Содержание

Аннотация

Для класса задач поиска **PPAD** уже доказана полнота многих важных теорем о неподвижной точке из разных областей математики, таких как теорема Брауэра о неподвижной точке, Лемма Шпернера, поиск равновесия Нэша, теорема Какутани, поиск клиринговых платежей в финансовых сетях с кредитными дефолтными свопами, теорема Жордана и другие. Однако до сих пор не была доказана полнота ККМ-леммы, другой не менее известной теоремы о неподвижной точке. В этой работе мы восполняем этот пробел, формулируя и доказывая соответствующую дискретную задачу, а впоследствии доказываем полноту двумерной дискретной ККМ-леммы в классе **PPAD**, а также доказываем принадлежность более общей задачи DISCRETE-KKM тому же классу.

1 Введение

В этой работе мы сформулируем и решим задачу, находящуюся на пересечение двух больших областей науки — теории неподвижных точек и теории сложности вычислений. Теория неподвижных точек изучает теоремы, которые гарантируют наличие неподвижных точек (это понятие определяется по-разному в зависимости от теоремы). Классическим результатом в этой области является теорема Брауэра о неподвижной точке [1], которая гласит, что у любого непрерывного отображения шара самого в себя найдётся неподвижная точка. Многие задачи этой теории имеют соответствующие вычислительные задачи, которые лежат и полны в сложностном классе **PPAD**, введённом Пападимитриу в [5].

1.1 Используемые определения

Напомним необходимые определения из теории сложности вычислений.

Определение 1. Класс **NP**
Классом **NP** (**N**on-deterministic **P**olynomial) называется множество языков A, для которых существует функция $V(x, s)$, принимающая значения $0/1$, вычислимая за полиномиальная от длины x входа такая, что

- Если $x \in A$, то $\exists s\ V(x, s) = 1$;
- Если $x \notin A$, то $\forall s\ V(x, s) = 0$;

Определение 2. Задача поиска
Пусть задан полиномиально вычислимый предикат $V(x, y)$. Задачей поиска называется задача отыскания по входу x такого y, что $V(x, y) = 1$, либо указания, что таких y не существует.

Определение 3. Класс **TFNP**
Классом **TFNP** (**T**otal **F**unctional **N**on-deterministic **P**olynomial) называется класс задач поиска, таких что для любого x существует y, такой что $V(x, y) = 1$ и $V(x, y)$ тоже полиномиально вычислимым.

Определение 4. Класс **PPAD**
Пусть даны два полиномиальных алгоритма S (successor) и P (predecessor),

получающие на вход строку из $\{0,1\}^n$ и выдающие также строку из $\{0,1\}^n$. Эти алгоритмы задают неявный орграф, в котором есть ребро $(x, y) \iff y = S(x) \wedge x = P(y)$. В задаваемом таким образом графе входящие и исходящие степени всех вершин не превосходят 1, а значит все его компоненты — либо цепочки, либо циклы.

Классом **PPAD** называется класс задач поиска, в которых в орграфе, заданным таким образом, по данному источнику x (то есть $S(P(x)) \neq x$, $P(S(x)) = x$ и $S(x) \neq x$) необходимо найти либо сток (то есть $P(S(x)) \neq x$, $P(x) \neq x$, $S(P(x)) = x$), либо другой источник. Существование стока или другого источника в таком графе легко доказывается, например, индукцией по числу вершин в графе.

Замечание. Задача из определения **PPAD** называется END-OF-THE-$LINE$.

Замечание. Из определений ясно, что $\mathbf{PPAD} \subset \mathbf{TFNP} \subset \mathbf{NP}$.

1.2 Известные результаты

Приведём список теорем и задач, чья полнота в классе **PPAD** уже доказана.

1. Лемма Шпернера ([2]). В [5] поставлена вычислительная задача и доказана полнота трёхмерного случая в классе **PPAD**, а в [18] доказана полнота двумерного случая.

2. Теорема о причёсывании ежа о том, что любое ненулевое непрерывное векторное поле f на сфере имеет точку x, в котором $f(x)$ перпендикулярно сфере. См. [15].

3. Теорема Брауэра о неподвижной точке о том, что любое непрерывное отображение замкнутого шара само в себя в конечномерном пространстве имеет неподвижную точку. См. [10].

4. Равновесие Нэша о сложности поиска равновесного набора смешанных стратегий в играх без коалиций. В [8] доказана полнота для случая 4 игроков, в [7] доказана полнота для случая 3 игроков и, наконец, в [9] доказана полнота для случая 2 игроков (задача BIMATRIX).

5. Теорема Жордана о том, что простая плоская замкнутая кривая разбивает $\mathbb{R}^2$ на 2 связные компоненты и является их общей границей. В [13] ставится соответствующая вычислительная задача ZERO-SURFACE-CROSSING и доказывается её полнота в **PPAD**.

6. Лемма Такера. Соответствующая вычислительная задача поставлена и доказана в [11].

7. Теорема Борсука-Улама. Доказательство полноты в **PPAD** см. [5].

8. Клиринговые платежи в финансовых сетях с кредитным дефолтным свопом, см. [14].

Отдельно уделим внимание теореме 2D-SPERNER и соответствующей вычислительной задаче, так как они нам пригодятся в дальнейшем в этой работе. Начнём со следующего определения:

Определение 5. Двумерная шпернеровская раскраска на квадрате
Пусть дана квадратная сетка $K \times K$ и её раскраска в 3 цвета $\{0, 1, 2\}$, на которую накладываются следующие правила:

1. Каждый квадратик покрашен ровно в 1 цвет.

2. Левый нижний квадратик покрашен в цвет 0, правый нижний квадратик покрашен в цвет 1, левый верхний — в цвет 2.

3. Квадратики на нижней стороне покрашены в цвета 0 или 1, на левой стороне в цвета 0 или 2, на правой и верхней стороне — в цвета 1 и 2.

Теорема 1. *Двумерная лемма Шпернера на квадрате*
Пусть дана квадратная сетка $K \times K$ и её раскраска в 3 цвета $\{0, 1, 2\}$, являющаяся шпернеровской.

Тогда найдётся узел сетки, среди соседей которого есть квадраты всех трёх цветов.

Определение. Задача 2D-SPERNER
Пусть дана квадратная сетка $K \times K$ и её раскраска в 3 цвета $\{0, 1, 2\}$

задана с помощью схемы полиномиального размера C. Будем интерпретировать выход C как раскраску в один из трёх цветов, взяв остаток от выхода схемы по модулю 3.

Задачей 2D-SPERNER будем называть задачу поиска по C узла сетки, среди соседей которого встречаются все три цвета либо поиск места, в котором нарушается условие шпернеровской раскраски.

1.3 KKM-лемма

Наша работа будет посвящена результату, полученным Кнастером, Куратовским и Мазуркевичем в 1929 году в [3].

Теорема. *KKM-лемма*
Пусть Δ_{n-1} *—* $(n-1)$*-мерный симплекс с* n *вершинами* $1, \ldots, n$. *KKM-покрытием называется набор* $C_1, \ldots, C_n$ *замкнутых множеств таких, что:* $\forall I \subset \{1, \ldots, n\}$ *выпуклая оболочка вершин, соответствующих* I, *покрыта объединением соответствующих множеств* $\bigcup_{i \in I} C_i$.

Тогда $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \varnothing$.

Доказательство. Эта теорема имеет несколько разных доказательств. Автор данной работы находит наиболее простым и элегантным доказательство с помощью леммы Шпернера (напр. [17]). □

Цель данной работы: сформулировать дискретную задачу-аналог KKM-леммы, поставить соответствующую вычислительную задачу и доказать её принадлежность классу **PPAD**.

2 Дискретная постановка ККМ-леммы

Чтобы сформулировать дискретную версию ККМ-леммы, первым делом надо определить, что мы будем рассматривать в качестве аналога замкнутых множеств на дискретной сетке. Поскольку речь идёт о раскрасках, достаточно наложить какие-то условия на то, как могут пересекаться ячейки сетки, покрашенные в разные наборы цветов.

Начнём с треугольной сетки, как наиболее близкой к исходной постановке ККМ-леммы.

Вообще, формулировка понятия *непрерывное множество* на дискретной сетке довольно неочевидная вещь. Можно было бы потребовать, чтобы все граничные объекты множества, то есть те, у которых есть сосед, принадлежащий другому множеству, были обязаны принадлежать какому-то другому множеству (пример соответствующей теоремы можно найти в [16]). Однако подобная формулировка не обобщается на пространства произвольной размерности, поэтому в этой работе мы будем накладывать следующее требование (обоснование такого выбора можно также найти в [16]):

Определение 6. Дискретное ККМ-условие на цвета
Если две ячейки сетки a и b считаются соседями, то

$$\nexists i, j \in \mathbf{C} : i \in C(a) \wedge j \notin C(a) \wedge i \notin C(b) \wedge j \in C(b),$$

где $\mathbf{C}$ – множество всех цветов (разное для разных постановок задачи), а $C(x)$ – набор цветов, в которые покрашена ячейка x.

Сразу заметим, что Определение 6 равносильно следующему:

Определение 7. Критерий дискретного ККМ-условия на цвета
Если две ячейки сетки a и b считаются соседями, то либо $C(a) = C(b)$, либо $C(a) \subset C(b)$, либо $C(b) \subset C(a)$.

Замечание. Этот критерий удобнее использовать при проверке контрпримеров, которые будут ниже в работе.

Сформулируем и докажем лемму, которая в дальнейшем поможет в доказательстве теорем в этой работе:

Лемма 1. *Достаточное условие существования всецветной вершины в клике.*
Пусть дана клика K_n, где $n \geqslant 1$, каждая вершина которой покрашена в некоторое подмножество цветов из $\{0, 1, \dots, c-1\}$ по следующим правилам:

1. *Для каждого цвета из $\{0, 1, \dots, c-1\}$ найдётся хотя бы одна вершина, покрашенная в этот цвет.*

2. *Любая пара вершин, соединённая ребром, удовлетворяет дискретному ККМ-условию на цвета (Определение 6).*

Тогда найдётся вершина, покрашенная во все цвета.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по c.

- **База индукции.** $c = 1$. В этом случае утверждение леммы следует из условия 1.

- **Переход.** Пусть лемма доказана для любого числа цветов из $1, \dots, c-1$. Докажем для c цветов.

  Пусть A_{c-1} – множество вершин K_n, покрашенных в цвет $c-1$. Если мы докажем, что для любого цвета $i \in \{0, 1, \dots, c-2\}$ найдётся вершина $x \in A_{c-1}$, такая что x покрашен в цвет i, то к A_{c-1}, поскольку оно непусто по условию 1, можно будет применить предположение индукции, и найдётся вершина $v \in A_{c-1}$, покрашенная во все цвета до $c-2$. Но она будет также покрашена в цвет $c-1$ по построению A_{c-1} и, следовательно, будет той вершиной, которую мы ищем.

  Предположим, что нашёлся такой цвет $i \in \{0, \dots, c-2\}$, что ни одна вершина A_{c-1} не покрашена в цвет i. Тогда, по условию 1, среди вершин $V(K_n) \backslash V(A_{c-1})$ найдётся вершина y, покрашенная в цвет i. Выберем теперь произвольную вершину x из A_{c-1} и посмотрим на пару вершин x, y: x покрашена в цвет $c-1$, но не покрашена в цвет i, а y покрашена в цвет i, но не покрашена в цвет $c-1$. Значит, мы нашли противоречие с условием 2 и наше предположение неверно.

  Следовательно к A_{c-1} можно применить предположение индукции и найти интересующую нас вершину, покрашенную во все цвета.

$\square$

В контексте этой работы графы будут строиться так: вершинами графа мы будем считать объекты сетки (треугольники, квадраты, кубы), а рёбрами будем соединять те объекты, которые мы будем считать соседями.

3 Двумерная дискретная ККМ-лемма

В этой главе мы сформулируем и докажем две версии дискретной ККМ-леммы на плоскости.

3.1 Случай треугольной сетки

Сформулируем предположение о том, как могла бы быть устроена ККМ-лемма в случае треугольной сетки. Треугольную сетку мы выбрали как наиболее близкую к исходной постановке ККМ-леммы.

Гипотеза 1. *Пусть $A_0A_1A_2$ — правильный треугольник на плоскости, триангулированный стандартным образом, то есть каждая сторона поделена на k равных частей (см. рис 3.1) и эти точки соединены всевозможными линиями, параллельными сторонам треугольника.*

Пусть каждый треугольник покрашен в некоторый набор из 3 цветов. Для простоты, будем считать, что цвета — это числа: $\mathbf{C} = \{0, 1, 2\}$ *и каждый треугольник покрашен в некоторое подмножество* $\mathbf{C}$*, причём выполняются следующие условия:*

1. *Каждый треугольник покрашен хотя бы в один цвет (то есть подмножество не может быть пустым).*

2. *Треугольник при вершине A_i покрашен в цвет i и, возможно, другие цвета.*

3. *Все треугольники, касающиеся стороны A_iA_j, покрашены хотя бы в один из цветов i и j (и, возможно, в оставшийся цвет)*

4. *Для любых двух соседних по ребру треугольников выполняется дискретное ККМ-условие на цвета (Условие 6).*

Тогда найдётся треугольничек, покрашенный во все три цвета одновременно.

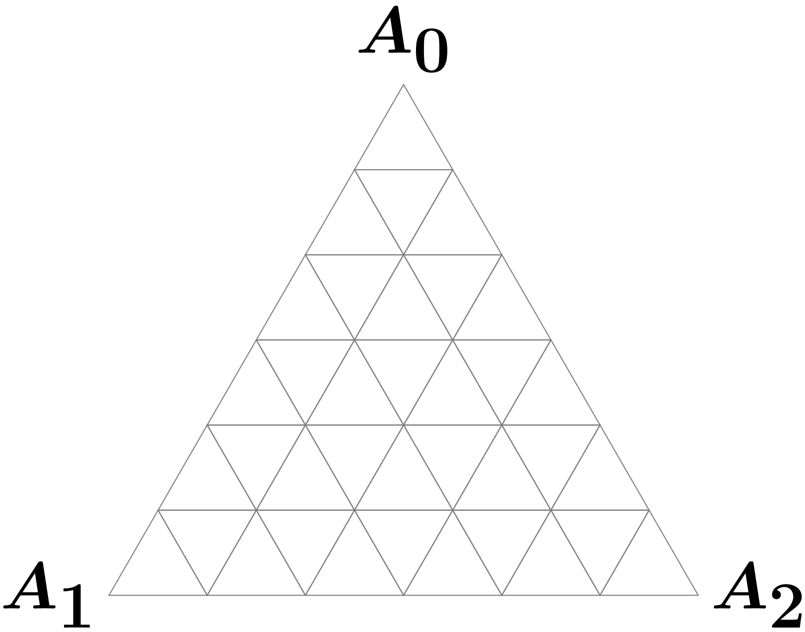


Рис. 3.1: Стандартная триангуляция

Факт. *Оказывается, что в такой постановке гипотеза неверна! Приведём контрпример (см. рис 3.2):*

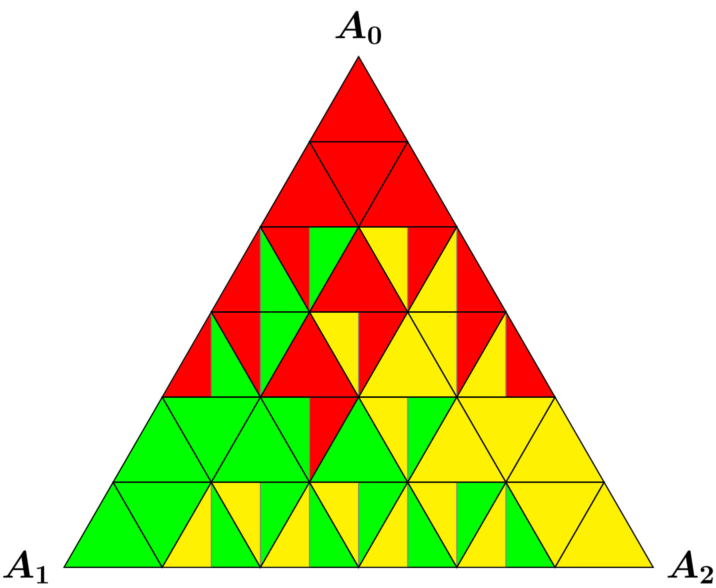


Рис. 3.2: Контрпример в случае, если соседями считаются треугольники с общим ребром

Раз в таких условиях наша гипотеза оказалась неверна, попробуем усилить условия, увеличив множество пар треугольников, которые мы считаем соседями. Вариантов у нас немного: теперь соседями мы будем считать треугольники, имеющие хотя бы одну общую точку.

В таких условиях уже можно сформулировать и доказать следующую теорему:

Теорема 2. ***Дискретная ККМ-лемма на треугольнике***
Пусть выполняются условия Гипотезы 1 за исключением того, что соседними считаются треугольники, имеющие хотя бы одну общую точку.

Тогда найдётся треугольник сетки, покрашенный во все 3 цвета одновременно.

Доказательство. Покрасим все точки треугольника по непрерывности: каждое ребро покрасим в цвета всех смежных с ним треугольников, аналогично поступим с вершинами. Заметим теперь, что мы получили раскраску, удовлетворяющую условиям ККМ-леммы в непрерывной постановке. Действительно

- Множество точек, покрашенных в каждый цвет замкнуто, так как является объединением конечного множества замкнутых множеств

- Каждый угол покрашен в соответствующий цвет, так как в этот цвет покрашен соответствующий угловой треугольничек.

- Каждая грань покрыта объединением соответствующих цветов, поскольку составляющую эту грань отрезки сетки принадлежат треугольникам, которые мы красили ровно необходимым образом.

.

Следовательно, существует точка X внутри ABC, покрашенная во все 3 цвета. Рассмотрим случаи того, куда могла попасть X:

Случай 1. X **лежит строго внутри какого-то треугольника сетки.** Тогда весь этот треугольник покрашен во все цвета и теорема доказана.

Случай 2. X **попала на ребро сетки (см. рис 3.3).** Пусть треугольники, содержащие ребро, на которое попала X — в треугольниках PQR и $P'QR$. Заметим, что тогда эти треугольники образуют клику размера 2 в смысле леммы 1. Действительно, в каждый цвет покрашен хотя бы один и з треугольников, для любой пары вершин выполняется дискретное ККМ-условие на цвета. Из леммы следует, что один из треугольников покрашен во все три цвета и теорема в этом случае доказана. Внимательный читатель может заметить, что в этом случае достаточно даже слабого дискретного ККМ-условия.

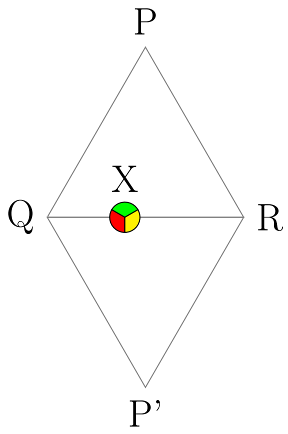


Рис. 3.3: Случай точки на ребре

Случай 3. X попала в вершину сетки (см. рис. 3.4). Опять-таки заметим, что треугольники PQX, QRX, RSX, STX, TWX, WPX образуют клику размера 6 в смысле сильного дискретного ККМ-условия, так как пересекаются по вершине X. Значит, по всё той же лемме 1 найдётся треугольник, покрашенный во все три цвета и теорема доказана.

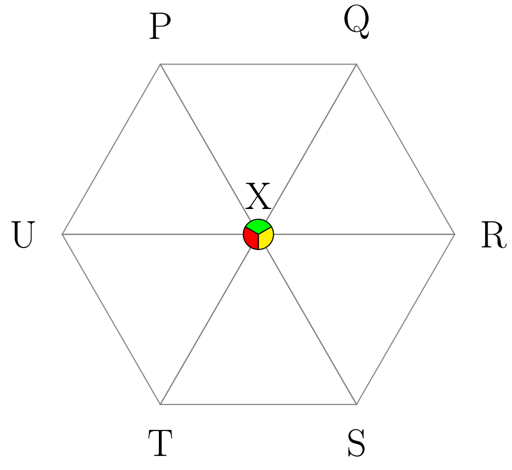


Рис. 3.4: Случай точки в вершине сетки

□

3.2 Случай квадратной сетки

Треугольная сетка обладает двумя важными недостатками: у неё нет простых обобщений уже на пространства размерности 3 и её неудобно кодировать. Поэтому мы переформулируем нашу теорему на случай квадратной сетки, а затем обобщим на большие размерности.

Замечание. При формулировании следующей и дальнейших теорем, связанных с квадратной/кубической сеткой, говоря, что квадрат/куб имеет координаты (x, y, z) мы будем иметь в виду, что такие координаты имеет его вершина с минимальными координатами (в двумерном случае это левый нижний угол).

Теорема 3. ***Дискретная ККМ-лемма на квадрате***

Пусть дан квадрат $ABCD$, на котором задана сетка $K \times K$, разбивающая его на K^2 квадратиков. Пусть каждый квадрат покрашен в один из 3 цветов со следующими условиями (см. рис 3.5):

1. *Квадрат $(0, 0)$ покрашен в цвет 0 (и, возможно, другие цвета).*
2. *Все квадраты (кроме $(0, 0)$), у которых i-я координата (номер строки или столбца) равна 0, **не покрашены** в цвет i.*
3. *Все квадраты, у которых хотя бы одна из координат равна $K - 1$, **не покрашены** в цвет 0. Другими словами, квадратики вдоль верхней и правой грани можно красить только в цвета 1 и 2.*
4. *Для любых двух квадратиков, соседних по вершине, выполняется дискретное ККМ-условие на цвета.*

Тогда найдётся квадратик, который покрашен во все 3 цвета.

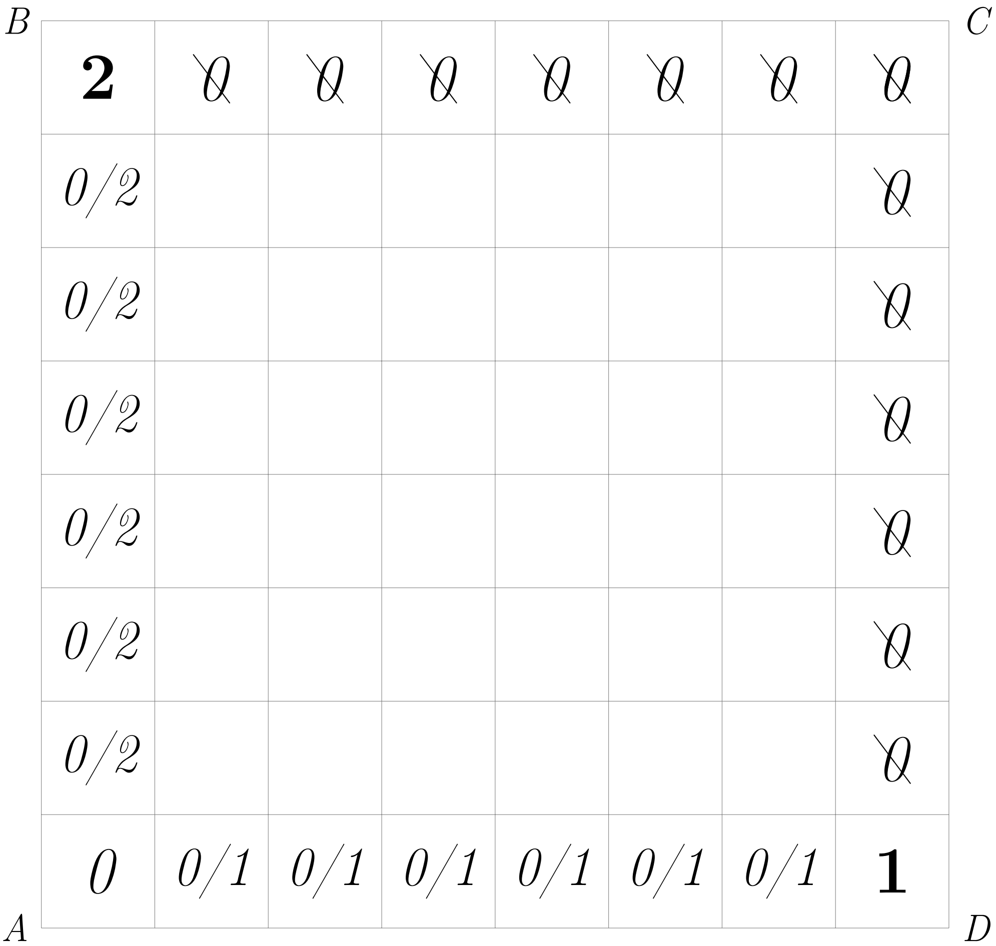


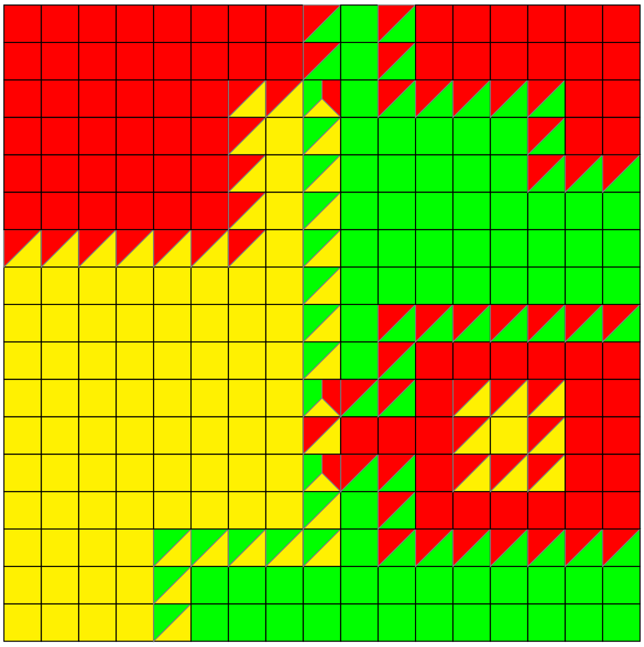
Рис. 3.5: Условия на раскраску квадратов сетки

Доказательство. Пусть дана ККМ-раскраска в цвета $\{0,1,2\}$. Перекрасим клетки в цвета $\{0,1,2\}$ по следующему правилу (пример см. на рис. 3.6):

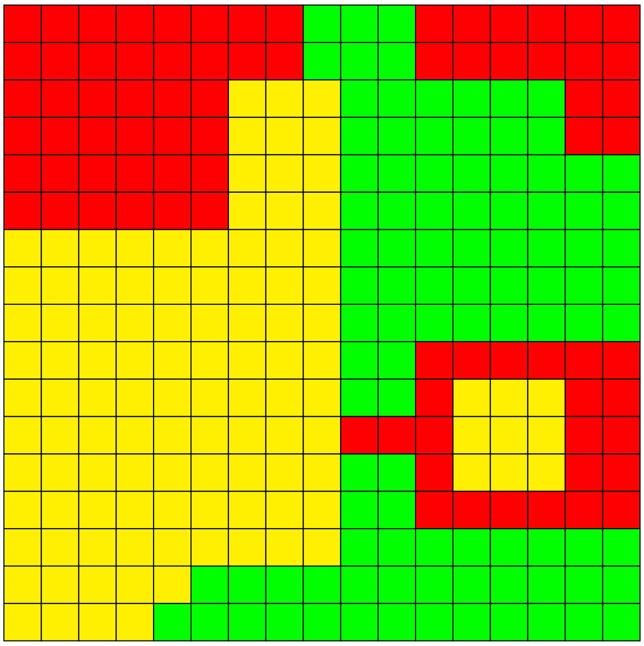
- $\{0, 01, 02, 012\} \to 0$.
- $\{1, 12\} \to 1$.
- $\{2\} \to 2$.

Заметим, что теперь мы получили раскраску квадратной сетки удовлетворяющую условиям 2D-SPERNER (Теорема 1). Действительно,

- В исходной раскраске квадрат $(0,0)$ мог иметь один из следующих цветов:$\{0, 01, 02, 012\}$ и в новой раскраске всем этим вариантам соответствует цвет $0'$.



(a) Пример 2D-KKM-раскраски



(b) Построенная по этой раскраске 2D-SPERNER-раскраска

Рис. 3.6: Сведение 2D-KKM к 2D-SPERNER

- Квадрат с координатами $(0, K-1)$ мог быть покрашен только в цвет 1, и в новой раскраске это цвет $1'$. С $(K-1, 0)$ ситуация симметричная.

- Квадраты вдоль нижней стороны (кроме угловых клеток) могли быть покрашены в следующие цвета $\underbrace{0, 01, 02, 012}_{0'}, \underbrace{\quad 1 \quad}_{1'}$, а значит в новой раскраске нижняя сторона покрашена в цвета $0'$ и $1'$. С левой стороной симметрично.

- Квадраты вдоль правой и верхней сторон (кроме $(0, K-1)$ и $(K-1, 0)$) могли быть покрашены в цвета $\underbrace{1, 12}_{1'}, \underbrace{\quad 2 \quad}_{2'}$, а значит в новой раскраске верхняя и правая грани покрашены в цвета $1, 2$.

Значит найдётся узел сетки X, среди соседей которого найдутся клетки всех цветов из $\{0', 1', 2'\}$, пусть это клетки $C_{0'}, C_{1'}, C_{2'}$ соответственно. Докажем, что $C_{0'}$ в исходной раскраске был имел цвета 012. Действительно, мы строили нашу раскраску так, что цвет i' в исходной раскраске обязательно содержит цвет i. Значит, четыре квадратика, содержащие X образуют клику в смысле Леммы 1 (т.к. в постановке теоремы мы заявили, что считаем соседями квадратики, имеющие хотя бы одну общую вершину), а значит среди них в исходной раскраске найдётся квадратик, покрашенный во все три цвета.

$\square$

4 Трёхмерная дискретная ККМ-лемма

Этот раздел данной работы посвящён обобщению леммы на пространства больших размерностей. Мы сформулируем определение ККМ-раскраски в общем случае и проведём доказательство в трёхмерном случае, как наиболее удобном для визуализации. Доказательство же общего случая от доказательства трёхмерного случая практически ничем не будет отличаться.

4.1 Постановка задачи

Пусть дан куб в пространстве $\mathbb{R}^n$, разделённый на K^n кубиков (то есть все кубики имеют вид $(x_0, x_0 + 1) \times (x_1, x_1 + 1) \times \ldots \times (x_{n-1}, x_{n-1} + 1)$, где все $x_i \in \{0, 1, \ldots, K - 1\}$). Раскрасим эти кубики в $n + 1$ цвет по следующим правилам (см. рис 4.1):

Определение 8. ККМ-раскраска трёхмерной кубической сетки

1. Каждый кубик покрашен хотя бы в один цвет.
2. Если у кубика i-я координата равна 0, то он не покрашен в цвет i.
3. Если у кубика хотя бы одна координата равна $K - 1$, то он не покрашен в цвет 0.
4. Если два кубика являются соседями, то для них выполняется дискретное ККМ-условие на цвета. То, какие кубики мы считаем соседними, мы уточним позже.

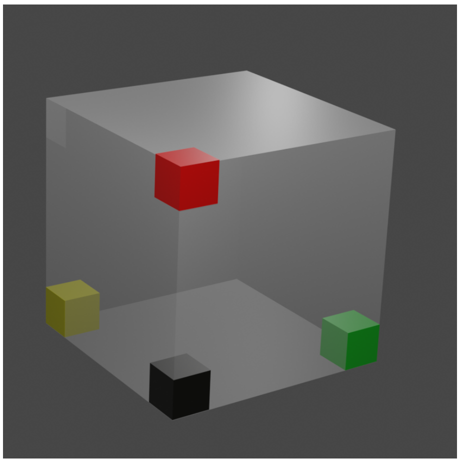


Рис. 4.1: Правила покраски в трёхмерном случае

Вопрос, на который нам хочется ответить: Какие кубики нам надо считать соседними, чтобы из этого следовало наличие кубика, покрашенного во все цвета? Аналогично случаю в $\mathbb{R}^2$, мы будем считать соседями кубики, имеющие хотя бы одну общую вершину.

4.2 Формулировка и доказательство теоремы

Сформулируем и докажем теорему, считая соседними кубики, имеющие хотя бы одну общую точку, заодно в ходе доказательства увидев, почему недостаточно считать соседями даже кубики имеющие общее ребро. Итак:

Теорема 4. *Дискретная ККМ-лемма на кубе в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.*
Пусть дана ККМ-раскраска, на которую дополнительно наложено сильное условие на цвета, а именно:

4. *Для любых двух кубиков, пересекающихся* ***хотя бы по вершине****, верно, что они либо покрашены в один и тот же набор цветов, либо набор цветов одного является подмножеством набора цветов другого.*

Тогда найдётся кубик, покрашенный во все $n+1$ цвет.

Доказательство. Проведём доказательство в $\mathbb{R}^3$, параллельно делая замечания, как рассуждения обобщить до пространства произвольной размерности.

Первым шагом дополним по непрерывности нашу раскраску кубиков до раскраски рёбер, граней и вершин.

Достроим к граням нашего куба с $x_i = K$ пирамиды внешним образом как показано на 4.2.

Назовём вершины этих достроенных пирамид V_i соответственно цветам, а O – начало координат. Заметим, что раскраска получившейся фигуры (склеенные куб и три (n в общем случае) пирамиды) топологически эквивалентна раскраске тетраэдра в 4 цвета (n-мерного симплекса в $n+1$ цветов в общем случае), подходящей под условия ККМ-леммы. Действительно, вершины этого тетраэдра покрашены в соответствующие

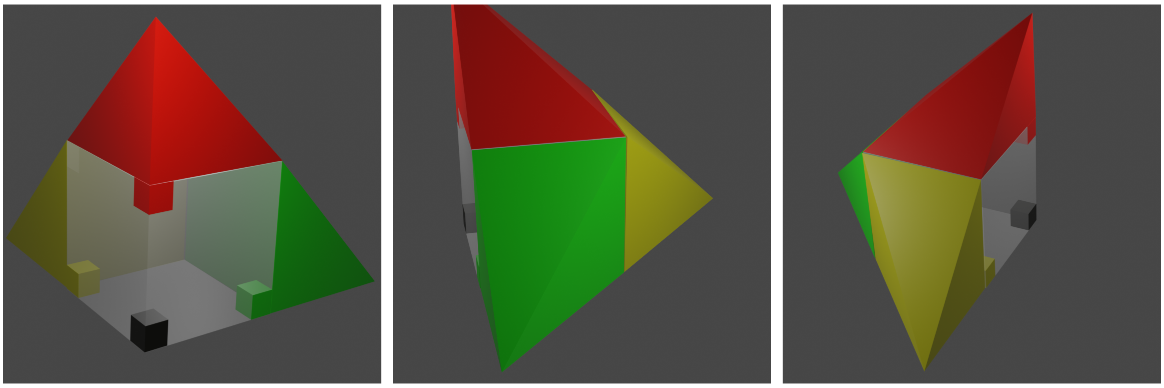


Рис. 4.2: Достроенные пирамиды с нескольких ракурсов

цвета, рёбра OV_i покрыты $C_0 \cup C_i$, рёбра V_iV_j покрыты $C_i \cup C_j$, грани OV_iV_j покрыты $C_0 \cup C_i \cup C_j$ и оставшаяся грань, которой топологически эквивалентна «внешняя крышка» нашей фигуры, покрыта $C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Значит, найдётся точка X внутри полученной фигуры, покрашенная во все цвета. Поскольку достроенные пирамиды покрашены только в один цвет, то X обязана попасть внутрь исходного куба.

Переберём, куда может попасть точка X:

Случай 1. X попала строго внутрь кубика. В этом случае весь кубик покрашен во все 4 цвета и мы обрели то, что искали.

Случай 2. X попала на грань между двумя кубиками. Этот случай полностью аналогичен случаю с точкой на ребре в двумерном случае и эти кубики образуют клику, а дальше по Лемме 1 получаем наличие кубика, покрашенного во все цвета.

Случай 3. X попала на ребро между двумя кубиками. Заметим, что если спроецировать картинку вдоль этого ребра, то задача сведётся к двумерному случаю, когда X попала в вершину сетки. Заметим, что в этом случае, если считать соседями только кубики, имеющие общую грань, то из этого не будет следовать, что один из кубиков, содержащих X, покрашен во все цвета. Контрпример к этому можно увидеть на рис. 4.3:

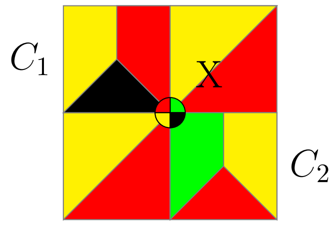


Рис. 4.3: Контрпример в $\mathbb{R}^3$ (спроецированный вдоль ребра), соседями мы считаем кубики с общей гранью, X попала на ребро.

Если же считать соседями кубики, смежные по ребру, то кубики C_1 и C_2 станут соседями и контрпример развалится. Более того, 4 кубика, содержащие ребро, на которое попала X, образуют клику размера 4 (т.к. каждый сосед каждого), на которой задана раскраска вершин в 4 цвета, подходящая под условие Леммы 1, а значит найдётся вершина (кубик), покрашенный во все 4 цвета.

Получается, что в случае с точкой на ребре достаточно наложить условие на цвета для кубиков с общим ребром, тогда найдётся кубик, покрашенный во все 4 цвета. Однако, остаётся ещё последний случай, где нам опять понадобится усилить требования.

Случай 4. X попала в вершину сетки. В этом случае оказывается, что если не считать соседями кубики, имеющие только одну общую точку, то необязательно найдётся кубик, содержащий X и покрашенный во все цвета. Приведём контрпример (рис. 4.4):

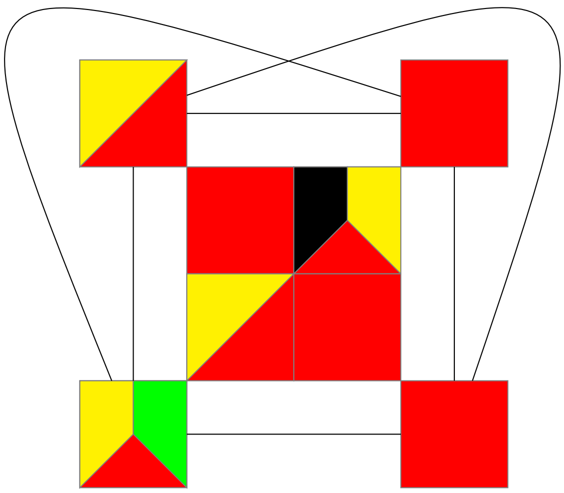


Рис. 4.4: Контрпример в случае, когда X попала в вершину сетки; соседними считаем кубики с общим ребром

На рис. 4.4 указаны цвета кубиков, содержащих X. Чтобы не рисовать трёхмерную картинку, мы обошлись указанием графа связности, а именно на картинке смежны те кубики, которые имеют общую точку (на картинке) или соединены ребром. На этом контрпримере смежны те квадратики, у которых соответствующие кубики пересекаются по грани или по ребру.

Итак, как мы видим, для того, чтобы сделать вывод о наличии кубика 4 цветов недостаточно считать соседями кубики с общим ребром, надо потребовать, чтобы соседними считались кубики имеющие хотя бы одну общую вершину.

Наконец, чтобы доказать, что найдётся кубик, покрашенный во все цвета, заметим, что кубики, содержащие X образуют клику размера 8 с раскраской в 4 цвета, удовлетворяющей условию Леммы 1 а значит одна из вершин (читай, кубик), покрашена во все цвета.

Итак, мы доказали, что куда бы ни попала точка X, найдётся кубик, покрашенный во все четыре цвета, а значит теорема доказана.

В общем случае, разумеется, рассуждения абсолютное аналогичные, поскольку во всех случаях кубики, содержащие X, являются соседями друг с другом и, по Лемме 1 один из них должен быть покрашен во все цвета. $\square$

5 Полнота в PPAD

В этом разделе данной работы мы сформулируем вычислительные задачи, соответствующие доказанным ранее теоремам и изучим их отношение к классу **PPAD**. В частности, мы докажем, что 2D-KKM полна в **PPAD**, а DISCRETE-KKM начиная с пространства размерности 3 лежит в **PPAD**.

Определение. Задача 2D-KKM
Пусть дана квадратная сетка $K \times K$ и её раскраска в 3 цвета $\{0, 1, 2\}$ задана с помощью схемы полиномиального размера C. Чтобы интерпретировать выход этой схемы, как раскраску клетки, будем брать это значение по модулю 8, а получившееся значение будем считать битовой маской, кодирующей раскраску клетки.

Задачей 2D-KKM будем называть задачу поиска по C либо квадратика сетки, покрашенного во все три цвета, либо места, где нарушаются правила KKM-раскраски.

Теорема 5. *Задача* 2D-KKM *является* ***PPAD****-полной.*

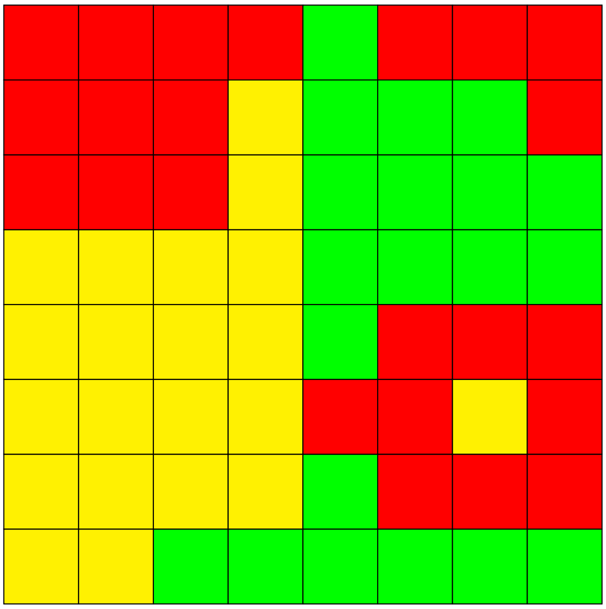
Доказательство. Чтобы доказать теорему 5, мы докажем, что 2D-KKM сводится к 2D-SPERNER и обратно. В свою очередь из полноты 2D-SPERNER, доказанной в [18], будет следовать полнота 2D-KKM, поскольку сведение 2D-KKM к 2D-SPERNER доказывает принадлежность 2D-KKM к **PPAD**, а сведение 2D-SPERNER к 2D-KKM доказывает полноту последней в **PPAD**.

5.1 Сведение 2D-KKM к 2D-SPERNER

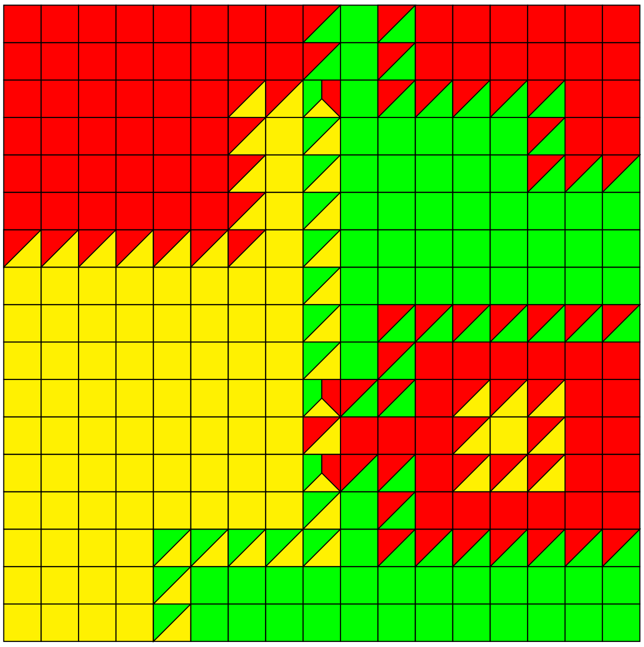
Данное сведение мы провели при доказательстве теоремы 3.

5.2 Сведение 2D-SPERNER к 2D-KKM

Пусть дана раскраска из 2D-SPERNER. Построим в более мелкую сетку размера $(2K + 1) \times (2K + 1)$, клетки которой будут соответствовать клеткам, рёбрам и узлам исходной сетки. Клетки, соответствующие клеткам исходной сетки (назовём их *C-клетки*), покрасим в тот же цвет. Клетки, соответствующие рёбрам сетки (назовём их *E-клетки*), покрасим в цвета клеток, которые они разделяли (получится одно- или двуцветная клетка). Клетки, соответствующие вершинам сетки (назовём их *V-клетки*) покрасим в цвета клеток, которые эту вершину содержат (получится одно-, дву- или трёхцветная клетка). Пример исходной раскраски и получившейся можно найти на рис. 5.1.



(a) Пример 2D-SPERNER-раскраски



(b) Построенная по этой раскраске 2D-KKM-раскраска

Рис. 5.1: Сведение 2D-SPERNER к 2D-KKM

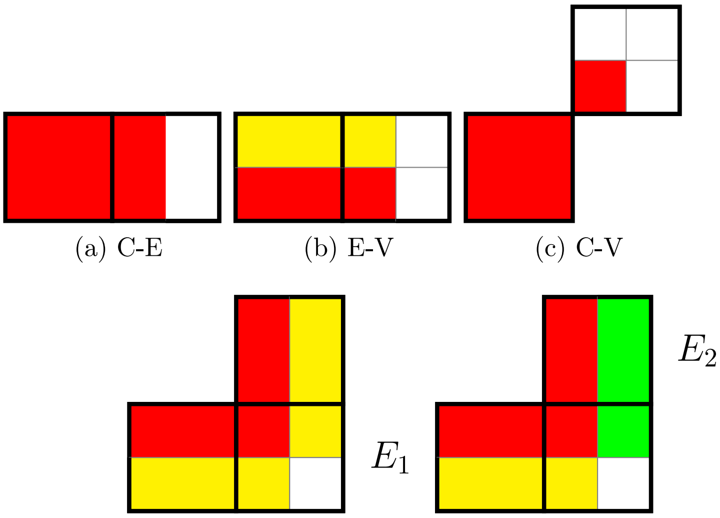
Докажем, что получившаяся раскраска удовлетворяет граничным условиям KKM-раскраски квадратной сетки (см. Теорему 3):

1. Левый нижний квадратик покрашен в цвет 0, поскольку он соответствует левому нижнему углу исходной сетки, а он принадлежит только одному квадратику, который как раз покрашен в цвет 0.

2. Квадратики на нижней стороне новой сетки могут быть либо E-клетками, либо V-клетками, а значит покрашены в цвета 0, 1 или 01, но не покрашены в цвет 2. Аналогично с квадратиками на левой стороне новой сетки.

3. Опять же аналогично предыдущему пункту, квадратики верхней и правой стороны покрашены в цвета 1, 2 или 12.

Проверим, что соседние квадратики новой сетки удовлетворяют дискретному KKM-условию на цвета. Возможны следующие случаи типов соседних квадратиков:



(a) C-E (b) E-V (c) C-V

(d) E_1 и E_2 не конфликтуют (e) E-E, конфликт

Рис. 5.2: Варианты раскраски соседних клеток в измельчённой сетке

Случай 1. C-E. В этом случае E-клетка, покрашена в цвет C-клетки и в цвет соседа C-клетки в исходной сетки. В любом случае, условие выполняется.

Случай 2. E-V. В этом случае V-клетка содержит все цвета E-клетки и, возможно, ещё какие-то.

Случай 3. C-V. В этом случае V-клетка содержит цвет C-клетки и, возможно, ещё какие-то.

Случай 4. E-E. В этом случае либо конфликта нет, либо он есть, но тогда смежная с E_1 и E_2 V-клетка должна быть покрашена во все 3 цвета и мы сразу нашли то, что искали.

Если же условия KKM-раскраски соблюдаются, то в новой сетке найдётся квадратик, покрашенный во все три цвета. Это может быть только V-клетка, а значит мы нашли узел исходной сетки, у которого есть соседи всех трёх цветов, а значит нашли решение для 2D-SPERNER.

$\square$

5.3 DISCRETE-KKM лежит в PPAD

Аналогично задаче 2D-KKM можно сформулировать задачу DISCRETE-KKM в пространстве любой размерности.

Определение 9. Задача DISCRETE-KKM Пусть дана квадратная сетка $\underbrace{K \times \ldots \times K}_{n}$ и её раскраска в цвета $\{0, 1, \ldots, n\}$ задана с помощью схемы полиномиального размера C. Чтобы интерпретировать выход этой схемы, как раскраску клетки, будем брать это значение по модулю 2^{n+1}, а получившееся значение будем считать битовой маской, кодирующей раскраску клетки.

Задачей DISCRETE-KKM будем называть задачу поиска по C либо кубика сетки, покрашенного во все цвета, либо места, где нарушаются правила KKM-раскраски.

Перед доказательством принадлежности этой задачи классу **PPAD**, докажем, что задача CUBIC-SPERNER (аналог задачи 2D-SPERNER) тоже лежит в **PPAD**.

Теорема 6. CUBIC-SPERNER $\in$ ***PPAD***

Доказательство. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [5]. □

Теорема 7. *Задача* DISCRETE-KKM *в пространствах размерности 3 и выше лежит в* ***PPAD****.*

Доказательство. Доказательство этого факта мы проведём, также сводя к CUBIC-SPERNER в пространстве произвольной размерности. Последняя лежит в **PPAD** в силу Теоремы 7.

Сведение будет аналогично двумерному случаю, а именно если кубик из KKM-раскраски покрашен в цвета $c_1, c_2, \ldots, c_r$, то соответствующий ему кубик в шпернеровской раскраске мы будем красить в $\min_{1 \leqslant i \leqslant r} c_i$. Докажем, что получившаяся по такому правилу раскраска будет шпернеровской:

- Нулевой кубик всегда покрашен в цвет 0, а значит и в новой раскраске будет покрашен в цвет 0.

- Кубики, у которых одна координата (i-я) равна $K-1$, а все остальные координаты нулевые в исходной раскраске покрашен в цвет i и только, а значит в новой раскраске он также раскрашен в цвет i.

- Рассмотрим кубик, у которого какие-то координаты нулевые и не рассмотренный ранее. Пусть его ненулевые координаты имеют номера $i_1, \ldots, i_p$. Тогда в новой раскраске этот кубик может быть покрашен в любой из соответствующих цветов, а также в нулевой цвет, но только если среди координат нет ни одной, равной $K-1$. В любом случае, в новой раскраске этот кубик не может иметь цвет, соответствующий ни одной из равных нулю координат.

- В новой раскраске кубик, у которого хотя бы одна координата равна $K-1$, не будет покрашен в 0 цвет, поскольку иначе в исходной раскраске он был покрашен в 0 цвет (и, возможно, другие), но такие кубики в ККМ-раскраске не могут иметь координаты, равные $K-1$ по определению дискретной ККМ-раскраски.

Поскольку получившаяся раскраска является шпернеровской, то найдётся узел сетки, среди соседей которого встречаются все цвета. Соседи этого узла образуют клику, в которой присутствуют все новые цвета, а мы строили новые цвета так, что кубик покрашенный в цвет i в новой раскраске обязательно покрашен в цвет i в исходной раскраске. Значит, мы нашли клику, в которой в исходной раскраске присутствуют все цвета, а значит найдётся кубик, который в исходной ККМ-раскраске был покрашен во все цвета, тем самым решив исходную задачу. $\square$

6 Заключение

В этой работе мы сформулировали и доказали ККМ-лемму в дискретной постановке в пространстве произвольной размерности. Кроме этого, мы сформулировали вычислительную задачу и показали её полноту в классе **PPAD** в случае двумерной сетки, а в случае пространств большей размерности доказали принадлежность соответствующей задачи тому же классу **PPAD**.

По итогам работы остаются открытыми следующие вопросы:

- Возможно ли ослабить условия в многомерной дискретной ККМ-лемме (Теорема 4)?
- Возможно ли ослабить условия в двумерной дискретной ККМ-лемме, чтобы соответствующая задача всё ещё была полна в **PPAD**?
- Полны ли соответствующие вычислительные задачи в случае пространств размерности 3 и выше?
- Существуют ли другие дискретные версии ККМ-леммы, которые полны в классах **PPA** ил **PPADS**?

Список литературы

[1] L.E.J Brower. „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten“. Deutsch. In: *Mathematische Annalen* 71 (1911), S. 97–115. doi: `10.1007/BF01456931`.

[2] Emanuel Sperner. „Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes“. Deutsch. In: *Abh. Math. Sem. Hamburg* (1928), S. 265–272.

[3] B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz. „Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe“. Deutsch. In: *Fundamenta Mathematicae* 14.1 (1929), S. 132–137. issn: 0016-2736 1730-6329. doi: `10.4064/fm-14-1-132-137`.

[4] Kuhn H.W. «Some Combinatorial Lemmas in Topology». англ. в: *IBM Journal of Research and Development* 4.5 (1960), с. 518—524. issn: 0018-8646. doi: `10.1147/rd.45.0518`.

[5] Christos H. Papadimitriou. «On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence». англ. в: *Journal of Computer and System Sciences* 48.3 (1994), с. 498—532. doi: `10.1016/S0022-0000(05)80063-7`.

[6] P. Jean-Jacques Herings и Adolphus J. J. Talman. «Intersection Theorems with a Continuum of Intersection Points». в: *Journal of Optimization Theory and Applications* 96 (1998), с. 311—335.

[7] Xi Chen и Xiaotie Deng. «3-NASH is PPAD-complete”». в: *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)* (янв. 2005).

[8] Konstantinos Daskalakis и Christos Papadimitriou. «Three-Player Games Are Hard». в: *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)* (2005).

[9] Xi Chen и Xiaotie Deng. «Settling the Complexity of Two-Player Nash Equilibrium». в: окт. 2006, с. 261—272. doi: `10.1109/FOCS.2006.69`.

[10] Xi Chen и Xiaotie Deng. «On the complexity of 2D discrete fixed point problem». англ. в: *Theoretical Computer Science* 410.44 (2009), с. 4448—4456. doi: `10.1016/j.tcs.2009.07.052`.

[11] Dömötör Pálvölgyi. "2D-TUCKER Is PPAD-Complete". English. In: *Internet and Network Economics*. Ed. by Stefano Leonardi. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 569–574. isbn: 978-3-642-10841-9.

[12] Paul W. Goldberg. *A Survey of PPAD-Completeness for Computing Nash Equilibria*. 2011. arXiv: `1103.2709 [cs.GT]`.

[13] Aviv Adler, Constantinos Daskalakis и Erik D. Demaine. «The Complexity of Hex and the Jordan Curve Theorem». в: *ICALP*. 2016.

[14] Steffen Schuldenzucker, Sven Seuken, and Stefano Battiston. "Finding Clearing Payments in Financial Networks with Credit Default Swaps is PPAD-complete". English. In: *8th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2017)*. Ed. by Christos H. Papadimitriou. Vol. 67. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017, 32:1–32:20. isbn: 978-3-95977-029-3. doi: `10.4230/LIPIcs.ITCS.2017.32`. url: `http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2017/8155`.

[15] Paul W. Goldberg and Alexandros Hollender. *The Hairy Ball Problem is PPAD-Complete*. English. 2019. arXiv: `1902.07657 [cs.CC]`.

[16] Daniil Musatov. «Discrete analogues of the KKM lemma and their computational complexity». 3rd Hungarian-Russian Combinatorics workshop (22 мая 2019).

[17] *Доказательство ККМ-леммы // URL: https://planetmath.org/kkmlemma.*

[18] Даниил Мусатов. *Сложность вычислений. Классика и современность.*