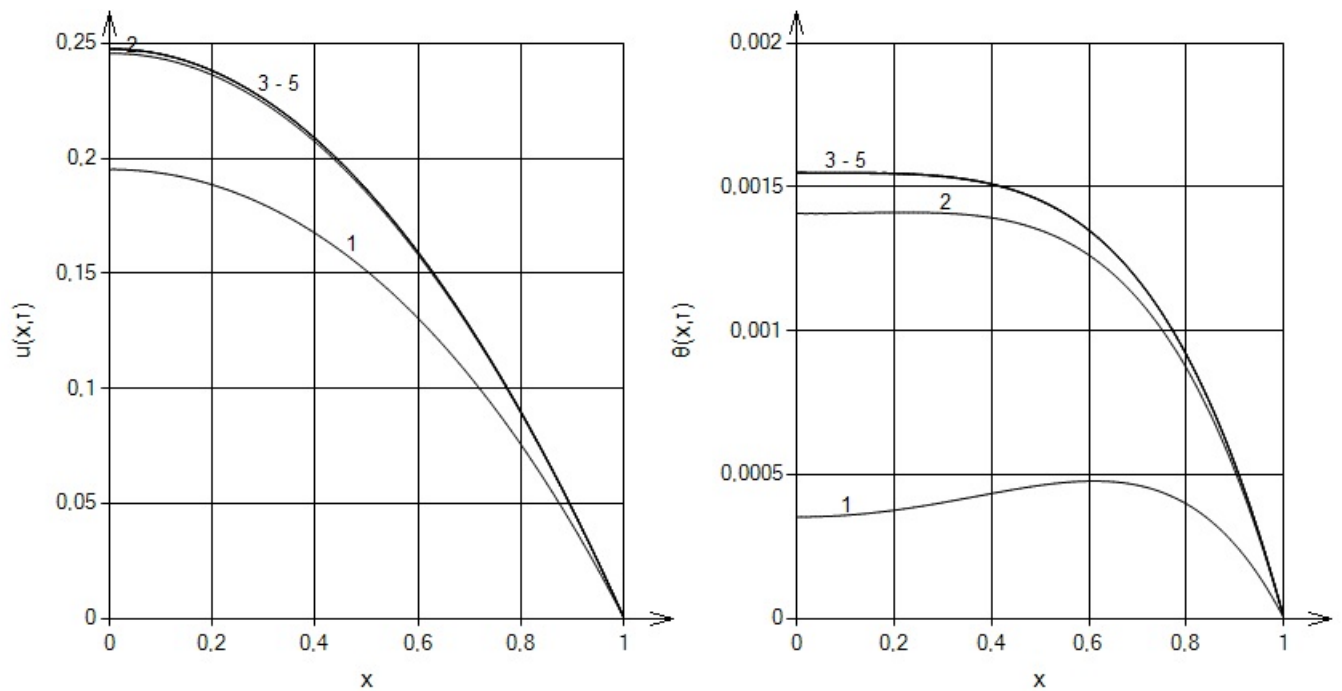


Рисунок 20. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=1500$

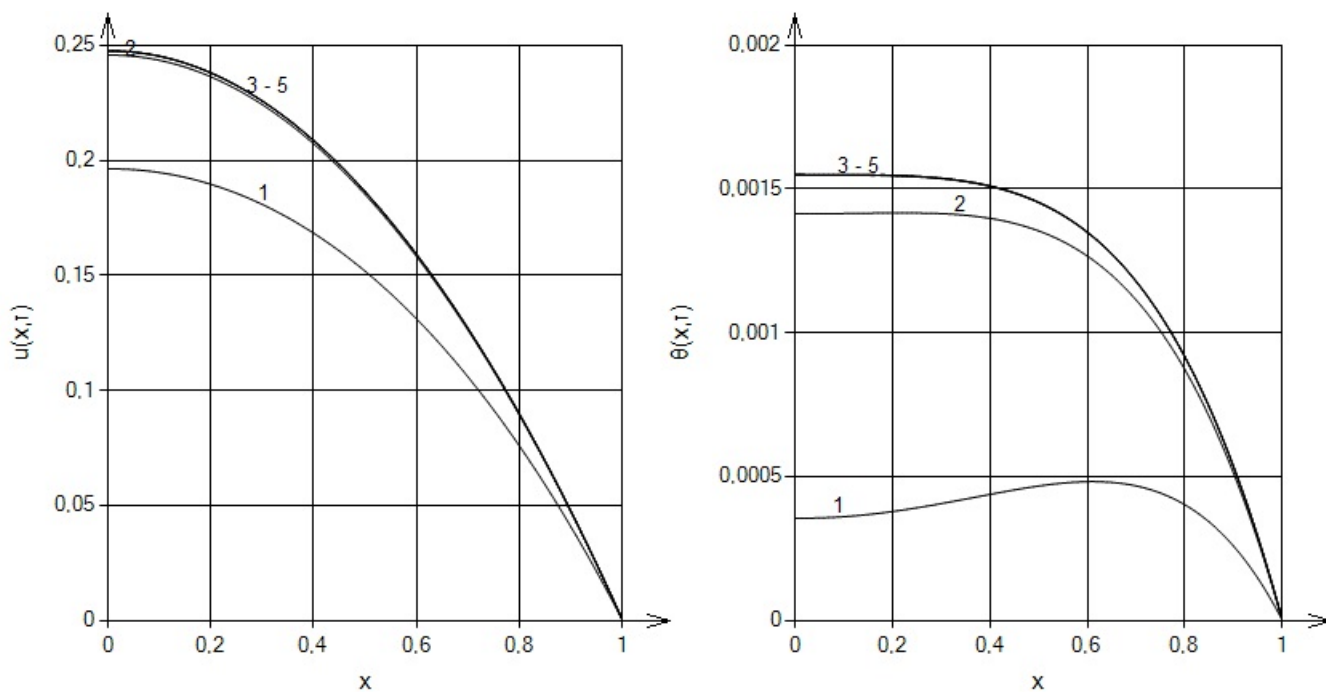


Рисунок 21. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=2000$

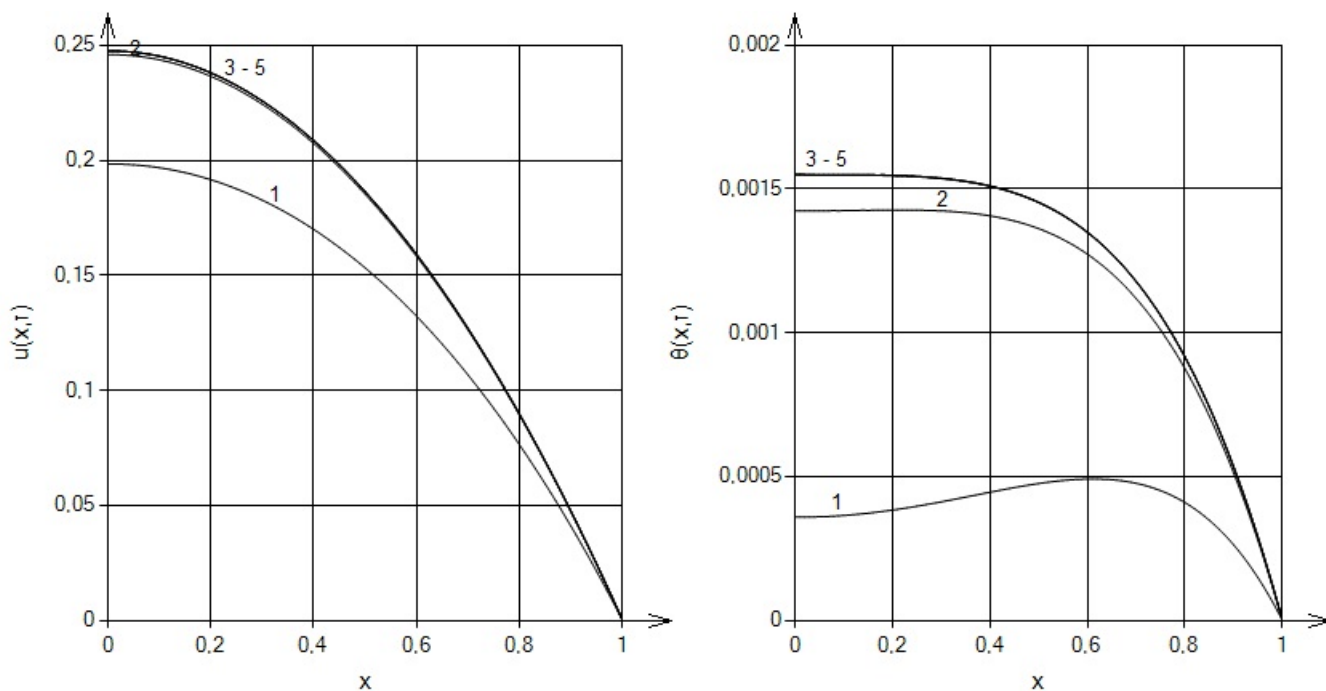


Рисунок 22. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=5000$

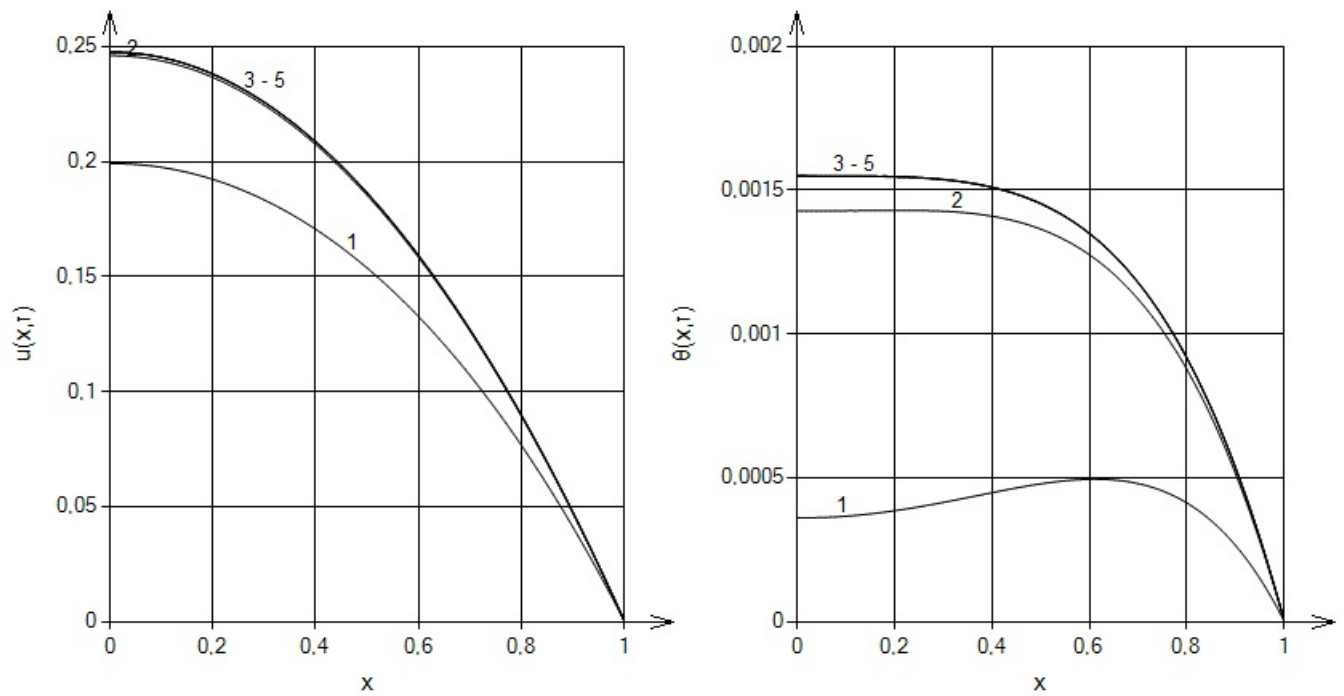


Рисунок 23. Пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$ и температуры $\theta(x, \tau)$: 1($\tau=0.3$), 2(0.9), 3(1.8), 4(2.7), 5(3.6); $m=10000$

Приложение 2. Программа численного алгоритма

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using System.Windows.Forms;

namespace Течение_вязкой_жидкости_по_каналу_кругового_сечения
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        Boolean Линия1, Линия2; // отображать ли графики в виде линий
        int k; // количество кривых для построения
        (зависит от кол-ва введенных j)
        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
        }
        private void Form1_Load(object sender, EventArgs e)
        {
            //добавление подписей к осям графика
            graph1.ChartAreas[0].AxisX.Title = "x"; //ось x у первого графика
            graph1.ChartAreas[0].AxisY.Title = "u(x,\tau)"; //ось y
            graph2.ChartAreas[0].AxisX.Title = "x"; //ось x у второго графика
            graph2.ChartAreas[0].AxisY.Title = "?(x,\tau)"; //ось y
        }

        private void create_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            if (n_x.Text == "" || m_tau.Text == "" || max_Tau.Text == "" ||
                epsilon_p.Text == "" || delta_p.Text == "")
            {
                MessageBox.Show("Есть незаполненные поля!");
                return;
            }

            //считывание введенных данных
            int n = Convert.ToInt32(n_x.Text);
            int m = Convert.ToInt32(m_tau.Text);
            float Tau = Convert.ToSingle(max_Tau.Text);
            float epsilon = Convert.ToSingle(epsilon_p.Text);
            float delta = Convert.ToSingle(delta_p.Text);
            string moment = Convert.ToString(moment_tau.Text);
            double deltax, deltatau;
        }
    }
}
```

```
//объявление массивов
double[,] u = new double[n + 1, m + 1];
double[,] theta = new double[n + 1, m + 1];
double[] E = new double[n + 1];
double[,] F = new double[n + 1, m + 1];
double[] G = new double[n + 1];
double[,] H = new double[n + 1, m + 1];
double[] x = new double[n + 1];
double[] tau = new double[m + 1];

if ((n <= 0) || (m <= 0))
{
    MessageBox.Show("Шаг должен быть положительным числом!");
    return;
}
if (Tau <= 0)
{
    MessageBox.Show("Максимальное t должно быть
положительным числом!");
    return;
}

deltax = 1.0 / n; //Шаг по оси 'x'
deltatau = Tau / m; //Шаг по оси '\tau'

//Обнуление массивов
for (int i = 0; i < n + 1; i++)
{
    for (int j = 0; j < m + 1; j++)
    {
        u[i, j] = 0;
        theta[i, j] = 0;
    }
}

//Начальные условия
for (int i = 0; i < n + 1; i++)
{
    u[i,0] = 0;
    theta[i,0] = 0;
}
//Граничные условия
for (int j = 0; j < m + 1; j++)
{
    u[n, j] = 0;
    theta[n, j] = 0;
}
//из граничных условий следует
E[n] = 0; G[n] = 0;
```

```

for (int j = 0; j < m + 1; j++)
{
    F[n, j] = 0;
    H[n, j] = 0;
}

for (int i = 0; i < n + 1; i++)
{
    x[i] = 0 + i * deltax;
}

for (int j = 0; j < m + 1; j++)
{
    tau[j] = j * deltatau;
}

//вычисление прогоночных коэффициентов
for (int j = 1; j < m+1; j++)
{
    for (int i = n-1 ; i > 0; i--)
    {
        E[i] = (x[i] * deltatau * Math.Exp(-theta[i, j - 1])) /
(x[i] * Math.Pow(deltax, 2) * epsilon + deltatau *
Math.Exp(-theta[ i, j - 1]) * (deltax - x[i] * theta[i + 1, j - 1] + x[i] *
theta[i, j - 1] + 2 * x[i] - E[i + 1] * (deltax - x[i] * theta[i + 1, j - 1] +
x[i] * theta[i, j - 1] + x[i]))));
        F[i, j] = (F[i + 1, j] * deltatau *
Math.Exp(-theta[i, j - 1]) * (deltax - x[i] * theta[i + 1, j - 1] + x[i] *
theta[i, j - 1] + x[i]) + deltatau * x[i] * Math.Pow(deltax, 2) + u[i, j - 1] *
x[i] * Math.Pow(deltax, 2) * epsilon) / (x[i] * Math.Pow(deltax, 2) * epsilon +
deltatau * Math.Exp(-theta[i, j - 1]) * (deltax - x[i] * theta[i + 1, j - 1] +
x[i] * theta[i, j - 1] + 2 * x[i] - E[i + 1] * (deltax - x[i] *
theta[i + 1, j - 1] + x[i] * theta[i, j - 1] + x[i]))));
        u[0, j] = F[1, j] / (1 - E[1]); //из граничных условий
    }
    //находим значения целевых функций
    for (int i = 1; i < n + 1; i++)
    {
        u[i, j] = E[i] * u[i - 1, j] + F[i, j];
    }
}

for (int j = 1; j < m + 1; j++)
{
    for (int i = n - 1; i > 0; i--)
    {
        G[i] = (deltatau * x[i]) / (x[i] * Math.Pow(deltax, 2) +
deltatau * (deltax + 2 * x[i] - G[i + 1] * (deltax + x[i])));
        H[i, j] = (H[i + 1, j] * deltatau * (deltax + x[i]) +

```

```

delta * deltatau * x[i] * Math.Exp(-theta[i, j - 1]) *
(Math.Pow(u[i + 1, j], 2) - 2 * u[i + 1, j] * u[i, j] + Math.Pow(u[i, j], 2)) +
x[i] * Math.Pow(deltax, 2) * theta[i, j - 1]) / (x[i] * Math.Pow(deltax, 2) +
deltatau * (deltax + 2 * x[i] - G[i + 1] * (deltax + x[i])));
        theta[0, j] = H[1, j] / (1 - G[1]); //из граничных условий
    }
    for (int i = 1; i < n + 1; i++)
    {
        theta[i, j] = G[i] * theta[i - 1, j] + H[i, j];
    }
}
//массив, копирующий введенные символы в массив знаков
char[] M = moment.ToCharArray();
//объявление массива значений для временных слоев
string[] vr = new string[m + 1];
//объявление массива, который будет сравнивать введенные знаки
string[] sravnenie = new string[m + 1];
k = 0;
for (int i = 0; i < M.Length; i++)
{
    if (M[i] == ' ')
    {
        continue;
    }
    if (M[i] == ',')
    {
        if (i == M.Length - 1)
            continue;
        k++;
        continue;
    }
    sravnenie[k] += M[i];
}
//возвращает различающиеся элементы последовательности и создает массив
vr = sravnenie.Distinct().ToArray();
k = vr.Length - 2;

for (int i = 0; i <= k; i++)
{
    if (Convert.ToInt32(vr[i]) <= m)
    {
        continue;
    }
    else
    {
        MessageBox.Show("Момент времени выходит за количество
точек разбиения!");
        return;
    }
}

```

```
    }

    graph1.Series.Clear(); //очистка диаграммы
    graph2.Series.Clear(); //очистка диаграммы

    for (int i = 0; i <= k; i++) //подписи для серии
    {
        string s1 = "(?=";
        tau[i] = Math.Round((Convert.ToDouble(vr[i]) * deltatau),2);
        string s2 = ")";
        string s3 = (i + 1) + s1 + tau[i] + s2;
        if (graph1.Series.IsUniqueName(s3))
        {
            graph1.Series.Add(s3); // добавление серии
            graph1.Series[i].Name = s3; // задание имени i-го графика
            graph1.Series[i].Points.Clear();
        }
        if (graph2.Series.IsUniqueName(s3))
        {
            graph2.Series.Add(s3); // добавление серии
            graph2.Series[i].Name = s3; // задание имени i-го графика
            graph2.Series[i].Points.Clear();
        }
        graph1.Series[i].ChartType = System.Windows.Forms.
DataVisualization.Charting.SeriesChartType.Spline; //тип диаграммы-сплайн
        graph1.Series[i].Points.Clear();
        graph2.Series[i].ChartType = System.Windows.Forms.
DataVisualization.Charting.SeriesChartType.Spline; //тип диаграммы-сплайн
        graph2.Series[i].Points.Clear();
    }

    for (int i = 0; i < n + 1; i++)
    {
        for (int j = 0; j <= k; j++)
        {
            graph1.Series[j].Points.AddXY(Math.Round(x[i],6),
u[i, Convert.ToInt32(vr[j])]);
            graph2.Series[j].Points.AddXY(Math.Round(x[i],6),
theta[i, Convert.ToInt32(vr[j])]);
        }
    }
    graph1.ChartAreas[0].AxisX.Minimum = 0;
    graph2.ChartAreas[0].AxisX.Minimum = 0;
}

private void graph1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Линия1 = !Линия1;
    if (Линия1 == true)
```



```
        {
            for (int i = 0; i <= k; i++)
            {
                graph1.Series[i]["DrawingStyle"] = "Line";
            }
        }
        else
        {
            graph1.Series[0]["DrawingStyle"] = "Default";
        }
    }

private void graph2_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Линия2 = !Линия2;
    if (Линия2 == true)
    {
        for (int i = 0; i <= k; i++)
        {
            graph2.Series[i]["DrawingStyle"] = "Line";
        }
    }
    else
    {
        graph2.Series[0]["DrawingStyle"] = "Default";
    }
}
}
```