

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“Национальный исследовательский университет ИТМО”

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ
ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СРЕД С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ТЕРАГЕРЦОВОЙ ФОТОНИКИ**

Автор Песняков Владислав Викторович _____
(Подпись)

Направление подготовки (специальность) 12.03.03
Фотоника и оптоинформатика

Квалификация бакалавр

Руководитель ВКР Возианова А. В., к.ф.-м.н. _____
(Подпись)

Санкт-Петербург, 2020 г.

Обучающийся _____ Песняков Владислав Викторович _____

Группа V3400 _____ Факультет/институт/кластер _____ Фотоники и оптоинформатики _____

Направленность (профиль), специализация _____ Оптические и квантовые технологии передачи, записи и обработки информации _____

ВКР принята “ _____ ” _____ 20 _____ г.

Оригинальность ВКР _____ %

ВКР выполнена с оценкой _____

Дата защиты “ _____ ” _____ 20 _____ г.

Секретарь ГЭК _____ (ФИО) _____ (подпись)

Листов хранения _____

Демонстрационных материалов/Чертежей хранения _____

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО"

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОП

(Фамилия, И.О.)

(подпись)

« ____ » « ____ » 20__ г.

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ

Обучающийся _____ Песняков Владислав Викторович _____

(ФИО полностью)

Группа V3400 Факультет/институт/кластер Фотоники и оптоинформатики

Квалификация бакалавр

Направление подготовки 12.03.03 Фотоника и оптоинформатики

(код, название направления подготовки)

Направленность (профиль) образовательной программы Оптические и квантовые технологии передачи, записи и обработки информации

Специализация _____

Тема ВКР Численно-аналитическое моделирование профиля показателя преломления сред с помощью конформных отображений для терагерцовой фотоники

Руководитель Возианова Анна Викторовна, Университет ИТМО, доцент

(квалификационная категория ординарный доцент), к.ф.-м.н.

(ФИО полностью, место работы, должность, ученая степень, ученое звание)

2 Срок сдачи студентом законченной работы до « 5 » « июня » 2020 г.

3 Техническое задание и исходные данные к работе

1. Обзор литературы по теме исследования

2. Получение аналитических выражений действительной и мнимой части исследуемых конформных отображений

2.1 Графическая визуализация полученных зависимостей для действительной и мнимой части конформных отображений в программном пакете Maple

3. Получение аналитических выражений для показателя преломления, соответствующего рассматриваемым конформным отображениям, с помощью трансформационной оптики

3.1 Написание программы для визуализации распределения (2D) показателя преломления на основе полученных аналитических зависимостей в программном пакете Matlab

4. Численное моделирование трассировки лучей и распределения электромагнитного поля в средах с полученными профилями показателя преломления в программном пакете Comsol Multiphysics

5. Анализ полученных результатов и исследование влияния расположения источника в средах с полученными профилями показателя преломления

4 Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)

1. Обзор литературы
2. Описание теории конформных отображений в трансформационной оптике
3. Теоретическое описание полученных результатов
4. Выводы

5 Перечень графического материала (с указанием обязательного материала)

1. Распределение профилей показателя преломления, соответствующие рассмотренным конформным отображениям
2. Трассировка лучей и распределения поля электромагнитной волны в полученных средах
3. Виртуальные и физические пространства для рассматриваемых конформных отображений

6 Исходные материалы и пособия

1. Xu, L., & Chen, H. (2015). Conformal transformation optics. *Nature Photonics*, 9(1), 15.
2. Huanyang Chen et al 2013 *New J. Phys.* 15 093034
3. Lu, C., & Mei, Z. L. (2015). Multi-functional lens based on conformal mapping. *Optics express*, 23(15), 19901-19910.
4. Leonhardt, U., & Philbin, T. (2010). *Geometry and light: the science of invisibility*. Courier Corporation.

7 Дата выдачи задания « ____ » « _____ » 20 ____ г.

Руководитель ВКР _____
(подпись)

Задание принял к исполнению _____ « ____ » « _____ » 20 ____ г.
(подпись)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО"

АННОТАЦИЯ

ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Обучающийся Песняков Владислав Викторович

Наименование темы ВКР: Численно-аналитическое моделирование профиля показателя преломления сред с помощью конформных отображений для терагерцовой фотоники

Наименование организации, где выполнена ВКР Университет ИТМО

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1 Цель исследования: Исследование взаимодействия электромагнитного излучения со средами, профиль показателя преломления которых был получен с помощью различных конформных отображений

2 Задачи, решаемые в ВКР Анализ различных конформных отображений и их применения в оптике и фотонике. Получение аналитических выражений для показателя преломления, соответствующего рассматриваемым конформным отображениям, с помощью трансформационной оптики. Исследование зависимости положения источника в средах, профиль показателя преломления которых был получен с помощью рассматриваемых конформных отображений, и описание эффектов манипуляции излучением, связанные с ним.

3 Число источников, использованных при составлении обзора 31

4 Полное число источников, использованных в работе 37

5 В том числе источников по годам

Отечественных			Иностраных		
Последние 5 лет	От 5 до 10 лет	Более 10 лет	Последние 5 лет	От 5 до 10 лет	Более 10 лет
1	0	2	16	14	4

6 Использование информационных ресурсов Internet нет
(Да, нет, число ссылок в списке литературы)

7 Использование современных пакетов компьютерных программ и технологий (Указать, какие именно, и в каком разделе работы)

Пакеты компьютерных программ и технологий	Раздел работы
MS Word	1-3
Power Point	2
Matlab	3
Comsol Multiphysics	3
Maple	3

8 Краткая характеристика полученных результатов В средах, профиль показателя преломления которых соответствует рассматриваемым конформным отображениям, были получены эффекты преобразования сферического волнового фронта в плоский, и наоборот, из

плоского в сферический. Также был получен эффект иллюзии плоского источника, расположенного в определённом положении в изучаемой среде. Были получены общие правила и закономерности, не озвученные в ранее опубликованных по теме статьях, но которые крайне важны для построения обобщенной теории использования конформных отображений в трансформационной оптике.

9 Полученные гранты, при выполнении работы нет
(Название гранта)

10 Наличие публикаций и выступлений на конференциях по теме выпускной работы да
(Да, нет)

а) публикации по теме выпускной работы:

1 V Pesnyakov, A Vozianova, M. Khodzitsky Rotator for electromagnetic emission based on conformal mapping // Journal of Physics: Conference Series – 2020 (принята к печати)

2 V Pesnyakov, A Vozianova, M. Khodzitsky Rotator for electromagnetic emission based on conformal mapping // Proceedings on 7th International School and Conference "Saint-Petersburg OPEN 2020" on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures

3 Песняков В.В., Возианова А.В. Численно-аналитическое моделирование профиля показателя преломления сред с помощью конформных отображений для терагерцовой фотоники // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых – СПб: Университет ИТМО, 2020. – 2020 (электронное издание)

4 Песняков В.В., Возианова А.В. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СРЕДЫ, ПОЛУЧЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $w=\sin(z)$ // Сборник научных трудов IX Международной конференции по фотонике и информационной оптике

5 Песняков В.В., Возианова А.В. Конформные отображения для нестационарных задач трансформационной оптики // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых – СПб: Университет ИТМО, 2019. – 2019

б) выступления на конференциях по теме выпускной работы:

1 V Pesnyakov, A Vozianova, M. Khodzitsky Rotator for electromagnetic emission based on conformal mapping // 7th International School and Conference "Saint-Petersburg OPEN 2020" on Optoelectronics, Photonics, Engineering and Nanostructures

2 Песняков В.В., Возианова А.В. Численно-аналитическое моделирование профиля показателя преломления сред с помощью конформных отображений для терагерцовой фотоники // Конгресс молодых ученых – 2020 (Университет ИТМО)

3 Песняков В.В., Возианова А.В. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ СРЕДЫ, ПОЛУЧЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $w=\sin(z)$ // IX Международная конференция по фотонике и информационной оптике 2020 (МИФИ)

4 Песняков В.В., Возианова А.В. Конформные отображения для нестационарных задач трансформационной оптики // Конгресса молодых ученых – 2019 (Университет ИТМО)

Обучающийся Песняков В.В. _____
(ФИО) (подпись)

Руководитель ВКР Возианова А.В. _____
(ФИО) (подпись)

“ _____ ” _____ 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	10
ГЛАВА 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	12
1.1 Введение	12
1.2 Конформные отображения	13
1.3 Преобразование Жуковского	14
1.4 Логарифмическое конформное отображение	18
1.5 Конформное отображение вида $w = z^\alpha$	21
1.6 Экспериментальная реализация сред	24
1.7 Выводы к главе 1	25
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТРАНСФОРМАЦИОННОЙ ОПТИКЕ	26
2.1 Математический аппарат перехода между двумя пространствами	26
2.2 Конформные отображения	29
2.3 Выводы к главе 2	32
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ РАССМАТРИВАЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	33
3.1 Введение	33
3.2 Конформное отображение Жуковского	35
3.3 Конформное отображение $w(z) = 1/z$	42
3.4 Конформное отображение $w(z) = z^2$	46
3.5 Конформное отображение $w(z) = \sin z$	51
3.6 Конформное отображение $w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + Arch z)$	56
3.7 Выводы к главе 3	59

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	61
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	62

ВВЕДЕНИЕ

Принцип Ферма, известный уже несколько столетий, гласит, что свет распространяется между двумя точками пространства по наименьшему оптическому пути. Данным законом объясняются законы преломления и отражения. В наше время, с развитием технологии получения градиентных профилей показателя преломления данный закон стали рассматривать с другой точки зрения. Варьируя показатель преломления в среде определённым образом, можно контролировать направление его распространения самым невероятным образом.

Математически получить профили, рассчитанные под конкретную задачу, помогает трансформационная оптика. Но наиболее перспективным методом оказался подраздел трансформационной оптики, использующий конформные отображения. Оказалось, что в отличие от классического подхода трансформационной оптики, в котором получаются анизотропные параметры среды (диэлектрическая ϵ и магнитная μ проницаемости), в результате расчётов с помощью конформных отображений получается изотропный профиль показателя преломления $n(x,y)$. Таким образом, полученные среды более реализуемы и, как следствие, развитие конформных отображений в оптике является перспективным направлением исследований.

Целью данной работы является исследование свойств сред, профиль показателя преломления которых был получен с помощью различных конформных отображений.

Задачи, решаемые в работе:

1. Получить аналитическое выражение профиля показателя преломления, соответствующего конформным отображениям
2. Написать программу в программном пакете Matlab, демонстрирующую визуальное распределение полученного профиля показателя преломления

3. Получить аналитические зависимости для действительной и мнимой части каждого исследуемого конформного отображения и изобразить их графически
4. Провести численный анализ взаимодействия полученного профиля показателя преломления с электромагнитным излучением методом конечных элементов в программном пакете Comsol Multiphysics, получить трассировку лучей и распределение электрического поля
5. Провести сравнительный анализ графиков полученных аналитических выражений для действительной и мнимой части конформных отображений и полученной трассировки лучей в программном пакете Comsol Multiphysics
6. Провести анализ взаимодействия источников электромагнитного излучения с полученными в работе средами, а также рассмотреть влияние расположения источника в среде

Для реализации поставленных задач использовались следующие методы:

1. Теория конформных отображений для расчета профиля показателя преломления.
2. Программный пакет Matlab для визуализации полученных профилей показателя преломления.
3. Программный пакет Comsol Multiphysics для моделирования распространения электромагнитного излучения с полученными профилями показателя преломления методом конечных элементов и подтверждения теоретических результатов.

ГЛАВА 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Введение

С давних пор человечество стремилось обрести контроль над электромагнитным излучением. Ещё во времена Ньютона для этого люди использовали призмы, зеркала, различного рода отверстия. В наше время с развитием лазеров, оптических материалов, а также физики и математики, их описывающей, появились более интересные варианты, такие как метаматериалы. Но одним из самых перспективных способов контроля и манипуляции электромагнитным излучением является математический аппарат трансформационной оптики (ТО).

Одним из первых, кто опубликовал работу по теории ТО был советский учёный Л. С. Долин. В своей работе [1] он показал, что, основываясь на инвариантности уравнений Максвелла, относительно определённого вида преобразований метрики пространства и проницаемостей среды, возможно исследование трёхмерных систем с анизотропным заполнением через сопоставления с другими, более простыми трёхмерными системами. Другими словами, рассматривая распространение электромагнитной волны в одном пространстве, а затем применив координатные преобразования к данному пространству, мы получим в нем уже другое распространение электромагнитной волны, но оно также будет являться решением уравнений Максвелла.

Настоящий ажиотаж вокруг материалов, основанных на теории ТО, произошёл в 2006 году после публикации двух статей в журнале *Science*: J. B. Pendry и др. [2] и Ulf Leonhardt [3]. Обе эти работы были посвящены созданию сред, способных создавать иллюзию невидимости объекта для наблюдателя, используя только координатные преобразования. В дальнейшем данный математический аппарат был использован для коллимации излучения [4, 5], для теоретического описания волноводов различной формы [6, 7], для уменьшения или увеличения

поперечных размеров пучка [8], для создания плоской линзы [9] а также для управления направлением излучения [10].

Ещё Л. С. Долин [1] указал на сложность параметров среды, необходимой для реализации того эффекта, который предполагается при координатном преобразовании. Например, анизотропия, неоднородность, наличие нулей и полюсов существенно усложняют производство данных сред. Несмотря на это, наука всё же смогла реализовать данные среды с помощью метаматериалов, однако в основном только для микро- и радиоволнового диапазона частот электромагнитного (ЭМ) излучения. К примеру, в обзорной статье [11] приведены примеры реализации некоторых сред, основанных на теории ТО.

Также следует отметить, что данная теория (ТО) используется не только применительно к электромагнитному излучению. В «Дорожной карте» трансформационной оптики [12] описываются применения данной теории к акустике, плазмонике, космологии, термодинамике и даже квантовой механике.

1.2 Конформные отображения

И Ulf Leonhardt [3], и J. В. Pendry [2] использовали координатные преобразования, чтобы получить необходимые параметры среды, с помощью которой можно было бы реализовать эффект невидимости. Но основным отличием статьи Ulf Leonhardt [3] от J. В. Pendry [2] было то, что Ulf Leonhardt использовал конформные отображения – определённый класс комплекснозначных функций. Их особенность заключается в том, что при координатном преобразовании сохраняются углы между прямыми. В теории конформных отображений используют две комплексные плоскости (или пространства): одну принято называть виртуальной $w=u+iv$, а другую физической $z=x+iy$. Комплекснозначная функция $w(z)$ называется конформным отображением. Координатные преобразования происходят соответственно между виртуальным пространством и физическим. Таким образом, можно «перенести» в реальность с помощью показателя преломления свойства виртуального пространства. В своей работе [3]

Ulf Leonhardt показал, что для получения профиля показателя преломления среды, основанной на отображении $w(z)$, достаточно продифференцировать эту функцию, согласно формуле (1)

$$n = \left| \frac{dw}{dz} \right| n' \quad (1)$$

где n' – профиль показателя преломления в виртуальном пространстве.

1.3 Преобразование Жуковского

Одним из самых исследуемых и используемых отображений является отображение Жуковского вида:

$$w(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad (2)$$

к примеру, в работе [13] авторы, используя данное отображение, описали параметры материала, который обладает свойством скрывать объект на поверхности, так называемое, ковровое покрытие. Для сравнения, в работе [14] авторы получили аналогичный эффект, применяя теорию трансформационной оптики, при этом используя куда более громоздкие и сложные вычисления. Таким образом, использование конформных отображений упрощает вычисления профиля показателя преломления среды.

Главной особенностью данного преобразования является наличие двух римановых листов – параллельных поверхностей, соединённых линией разреза. Виртуальное и физическое пространства данного отображения представлены на рисунке 1. Красная прямая в виртуальном пространстве пересекает линию разреза, обозначенную волнистой линией, и перескакивает на параллельный лист, в то время как синяя и зелёная прямые, которые её не касаются, располагаются только на одном Римановом листе. Аналогичную ситуацию можно заметить и в физическом пространстве на рисунке 1 слева. Так же видно, что весь нижний Риманов лист отобразился в физическом пространстве во внутреннюю часть окружности, которая в свою очередь и является линией разреза в физическом

пространстве. Таким образом, получаются 2 параллельные бесконечные плоскости, реализованные с помощью показателя преломления в одной среде. Так же стоит отметить тот факт, что в виртуальном пространстве все прямые, параллельные зелёной прямой, не будут взаимодействовать с линией разреза. Таким образом, в физическом пространстве появляется область, скрытая для излучения, распространяющегося вдоль оси Ox . В данном случае с помощью координатных преобразований все параллельные прямые в виртуальном пространстве преобразуются в физическом в искривлённые, что будет соответствовать искривлённому оптическому пути излучения, согласно принципу Ферма.

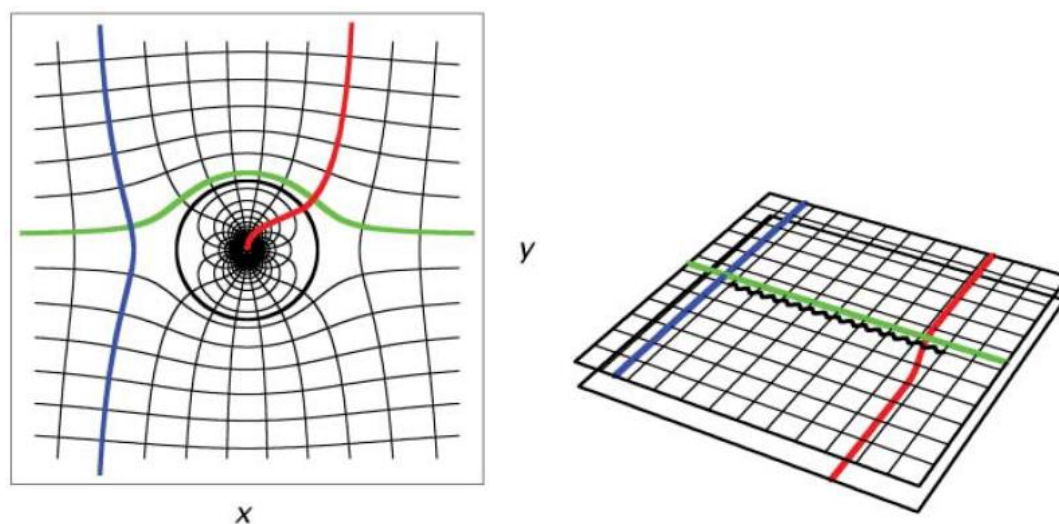


Рисунок 1 – Физическое (слева) и виртуальное (справа) пространства отображения Жуковского

Используя аналогию параллельных плоскостей, авторы статьи [15] рассматривают линию разреза в качестве «кротовой норы», изменяющейся во времени. Излучение, которое коснулось линии разреза, перескакивает на нижний Риманов лист и продолжает распространяться до бесконечности уже в нём. Аналогичный эффект приписывают теоретическим объектам вселенной «Кротовым норам». Таким образом, авторы работы могли исследовать данный объект в лабораторных условиях, используя конформные отображения.

Но чаще всего учёные пытаются реализовать невидимость. Начиная с самой первой статьи [3], авторы изменяют профиль показателя преломления нижнего

Риманова листа таким образом, чтобы излучение, вернулось в ту же самую точку и под таким же углом, под которым оно вошло, чтобы сторонний наблюдатель не заметил никаких отклонений. Чаще всего для этих целей используют профиль показателя преломления линзы Люнеберга [16], [17].

Но аналогично можно поместить что-либо на второй Риманов лист, чтобы достичь необходимых результатов. Например, в работе [18] на втором Римановом листе авторы разместили зеркала таким образом, что излучение, распространяющееся в противоположных направлениях, по-разному взаимодействуют со средой. На рисунке 2 представлен пример, когда на втором Римановом листе расположили зеркала в форме треугольника. В результате можно заметить, что излучение, обозначенное красной стрелкой, и распространяющееся вдоль оси OY из $+y$, проходя через линию разреза - окружность, обозначенную жёлтым, отклоняется под определённым углом. В то же время, излучение, обозначенное синей стрелкой и распространяющееся навстречу, будет полностью отражаться.

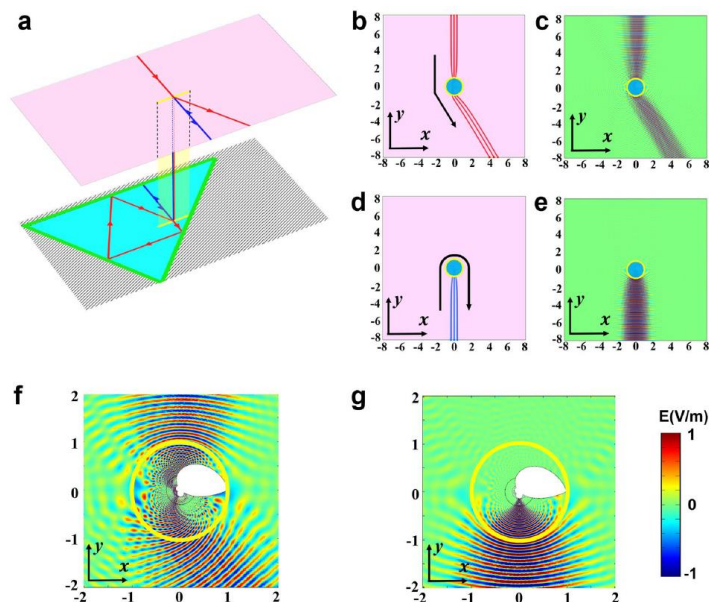


Рисунок 2 – Конфигурация конформного отображения Жуковского, при которой на нижнем Римановом листе располагаются зеркала (а), трассировка лучей и электромагнитного излучения при данном расположении зеркал (b-g)

Аналогично в работе [19] был достигнут эффект маскировки для определённых частот. Авторы статьи разместили проводники в форме окружности на втором Римановом листе. В отличие от работы [18], эффект маскировки будет наблюдаться только на определённых частотах. Побочным положительным эффектом данных подходов является исключение области, где профиль показателя преломления стремится к бесконечности

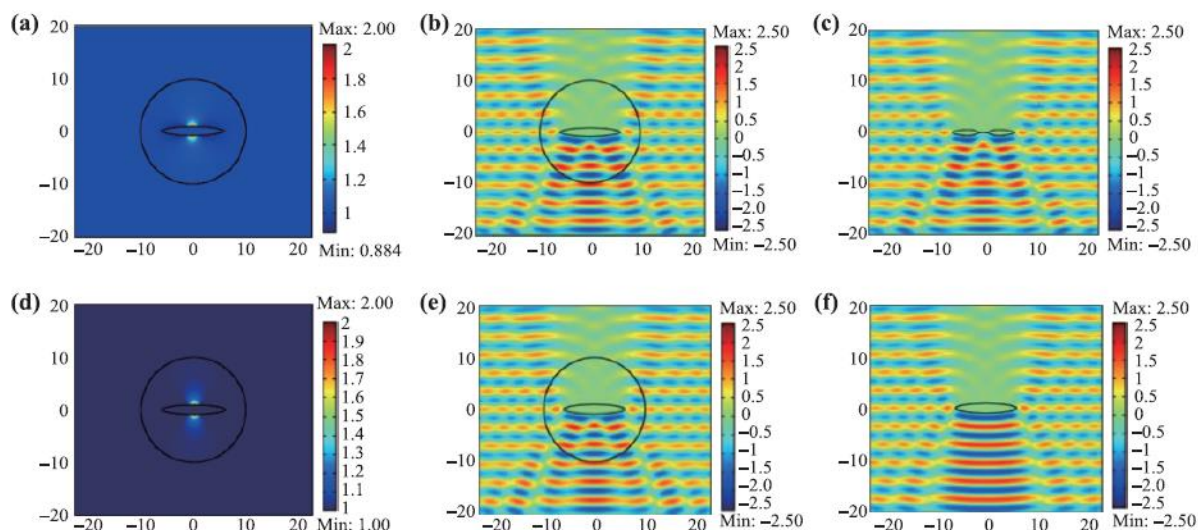


Рисунок 3 - (а) Профиль показателя преломления оптического устройства с конформной иллюзией. (b),(c),(e),(f) Моделирование z-компоненты электрического поля. (b) Распределение электрического поля для падающей ТЕ поляризованной волны, взаимодействующей с проводником, помещённом в среду. (c) Диаграмма электрического поля для плоской волны, падающей на проводник в форме очков. (d) Профиль показателя преломления модифицированной версии оптического устройства. (e) Распределение электрического поля для падающей плоской волны, взаимодействующей с модифицированным устройством. Видно, что картина распределения поля идентична полю (c), что означает, что наблюдателю будет казаться, что эллипс приобрёл форму очков. (f) Картина электрического поля для падающей плоской волны, взаимодействующей с проводником в форме эллипса.

Также данное преобразование использовали для создания иллюзии в статье [20]. Используя тот факт, что преобразование Жуковского трансформирует отрезок

на действительной оси в виртуальном пространстве в окрестность в физическом пространстве, авторы поместили эллиптический проводник в среду с рассчитанным показателем преломления и получили иллюзию схлопывания области вблизи центра эллипса в плоский отрезок. Таким образом, для наблюдателя исходный эллипс будет казаться приплюснутым в центре. Данный эффект продемонстрирован на рисунке 3.

1.4 Логарифмическое конформное отображение

Вторым наиболее часто используемым отображением является некоторая модификация отображения Жуковского. В статье [21] был взят обратный профиль показателя преломления, получающийся при преобразовании Жуковского. Отображение, соответствующее полученному профилю, было найдено интегрированием полученной зависимости профиля показателя преломления $n(z)$. Полученное отображение было названо логарифмическим. Авторы так же построили комплексную плоскость, соответствующую данному отображению, приведённую на рисунке 4, а также описали эффекты, которые можно получить в данной среде, основываясь на форме комплексной плоскости. К примеру, точечные источники, расположенные в определённых точках, будут излучать только в одном направлении. Данный пример представлен на рисунке 5.

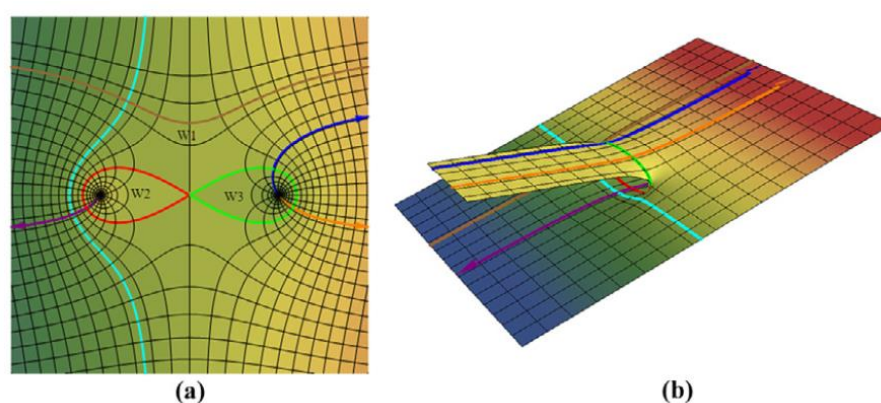


Рисунок 4 – Физическое (a) и виртуальное (b) пространство логарифмического конформного отображения

На рисунке 4 видно, что, в отличие от преобразования Жуковского, в данном преобразовании присутствуют 2 дополнительных Римановых листа, которые соответствуют точкам сингулярности в физическом пространстве.

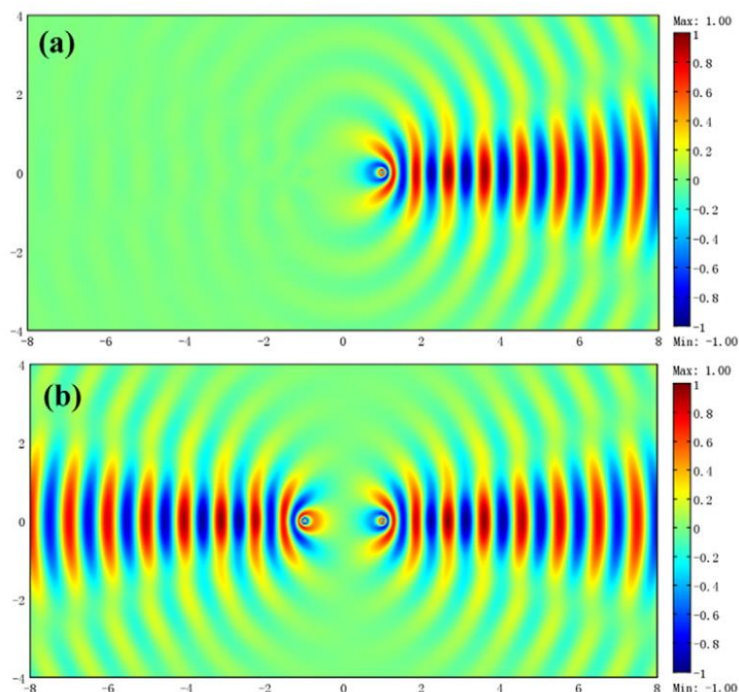


Рисунок 5 – z -компонента электрического поля. Показатель преломления среды рассчитан с помощью логарифмического конформного отображения. (а) Точечный источник расположен в координатах $(1, 0)$. (б) Два точечных источника расположены в координатах $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ с разницей в фазе $\pi/2$.

С данным отображением производят примерно те же манипуляции, что и с отображением Жуковского, чтобы получить эффект невидимости. К примеру, в статьях [22] и [23] в виртуальном пространстве на втором римановом листе были размещены две линзы Люнеберга, которые касаются друг друга и ограничены проводником. Показатель преломления среды и распределение z -компоненты поля в данной среде показаны на рисунке 6.

Такая конфигурация позволила в физическом пространстве сделать область, скрытую от излучения. Так же в работе [23] был получен диапазон показателя преломления от 0 до 9.839, что упрощает реализацию полученного материала.

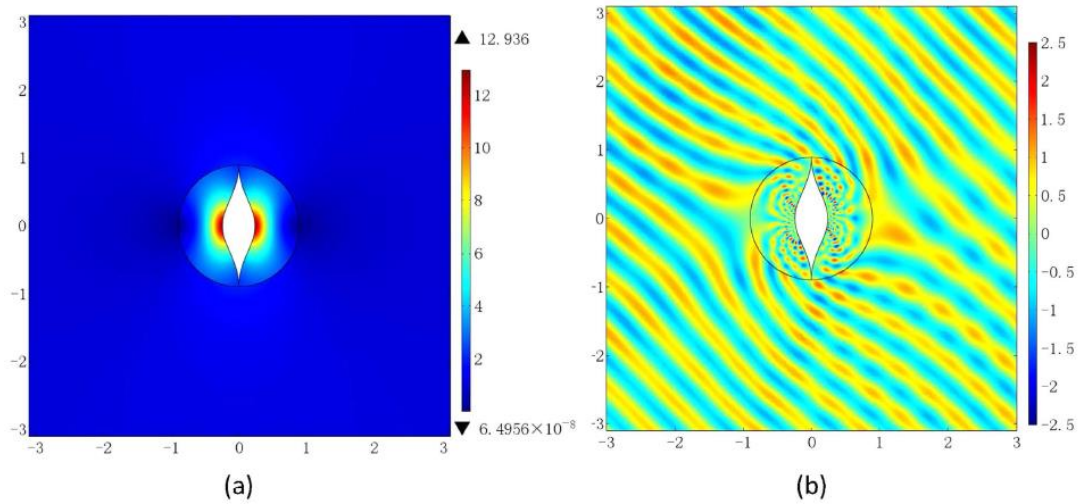


Рисунок 6 – (а) Профиль показателя преломления среды. (б) Картина распределения z -компоненты электрического поля. Излучение распространяется под углом 45° к координатным осям

Немного другим подходом воспользовались авторы статей [24] и [25]. Они использовали уравнение (1) $n = \left| \frac{dw}{dz} \right| n'$, в котором заменили показатель преломления в виртуальном пространстве, который обычно принимают равным 1, на профиль показателя преломления линзы Микаэляна. Такую среду исследователи разместили на втором Римановом листе, при этом на первом оставив $n' = 1$.

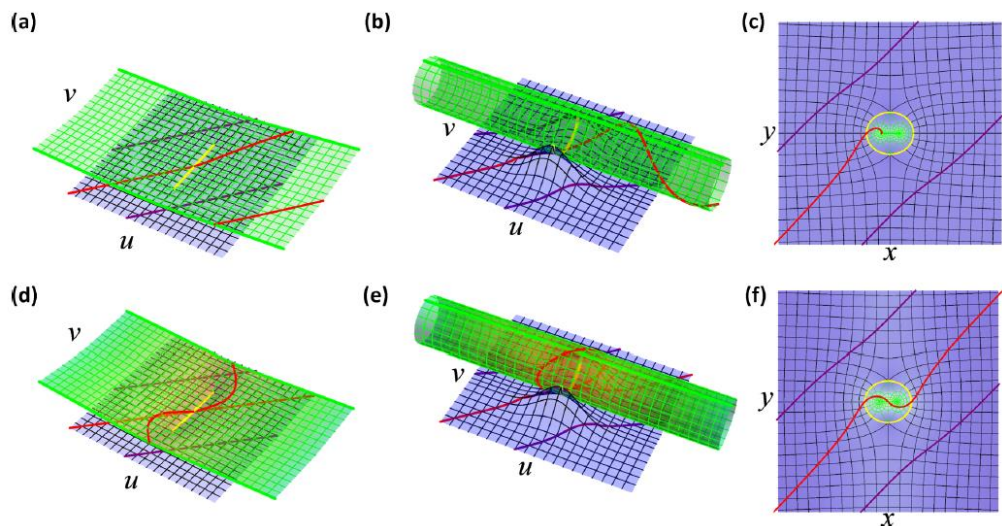


Рисунок 7 - (а) – (с) Виртуальные и физическое пространства логарифмического конформного отображения. (d)-(f) Виртуальные и физическое пространства данного отображения при изменённом n'

Такая комбинация так же позволила получить профиль показателя преломления среды, некоторая область которой скрыта для наблюдателя. Так же диапазон профиля показателя преломления среды в статье [24] был уменьшен до 7.55.

1.5 Конформное отображение вида $w = z^\alpha$

Большое количество работ по ТО и конформным отображениям посвящено коллимации волнового фронта. К примеру, в статье [26], используя квази-конформное преобразование, был получен профиль показателя преломления линзы. Если точечный источник поместить в центре данной линзы, то на выходе получают два коллимированных пучка. На рисунке 8 показан профиль показателя преломления линзы и распределение z -компоненты электрического поля источника, расположенного в центре данной линзы.

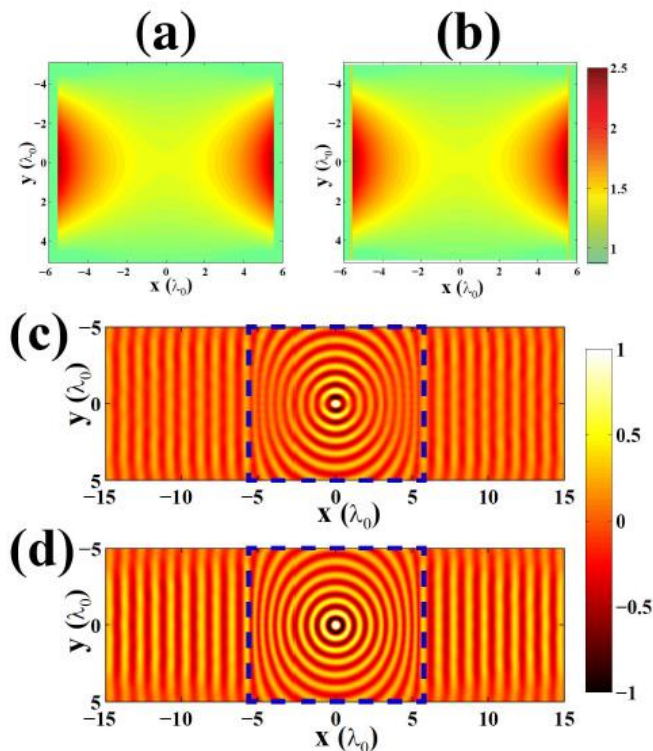


Рисунок 8 – Профиль показателя преломления линзы (a) – без антиотражающего покрытия и с антиотражающим покрытием – (b). (c),(d) Распределение поля в линзе и за её пределами, соответственно, без антиотражающего покрытия и с ним

Можно заметить, что показатель преломления линзы на границе намного больше 1, поэтому на рисунке 8 (с) только небольшая часть излучения распространяется за пределами линзы, остальное излучение отразилось. Поэтому авторы прибегли к помощи антиотражающего покрытия.

Но можно встретить в том числе статьи, которые вводят в заблуждение. Авторы статей [27] и [28] написали, что в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = \frac{1}{z}$, возможна коллимация излучения точечного источника. Профиль показателя преломления полученной линзы очень близок к 0 (ZIM – zero index material). Соответственно, если поместить данную линзу в воздух, то всё излучение будет стремиться к нормали, чем и будет объясняться эффект коллимации, полученный в данной статье. Таким образом, эффект коллимации был достигнут не с помощью конформного отображения, а за счёт разницы показателей преломления линзы и воздуха. На рисунке 9 можно заметить, что в картине распределения z-компоненты поля практически вся область линзы заполнена однородно, что свидетельствует о том, что показатель преломления стремится к 0.

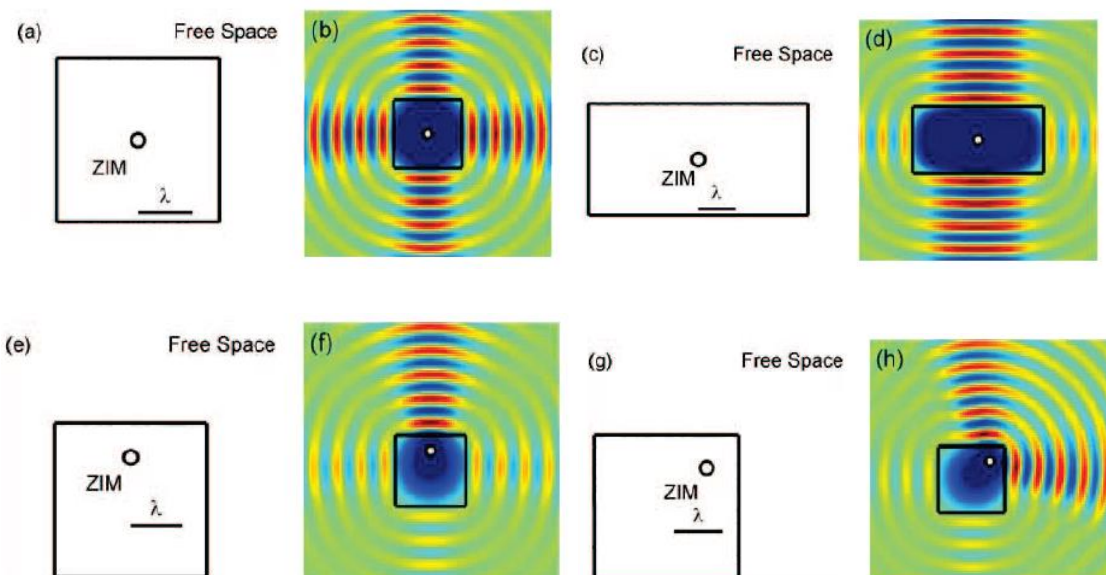


Рисунок 9 – Различные конфигурации расположения точечного источника в линзе, основанной на конформном отображении $w(z) = \frac{1}{z}$

Основываясь на том же конформном отображении $w = z^\alpha$, авторы статьи [29] аналитически и численно описали положительные и отрицательные топологические дефекты. Такое разделение осуществляется за счёт коэффициента α . Если $\alpha > 1$, то такой топологический дефект является отрицательным, а если $\alpha < 1$, то положительным. На рисунке 10 показаны численные расчёты поведения излучения в таких топологических дефектах, а также виртуальные пространства данных отображений.

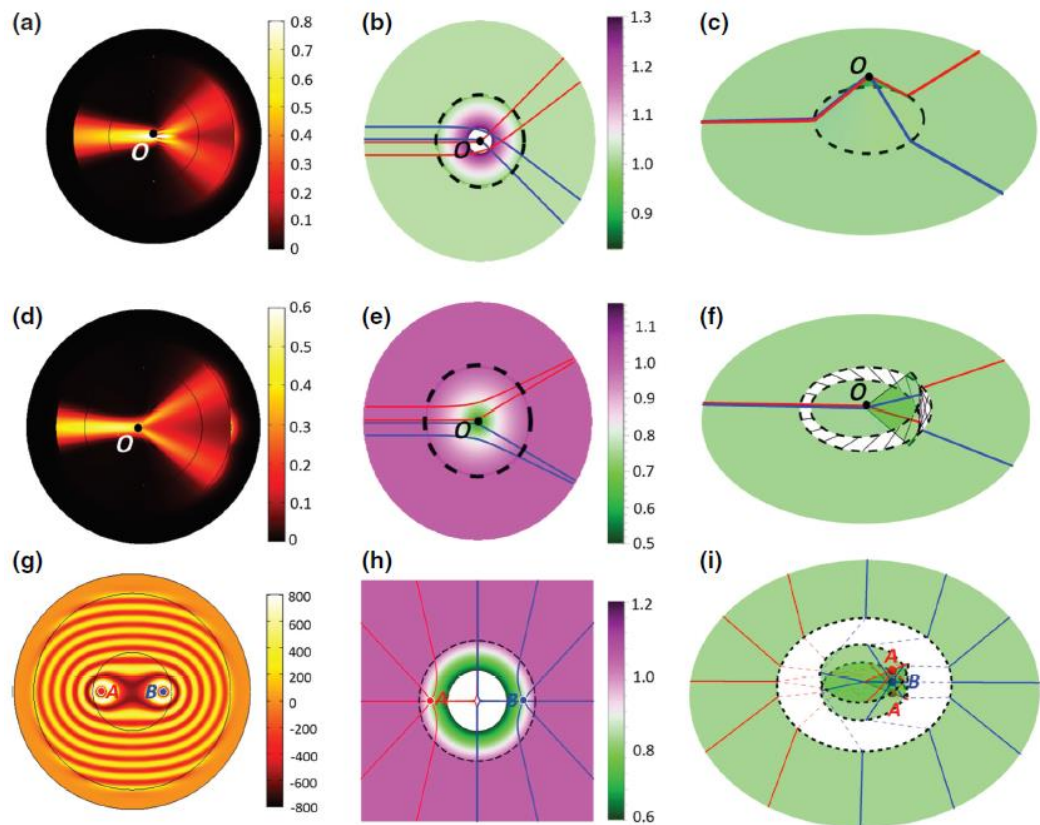


Рисунок 10 – (a) - (c) Распределение поля гауссова пучка, трассировка лучей и трассировка лучей в виртуальном пространстве при отрицательном топологическом дефекте. (d) – (f) Распределение поля гауссова пучка, трассировка лучей и трассировка лучей в виртуальном пространстве при положительном топологическом дефекте. (g) – (i) Эффект иллюзии при положительном топологическом дефекте: распределение поля и трассировка лучей в физическом и виртуальном пространствах. Два точечных источника расположены в точках A(-0.8, 0) и B(0.8, 0), но картина распределения электрического поля соответствует одному источнику

1.6 Экспериментальная реализация сред

Как уже упоминалось ранее, использование конформных отображений для координатных преобразований не только значительно упрощает расчёт параметров среды, но и полученные параметры значительно легче реализовать, так как в таких материалах отсутствует анизотропия. Как правило, рассчитанный профиль показателя преломления можно получить обычными отверстиями в исходном материале с высоким показателем преломления. Такая среда обладает эффективным профилем показателя преломления, который зависит от радиуса отверстий. Таким образом в работе [30] аналитически была рассчитана коллимирующая линза для микроволнового диапазона частот. На рисунке 11 показана линза, а также численное моделирование z-компоненты электрического поля, прошедшего через линзу.

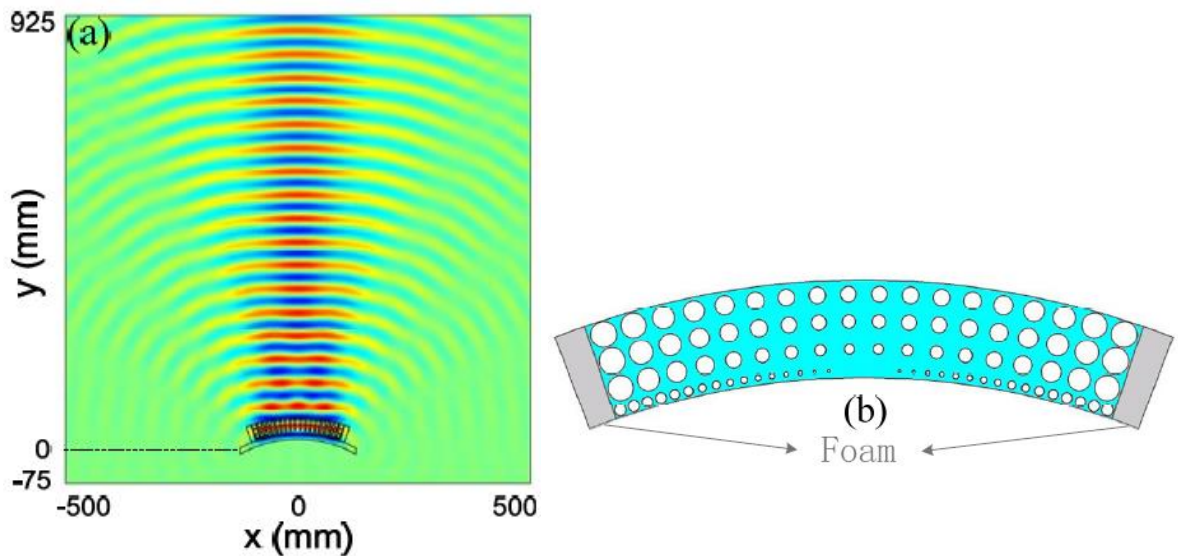


Рисунок 11 – (а) Распределение z-компоненты поля от точечного источника, которое прошло через линзу. (б) Вид линзы в разрезе

В работе [31], используя ENZ (epsilon-near-zero) среду, реализовали невидимость для микроволнового диапазона частот. Главной особенностью данной среды является анизотропия. Полученные параметры среды обеспечивают согласование импедансов для произвольного угла падения излучения. Таким

образом, такие среды сохраняют свои материальные параметры при произвольном координатном преобразовании, тем самым предоставляя платформу для создания различных сред, основанных на любом координатном преобразовании. На рисунке 12 приведена схема экспериментальной установки.

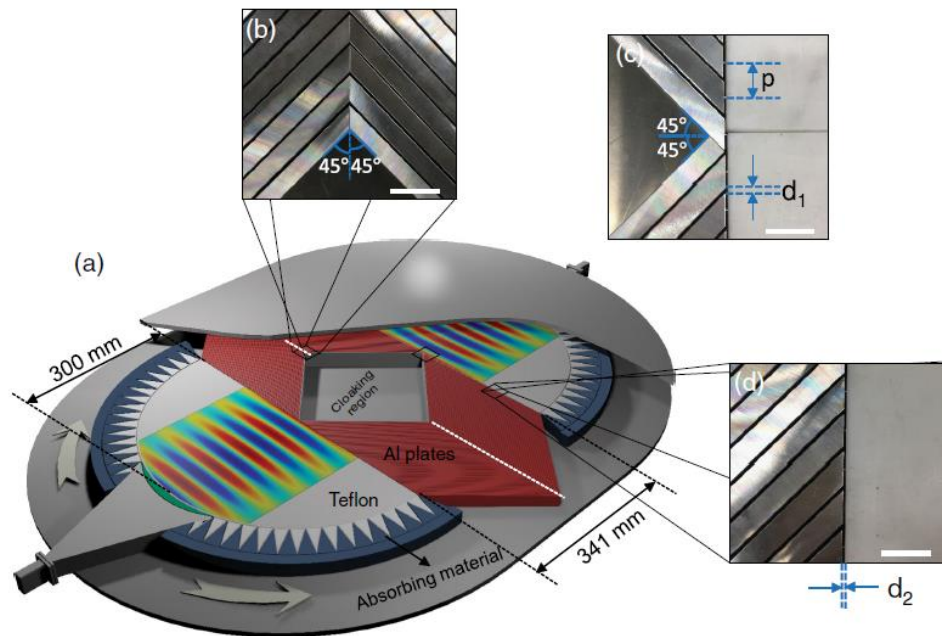


Рисунок 12 – Схема экспериментальной установки. Параметры: $p = 6$ мм,
 $d_1 = 0.5$ мм, $d_2 = 0.5$ мм

1.7 Выводы к главе 1

В данной главе были рассмотрены некоторые, часто используемые в оптике и электродинамике, конформные отображения, а также эффекты манипуляции электромагнитным излучением с помощью сред, профиль показателя преломления которых был рассчитан с их помощью. Чаще всего, учёные ставят целью достижение эффекта невидимости. Но также существуют работы и по коллимации излучения или созданию иллюзии. Отдельно были рассмотрены работы, в которых тем или иным образом авторы экспериментально реализовали градиентный профиль показателя преломления и получили рассчитанный теоретически эффект в лабораторных условиях.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ТРАНСФОРМАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

2.1 Математический аппарат перехода между двумя пространствами

Трансформационная оптика (ТО) – инструмент для получения аналитических выражений диэлектрической и магнитной проницаемости искусственных сред. Математическое обоснование этой концепции состоит в том, что уравнения Максвелла электромагнитного поля инвариантны относительно координатных преобразований.

Основная идея заключается в следующем: записать уравнения Максвелла в свободном пространстве в координатах, отличных от Декартовой системы координат, но затем интерпретировать их так, словно они записаны в Декартовой системе с изменёнными параметрами среды. Чтобы лучше это понять, необходимо представить две различные координатные системы, которые будут введены в двух различных пространствах. Первое пространство, которое называется виртуальным, является пустым пространством, поэтому в нём решаются уравнения Максвелла в прямоугольной Декартовой системе координат. Для примера рассмотрим двумерное виртуальное пространство с координатами $w = U + iV$, в котором рассмотрим прямые $U = C_1$ и $V = C_2$, параллельные координатным осям, где C_1 и C_2 – константы. Варьируя константы C_1 и C_2 , можно построить прямоугольную сетку, показанную на рисунке 13 (а). Полученную сетку называют изотермической. Затем мы вводим координатное преобразование, которое переводит прямоугольную ячейку сетки (U, V) в криволинейный четырёхугольник (X, Y) с сохранением углов между прямыми. Полученное пространство называют физическим, и в нём прямые $U = C_1$ и $V = C_2$ имеют вид функций $U(x, y) = C_1$ и $V(x, y) = C_2$, определяемых введённым преобразованием. Физическое пространство продемонстрировано на рисунке 13 (б).

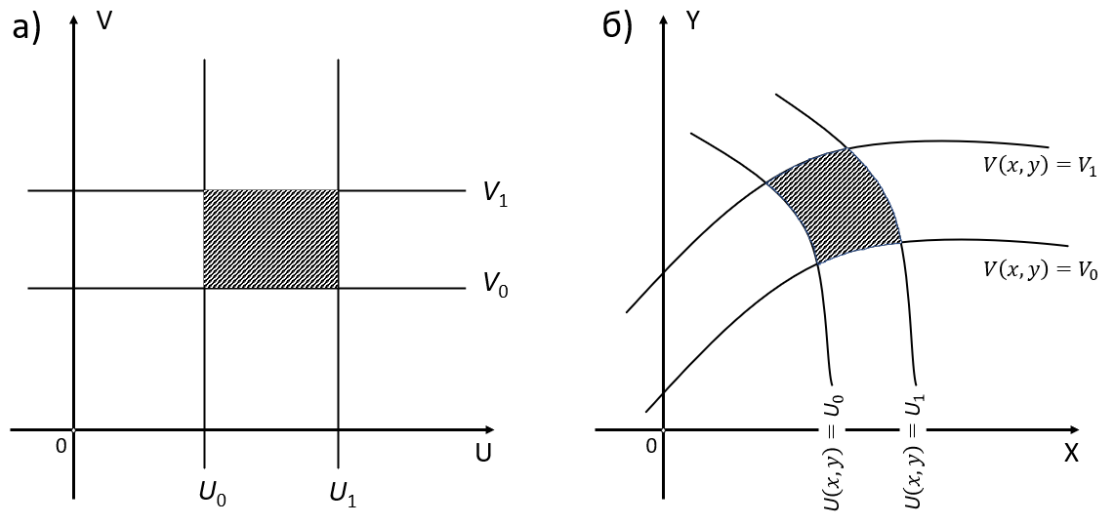


Рисунок 13 – Виртуальное пространство (а) и физическое пространство после применения координатного преобразования (б)

На рисунке 14 [37] наглядно проиллюстрирована данная идея в контексте оптической среды. На рисунке 14 (а) изображено виртуальное пространство, на рисунке 14 (б) – физическое пространство. Красная стрелочка показывает направление излучения. В виртуальном пространстве излучение распространяется вдоль прямой, потому что данное пространство является пустым. В физическом же пространстве излучение распространяется вдоль кривой траектории, так как под действием координатного преобразования изменилась сетка виртуального пространства. Более светлый свет фона на рисунке 14 (б) обозначает более высокий показатель преломления по сравнению с более тёмным участком. Таким образом, с помощью координатного преобразования и градиентного профиля показателя преломления получили устройство, способное повернуть излучение на 90° , показанное на рисунке 14 (в). Чтобы объяснить, как плоский волновой фронт на входе остался плоским на выходе, стоит обратиться к принципу Ферма, который гласит, что расстояние между двумя точками свет проходит по наименьшему оптическому пути. Соответственно, излучение, которое распространяется ближе к началу координат (рисунок 14 (в)), проходит меньший геометрический путь, по сравнению с тем, что распространяется дальше от начала координат, но так как показатель преломления также становится меньше при отдалении от начала

координат, то оптический путь всех точек волнового фронта оказывается равным. Таким образом, с помощью определённого градиентного профиля показателя преломления можно реализовать искривлённое пространство для излучения, в котором оно будет распространяться по различным траекториям.

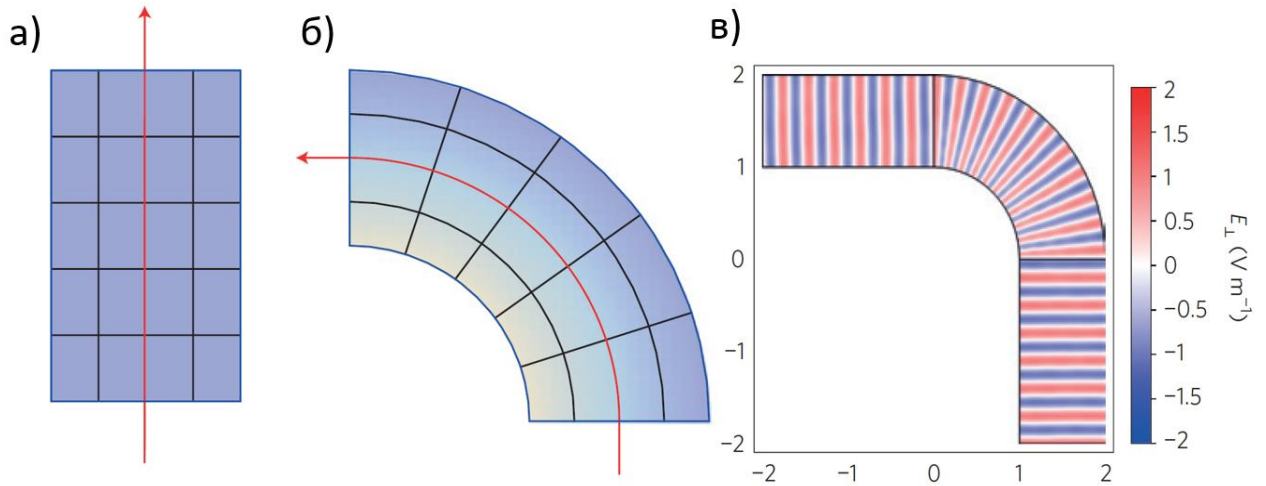


Рисунок 14 – (а) Виртуальное пространство, (б) физическое пространство, заполненное градиентным показателем преломления (чем светлее – тем выше показатель преломления), (в) распределение поля в устройстве, поворачивающем излучение на 90° и основанном на координатных преобразованиях

Рассмотрим произвольное координатное преобразование между физическим пространством с координатами $x^i = \{x^1, x^2, x^3\}$ и виртуальным с координатами $x^{i'} = \{x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\}$. Такое преобразование будет иметь функциональную зависимость $x^i = f(x^{i'})$. Тогда материальные параметры μ и ε в физическом пространстве будут вычисляться по формулам:

$$\mu = \frac{AA^T \mu'}{|\det A|}, \quad \varepsilon = \frac{AA^T \varepsilon'}{|\det A|} \quad (3)$$

где $A = A_{i'}^i = \frac{dx^i}{dx^{i'}}$ - матрица перехода из виртуального пространства в физическое.

2.2 Конформные отображения

Конформные отображения используются в математической физике для упрощения решения задач на плоскости, например, для решения задач гидродинамики, электростатики, теории упругости. [32].

Конформное отображение $w = f(z)$ – это такое отображение, которое удовлетворяет условию Коши-Римана и локально сохраняет углы между двумя произвольными прямыми. Также конформные отображения не зависят от комплексно-сопряжённого числа z^* , то есть являются функциями только переменной z . Далее по аналогии с описанным выше, мы будем упоминать два пространства: виртуальное, пространственные координаты которого описываются изменением комплексной величины $w = u + iv$, и физическое с пространственными координатами вида $z = x + iy$. В таком случае матрица перехода из виртуального пр-ва...перехода, имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Так как конформные отображения удовлетворяет условию Коши-Римана, которое можно записать в виде: $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}$ и $\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$, то в таком случае получаем:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ -\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & -\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & -\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \\ -\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\det A| = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

Используя диэлектрическую и магнитную проницаемости, записанные в виде:

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \varepsilon = \begin{bmatrix} n_w^2 & & \\ & n_w^2 & \\ & & n_w^2 \end{bmatrix}$$

получаем окончательное соотношение для них в физическом пространстве:

$$\mu' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{|\det A|} \end{bmatrix} \text{ и } \varepsilon' = \begin{bmatrix} n_w^2 & & \\ & n_w^2 & \\ & & \frac{n_w^2}{|\det A|} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Для диэлектрической среды с градиентно меняющимся показателем преломления $n_z(x, y)$ в плоскости XU и однородной в перпендикулярном направлении (в направлении z) (выше рассматриваемой области) амплитуда поля электромагнитной волны ψ будет описываться уравнением Гельмгольца [33]:

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + n_z^2 k^2)\psi = 0 \quad (6)$$

Так как $\partial_x = \partial_z + \partial_z^*$ и $\partial_y = i\partial_z - i\partial_z^*$, то $\partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z^* \partial_z$. Таким образом, уравнение Гельмгольца принимает вид:

$$(4\partial_z^* \partial_z + n_z^2 k^2)\psi = 0 \quad (7)$$

где k – волновой вектор.

Далее распишем уравнение Гельмгольца в преобразованных координатах. Так как конформные отображения не зависят от комплексно-спряжённого числа, следовательно, по правилам дифференцирования: $\partial_z = \frac{dw}{dz} \partial_w$, а $\partial_z^* = \frac{dw^*}{dz^*} \partial_w^*$, то под действием конформного отображения $w = f(z)$ уравнение Гельмгольца принимает вид

$$(4\partial_w^* \partial_w + n_w^2 k^2) \psi = 0 \quad (8)$$

где показатель преломления n_z заменён на

$$n_w = \left| \frac{dz}{dw} \right| n_z \quad (9)$$

Из данного уравнения можно получить зависимость, профиля показателя преломления в физическом пространстве от показателя преломления в виртуальном пространстве и от рассматриваемого конформного отображения:

$$n_z = n_w \left| \frac{dw}{dz} \right| \quad (10)$$

Если виртуальное пространство является пустым пространством, в котором излучение распространяется прямолинейно, то в таком случае $n_w = 1$. Также

нетрудно убедиться в том, что $\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{\frac{1}{|\det A|}}$.

Стоит также отметить, что согласно формуле (10) мы можем увидеть, существуют ли особые точки в профиле показателя преломления. Если производная в какой-либо точке обращается в 0, либо в бесконечность, то, соответственно, в профиле в данных точках показатель преломления стремится к 0, либо к бесконечности.

Также можно заметить, что принцип Ферма сохраняется как в физическом, так и в виртуальном пространствах, но с видоизменённым профилем показателя преломления:

$$dl^2 = n^2(dx^2 + dy^2) = n^2 dz dz^* = n'^2 dw dw^* \quad (11)$$

Таким образом, с помощью конформного отображения $w = f(z)$ и формулы (10) можно получить профиль показателя преломления, соответствующий данному отображению. Каждому конформному отображению соответствует свой профиль показателя преломления, который можно подбирать, исходя из поставленных физических задач.

2.3 Выводы к главе 2

В данной главе была описана концепция виртуального и физического пространства. Также был математически описан переход между данными пространствами. Получено соотношение, связывающее конформное отображение и показатель преломления в виртуальном пространстве с показателем преломления в физическом пространстве. Были доказаны и выведены математические формулы для получения профиля показателя преломления в физическом пространстве и концепции (переход между пространствами), которые далее будут использоваться без доказательств.

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ РАССМАТРИВАЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1 Введение

Так как авторы статей, посвящённых применению конформных отображений в оптике и электродинамике, как правило, используют отображения, для которых хорошо известны Римановы листы [21, 35, 15], либо используют их комбинации [23, 24, 25], для теоретического обоснования получаемых эффектов они обращаются к ним. Лишь в двух статьях исследователи прибегают к выделению действительной и мнимой части отображений для теоретического описания и анализа изучаемого эффекта.

К примеру, в статье [27] авторы попытались описать полученный эффект с помощью выделения действительной и мнимой части указанного отображения. Как уже было сказано в главе 1, эффект коллимации излучения, полученный в данной статье, нельзя объяснить с помощью преобразования координатной сетки, состоящей из двух ортогональных семейств касающихся окружностей из физического пространства в координатную сетку из двух ортогональных семейств параллельных прямых в виртуальном пространстве. Данная зависимость изображена на рисунке 15. В этом случае, как было показано в главе 2, происходит переход, обратный описываемому в данной статье (из виртуального пространства в физическое).

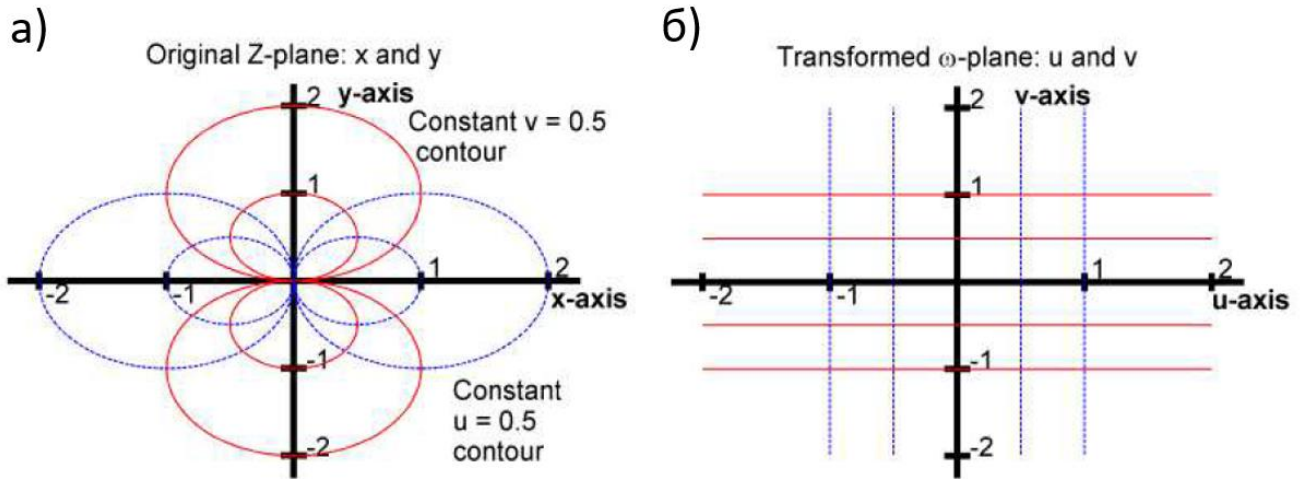


Рисунок 15 – Физическое (а) и виртуальное (б) пространства конформного отображения $w = 1 / z$ в статье [27]

Но всё же, как будет показано далее, подход к теоретическому описанию эффектов через выделение действительной и мнимой части конформного отображения, имеет место быть и более того является максимально удобным и универсальным.

В другой работе [34] авторы использовали подобный подход к теоретическому описанию многофункциональной линзы. Единственное отличие от использованных ранее методов заключается в том, что полученные зависимости описывали преобразование всей плоскости w (виртуальное пространство) в плоскость z (физическое пространство). Как будет показано далее, используя это же самое конформное отображение $w(z) = \sin z$, можно получить абсолютно иного рода профиль показателя преломления и, соответственно, другие эффекты. Преобразование виртуального пространства в физическое показано на рисунке 16.

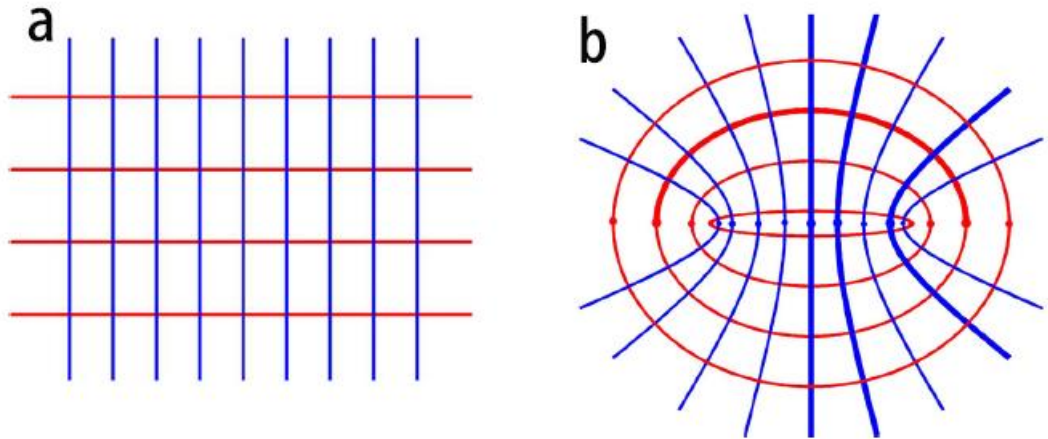


Рисунок 16 – Виртуальное пространство (a) и физическое пространство (b) исследуемого в статье [34] конформного отображения $w(z) = \sin z$

На рисунке 16 (b) видны точки, соответствующие точкам пересечения прямых и оси OX . Таким образом, можно сделать вывод, что источник, помещённый в различные точки на оси OX в физическом пространстве, будет излучать по-разному. Данный эффект и был получен авторами статьи.

Таким образом, подход к теоретическому описанию получаемых эффектов через выделение действительной и мнимой части рассматриваемого отображения используется крайне редко в статьях, посвященных данной тематике. Целью данной главы является получение общих тенденций и закономерностей, которые не были получены в научных публикациях ранее.

3.2 Конформное отображение Жуковского

Рассмотрим конформное отображение Жуковского с точки зрения теоретического описания получаемых с его помощью эффектов. В общем случае данное отображение имеет вид:

$$w(z) = z + \frac{a^2}{z} \quad (12)$$

где параметр a^2 задаёт размер линии разреза, описываемой в главе 1. Выделяем действительную и мнимую часть:

$$z + \frac{a^2}{z} = x + iy + \frac{a^2}{x+iy} = \frac{(x^2+y^2)(x+iy)+a^2(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)x+(x^2+y^2)iy+a^2(x-iy)}{x^2+y^2}$$

$$Re(w) = \frac{x(x^2 + y^2 + a^2)}{x^2 + y^2} \quad (13)$$

$$Im(w) = \frac{y(x^2 + y^2 - a^2)}{x^2 + y^2} \quad (14)$$

Логика состоит в следующем: так как рассматривается только пустое виртуальное пространство с Декартовой сеткой, то излучение в этом пространстве, распространяясь вдоль одной из координатных осей, будет идти вдоль параллельных прямых, образующих координатную сетку. Чтобы построить данную сетку (рисунок 16(а), рисунок 15(б)), необходимо приравнять действительную и мнимую часть отображения двум различным константам ($w = u + iv$: $u = const1$, $v = const2$). Конформное отображение преобразует Декартовую прямоугольную сетку виртуального пространства в новую искривленную сетку в физическом пространстве. Соответственно излучение в полученной среде будет распространяться вдоль кривых, образующих новую сетку. Поэтому аналогичным образом выделяя действительную и мнимую часть конформного отображения и приравнивая их различным константам, можно получить кривые, вдоль которых будет распространяться излучение в среде, полученной с помощью данного отображения.

Таким образом, приравнивая полученные зависимости (13) и (14) для действительной и мнимой части константам $Re(w) = const1$, $Im(w) = const2$ и варьируя их, были получены прямые, соответствующие преобразованной декартовой сетке виртуального пространства. Параметр a был взят равным 1. Данные кривые показаны на рисунке 17.

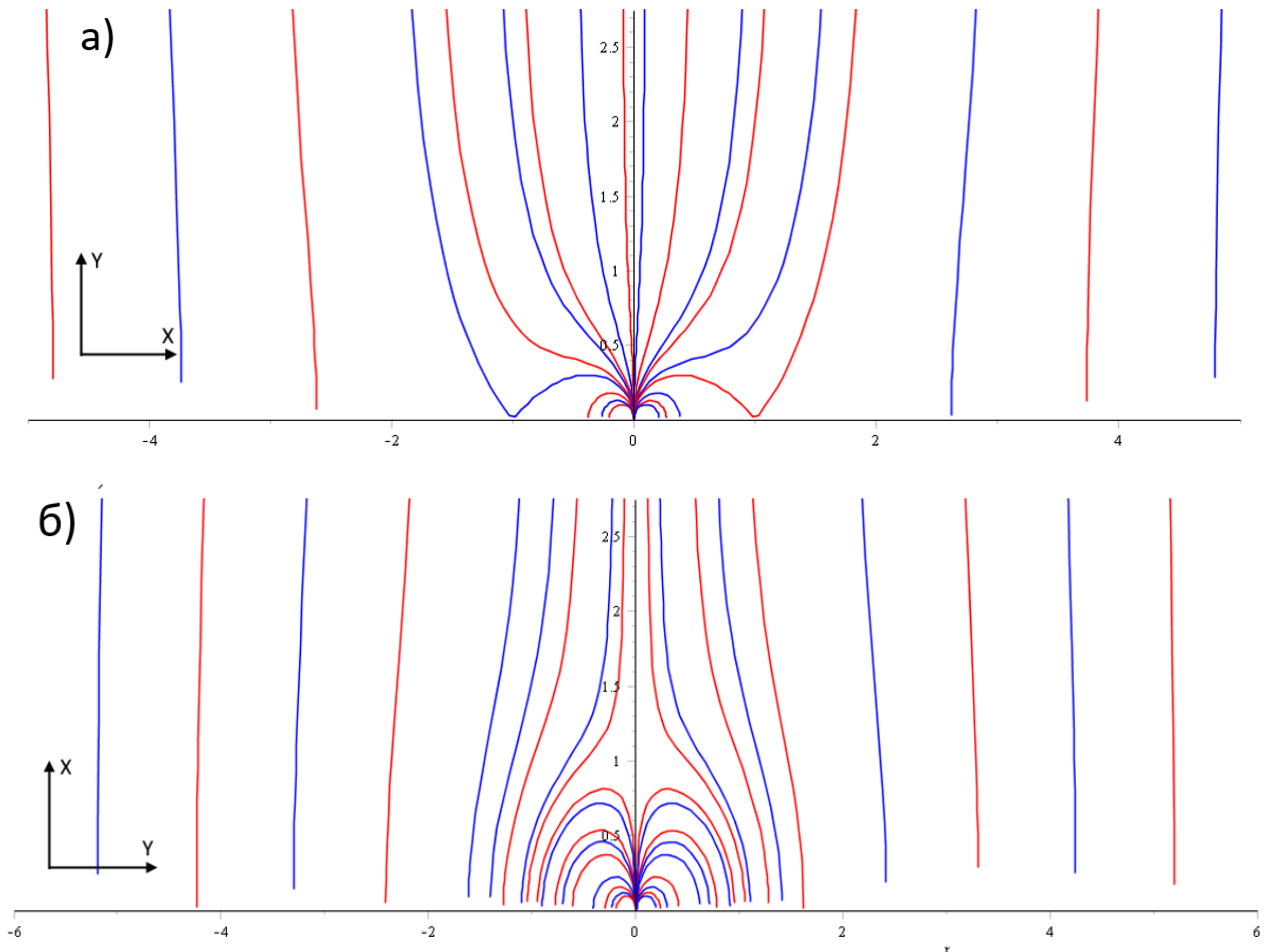


Рисунок 17 – Прямые, соответствующие зависимостям действительной (а) и мнимой (б) части, приравненной к различным константам.

Можем заметить, что характер распространения кривых вдоль действительной оси OX и мнимой оси OY различен. Прямые, соответствующие изменению значений $Re(w)$ от -2 до 2 , стремятся к началу координат. В то же время прямые, распространяющиеся из бесконечности, соответствующие изменению значений $Im(w)$ от -2 до 2 огибают единичную окружность. Также видно, что чем дальше прямая проходит от единичной окружности, тем более она параллельна одной из координатных осей, не зависимо от того, вдоль какой оси расположена данная прямая.

Эту особенность можно объяснить, исходя из Римановых листов, соответствующих рассматриваемому преобразованию Жуковского. Виртуальное и физическое пространства проиллюстрированы на рисунке 18.

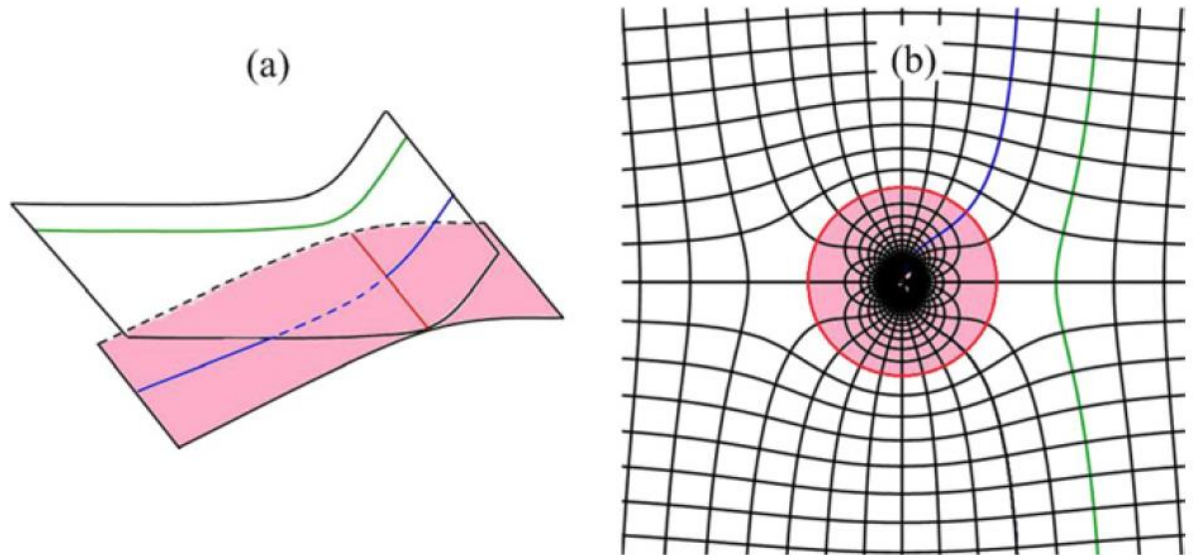


Рисунок 18 – Виртуальное пространство (a) и физическое пространство (b) конформного отображения Жуковского. Римановы листы в виртуальном пространстве являются плоски и неизогнутыми, такое их изображение помогает лучше их визуализировать

Видно, что в виртуальном пространстве существуют два Римановых листа, соединённых линией разреза, показанной на рисунке 18 красной линией. Наличие именно двух Римановых листов и линии разреза между ними можно объяснить через обратное преобразование Жуковского, которое получается из исходного, выделяя зависимость $z(w)$:

$$z = \frac{1}{2} \left(w \pm \sqrt{w^2 - 4a^2} \right) \quad (15)$$

Наличие знака \pm указывает на наличие двух Римановых листов. Также можно заметить, что в точках $w = \pm 2a$ значение корня равно 0, и поэтому данные точки будут принадлежать одновременно двум Римановым листам. Эти точки называются точками ветвления, а линия, соединяющая их, – линией разреза.

Нетрудно убедиться, подставляя различные значения w , что линия разреза в физическом пространстве становится окружностью радиуса a .

Как показано на рисунке 18 (а) синей линией, прямые, пересекающие линию разреза, распространяются далее на параллельном Римановом листе до бесконечности, то есть не возвращаются обратно на тот лист, в котором они начали распространение. И наоборот, любая прямая, которая не пересекает линию разреза (зелёная линия на рисунке 18) распространяется только на одном Римановом листе до бесконечности. Особое внимание стоит обратить на прямые, параллельные линии разреза. Любая такая прямая будет распространяться только на одном листе.

Как показано на рисунке 18 (b), нижний Риманов лист в физическом пространстве становится внутренней частью окружности радиуса a , а верхний лист – внешней частью окружности.

Таким образом, как показано на рисунках 18 (b) и 17 (а), прямые, соответствующие константам $Re(w)$ из отрезка $\pm 2a$ стремятся к началу координат, но не пересекают ось OX , что соответствует пересечению синей линией на рисунке 18 (а) линии разреза. И наоборот, как показано на рисунках 18 (b) и 17 (б), все прямые, параллельные оси OX огибают единичную окружность радиуса a , так как линия разреза в физическом пространстве является окружностью радиуса a .

Чтобы рассчитать профиль показателя преломления, соответствующий данному преобразованию, как было описано в главе 2, необходимо взять производную функции, согласно формуле [3]

$$n_z = \left| \frac{dw}{dz} \right| n_w \quad (16)$$

Где n_z и n_w показатели преломления в физическом и виртуальном пространствах, соответственно.

Соответственно, для отображения Жуковского профиль показателя преломления будет выглядеть следующим образом:

$$n(x, y) = 1 - \frac{a^2}{z^2} \quad (17)$$

Данный профиль представлен на рисунке 19.

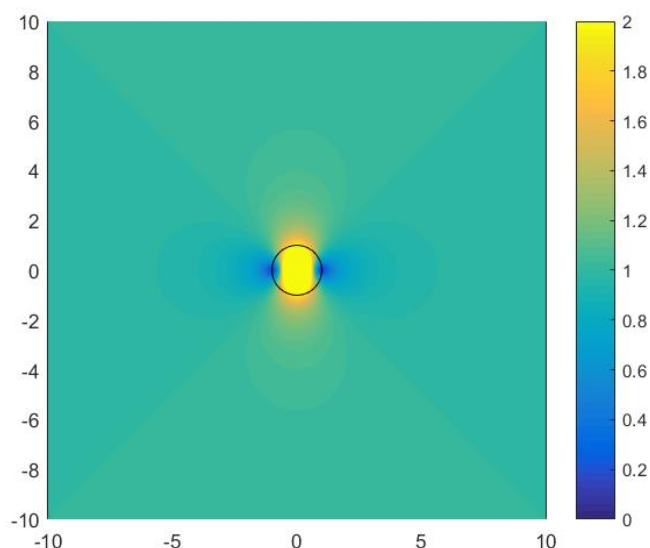


Рисунок 19 – Профиль показателя преломления, соответствующий конформному отображению Жуковского

На рисунке 19 окружность с центром в начале координат соответствует линии разреза в виртуальном пространстве. Так как параметр a был выбран равным единице, окружность является единичной. В профиле показателя преломления, полученном с помощью конформного отображения Жуковского, видно, что достаточно близко от единичной окружности показатель преломления становится равным 1, отмеченным на рисунке зеленоватым, то есть воздуху. Также можно заметить 3 особенные области. В двух из них показатель преломления стремится к 0 (в точках $x = +1$ и $x = -1$). Данные точки и являются точками ветвления. В области внутри окружности, отмеченной жёлтым цветом, показатель преломления выше 2 и стремится к бесконечности в начале координат.

С помощью метода конечных элементов в программном пакете Comsol Multiphysics было смоделировано взаимодействие электромагнитного излучения с полученным профилем показателя преломления, а также для наглядности была получена трассировка лучей.

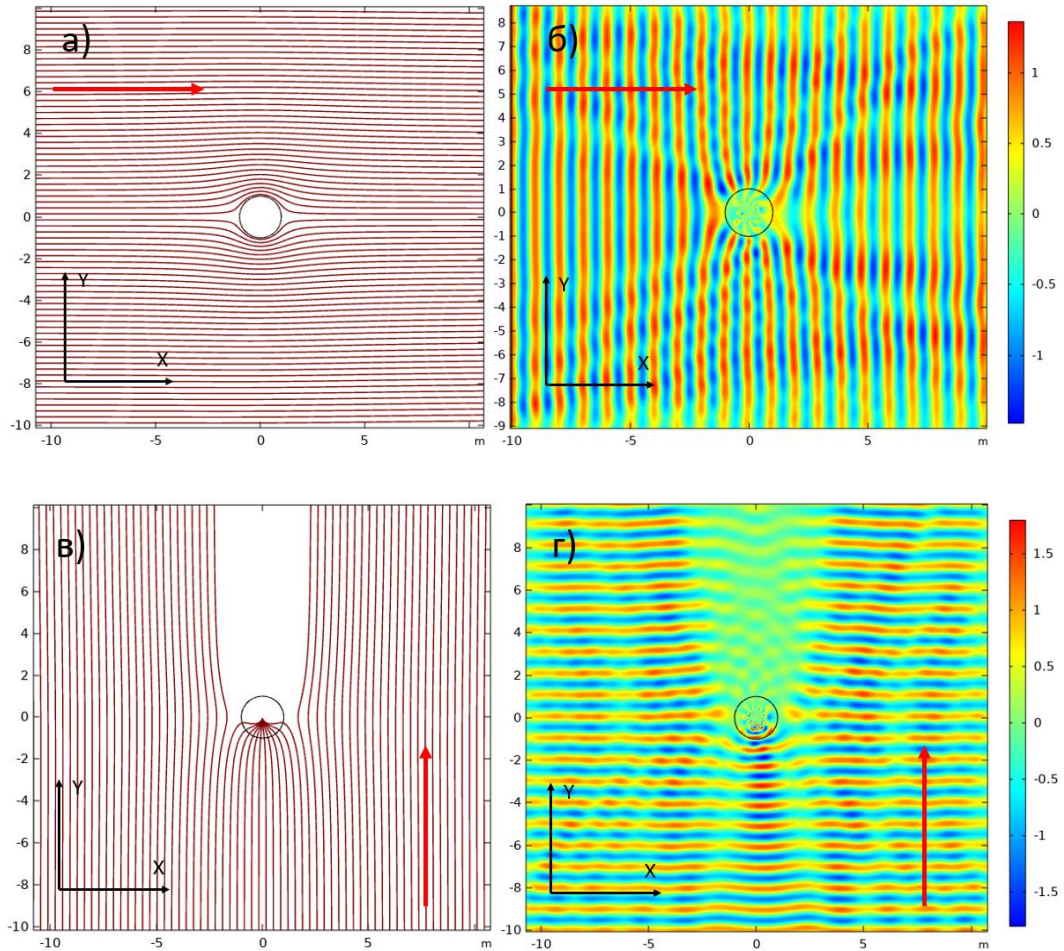


Рисунок 20 – Трассировка лучей (а,в) и распределение поля (б,г) в среде, профиль показателя преломления которой получен с помощью конформного отображения Жуковского. Красная стрелка показывает направление распространения излучения

По полученной картине трассировки лучей можно сделать вывод, что излучение ведёт себя в данной среде согласно аналитическим расчётам: при направлении излучения вдоль действительной оси координат оно огибает область единичной окружности, не взаимодействуя с ней, а затем волновой фронт

полностью восстанавливается до исходного. При распространении излучения вдоль мнимой оси координат часть лучей стремится к началу координат, но никогда его не достигнет, так как показатель преломления в данной точке стремится к бесконечности.

Таким образом, кривые на рисунке 17, полностью описывают характер распространения излучения. При этом стоит учитывать, что излучение распространялось из бесконечности (рисунок 20).

3.3 Конформное отображение $w(z) = \frac{1}{z}$

Теперь рассмотрим конформное отображение $w(z) = \frac{1}{z}$.

Проанализируем данное отображение по тому же принципу, что был применён к отображению Жуковского. Выделяем действительную и мнимую часть:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\operatorname{Im}(w) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (19)$$

Приравнивая полученные зависимости константам $\operatorname{Re}(w) = \operatorname{const}1$, $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{const}2$ и варьируя их, были получены окружности, показанные на рисунке 21.

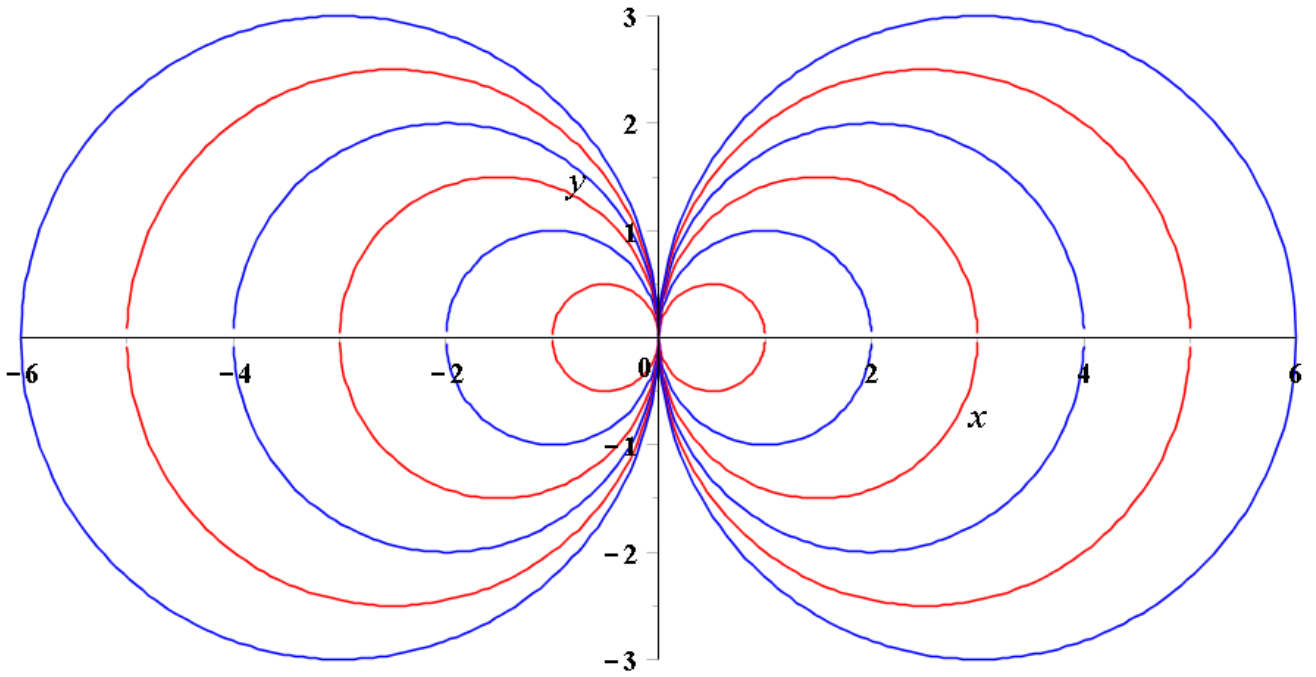


Рисунок 21 – Зависимость действительной части конформного отображения

$w(z) = \frac{1}{z}$. Для мнимой оси будет аналогичная зависимость

Профиль показателя преломления, соответствующий данному отображению, будет иметь вид:

$$n(x, y) = \frac{1}{z^2} \quad (20)$$

Данный профиль показателя преломления показан на рисунке 22.

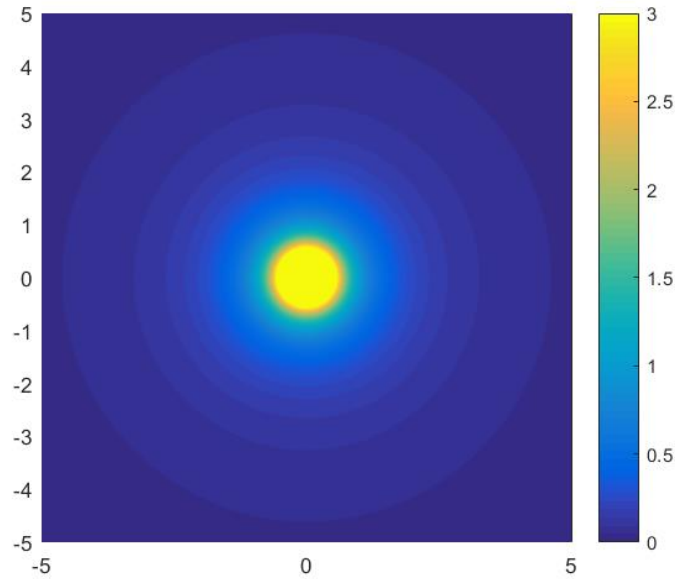


Рисунок 22 – Профиль показателя преломления, рассчитанный с помощью конформного отображения $w(z) = \frac{1}{z}$

Видно, что показатель преломления стремится к бесконечности в точке начала координат и к 0 на бесконечном удалении от неё.

Чтобы продемонстрировать взаимодействие излучения со средой, профиль показателя преломления которой был получен с помощью данного конформного отображения, в программном пакете Comsol Multiphysics методом конечных элементов была получена трассировка лучей, показанная на рисунке 23:

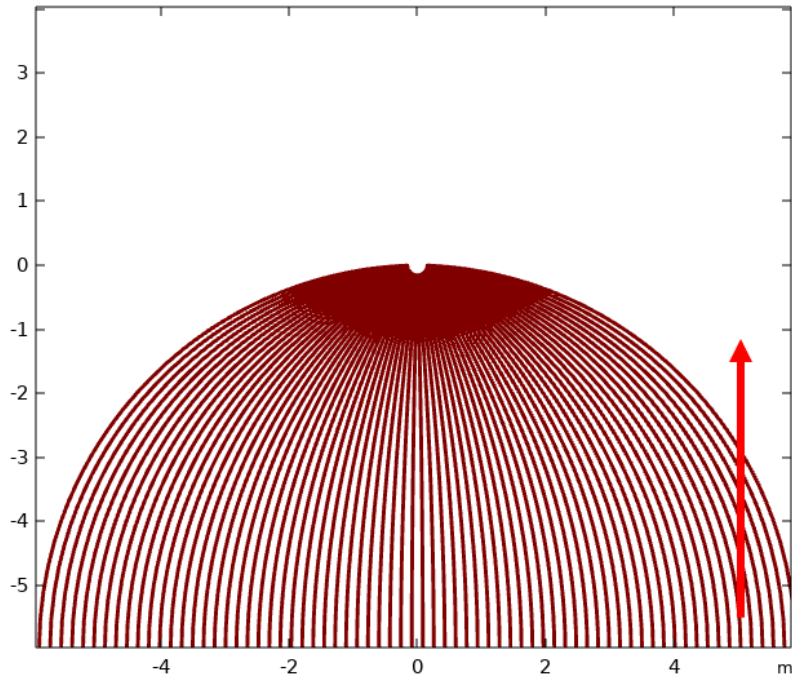


Рисунок 23 – Трассировка лучей в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = \frac{1}{z}$. Источник лучей в данном случае расположен на бесконечном удалении от начала координат параллельно оси OX . Красной стрелкой показано направление распространения излучения

Как видно по трассировке лучей, излучение, распространяющееся из бесконечности вдоль мнимой (или действительной) оси координат стремится к началу координат, что можно было предположить, исходя из профиля показателя преломления на рисунке 23. Теперь рассмотрим характер распространения лучей в случае, когда источник расположен на действительной оси координат. Трассировка лучей при данном расположении источника показана на рисунке 24.

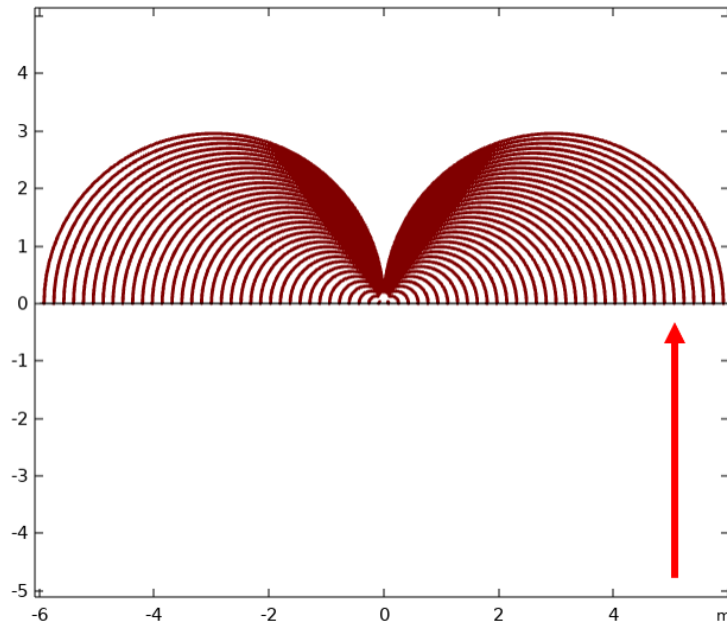


Рисунок 24 – Трассировка лучей в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = \frac{1}{z}$. Источник лучей расположен вдоль действительной оси координат. Красной стрелкой показано направление распространения излучения

Видно, что при данном расположении источника трассировка лучей повторяет аналитически полученные зависимости, показанные на рисунке 21.

Таким образом, в случае, когда источник лучей расположен на бесконечном отдалении от оси OX , лучи стремятся к началу координат, так как там показатель преломления стремится к бесконечности (рисунок 22). И в случае, когда источник расположен на оси координат, лучи распространяются в среде строго по тем же траекториям, полученным аналитически и показанным на рисунке 21.

3.4 Конформное отображение $w(z) = z^2$

Аналогично проделанной выше операции, выделяем действительную и мнимую части рассматриваемого конформного отображения $w(z) = z^2$:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

$$\operatorname{Re}(w) = x^2 - y^2 \quad (21)$$

$$\operatorname{Im}(w) = 2xy \quad (22)$$

Полученные кривые показаны на рисунке 25.

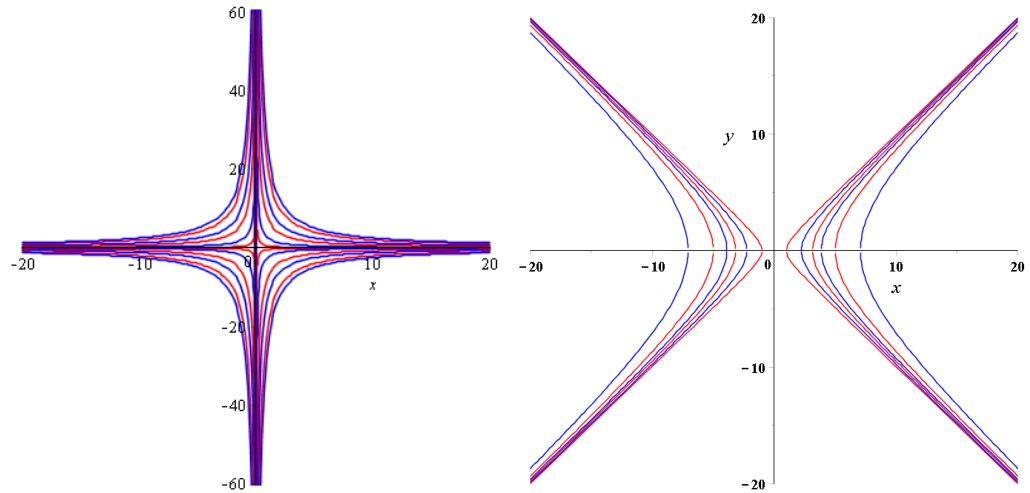


Рисунок 25 – Зависимость мнимой части (слева) и действительной части (справа) конформного отображения $w(z) = z^2$

Исходя из полученных аналитически кривых, можно сделать вывод, что в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью данного отображения, излучение, направленное вдоль координатной оси, распространяющееся из бесконечности, будет изменять своё направление на 90° при приближении к началу координат. Аналогичные выводы можно сделать, глядя на профиль показателя преломления, $n(x, y) = 2z$, соответствующий данному отображению, показанный на рисунке 26:

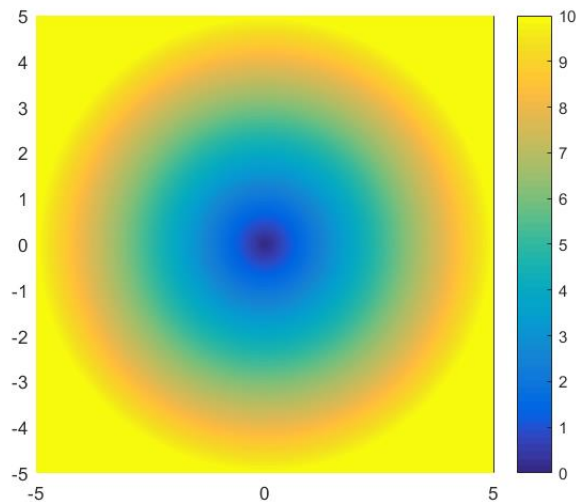


Рисунок 26 – Профиль показателя преломления, соответствующий конформному отображению $w(z) = z^2$

По полученному профилю показателя преломления можно увидеть, что показатель преломления стремится к 0 в начале координат и к бесконечности на бесконечном отдалении от него.

С помощью метода конечных элементов в программном пакете Comsol Multiphysics было смоделировано взаимодействие электромагнитного излучения со средой, заданной полученным профилем показателя преломления, а также продемонстрирована трассировка лучей. Данные зависимости показаны на рисунках 28 и 27, соответственно.

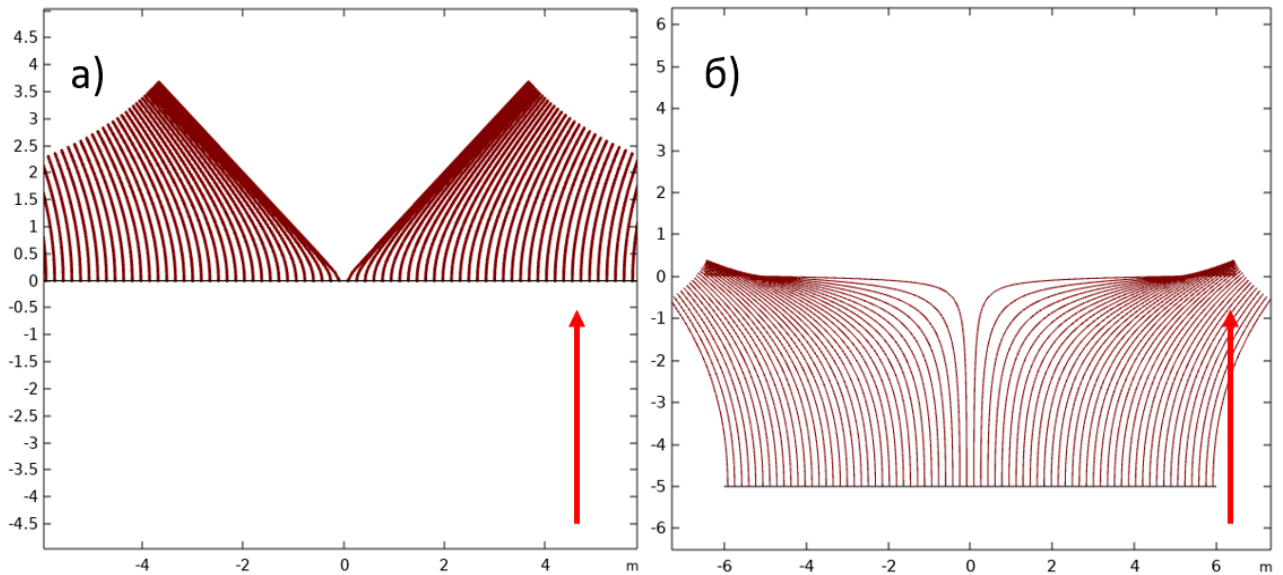


Рисунок 27 – Трассировка лучей в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = z^2$ в случае, когда источник расположен на действительной оси координат (а), а также на расстоянии неё (б). Красной стрелкой показано направление распространения излучения

Когда источник расположен на действительной оси, излучение распространяется, согласно аналитической зависимости, проиллюстрированной на рисунке 25. В свою очередь, когда излучение распространяется параллельно мнимой оси из бесконечности к началу координат, часть излучения (вблизи оси OY) изменяет своё направление на 90° и далее распространяется вдоль действительной оси. Остальная часть излучения (удалённая от оси OY) всё же пересекает действительную ось, что противоречит аналитической зависимости. Распределение поля при расположении источника, показанном на рисунке 27 (б), продемонстрировано на рисунке 28.

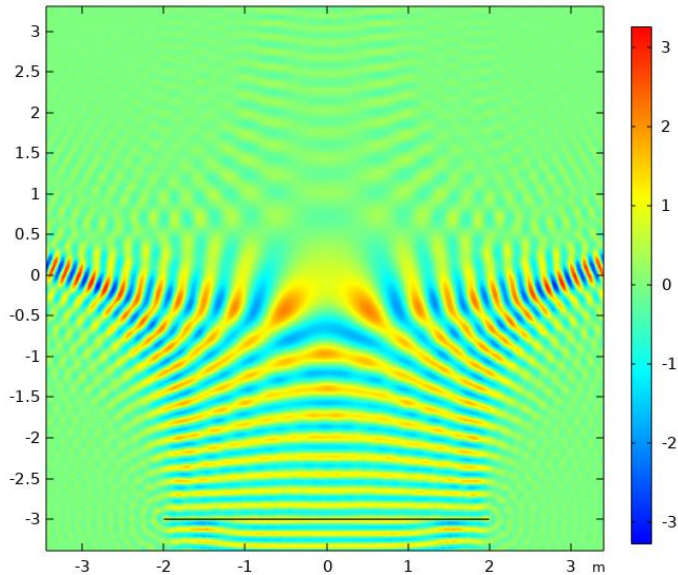


Рисунок 28 – Распределение поля в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = z^2$

На рисунке 28 также можно заметить, что часть излучения пересекает действительную ось координат. Данный эффект можно объяснить, вспомнив, что конформные отображения сохраняют углы между двумя прямыми. Если представить луч от источника в качестве одной такой прямой, а кривую, соответствующую зависимости действительной или мнимой части конформного отображения, как вторую кривую в данной формулировке правила, то луч будет распространяться в среде, сохраняя начальный угол, заданный между источником и кривой. В случае конформного отображения $w(z) = \frac{1}{z}$, когда источник расположен вдоль действительной оси, лучи распространяются вдоль аналитически полученных кривых (рисунок 24), так как источник расположен перпендикулярно к данным кривым. Если же рассмотреть случай, когда источник находится на бесконечном отдалении от действительной оси, показанном на рисунке 23, можно заметить, что окружности пересекают источник под определённым углом, и этот же угол остаётся неизменным воле распространения излучения. Данная зависимость также наблюдается в случае, когда источник расположен на расстоянии от действительной оси в среде, профиль показателя

преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = z^2$. Можно заметить, что чем дальше источник расположен от начала координат (рисунок 25) тем под большим углом он пересекает кривые, соответствующие зависимости мнимой части конформного отображения. Соответственно, излучение, сохраняя начальный угол между кривой и источником, пересекает ось OX под тем же углом.

Таким образом, для аналитического предсказания поведения излучения необходимо знать начальное расположение источника и угол, который он образует с траекториями (рисунки 25 и 21), соответствующими действительной или мнимой части конформного отображения. При этом источник может быть произвольной формы и находиться в произвольном месте координатной плоскости. Также стоит отметить, что нет необходимости знать одновременно действительную и мнимую часть конформного отображения, так как они по определению всегда находятся под углом 90° друг к другу.

3.5 Конформное отображение $w(z) = \sin z$

Далее рассмотрим конформные отображения, которые практически не используются в научных статьях по трансформационной оптике. Для начала рассмотрим конформное отображение $w(z) = \sin z$. Как было описано во вступлении, оно было использовано в статье [34]. Проанализируем данное отображение по схеме, использованной выше. Для начала выделим действительную и мнимую часть используемого отображения:

$$\operatorname{Re}(w) = \sin x \operatorname{ch} y \quad (23)$$

$$\operatorname{Im}(w) = \cos x \operatorname{sh} y \quad (24)$$

Зависимость действительной части конформного отображения $w(z) = \sin z$ представлена на рисунке 29.

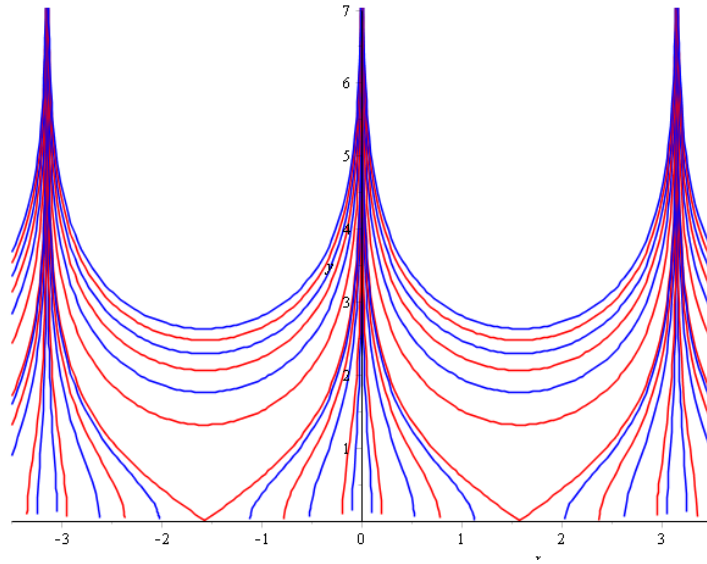


Рисунок 29 – Зависимость действительной части конформного отображения

$$w(z) = \sin z$$

Профиль показателя преломления, соответствующий данному отображению, будет выглядеть следующим образом:

$$n(x, y) = \cos z \quad (25)$$

Данный профиль представлен на рисунке 30.

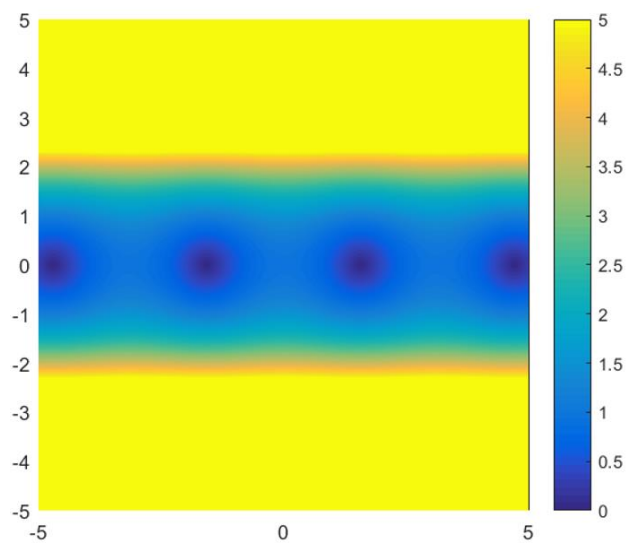


Рисунок 30 – Профиль показателя преломления, полученный с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$

Видно, что полученный профиль показателя преломления является периодическим: значения по действительной оси принимают значения от 0 до 1 в точках, соответствующих действительным значениям косинуса. На бесконечном же расстоянии от действительной оси координат показатель преломления стремится к бесконечности.

Исходя из полученных аналитически кривых, можно сделать вывод, что при расположении источника на действительной оси излучение будет сжиматься в поперечном сечении во много раз по сравнению с исходным сечением пучка. Данный эффект был подтверждён с помощью трассировки лучей в программном пакете Comsol Multiphysics и продемонстрирован на рисунке 31.

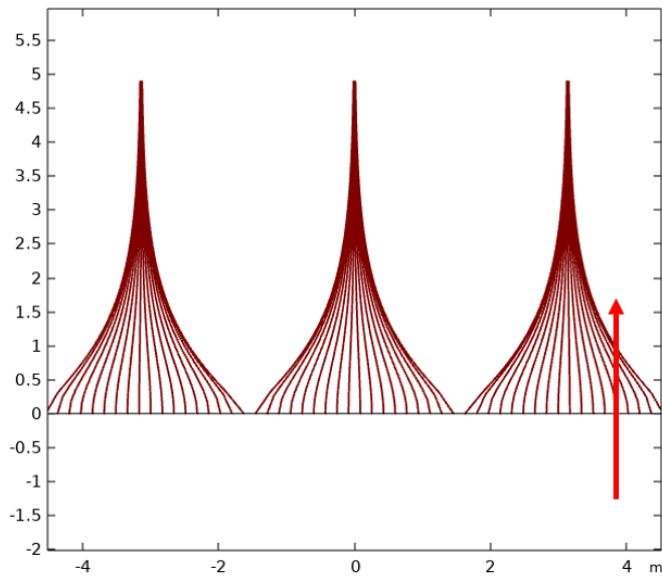


Рисунок 31 – Трассировка лучей в среде, профиль показателя преломления которой был получен с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$.

Красной стрелкой показано направление распространения излучения

Если же источник будет расположен параллельно действительной оси, но не лежать на ней, то излучение будет фокусироваться в определённых точках на действительной оси, а затем восстанавливать волновой фронт до исходного. Данный эффект продемонстрирован на рисунке 32 [36].

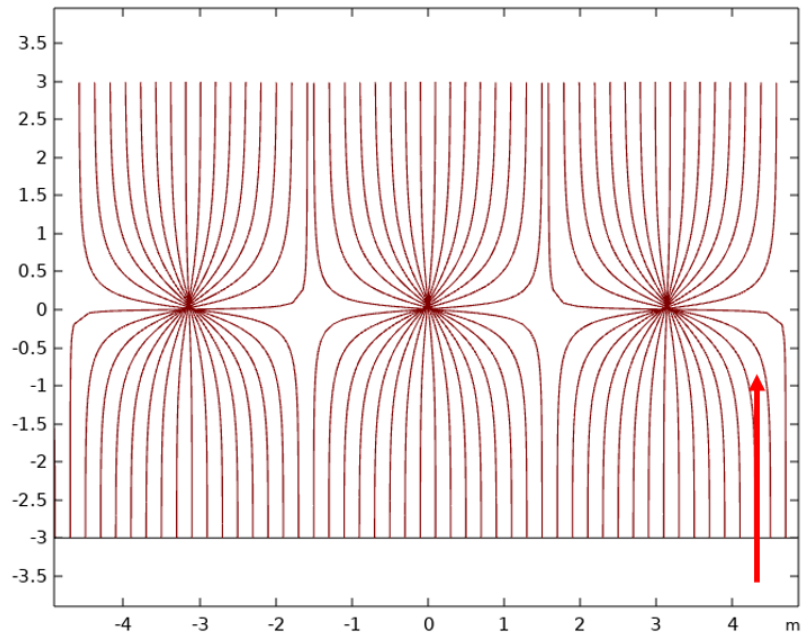


Рисунок 32 – Трассировка лучей в среде, профиль показателя преломления которой был получен с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$, в случае расположения источника на расстоянии от действительной оси

Так как показатель преломления в точке схождения лучей близок к 1, возможно заменить полуплоскость профиля показателя преломления воздухом без потерь на отражения.

В первом случае, показанном на рисунке 33, источник излучения, как и в случае на рисунке 32, расположен на расстоянии от действительной оси.

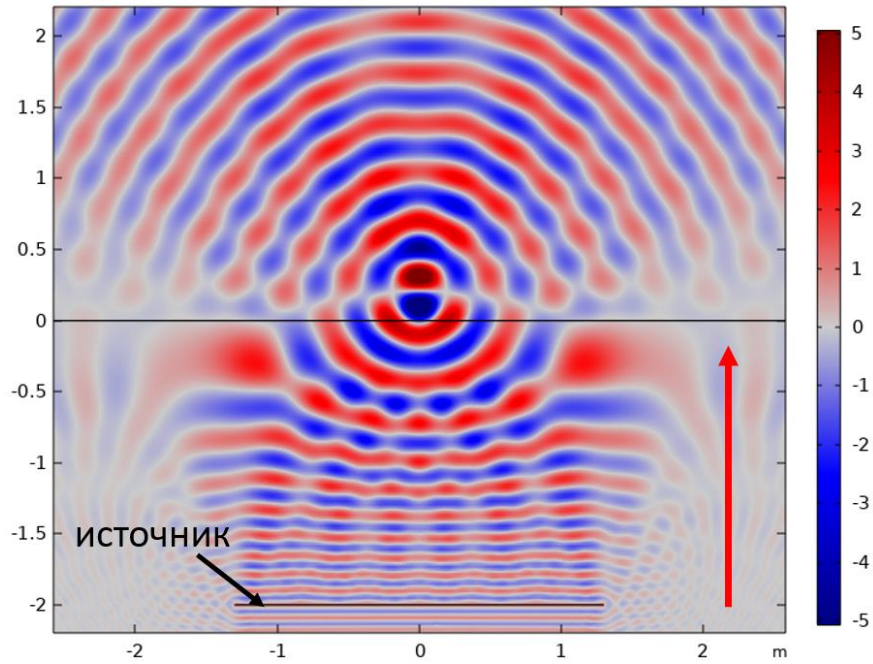


Рисунок 33 – Картина распределения поля в среде, профиль показателя преломления которой рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$ в случае, когда верхняя полуплоскость заменена воздухом. Красная стрелка показывает направление излучения

Видно, что волновой фронт плоского источника, расположенного в среде, на выходе из среды становится сферическим. Также можно получить обратную зависимость: преобразовать сферический волновой фронт точечного источника, расположенного в непосредственной близости от среды, в плоский. Для этого также необходимо в рассматриваемой среде полуплоскость заменить воздухом. Распределение поля точечного источника в данном случае показано на рисунке 34.

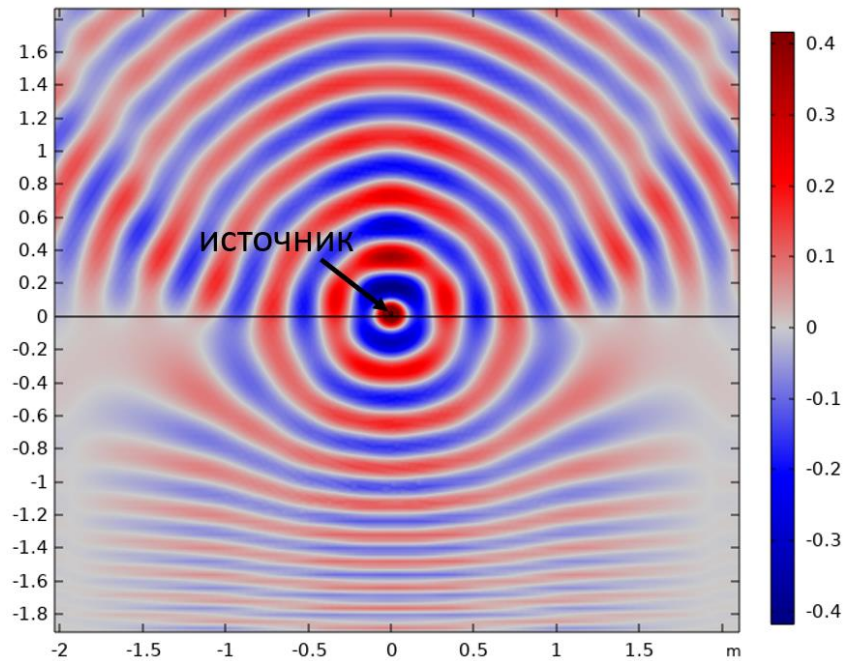


Рисунок 34 – Картина распределения поля точечного источника, расположенного в воздухе в непосредственной близости к границе среды, профиль показателя преломления которой был рассчитан с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$

Таким образом, с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$ и соответствующего ему профиля показателя преломления, были получены эффекты преобразования волновых фронтов: из сферического в плоский и из плоского в сферический. Устройства, основанные на полученном профиле, потенциально помогут упростить и уменьшить оптические схемы.

3.6 Конформное отображение $w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + \text{Arch } z)$

Рассмотрим другое отображение вида:

$$w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + \text{Arch } z) \quad (26)$$

где коэффициент $k=h/\pi$ – произвольная константа, которая была взята равной 1.

Исследуемое отображение можно переписать в виде:

$$w(z) = \left(\sqrt{z^2 - 1} + \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right) \quad (27)$$

Профиль показателя преломления, в свою очередь, будет иметь вид:

$$n(x, y) = \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \right| \quad (28)$$

Данный профиль показателя преломления показан на рисунке 35.

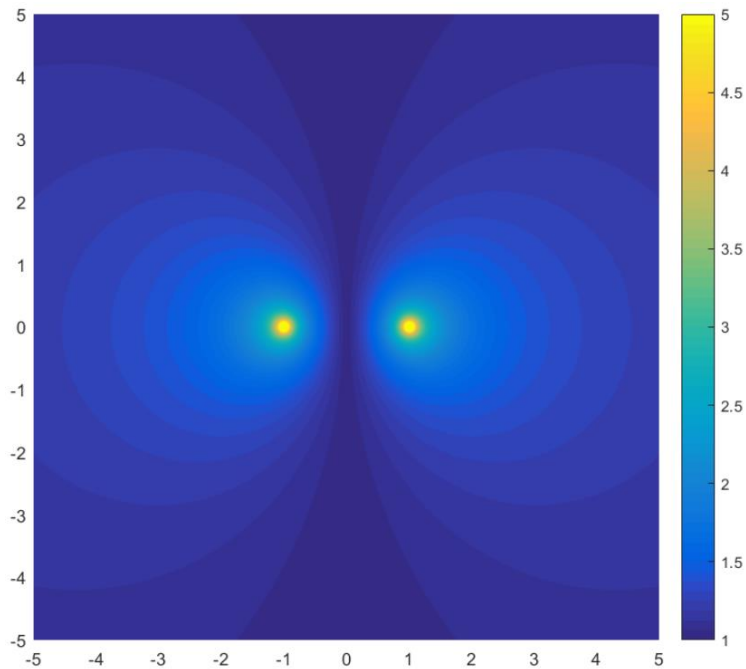


Рисунок 35 – Профиль показателя преломления, полученный с помощью конформного отображения $w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + \operatorname{Arch} z)$

Можно заметить, что в полученной среде есть две особенные точки ($z = \pm 1$), в которых показатель преломления стремится к бесконечности. Также на бесконечности показатель преломления стремится к 1.

Сложно выделить единое аналитическое выражение для действительной и мнимой части рассматриваемого конформного отображения из-за многозначности функций, из которых оно состоит. Проведём анализ отображения только на основании анализа выражения $\sqrt{z^2 - 1}$. Также рассматриваем только значения z , лежащие на действительной оси. Можно заметить, что при значениях z из

интервала $(-1,1)$ зависимости будут отличаться от остальных точек на действительной оси координат. Такую зависимость и можно наблюдать на картинах распределения поля, представленных на рисунках 36 и 37. На рисунке 36 (а) представлена картина распределения поля, когда источник расположен на действительной оси между точками $z = \pm 1$.

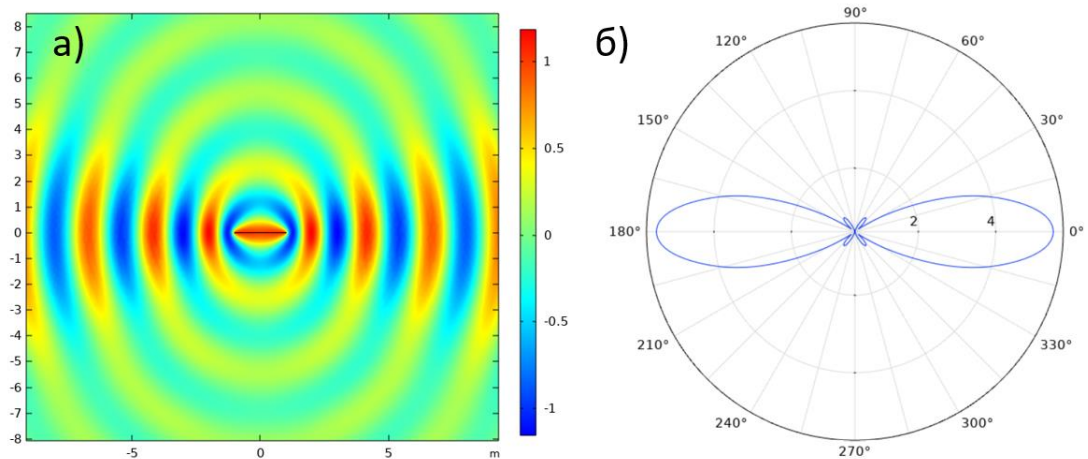


Рисунок 36 – Картина распределения поля (а) в среде, профиль показателя преломления которого получен с помощью конформного отображения $w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + \text{Arch } z)$ и диаграмма направленности (б) в случае, когда источник электромагнитного излучения расположен на действительной оси между точками с координатами $z = \pm 1$

Можно заметить на рисунке 36, что излучение источника распространяется вдоль той же оси, на которой расположен источник. То есть для внешнего наблюдателя источник будет расположен под 90° относительно его реального расположения. Таким образом, с помощью данного отображения можно получить иллюзию источника электромагнитного излучения.

На рисунке 37 представлена картина распределения поля и диаграмма направленности в случае, когда источник расположен на действительной оси между точками с координатами $z = \pm 3$.

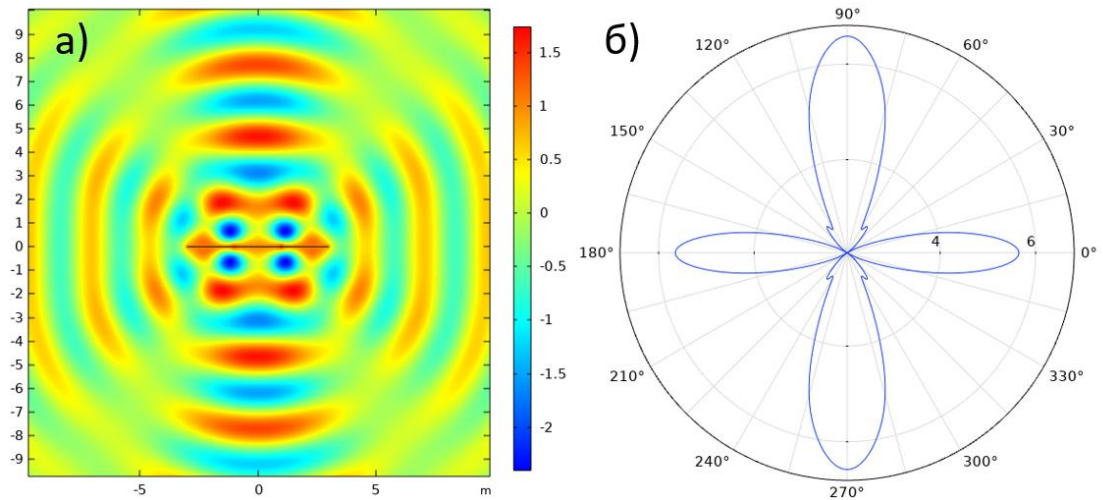


Рисунок 37 – Картина распределения поля (а) и диаграмма направленности (б) в случае, когда источник расположен на действительной оси между точек с координатами $z = \pm 3$

Таким образом, при таком расположении источника получилось реализовать другого рода иллюзию источника: плоский источник, расположенный на действительной оси, для наблюдателя будет выглядеть как два плоских скрещенных источника, расположенных под 90° друг к другу.

3.7 Выводы к главе 3

В данной главе было рассмотрено пять различных конформных отображений. Был проведен анализ как самих отображений, так и показателей преломления сред, которые получаются на основе данных отображений. Была рассмотрена трассировка лучей в таких средах и рассмотрено влияние положения источника излучения на ход распространения лучей в среде. После анализа рассмотренных в данной работе конформных отображений и полученных с их помощью сред было получено общее правило, позволяющее в дальнейшем аналитически вычислить траектории лучей от источника любой формы в любой точке пространства в среде, профиль показателя преломления которой был получен с помощью конформного отображения. Также в среде, показатель преломления которой вычислен с помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$, были

продемонстрированы эффекты преобразования плоского волнового фронта в сферический и, наоборот, из сферического в плоский.

В свою очередь, в среде, профиль показателя преломления которой был получен с помощью конформного отображения $w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + Arch z)$, был показан эффект иллюзии источников: в зависимости от положения плоского источника на действительной оси излучение распространялось либо также вдоль действительной оси, тогда наблюдатель видел повернутый на 90° источник, либо вдоль каждой из осей. В таком случае наблюдатель видел 2 скрещенных источника, в то время как на самом деле в среде находился 1 источник.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был описан и обоснован принцип сохранения углов между источником и кривыми, соответствующими действительной или мнимой части произвольного конформного отображения. Данный принцип может быть использован в будущем для аналитического описания траекторий лучей от источника произвольной формы.

С помощью конформного отображения $w(z) = \sin z$ был получен профиль показателя преломления. В данной среде был получен эффект сжатия поперечных размеров пучка в несколько раз. С помощью изменённой конфигурации, при которой одна полуплоскость была заполнена исследуемой средой, а другая воздухом, получилось достичь эффекта коллимации точечного источника, находящегося в воздухе. Волновой фронт такого источника, распространявшегося в среде, являлся плоским. Также была получена обратная зависимость: волновой фронт от плоского источника, расположенного в среде, на выходе из среды становился сферическим.

С помощью конформного отображения $w(z) = k(\sqrt{z^2 - 1} + \text{Arch } z)$ была получена иллюзия плоского источника, которая зависела от его расположения и размера. Если источник был расположен на действительной оси между точками с координатами $z = \pm 1$, то излучение распространялось вдоль действительной оси. Таким образом, для наблюдателя источник находился под 90° относительно его реального расположения. Если же источник располагался на действительной оси между точек с координатами $z = \pm 3$, то в добавок к излучению, описанному выше, также часть излучения была направлена вдоль мнимой оси координат. И таким образом, для наблюдателя один протяжённый источник выглядел, как 2 скрещенных источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dolin L. S. To the possibility of comparison of three-dimensional electromagnetic systems with nonuniform anisotropic filling //Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika. – 1961. – Т. 4. – №. 5. – С. 964-967.
2. Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling electromagnetic fields //science. – 2006. – Т. 312. – №. 5781. – С. 1780-1782.
3. Leonhardt U. Optical conformal mapping //science. – 2006. – Т. 312. – №. 5781. – С. 1777-1780.
4. Kundtz N. B., Smith D. R., Pendry J. B. Electromagnetic design with transformation optics //Proceedings of the IEEE. – 2010. – Т. 99. – №. 10. – С. 1622-1633.
5. Schmiele M. et al. Designing optical elements from isotropic materials by using transformation optics //Physical Review A. – 2010. – Т. 81. – №. 3. – С. 033837.
6. Landy N. I., Padilla W. J. Guiding light with conformal transformations //Optics express. – 2009. – Т. 17. – №. 17. – С. 14872-14879.
7. Ma Y. G., Wang N., Ong C. K. Application of inverse, strict conformal transformation to design waveguide devices //JOSA A. – 2010. – Т. 27. – №. 5. – С. 968-972.
8. Zang X., Jiang C. Manipulating the field distribution via optical transformation //Optics Express. – 2010. – Т. 18. – №. 10. – С. 10168-10176.
9. Campbell S. D. et al. Advanced gradient-index lens design tools to maximize system performance and reduce SWaP //Advanced Optics for Defense Applications: UV through LWIR. – International Society for Optics and Photonics, 2016. – Т. 9822. – С. 98220P.
10. Yi J., Burokur S. N., de Lustrac A. Conceptual design of a beam steering lens through transformation electromagnetics //Optics express. – 2015. – Т. 23. – №. 10. – С. 12942-12951.
11. Sun F. et al. Transformation optics: from classic theory and applications to its new branches //Laser & Photonics Reviews. – 2017. – Т. 11. – №. 6. – С. 1700034.

12. McCall M. et al. Roadmap on transformation optics // *Journal of Optics*. – 2018. – T. 20. – №. 6. – C. 063001.
13. Yao K. et al. An analogy strategy for transformation optics // *New Journal of Physics*. – 2014. – T. 16. – №. 6. – C. 063008.
14. Li J., Pendry J. B. Hiding under the carpet: a new strategy for cloaking // *Physical review letters*. – 2008. – T. 101. – №. 20. – C. 203901.
15. Sun F. et al. Optical implementation of Riemann sheets: an analogy to an electromagnetic ‘wormhole’ // *Optics express*. – 2017. – T. 25. – №. 10. – C. 11065-11077.
16. Liu Y., Chen H., Naeem M. Infinite Maxwell fish-eye in a finite area // *2015 9th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (METAMATERIALS)*. – IEEE, 2015. – C. 448-450.
17. Liu Y. et al. Transmutation of planar media singularities in a conformal cloak // *JOSA A*. – 2013. – T. 30. – №. 11. – C. 2280-2285.
18. Liu Y., Sun F., He S. Controlling lightwave in Riemann space by merging geometrical optics with transformation optics // *Scientific reports*. – 2018. – T. 8. – №. 1. – C. 514.
19. Li H., Xu Y., Chen H. Conformal cloaks at eigenfrequencies // *Journal Of Physics D: Applied Physics*. – 2013. – T. 46. – №. 13. – C. 135109.
20. Xiong Z. et al. Broadband illusion optical devices based on conformal mappings // *Frontiers of Physics*. – 2017. – T. 12. – №. 5. – C. 124202.
21. Jiang X. et al. Conformal transformations to achieve unidirectional behavior of light // *New Journal of Physics*. – 2012. – T. 14. – №. 5. – C. 053023.
22. Zhu C. et al. Optimized invisibility cloaks from the Logarithm conformal mapping // *Scientific reports*. – 2016. – T. 6. – C. 38443.
23. Xu L., Chen H. Logarithm conformal mapping brings the cloaking effect // *Scientific reports*. – 2014. – T. 4. – C. 6862.
24. Kan H. et al. Conformal cloaks from a function composition // *EPL (Europhysics Letters)*. – 2017. – T. 117. – №. 3. – C. 34002.

25. Xu L. et al. Perfect conformal invisible device with feasible refractive indexes //Physical Review B. – 2016. – Т. 93. – №. 4. – С. 041406.
26. Wu Q., Turpin J. P., Werner D. H. Quasi-conformal transformation electromagnetics enabled flat collimating lenses //Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation. – IEEE, 2012. – С. 1-2.
27. Turpin J. P. et al. Conformal mappings to achieve simple material parameters for transformation optics devices //Optics Express. – 2010. – Т. 18. – №. 1. – С. 244-252.
28. Werner D. H. et al. Transformation optics collimating lenses for multi-beam antenna applications //2011 4th IEEE International Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communications. – IEEE, 2011. – С. 458-461.
29. Xu L. et al. Conformal Singularities and Topological Defects from Inverse Transformation Optics //Physical Review Applied. – 2019. – Т. 11. – №. 3. – С. 034072.
30. Li S. et al. Design of conformal lens by drilling holes materials using quasi-conformal transformation optics //Optics express. – 2014. – Т. 22. – №. 21. – С. 25455-25465.
31. Zhang Y. et al. Transformation-invariant metamaterials //Physical review letters. – 2019. – Т. 123. – №. 6. – С. 067701.
32. Пикулин В. П., Похожаев С. И. Практический курс по уравнениям математической физики. – М. : Изд-во МЦНМО, 2004
33. Leonhardt U., Philbin T. Geometry and light: the science of invisibility. – Courier Corporation, 2010.
34. Lu C., Mei Z. L. Multi-functional lens based on conformal mapping //Optics express. – 2015. – Т. 23. – №. 15. – С. 19901-19910.
35. Wang X. et al. Self-focusing and the Talbot effect in conformal transformation optics //Physical review letters. – 2017. – Т. 119. – №. 3. – С. 033902.

- 36.V.V.Pesnyakov, A.V. Vozianova Some features of medium with refractive index based on conformal mapping $w = \sin(z)$ // IX Международная конференция по фотонике и информационной оптике. – 2020. – С. 617-618.
- 37.Xu L., Chen H. Conformal transformation optics //Nature Photonics. – 2015. – Т. 9. – №. 1. – С. 15.