Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
Кафедра газовой динамики, горения и теплообмена

Направление подготовки / специальность: 24.04.02 Системы управления движением и навигация (магистратура)
Направленность (профиль) подготовки: Баллистика, аэродинамика и процессы управления летательных аппаратов

РАЗРАБОТКА БЫСТРОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

(магистерская диссертация)

Студент:
Чащин Георгий Сергеевич

_____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Макаров Владимир Евгеньевич,
канд. физ.-мат. наук

_____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**
_____
_____
(подпись консультанта)

Москва 2019

Реферат

При подготовке диплома, посвященном освоению метода решеточных уравнений Больцмана (LBE, МРУБ) был освоенатеорияперспективного численного метода, позволяющего строить чрезвычайно экономичные и эффективные алгоритмы решения широкого круга аэродинамических и акустических задач для дозвуковых течений газа на декартовых сетках. В качестве примера использования методасоздано программное приложение, позволяющее рассчитывать распространение двумерных возмущения. Выполненные расчеты продемонстрировали эффективность созданного алгоритма в широком диапазоне параметров задачи и его высокую точность.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, решеточная модель газа, решеточные уравнения Больцмана, функция распределения, интеграл столкновений

Содержание

Введение 3
I. Теоретический раздел 5
1. Основы кинетической теории 5
2. Решёточные уравнения Больцмана 9
3. Газовая динамика решёточной теории 15
4. Акустика в решёточном газе 17
II. Практический раздел 21
Заключение 26
Список использованных источников 27

Введение

Метод решеточных уравнений Больцмана (МРУБ) или LBM (LatticeBoltzmannMethod) – технология вычислительной газовой динамики, в основе которого лежат численные решения системы дискретизованных кинетических уравнений.

Метод решеточных уравнений Больцмана прост в своей реализации и эффективен при масштабировании на массивно-параллельных системах [16-21], что и обеспечило ему популярность.

В работе [22] представлены возможности использования МРУБ для расчета акустических характеристик современных дозвуковых гражданских самолетов, типичный пример которого приведен на рисунке В.1.

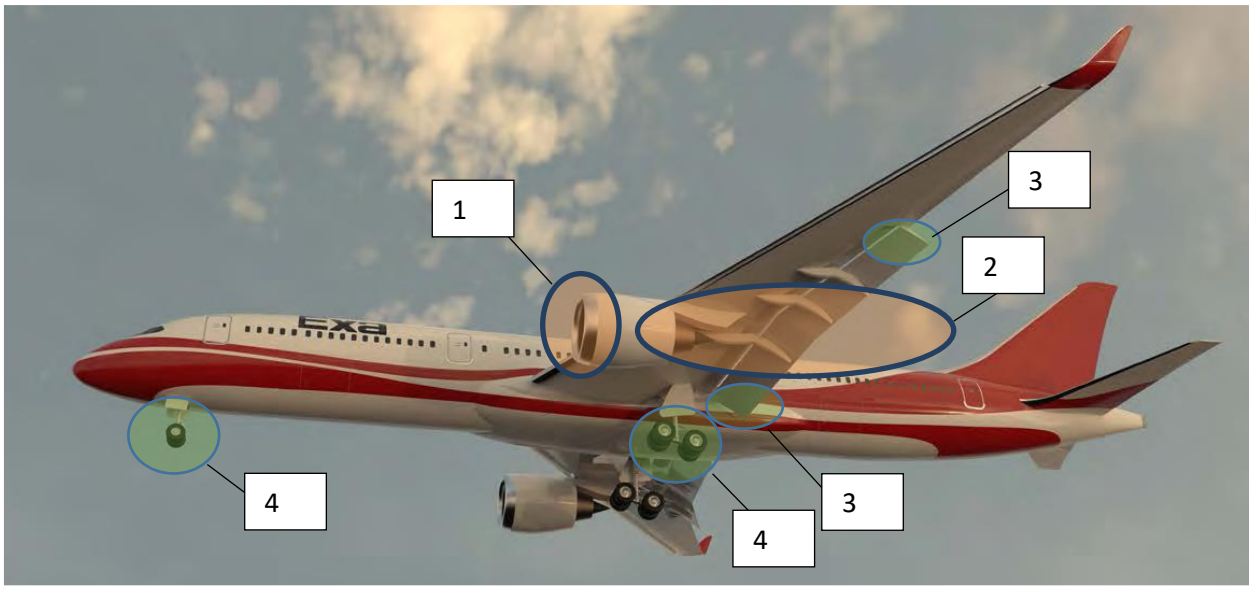


Рисунок В.1 – Типичный современный дозвуковой гражданский самолет во взлетно-посадочной конфигурации с основными зонами генерации шума: 1 – вентилятор при наличии звукопоглощающих конструкций в его канале; 2 –выхлопная струя; 3 – элементы механизации крыла; 4 – шасси

Расчеты акустических характеристик всего самолета проводились с учетом шума, излучаемого вентилятором [23-27], шума выхлопной струи при ее взаимодействии с планером [28-34], шума элементов механизации [35-39] и шума шасси [40-45].

В настоящей работе сделан шаг в освоении теории МРУБ и рассмотрен один из простейших примеров ее применения в задаче распространения 2D аэродинамических возмущений.

Автор благодарит сотрудника ВЦ РАН Ильина О.В. за проведенный курс лекций по теории МРУБ и сотрудника отдела 017 ЦИАМ Шорстова В.А. за помощь в построении алгоритма решения модельной задачи.

.

I. Теоретический раздел

1. Основы кинетической теории

В кинетической теории любой газ состоит из огромного числа частиц, движущихся с различными скоростями и в различных направлениях, причём размер каждой из частиц должен быть много меньше как характерного размера занимаемой газам области (или обтекаемого тела), так расстояния между самими частицами. Макроскопические параметры газа (как плотность и скорость) определяются суммой микроскопических параметров всех частиц, находящихся в этой точке. Столкновения частиц попарные, упругие и мгновенные.

Для описания такой системы используется понятие функции распределения $f(t,\bar{x},\bar{\xi})$, с помощью которой можно найти мгновенные значения плотности, плотности импульса и энергий, а также температура как мера хаотического движения:

$$\begin{gathered}\rho(t,\bar{x}) = \int f(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi,\\ \rho(t,\bar{x})\bar{u}(t,\bar{x}) = \int \bar{\xi} f(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi,\\ \rho(t,\bar{x})E(t,\bar{x}) = \int \left|\bar{\xi}\right|^2 f(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi\\ 3\rho(t,\bar{x})RT = \int |\bar{v}|^2 f(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где ($\bar{v}(t,\bar{x}) = \bar{\xi} - \bar{u}(t,\bar{x})$ - скорость относительно потока.

В отсутствии объёмных сил изменение такой системы описывается уравнением Больцмана

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\xi}\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \Omega(f), \tag{1.2}$$

где $\Omega(f)$ - интеграл столкновений, обладающий свойством:

$$\begin{gathered}\int \Omega\left(t,\bar{x},\bar{\xi}\right)\mathrm{d}^2\xi = 0,\\ \int \bar{\xi}\Omega(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi = 0,\\ \int \left|\bar{\xi}\right|^2 \xi\Omega(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi = 0\\ \int |\bar{v}|^2 \xi\Omega(t,\bar{x},\bar{\xi})\mathrm{d}^2\xi = 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

В модели Батнагара-Гросса-Крука интеграл столкновений имеет вид

$$\Omega(f) = \frac{f^{eq} - f}{\tau}, \tag{1.4}$$

где $f^{eq}(t, \bar{x}, \bar{v})$ – равновесная функция распределения, определяемая как функция распределения Максвелла

$$f^{eq} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi RT}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{v}^2}{2\mathrm{RT}}}, \tag{1.5}$$

а τ - время релаксации.

То есть газ находиться в состоянии локального равновесия, а изменение картины течения связано с отклонением от равновесного состояния. Отметим важное свойство равновесной функции распределения – сепарабельность:

$$f^{eq}(\bar{v}) = f_1^{eq}(v_x) f_1^{eq}(v_y). \tag{1.6}$$

Под f_1^{eq} следует понимать равновесную функцию в одномерном пространстве. Ещё отметим, что интегралы (1) при замене в них функции распределения равновесной не изменяются, что видно из формул (3).

Важную роль в кинетической теории занимают следующие тензоры, называемые моментами:

$$\begin{gathered} M = \int f d^2\xi = \rho \\ M_\alpha = \int \xi_\alpha f d^2\xi = \rho u_\alpha \\ M_{\alpha\beta} = \int \xi_\alpha \xi_\beta f d^2\xi \\ M_{\alpha\beta\gamma} = \int \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma f d^2\xi \end{gathered} \tag{1.7}$$

Третий тензор связан ещё с одним тензором:

$$M_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \int v_\alpha v_\beta f d^2\xi, \tag{1.8}$$

а $\sigma_{\alpha\beta} = -\int v_\alpha v_\beta f d^2\xi$ – тензор напряжений, получаемый с помощью замены из (1.1).

Особое место занимает свёртка последнего тензора:

$$M_{\alpha\beta\beta} = \int \xi_\alpha \left|\bar{\xi}\right|^2 f d^2\xi = \rho|\bar{u}|^2 u_\alpha + \rho RT + 2\sigma_{\alpha\beta}u_\beta + \int v_\alpha |\bar{v}|^2 f d^2\xi, \qquad (1.9)$$

$q_\alpha = \int v_\alpha |\bar{v}|^2 f d^2\xi$ - вектор теплового потока.

Проинтегрируем уравнение Больцмана

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^2\xi + \int \xi_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_\gamma} d^2\xi = \int \Omega\left(t, \bar{x}, \bar{\xi}\right) \mathrm{d}^2\xi\,. \qquad (1.10)$$

Произведя замену порядков интегрирования и дифференцирования и используя свойство интеграла столкновений, получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0 \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\gamma)}{\partial x_\gamma} = 0. \qquad (1.11)$$

Проинтегрировав уравнение Больцмана, умноженное на ξ_α

$$\int \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial t} d^2\xi + \int \xi_\alpha \xi_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_\gamma} d^2\xi = \int \xi_\alpha \Omega\left(t, \bar{x}, \bar{\xi}\right) \mathrm{d}^2\xi \qquad (1.12)$$

После аналогичных преобразований получим уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial M_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} = 0 \text{ или } \rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \rho u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} \qquad (1.13)$$

По тем же соображениям имеем из уравнения

$$\int \xi_\alpha \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial t} d^2\xi + \int \xi_{\alpha\xi_\alpha} \xi_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_\gamma} d^2\xi = \int \xi_\alpha \xi_\alpha \Omega\left(t, \bar{x}, \bar{\xi}\right) \mathrm{d}^2\xi \qquad (1.14)$$

закон сохранения энергии в двух видах:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial M_{\alpha\alpha\gamma}}{\partial x_\gamma} = 0 \text{ или } \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u_\beta)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial(u_\alpha \sigma_{\alpha\beta})}{\partial x_\beta} + \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\beta} \qquad (1.15)$$

Точный вид уравнения Навье-Стокса определяется разложением Чепмена-Энскога, когда предполагаем справедливость разложения

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f^{(n)}, \qquad (1.16)$$

где $\varepsilon \ll 1$ – число Кнудсена.

Нулевой член ряда есть равновесная функция, ограничивая разложение нулевым порядком, получим уравнения Эйлера. Рассматривая нулевой и первый порядок – Уравнение Навье-Стокса для вязкого газа.

2. Решёточные уравнения Больцмана

В методе решёточных уравнений Больцмана частицы имеют конечный набор возможных скоростей. Расчётная область покрывается квадратной сеткой с постоянным шагом Δh. Производится дискретизация по времени с постоянным шагом Δt. Получаются следующие скорости:

$$\bar{c}_0 = (0;0), \qquad \bar{c}_1 = \left(\frac{\Delta h}{\Delta t};0\right), \qquad \bar{c}_2 = \left(0;\frac{\Delta h}{\Delta t}\right),$$
$$\bar{c}_3 = \left(-\frac{\Delta h}{\Delta t};0\right), \quad \bar{c}_4 = \left(0;-\frac{\Delta h}{\Delta t}\right), \qquad \bar{c}_5 = \left(\frac{\Delta h}{\Delta t};\frac{\Delta h}{\Delta t}\right), \tag{2.1}$$
$$\bar{c}_6 = \left(-\frac{\Delta h}{\Delta t};\frac{\Delta h}{\Delta t}\right), \quad \bar{c}_7 = \left(-\frac{\Delta h}{\Delta t};-\frac{\Delta h}{\Delta t}\right), \qquad \bar{c}_8 = \left(\frac{\Delta h}{\Delta t};\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)$$

Такая модель носит название D2Q9, где сначала указана размерность пространства, а затем число скоростей. Эта модель образуется как прямое (декартово) произведение модели D1Q3 самой на себя. Одномерная модель представлена следующими скоростями:

$$\mathrm{c}_0 = 0, \quad c_1 = \frac{\Delta h}{\Delta t}, \quad c_{-1} = -\frac{\Delta h}{\Delta t} \tag{2.2}$$

В связи с этим допущением преобразуется и уравнение Больцмана к виду:

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \bar{c}_i \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}} = \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau} \text{ для } i = 0,1,\dots,8\,, \tag{2.3}$$

Здесь индекс нумерует компоненты функций распределения для соответствующей скорости частиц. Также меняются определения моментов:

$$\begin{aligned} M &= \textstyle\sum_i f_i = \rho, \\ M_\alpha &= \textstyle\sum_i f_i\, c_{i\alpha} = \rho u_\alpha, \\ M_{\alpha\beta} &= \textstyle\sum_i f_i\, c_{i\alpha} c_{i\beta}, \\ M_{\alpha\beta\gamma} &= \textstyle\sum_i f_i\, c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Замена интегрирования суммированием необходимо также и в свойствах интеграла столкновений, однако:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_i \Omega(f_i) = 0,\\
&\textstyle\sum_i \Omega(f_i)\,\bar{c}_i = 0,\\
&\textstyle\sum_i \Omega(f_i)|\bar{c}_i|^2 = 0\ ,\\
&\textstyle\sum_i \Omega(f_i)|\bar{c}_i - \bar{u}|^2\bar{c}_i = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Равновесная функция такой статистики тоже отличается, однако введя в рассмотрение решёточную скорость звука (с помощью которой можно ввести и температуру решётки), разложим функцию Максвелла в ряд Тейлора по скорости потока (что вводит ограничение на число Маха, квадрат которого должен быть много меньше единицы):

$$\begin{aligned}
&f_i^{eq} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi c_s^2}} e^{-\frac{(\bar{c}_i - \bar{u})^2}{2c_s^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi c_s^2}} e^{-\frac{(|\bar{c}_i|)^2}{2c_s^2}} \Big[1 + \frac{\bar{c}_i\bar{u}}{c_s^2} + \frac{(\bar{c}_i\bar{u})^2}{2c_s^4} - \frac{|\bar{u}|^2}{2c_s^2} +\\
&O\Big(\frac{|\bar{u}|^3}{c_s^3}\Big)\Big] = w_i\rho\Big[1 + \frac{\bar{c}_i\bar{u}}{c_s^2} + \frac{(\bar{c}_i\bar{u})^2}{2c_s^4} - \frac{|\bar{u}|^2}{2c_s^2} + O\Big(\frac{|\bar{u}|^3}{c_s^3}\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где w_i - весовые коэффициенты, которые просто определить для одномерного случая.

Равновесной функцией распределения в этом случае будет:

$$\begin{aligned}
&f_0^{eq} = w_0\rho\Big[1 - \frac{u^2}{2c_s^2}\Big],\\
&f_1^{eq} = w_1\rho\left[1 + \frac{cu}{c_s^2} + \frac{(cu)^2}{2c_s^2} - \frac{u^2}{2c_s^2}\right]\\
&f_{-1}^{eq} = w_{-1}\rho\Big[1 - \frac{cu}{c_s^2} + \frac{(cu)^2}{2c_s^2} - \frac{u^2}{2c_s^2}\Big]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Однако из неё должны получаться моменты, то есть:

$$\begin{aligned}
&f_{-1}^{eq} + f_0^{eq} + f_1^{eq} = \rho\ ,\\
&-cf_{-1}^{eq} + cf_1^{eq} = \rho u,\\
&c^2 f_{-1}^{eq} + c^2 f_1^{eq} = \rho u^2 + \rho c_s^2,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $c = \frac{\Delta h}{\Delta t}$ – модуль скорости.

Решая эту систему получим, что

$$f_0^{eq} = \rho(1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{c_s^2}{c^2}),$$
$$f_1^{eq} = \rho(\frac{u}{2c} + \frac{u^2}{2c^2} - \frac{c_s^2}{2c^2}), \tag{2.9}$$
$$f_{-1}^{eq} = \rho(-\frac{u}{2c} + \frac{u^2}{2c^2} - \frac{c_s^2}{2c^2}) \quad ,$$

Однако, очевидно, что свёртка третьего момента будет воспроизведена неточно, и подстановкой получим равенство:

$$\rho u c^2 = 3\rho c_s^2 + \rho u^3. \tag{2.10}$$

Пренебрегая кубической ошибкой, получим соотношения для скорости звука решётки, необходимого для наилучшего определения моментов:

$$\rho c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} c = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}\Delta t}. \tag{2.11}$$

Подставив (10) в формулу (8) и сравнив с выражением (6), получим весовые коэффициенты в одномерном случае:$w_0 = \frac{2}{3}$, $w_{-1} = w_1 = \frac{1}{6}$. Из свойства сепарабельности равновесной функции её весовые коэффициенты получим перемножением коэффициентов одномерной. Итого:

$$w_0 = \frac{4}{9}, \ w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = \frac{1}{9}, \ w_5 = w_6 = w_7 = w_8 = \frac{1}{36} \tag{2.12}$$

Получим конечно-разностную схему для уравнения Больцмана. Для этого в уравнении (3) произведём замену на новую переменную ζ и получим

$$\frac{df_i}{d\zeta} = \frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{dt}{d\zeta} + \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}}\frac{d\bar{x}}{d\zeta} = \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau}. \tag{2.13}$$

С производными $\frac{dt}{d\zeta} = 1$ и $\frac{d\bar{x}}{d\zeta} = \bar{c}_i$, проинтегрировав которые получим $t = \zeta + t_0$ и $\bar{x} = \bar{c}_i + \bar{x}_0$ - уравнение характеристики из точки $\bar{x}_0$ в момент времени t_0. Таким образом получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{df_i}{d\zeta} = -\frac{1}{\tau} f_i + \frac{f_i^{eq}}{\tau} \tag{2.14}$$

Решение этого уравнение может быть приведено в квадратурах следующим образом:

$$f_i(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{\tau}}\left(C + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f_i^{eq}(\zeta\prime)}{\tau} e^{\frac{\zeta\prime}{\tau}} d\zeta'\right),\ C = const, \zeta_0 = const \tag{2.15}$$

Произвольную константу определим, приняв ζ_0 за начальную точку: $f_i(\zeta_0) = e^{-\frac{\zeta_0}{\tau}} C$. Выразив C и проведя несложные алгебраические преобразования получим

$$f_i(\zeta) = e^{-\frac{\zeta-\zeta_0}{\tau}}\left(f_i(\zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f_i^{eq}(\zeta\prime)}{\tau} e^{\frac{\zeta'-\zeta_0}{\tau}} d\zeta'\right). \tag{2.16}$$

Вернёмся к старым переменным с учётом произвольности выбора начального момента и проинтегрируем уравнение за один шаг по времени, то есть возьмём $\zeta_0 = t, \zeta = t + \Delta t,\quad \zeta' = t'$:

$$f_i(t + \Delta t, \bar{x} + \bar{c}_i \Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\left(f_i(t, \bar{x}) + \int_{t}^{t+\Delta t} \frac{f_i^{eq}(t\prime)}{\tau} e^{\frac{t'-t}{\tau}} dt'\right). \tag{2.17}$$

Разложив экспоненциальную функцию по Тейлору и аппроксимировав интеграл по формуле трапеции получим:

$$\begin{aligned} f_i(t + \Delta t, \bar{x} + \bar{c}_i \Delta t) \\ = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\Delta t^2}{2\tau^2}\right) f_i(t, \bar{x}) + \frac{\Delta t}{2\tau}(\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\Delta t^2}{2\tau^2}\right) f_i^{eq}(t, \bar{x}) \\ + f_i^{eq}(t + \Delta t, \bar{x} + \bar{c}_i \Delta t)) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Произведём замену $\tilde{f}_i = f_i + \Omega(f_i)\frac{\Delta t}{2}$ (или то же самое, чтои $\bar{f}_i = \frac{f_i + f_i^{eq}\frac{\Delta t}{2\tau}}{1+\frac{\Delta t}{2\tau}}$) после алгебраических упрощений, получим:

$$\bar{f}_i(t + \Delta t, \bar{x} + \bar{c}_i \Delta t) = \bar{f}_i(t, \bar{x}) + \Delta t \frac{f_i^{eq}(t,\bar{x}) - \bar{f}_i(t,\bar{x})}{\tau + \frac{\Delta t}{2}} + O(\Delta \mathrm{t}^2 \quad . \tag{2.19}$$

Заметим, что из свойств интеграла столкновения, что такая замена не изменяет значения моментов от функции распределения, поэтому различий между двумя функций можно не делать, а тождество (18) есть конечно-разностная схема второго порядка для шага по времени для уравнения Больцмана.

Подводя итог, имеем алгоритм решения задачи:

1. На старом временном слое в каждом узле решётки вычисляется из значений ρ и $\bar{u}$ равновесная функция f_i^{eq}.
2. Определяем эффект столкновений каждого вида частиц в решётке по формуле :$f_i^*(t,\bar{x}) = f_i(t,\bar{x}) + \Delta t \frac{f_i^{eq}(t,\bar{x}) - f_i(t,\bar{x})}{\tau + \frac{\Delta t}{2}}$.
3. Переходим на новый временной слой, находя распространение частиц для каждой скорости по узлам решётки: $f_i(t+\Delta t, \bar{x} + \bar{c}_i \Delta t) = f_i^*(t,\bar{x})$.
4. Уже на новом временном слое определяем газодинамические параметры с помощью первых моментов: $\rho = \sum_i f_i$ и $\bar{u} = \frac{1}{\rho}\sum_i f_i \bar{c}_i$.

Важное замечание: в начальный момент времени функция распределения считается равной равновесной, то есть $f_i(0,\bar{x}) = f_i^{eq}$.

3. Газовая динамика решёточной теории

Для получения уравнений газовой динамики решётки воспользуемся уравнением Больцмана с введённым в него числом Кнудсена, являющегося малым параметром:

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \bar{c}_i \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}} = \frac{f_i^{eq} - f_i}{\tau_0 \varepsilon}, \tag{3.1}$$

где $\tau_0 -$ характерное время задачи.

И разложением функции распределения Чепмена-Энскога до первого порядка по числу Кнудсена: $f_i = f_i^{eq} + \varepsilon f_i^{(1)}$, в котором за нулевой член разложения принята равновесная функция распределения, а первый член определяется подстановкой выражения в (19) и получается:

$$.f_i^{(1)} = -\tau_0 \left(\frac{\partial f_i^{eq}}{\partial t} + \bar{c}_i \frac{\partial f_i^{eq}}{\partial \bar{x}} \right) = -\tau_0 \frac{df_i^{eq}}{dt}. \tag{3.2}$$

Заметим также из свойств интеграла столкновений (2.5) следуют дополнительные свойства первого приближения:

$$\sum_i f_{\mathrm{i}}^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_i f_{\mathrm{i}}^{(1)} \bar{c}_i = 0 \ . \tag{3.3}$$

Опираясь на (3.3) просуммируем уравнение (3.2) по всем скоростям решётки, умноженное на 1, $\bar{c}_\alpha$ и $\bar{c}_\alpha \bar{c}_\beta$, тогда получим соотношения для моментов от равновесной функции первого приближения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial M^{eq}}{\partial t} + \frac{\partial M_\gamma^{eq}}{\partial x_\gamma} = 0 \ , \\ &\frac{\partial M_\alpha^{eq}}{\partial t} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}^{eq}}{\partial x_\beta} = 0, \\ &\frac{\partial M_{\alpha\beta}^{eq}}{\partial t} + \frac{\partial M_{\alpha\beta\gamma}^{eq}}{\partial x_\gamma} = -\frac{1}{\tau_0} M_{\alpha\beta}^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Моменты от равновесной функции вычисляются и самой функции (2,6) с определёнными весовыми коэффициентами (2,12):

$$\begin{aligned} &M^{eq} = \sum_i f_i^{eq} = \rho, \\ &M_\alpha^{eq} = \sum_i f_i^{eq} c_{i\alpha} = \rho u_\alpha, \\ &M_{\alpha\beta}^{eq} = \sum_i f_i^{eq} c_{i\alpha} c_{i\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \rho c_s^2 \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$M_{\alpha\beta\gamma}^{eq} = \sum_i f_i^{eq} c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = \rho c_s^2 (u_\alpha \delta_{\beta\gamma} + u_\beta \delta_{\alpha\gamma} + u_\gamma \delta_{\alpha\beta}).$$

Теперь видно, что первое соотношение из (3,4) есть уравнение неразрывности, а второе – уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\gamma)}{\partial x_\gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \tag{3.6}$$

где $p = \rho c_s^2$.

Выражение же последнего момента из (3.5) связано с трудоёмкими преобразованиями производных и группировкой слагаемых, но в конечном итоге получается следующее соотношение:

$$M_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_i f_i^{(1)} c_{i\alpha} c_{i\beta} = -\rho c_s^2 \tau_0 \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - \tau_0 \frac{\partial(\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma)}{\partial x_\gamma}. \tag{3.7}$$

Умножив уравнение (3.1) на $\bar{c}_\alpha$ и просуммировав по скоростям, используя разложение Чепмена-Энскога и его свойства увидим уравнение Навье-Стокса в моментной форме:

$$\frac{\partial M_\alpha^{eq}}{\partial t} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}^{eq}}{\partial x_\beta} + \varepsilon \frac{\partial M_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_\beta} = 0\ . \tag{3.8}$$

Использовав ранее полученные выражения напишем его в газодинамических переменных:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\beta} \\ &\qquad = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\rho \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right) + \tau \frac{\partial(\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma)}{\partial x_\gamma}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $p = \rho c_s^2 \nu = c_s^2 \tau$.

Как видно из последней формулы, закон сохранения импульса газа в решёточной теории содержит лишнее слагаемое с кубом скорости, но учитывая ограничение по скорости газа и малый коэффициент перед ним, можно пренебречь данной ошибкой. Также в вязкой составляющей отсутствует слагаемое с дивергенцией скорости, тем ни менее при сделанных ограничениях сжимаемость газа довольно слабая, и эта ошибка тоже вносит незначительный вклад. Стоит обратить внимание, что уравнение Эйлера

воспроизводятся верно, в решёточной теории вязкость обязана быть ненулевой.

4. Акустика в решёточном газе

Рассмотрим распространение малых колебаний в газе. Для этого в уравнении неразрывности из (3.6) и в уравнении Навье-Стокса (3.9) примем следующие представления для плотности и компонент скорости $\rho = \rho_0 + \rho'$ и $u_\alpha = u'_\alpha$, причем должны быть верны оценки: $\rho' \ll \rho_0 = const$ и $\sqrt{u'_\alpha u'_\alpha} \ll c_s$. Кроме того, проведём линеризацию уравнений, отбросив слагаемые более высокого порядка малости, чем первый, в результате чего они примут следующий вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'_\gamma}{\partial x_\gamma} = 0 \text{ и } \rho_0 \frac{\partial u'_\alpha}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_\alpha} + \nu \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\right) \tag{4.1}$$

Для того чтобы выразить неизвестные переменные через одну, удобно ввести потенциал скорости согласно $u_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$. Теперь можно выразить перепад плотности и второго уравнения:

$$\rho = -\frac{\rho_0}{c_s^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{2\nu\rho_0}{c_s^2}\Delta_x \varphi \,. \tag{4.2}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение неразрывности из (4.1) получим:

$$\Delta_x \varphi - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2\nu}{c_s^2}\frac{\partial \Delta_x \varphi}{\partial t} = 0 \,. \tag{4.3}$$

Полученное уравнение называется волновым и описывает распространение звука в газе. Рассмотрим движение звуковой волны постоянной частоты, то есть подставим $\varphi(t, \bar{x}) = \psi(\bar{x}) e^{-i\omega t}$:, где под i необходимо понимать мнимую единицу, а не номер скорости в решётке, но поскольку мнимая единица никогда не стоит в индексе, а номер скорости только в индексе, то и путаницы в обозначениях возникнуть не должно.

$$\Delta_x \psi + \frac{\omega^2}{c_s^2}\psi - \mathrm{i}\frac{2\nu\omega}{c_s^2}\Delta_x \psi = 0. \tag{4.4}$$

Данное уравнение является уравнением Гельмгольца, которое можно привести к стандартному виду используя обозначение волнового числа$k = \frac{\omega}{c_s}$. За одно сделаем и допущение, что $\frac{2\nu\omega}{c_s^2} \ll 1$.

$$\Delta_x\psi + (k\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{2\nu\omega}{c_s^2}})^2\psi = 0. \tag{4.5}$$

Теперь видно, что распределение в пространстве амплитуды звуковой волны постоянной частоты в вязкой среде описывается уравнением Гельмгольца с комплексным волновым числом. С его учётом можно преобразовать выражение для пульсации плотности:

$$\rho' = \frac{\rho_0\omega}{c_s^2}(-\frac{\omega}{c_s^2} + \mathrm{i}(1 - \frac{2\nu\omega^2}{c_s^4}))\psi e^{-i\omega t}. \tag{4.6}$$

В полярных координатах (под $r = |\bar{x}|$ следует понимать модуль радиус-вектора, θ - полярный угол) в открытом пространстве решение уравнения Гельмгольца может быть получено методом разделения переменных для любых значений волнового вектора и записано с использованием функций Ганкеля первого вида в конструкции:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{2\nu\omega}{c_s^2}}^n} H_n(kr\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{2\nu\omega}{c_s^2}})\, e^{in\theta}, \text{где } C_n = const. \tag{4.7}$$

Подставляя значение вязкости равной нулю, получается решение в невязкой среде, обозначаемое индексом «0»:

$$\psi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n(kr)\, e^{in\theta}\ . \tag{4.8}$$

Введём в рассмотрение коэффициент поглощения $\mu = \frac{\nu\omega^2}{c_s^3}$. С его помощью можно показать, что решение (4.7) стремиться к виду $\psi = e^{-\mu r}\psi_0$с удалением от источников. Сравнив выражения (4.7) и (4.8) достаточно показать, что

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{2\nu\omega}{c_s^2}}^n} H_n\left(kr\sqrt{1 + \mathrm{i}\frac{2\nu\omega}{c_s^2}}\right) - e^{-\mu r} H_n(kr) \right| \to 0 \tag{4.9}$$

при $r \to \infty$.

Вспомним некоторые разложения Ломмеля для функций Бесселя и Неймана:

$$J_n\left(z\sqrt{1+h}\right) = \sqrt{1+h}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}hz\right)^m}{m!} J_{n+m}(z)$$
$$Y\left(z\sqrt{1+h}\right) = \sqrt{1+h}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}hz\right)^m}{m!} Y_{n+m}(z) \tag{4.10}$$

С их использованием и разложением экспоненты в ряд Тейлора предел преобразуется

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\mu r)^m}{m!} \left(i^m H_{n+m}(kr) - H_n(kr)\right) \right| \to 0 \tag{4.11}$$

при $r \to \infty$.

Для функций Ганкеля справедливо следующая асимптотическая формула:

$$H_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{i\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left(\sum_{l=0}^{M-1} \frac{(-1)^m (n,l)}{(2iz)^l} + O(z^{-M})\right), \tag{4.12}$$

где $(n,l) = \frac{\Gamma(n+l+\frac{1}{2})}{l!\Gamma(n-l+\frac{1}{2})}$.

Окончательно вид оценки представляется в форме

$$\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\mu r)^m}{m!} (i^m - 1) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left| e^{i\mu r} - e^{-\mu r} \right| \to 0 \ , \tag{4.13}$$

при $r \to \infty$.

Подводя итог, приходим к выводу, что решёточной теорией возможно описание распространения звуковых волн в газе, но чтобы картина течения соответствовала физической необходимо подобрать основные параметры схемы так, чтобы скорость и коэффициент поглощения звука в решётке были равны их физическим значениям.

II. Практический раздел

Исследование возможностей моделирования акустических возмущений методом решёточных уравнений Больцмана проводится для серии частот (f) в квадратной расчётной области с сеткой, состоящей из квадратных ячеек, и точечного источника. Основными параметрами такой решётки являются: число ячеек, приходящееся на сторону расчётной области (N), число ячеек, приходящееся на длину волны (n), время релаксации (τ). Также используются и другие параметры решётки. Скорость звука приравнена к физической, все размерные величины выражены в СИ.

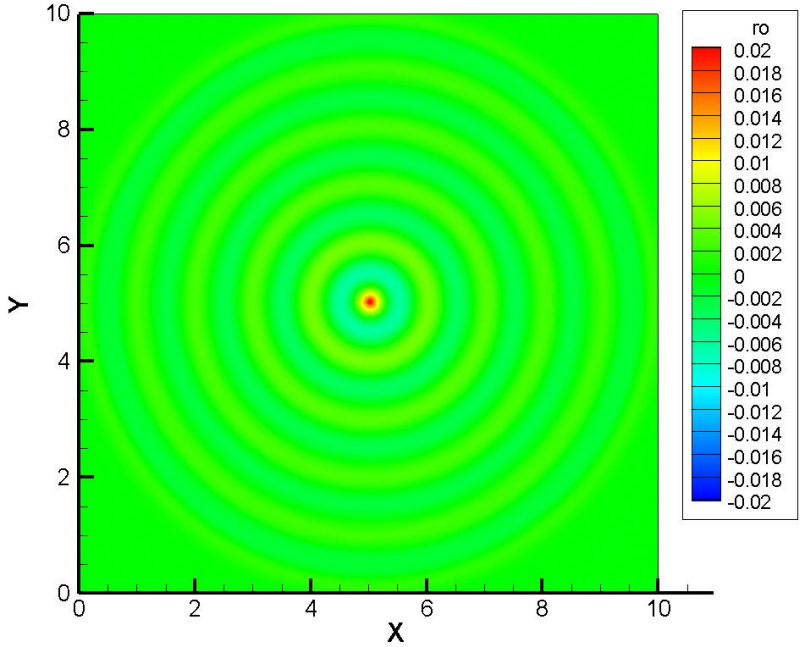
Число ячеек всегда чётное, источник расположен в центре правой верхней ячейки, являющейся ближайшей к центру квадрата. Мощность источника подобрана так, чтобы амплитуда перепада плотности в узлах ячейки, содержащей источник.

Используемые параметры задачи приведены в таблице 1.

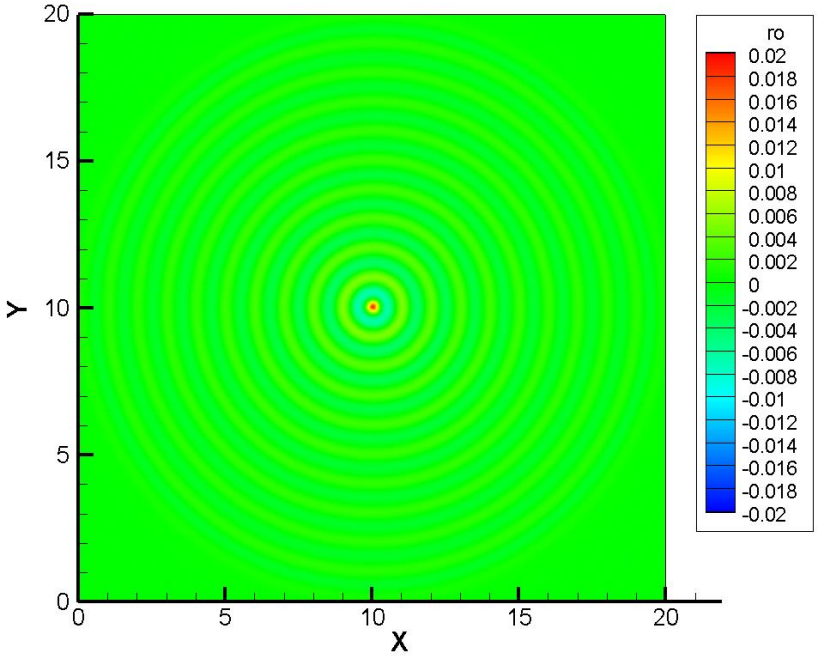
Таблица 1 – Параметры рассмотренной задачи

f, Гц	N	n	τ	υ
100	300	15	$1.5*10^{-8}$	0.1089
500	300	15	$1.5*10^{-8}$	0.1089
1000	300	15	$1.5*10^{-8}$	0.1089
5000	300	15	$1.5*10^{-8}$	0.1089
10000	300	15	$1.5*10^{-8}$	0.1089

На рисунке 1 представлены примеры распространения волн от точечного источники с частотой *f*=500 Гц на сетке, содержащей 15 ячеек на дину волны, для разных значениях вязкости.



Минимальная вязкость



Максимальная вязкость

Рисунок 1 – Распространения волн от точечного источники с частотой *f*=500 Гц на сетке, содержащей 15 ячеек на дину волны, для разных значениях вязкости

На рисунках 2 – 5 представлено сопоставление полученных результатов расчетов с различными вариантами аналитического решения.

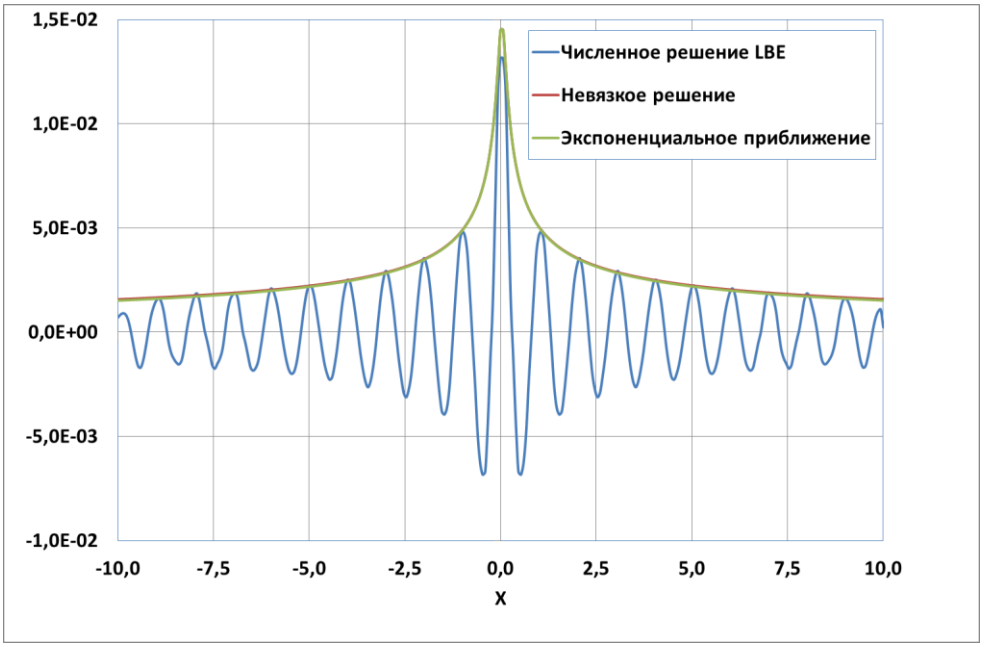


Рисунок 2 – Сопоставление полученных результатов расчетов с различными вариантами аналитического решения (частота *f*=100 Гц, сетка –15 ячеек на длину волны, минимальная вязкость)

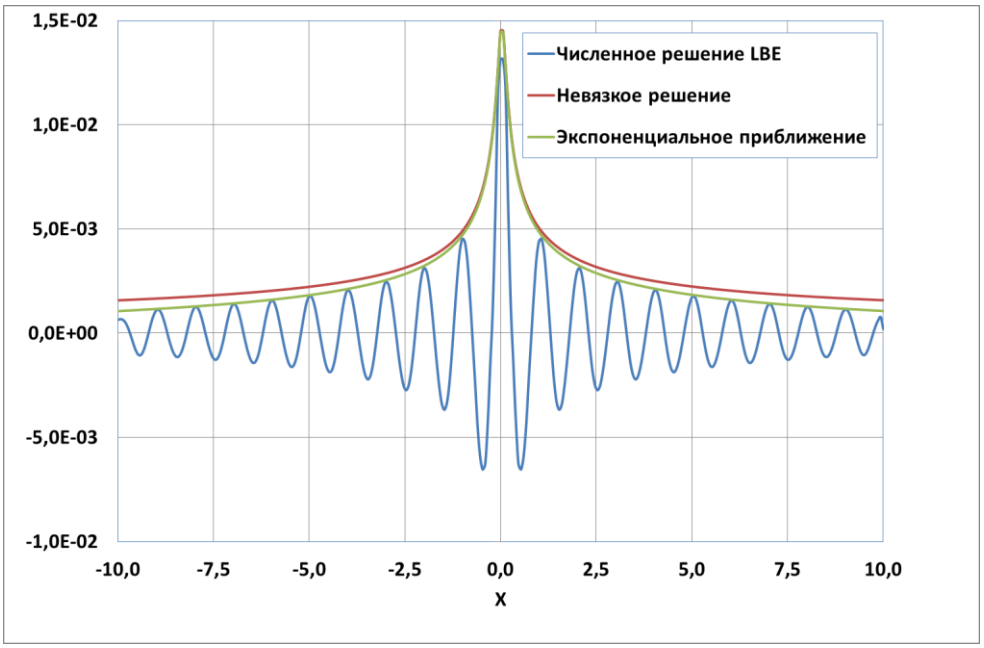


Рисунок 3 – Сопоставление полученных результатов расчетов с различными вариантами аналитического решения (частота*f*=500 Гц,сетка – 15 ячеек на длину волны, минимальная вязкость)

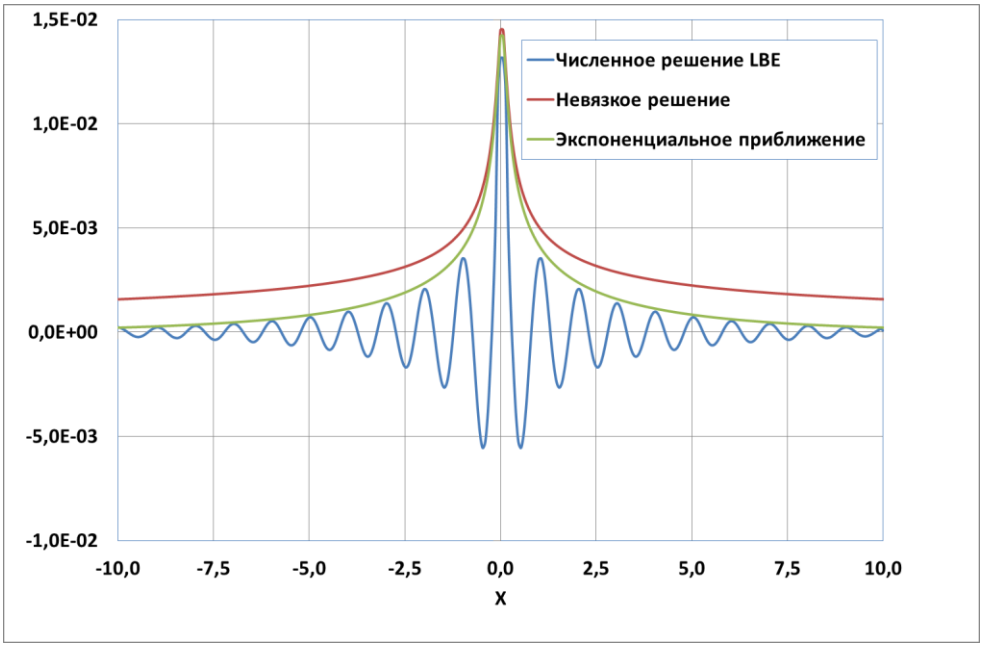


Рисунок 4 – Сопоставление полученных результатов расчетов с различными вариантами аналитического решения (частота *f*=5000 Гц, сетка –15 ячеек на длину волны, минимальная вязкость)

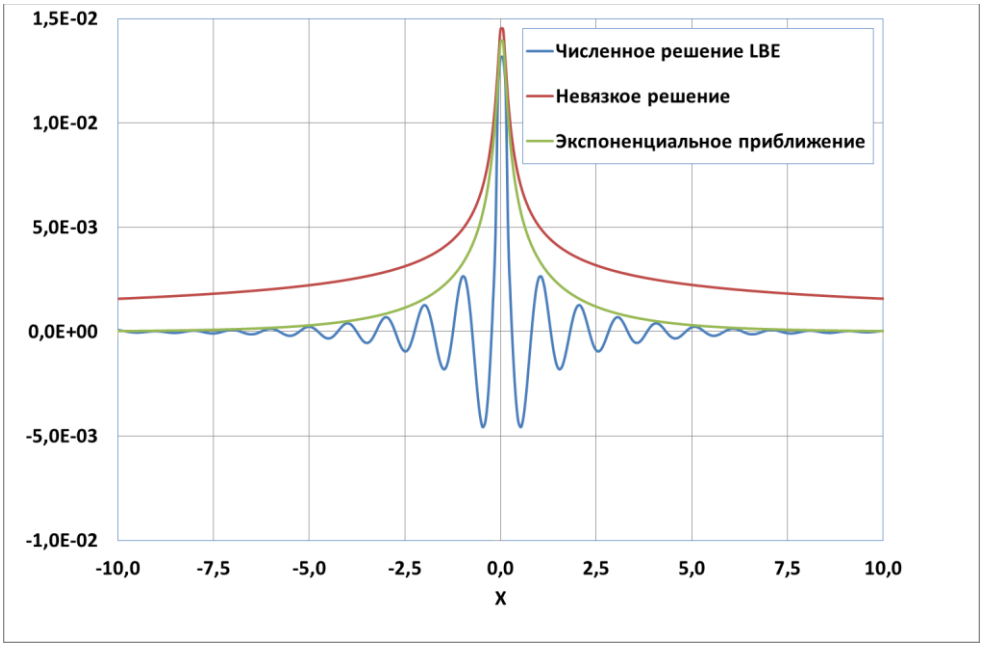
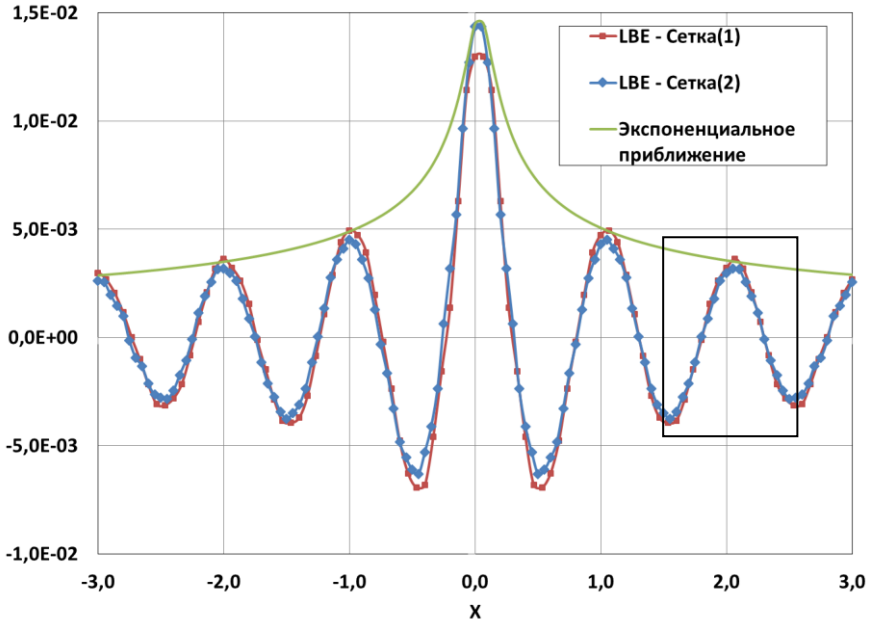
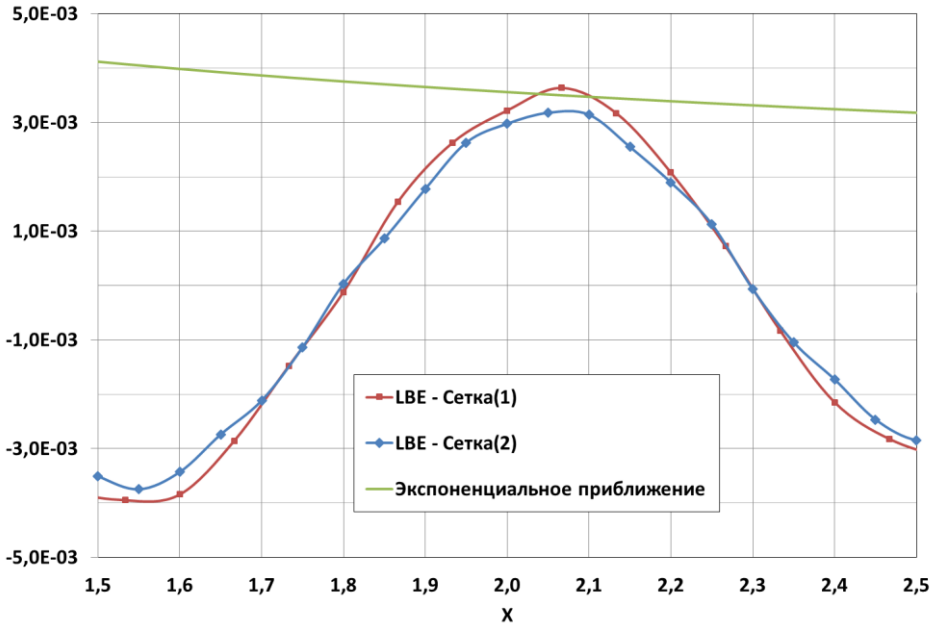


Рисунок 5 – Сопоставление полученных результатов расчетов с различными вариантами аналитического решения (частота *f*=10000 Гц, сетка –15 ячеек на длину волны, минимальная вязкость)

На рисунке 6 представлено сопоставление численных решений, полученных на 2-х различных сетках с аналитическим экспоненциальным приближением.



Весь график



Фрагмент графика

Рисунок 6 – Сопоставление полученных результатов расчетов с с аналитическим экспоненциальным приближением (частота *f*=500 Гц, сетки 1 и 2 –15 и 20 ячеек соответственно на длину волны, минимальная

вязкость)

Заключение

1. Освоена теория перспективного численного метода, позволяющего строить чрезвычайно экономичные и эффективные алгоритмы решения широкого круга аэродинамических и акустических задач для дозвуковых течений газа на декартовых сетках.
2. В качестве примера использования метода создано программное приложение, позволяющее рассчитывать распространение двумерных акустических возмущения и получены различные аналитические решения по распространению акустических волн от точечного источника, необходимыедля оценки точностиполучаемых численных решений.
3. Выполненные расчеты продемонстрировали эффективность созданного алгоритма в широком диапазоне параметров метода и задачи и его высокую точность: так, в частности, сопоставление численного и аналитического решений задачи о распространении акустических возмущений от точечного источника, свидетельствуют о том, что наблюдаемые отличие для сеток, содержащих ~15-20 ячеек на длину волны, не превосходят величины 0.8 дБ.
4. Выполненная работа дает возможность перейти непосредственно к созданию быстрого метода распространения пространственных акустических возмущения и к анализу детальных свойств исходного метода с целью реализации возможности его применения для расчета турбулентных течений с применением вихреразрешающих подходов, что, в свою очередь, открывает перспективны расчета шума сложных практически важных конфигураций.

Список использованных источников

1. D. Casalino, A. Hazir. “Building a Numerical Turbofan Demonstrator Exa Corporation. DGLR DEGA X-Noise Workshop, Braunschweig”, November 11th (2015).
2. Mann, A., Pérot, F., Kim, M.-S., Casalino, D. and Fares, E., “Advanced Noise Control Fan Direct Aeroacoustics Predictions using a Lattice-Boltzmann Method”, AIAA-2012- 2287, 2012.
3. Pérot, F., Freed, D., Mann, A., “Acoustic absorption of porous materials using LBM”, AIAA 2013-2070.
4. Pérot F., Mann, A., Kim, M.-S., Casalino, D. and Fares, E., “Investigation of inflow condition effects on the ANCF aeroacoustics radiation using LBM”, InterNoise, New York, 2012.
5. Mann, A., Pérot F., Kim, M.-S and Casalino, “Characterization of Acoustic Liners Absorption using a Lattice-Boltzmann Method”, AIAA-2013- 2271, 2013.
6. Casalino, D. Ribeiro A.F.P.et al. “Towards Lattice-Boltzmann Prediction of Turbofan Engine Noise”, AIAA-2014-3101.
7. Lew, P., Lyrintzis, A. S., and Mongeau, L., “Noise Prediction of a Subsonic Turbulent Round Jet using the Lattice-Boltzmann Method,” Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 128, No. 3, September 2010, pp. 1118–1127.
8. Lew, P., Najafi-Yazdi, A., and Mongeau, L., “Unsteady Numerical Simulation of a Round Jet with Impinging Microjets for Noise Suppression,” Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 133, No. 6, June 2013.
9. Habibi, K., Gong, H., Najafiyazdi, A. and Mongeau, L., “Prediction of the Sound Radiated from Low-Mach Internal Mixing Nozzles with Forced Mixers using the Lattice Boltzmann Method”, AIAA paper 2013-2143, 2013.

10. Habibi, K., Gong H, and Mongeau L. "A robust numerical approach for the prediction of turbofan engine noise." Proceedings of Meetings on Acoustics. Vol. 19. 2013.

11. K. Habibi, L. Mongeau, D. Casalino, P.-T. Lew, “Aeroacoustic Study of Internal Mixing Nozzles with Forced Lobed Mixers using a High-Mach Subsonic Lattice Boltzmann scheme”, AIAA-2014-3313

12. P.-T. Lew et al, K. Habibi and L. Mongeau, “An extended Lattice Boltzmann Methodology for High Subsonic Jet Noise Prediction”, AIAA-2014-2755.

13. Casalino, D. and Lele, S. “Lattice-Boltzmann Simulation of Coaxial Jet Noise Generation”, Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program 2014.

14. M. Murayama, Y. Yokokawa, T. Imamura, K. Yamamoto, H. Ura, T. Hirai, Numerical investigation on change of airframe noise by flap side-edge shape, AIAA Paper 2013-2067, 2013.

15. L.G.C. Simoes, D.S. Souza, M.A.F. Medeiros, On the small effect of boundary layer thicknesses on slat noise, AIAA Paper 2011-2906, 2011.

16. P.-T. Lew, R. Shock, A. Najafi-Yazdi, L. Mongeau, S. Colavincenzo, R. Lapointe, G.Waller, Noise prediction from a partially closed slat junction, AIAA Paper 2013-2161, 2013.

17. E. Fares, S. Noelting, Unsteady flow simulation of a high-lift configuration using a lattice Boltzmann approach, AIAA Paper 2011-869, 2011.

18. B. Koenig, E. Fares, S. Noelting, Lattice-Boltzmann flow simulations for the HILIFTPW-2, AIAA Paper 2014-0911, 2014.

19. Seror, C., Sagaut, P., and Belanger, A., “A Numerical Aeroacoustics Analysis of a Detailed Landing Gear,” AIAA Paper No. 2004-2884, May 2004.

20. G.A. Brès, D.M. Freed, M.Wessels, S. Noelting, F. Pérot, Flow and noise predictions for the tandem cylinder aeroacoustic benchmark, Physics of Fluids 24 (3) (2012) 036101.

21. A. Keating, P. Dethioux, R. Satti, S. Noelting, J. Louis, T. Van de Ven, R. Vieito, Computational aeroacoustics validation and analysis of a nose landing gear, AIAA Paper 2009-3154, 2009.

22. Casalino, D., Ribeiro, A. F. P and Fares, E. “Facing rim cavities fluctuation modes”, Journal of Sound and Vibration. Vol. 333, pp. 2812–2830, 2014.

23. Casalino, D., Ribeiro, A. F. P., Fares, E., and Noelting, S., “Lattice-Boltzmann Aeroacoustic Analysis of the LAGOON Landing Gear Configuration,” AIAA Journal , Vol. 52, No. 6, 2014, pp. 1232–1248.

24. Bouvy, Q., Rougier, T., Ghouali, A., Casalino, D., Appelbaum, J., and Kleinclaus, C. “Design of Quieter Landing Gears through Lattice-Boltzmann CFD Simulations”, AIAA 2015-3259.