МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Математический факультет

Кафедра алгебры и топологических методов анализа

Исследование разрешимости начально-краевой задачи для модели Осколкова-Павловского

Магистерская диссертация

Направление 01.04.01 Математика

Профиль — Математическое моделирование

Зав.кафедрой	________	д. физ.-мат. н., проф.	В.Г. Звягин 18.06.2019г.
Студент	________		А.С. Устюжанинова
Руководитель	________	к. физ.-мат. н., доц.	М.В. Турбин

Воронеж 2019

Содержание

1 Введение

В окружающем нас мире повсеместно наблюдается движение разнообразных жидкостей и сред, во многом близких к жидкостям: газов, гелей, золей и других (в качестве конкретных примеров подобных сред можно перечислить такие среды как кровь, полимеры и различные их растворы и расплавы, битумы, тесто, земная кора, бетон). Математическое описание этого движения является интересной и трудной задачей. Уже при исследовании самых простых уравнений движения жидкостей и сред, близких к жидкостям, возникло множество нерешенных до настоящего момента математических проблем.

Исторически первой научной работой в этом направлении, по всей видимости, является трактат Архимеда "О плавающих телах" , в котором впервые вводится понятие давления как основной характеристики взаимодействия частиц жидкости и используется предположение о несжимаемости жидкости. На основе этих двух механистических предпосылок начала развиваться гидростатика, для развития которой был использован существовавший на тот момент математический аппарат геометрии Евклида. Собственно создание гидродинамики (науки о движении жидкости) связано с именами Галилео Галилея, Христиана Гюйгенса, Блеза Паскаля и Исаака Ньютона и было обусловлено созданием основ дифференциального и интегрального исчисления. Дальнейшее развитие гидродинамики связано с именами Леонарда Эйлера, Даниила Бернулли, Жозе Луи Лагранжа, Симеона Дени Пуассона, Людвига Прандтля, Огюста Луи Коши, Анри Навье, Джорджа Стокса, Адамарда Жана Клода Баре де Сен-Венана, Жана Луи Мари Пуазейля, Осборна Рейнольдса и многих других. Именно этими учеными был существенно развит существовавший на тот момент математический аппарат и была собственно создана классическая гидродинамика. Для того чтобы характеризовать физическое поведение жидкости ими были получены различные системы дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять скорость, давление и плотность жидкости как функции от времени и координат точки пространства.

Объектом изучения классической гидродинамики являются идеальные жидкости (жидкости, у которых отсутствуют сдвиговые напряжения) и ньютоновские жидкости (у которых сдвиговые напряжения пропорциональны скорости деформации). Система уравнений, описывающих движение идеальной жидкости, называется системой уравнений Эйлера, а система уравнений, описывающая движение ньютоновской жидкости, носит название системы уравнений Навье-Стокса. Для данных систем уравнений различные начальные, краевые и начально-краевые задачи исследовались большим количеством авторов. Самыми известными работами по данной тематике являются работы Ж. Лере, О.А. Ладыженской и Р. Темама. Тем не менее, вот уже на протяжении около ста лет, основной вопрос: проблема существования глобального по времени гладкого решения начально-краевой задачи для системы уравнений Навье-Стокса при гладких начальных данных остается открытым. Пока существование такого решения доказано только для случая плоскопараллельных течений. В трехмерном случае для системы уравнений Навье-Стокса доказано существование решения при малых данных задачи.

Одним из возможных выходов из сложившейся ситуации стало применение обобщенной постановки начально-краевой задачи с использованием некоторого равенства функционалов. Решения такой задачи называют слабыми решениями, и любое обычное решение всегда является и слабым. Для системы уравнений Навье-Стокса доказано глобальное по времени существование слабого решения начально-краевой задачи. Однако проблема единственности этого решения остается открытой.

С другой стороны, давно было замечено, что многие реальные среды, такие как битумы, полимеры, различные полимерные растворы и расплавы, эмульсии и суспензии, кровь и многие другие не описываются моделями классической (ньютоновской) гидродинамики, хотя по многим признакам близки к жидкостям. Такие объекты получили название "неньютоновские жидкости". "Неньютоновскими"являются, например, жидкости, в которых после прекращения движения напряжения не обращаются мгновенно в нуль, а спадают по некоторому закону, то есть имеет место релаксация напряжений. А также жидкости, в которых после снятия напряжений движение не прекращается мгновенно, а затухает по некоторому закону, то есть имеет место запаздывание деформаций. И также те жидкости, в которых имеют место оба этих эффекта. Впервые подобные модели жидкостей были предложены в XIX веке в работах Дж. Максвелла, Кельвина и Фойгта и были развиты в середине XX века в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта. В настоящее время уже имеется большое число моделей, описывающих разные классы таких сред. К несомненным достоинствам данных моделей следует отнести тот факт, что они учитывают предысторию течения жидкости, что позволяет им быть более точными, по сравнению с моделями классической гидродинамики.

Стоит отметить, что задачи исследования данных моделей имеют большое количество приложений в механике, медицине, полимерной промышленности, в аэродинамике и астрофизике и многих других. Суммируя вышесказанное, можно сказать, что исследование задач математической гидродинамики имеет большую научную значимость (как теоретическую, так и практическую), несомненно носит актуальный характер и имеет большое число приложений.

В работе была исследована разрешимость начально-краевой задачи для модели Осколкова-Павловского. Доказательство основано на аппроксимационно-топологическом подходе к задачам математической гидродинамики, предложенным В.Г. Звягиным и развитом в работах В.Г. Звягина и его учеников (см., например, [10]). На первом шаге операторное уравнение, эквивалентное слабой постановке задачи, аппроксимируется другим операторным уравнением с «хорошими» свойствами и доказывается разрешимость этого уравнения. На втором шаге делается предельный переход, то есть показывается, что из последовательности решений можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

2 Постановка рассматриваемой задачи

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^3 на промежутке времени $[0; T], 0 < T < \infty$ рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{2}$$

Данная система уравнений впервые была введена в рассмотрение В. А. Павловским [1]. Система (1)–(2) подтверждается экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы [2], [3]. Одновременно с этим важно отметить, что данная система уравнений независимым образом была получена как частный случай модели движения жидкости второго порядка (например, [4], [5]).

Для системы (1),(2) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$v|_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

и граничным условием

$$v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) впервые была рассмотрена А. П. Осколковым в работах [6], [7]. В работе [8] им было замечено, что доказательство в [6], [7] содержат пробелы и что в ограниченной области Ω ему методом Галеркина-Фаэдо не удалось доказать теоремы существования даже слабых решений для данной начально-краевой задачи. О. А. Ладыженская в своей работе [9] отмечает, что метод введения вспомогательной вязкости, использованный А. П. Осколковым для изучения этой начально-краевой задачи в уже упомянутых работах [6], [7], является ошибочным, и вопрос о существовании решений задачи

(1)–(4) оставался открытым.

В данной работе доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики, предложенного В.Г. Звягиным и развитого в его работах и работах его учеников (см, например, [10], [11], [12], а также работы по моделям близким к исследуемой, [13], [14]). А именно, рассматривается операторная трактовка задачи о слабых решениях в подходящих функциональных пространствах. Затем рассматривается операторное уравнение, аппроксимирующее исходное, которое получается путем добавления операторов, обладающих более «хорошими» свойствами. На основе этих «хороших» свойств операторов, теории степени Лере-Шаудера и априорных оценок решений доказывается разрешимость аппроксимационной задачи. Далее на основе априорных оценок решений, не зависящих от параметра аппроксимации, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

3 Понятие слабого решения начально-краевой задачи (1)–(4)

Для того, чтобы ввести понятие слабого решения, нам потребуются определения некоторых пространств. Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω.

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \ldots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : div\, v = 0\},$$

$$V^0 = \text{ пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^n;$$

$$V^1 = \text{ пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } H^1(\Omega)^n;$$

$$V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1.$$

Отметим, что пространство V^0 можно определить и следующим образом:

$$V^0 = \{v(x) \in L_2(\Omega)^n : div\, v = 0,\, (v, n)|_{\partial\Omega} = 0\},$$

где $div\, v$ понимается в смысле теории обобщенных функций, а корректность оператора сужения на $\partial\Omega$ нормальной компоненты v доказана, например, в [15]. Это определение эквивалентно исходному (см., [15]).

Мы будем также использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^n$ (см., например, [15], [16]):

$$L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega),$$

где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ – знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)^n$).

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор, заданный следующим образом: $A = -\pi\Delta$.

Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [17],[18]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ — собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad N \in \mathbb{Z},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В [10], [20] показано, что указанные нормы в пространствах V^1, V^2, V^3 эквивалентны следующим нормам:

$$\|v\|_{V^1} = \|A^{1/2} v\|_{V^0}; \quad \|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}; \quad \|v\|_{V^3} = \|A^{3/2} v\|_{V^0}.$$

Также введём в этом пункте пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную:

$$W = \left\{ u : u \in L_\infty(0,T; V^2), u' \in L_2(0,T; V^1) \right\},$$
$$W_1 = \left\{ u : u \in C([0,T], V^3), u' \in L_2(0,T; V^3) \right\},$$

с соответствующими нормами

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^1)}, \quad \|u\|_{W_1} = \|u\|_{C([0,T],V^3)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^3)}.$$

Перейдем к определению слабого решения рассматриваемой начально-краевой задачи (1)–(4).

Определение 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^0)$, $a \in V^2$. *Слабым решением начально-краевой задачи* (1)–(4) *называется функция* $v \in W$, *удовлетворяющая для любого* $\varphi \in V^1$ *равенству*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx + \varkappa \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx. \quad (5)$$

при почти всех $t \in (0,T)$ *и начальному условию:*

$$v(0) = a. \quad (6)$$

Здесь символ : обозначает покомпонентное произведение матриц, т. е. для $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$, $D = (d_{ij})_{i,j=1}^m$, $i,j = 1\ldots m$, мы имеем $C : D = \sum\limits_{i,j=1}^m c_{ij}d_{ij}$.

Правомочность начального условия следует из того, что любая функция $u \in W$ принадлежит пространству $C([0,T],V^1)$, поскольку $u' \in L_2(0,T;V^1)$.

4 Операторная трактовка задачи

Введем операторы при помощи следующих равенств.

$$A : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Au, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla \varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in V^1;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}, \quad \langle B_1(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V^1;$$

$$B_2 : V^2 \to V^{-1}, \quad \langle B_2(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in V^2, \varphi \in V^1;$$

$$J : V^1 \to V^{-1}, \quad \langle Ju, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega u \varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in V^1.$$

Тогда задача о поиске слабых решений начально-краевой задачи (1)–(4) эквивалентна задаче о поиске решения $v \in W$ операторного уравнения

$$(J + \varkappa A)v' - B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \nu Au = f, \tag{7}$$

удовлетворяющего начальному условию (6).

5 Аппроксимационная задача

Для доказательства существования решения операторного уравнения (7), удовлетворяющего начальному условию (6), рассмотрим следующее аппроксимационное операторное уравнение:

$$(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu A u - B_1(u) + \varkappa B_2(u) = f, \tag{8}$$

где оператор A^2 определяется следующим образом:

$$A^2 : V^3 \to V^{-1}, \quad \langle A^2 u, \varphi \rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla\varphi dx, \quad \forall u \in V^3, \quad \forall \varphi \in V^1.$$

Назовем решением аппроксимационной задачи функцию $v \in W_1$, удовлетворяющую операторному уравнению (8) и начальному условию

$$v(0) = b \in V^3. \tag{9}$$

Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$L(u) = \left(\left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2 \right) u' + \nu A u, u|_{t=0} \right), \quad L : W_1 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3;$$

$$K(u) = \left(B_1(u) - \varkappa B_2(u), 0 \right), \quad K : W_1 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3.$$

Тогда вопрос о существовании решения аппроксимационной задачи (8), (9) эквивалентен вопросу о существовании решения следующего операторного уравнения:

$$L(u) - K(u) = (f, b). \tag{10}$$

6 Свойства операторов

Для того чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах и определяемых одной и той же формулой. Например, в нижеследующей лемме A — это оператор, действующий из V^1 в V^{-1}, из $L_2(0,T;V^1)$ в $L_2(0,T;V^{-1})$ и из W_1 в $L_2(0,T;V^{-1})$. Отметим также, что можно доказать более глубокие свойства для некоторых операторов, но мы ограничимся только теми свойствами, которые нам потребуются для доказательства существования слабого решения аппроксимационной задачи.

Также приведем теорему Обена-Дубинского-Симона, которой мы будем пользоваться при доказательстве свойств оператора

Теорема 1. *Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, причем вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будем предполагать, что для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0,T;Y)$ принадлежит $L_r(0,T;Y)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Далее, пусть*

1. *множество F ограничено в $L_p(0,T;X)$,*

2. *множество $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0,T;Y)$.*

Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0,T;E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0,T],E)$.

Перейдем к доказательству свойств операторов.

Для того чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функционадьных пространствах и определяемых одной и той же формулой. На самом деле, для операторов, рассматриваемых в нижеследующей лемме, можно доказать гораздо более полные утверждения, но мы приводим только те, которые в дальнейшем будут использованы.

Лемма 1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $A : V^1 \to V^{-1}$ — непрерывен и для любого $u \in V^1$ имеет место оценка:*
$$\|Au\|_{V^{-1}} \leqslant \|u\|_{V^1}. \tag{11}$$

2. *Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^1)$, справедливо, что функция $Au \in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A \; : \; L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывен и имеет место оценка:*
$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|u\|_{L_2(0,T;V^1)}. \tag{12}$$

3. *Для любой функции $u \in W_1$, соответствующая ей функция $Au \in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $A : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывен и для него имеют место оценки:*
$$\|Au\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_2\|u\|_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_3\|u\|_{C([0,T];V^3)} \tag{13}$$

Доказательство. *1)* В силу линейности оператора A для доказательства непрерывности достаточно доказать его ограниченность. По определению оператора A для $v, \varphi \in V^1$ имеем
$$|\langle Au, \varphi\rangle| = \left|\int\limits_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx\right| \leqslant \|u\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^1},$$
и, следовательно: $\|Au\|_{V^{-1}} \leqslant \|u\|_{V^1}$. Таким образом оператор $A : V^1 \to V^{-1}$ ограничен, непрерывен и имеет место требуемая оценка.

2) Пусть $u \in L_2(0,T;V^1)$. В силу первого пункта данной леммы при почти всех $t \in (0,T)$ имеем оценку $\|Au(t)\|_{V^{-1}} \leqslant \|u(t)\|_{V^1}$. Возводя её в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получим:

$$\int\limits_0^T \|Au(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt \leqslant \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{V^1}\,dt. \tag{14}$$

В силу того, что $\|u(t)\|_{V^1} \in L_2(0,T)$, получаем, что $\|Au(t)\|_{V^{-1}} \in L_2(0,T)$, и, следовательно, $Au \in L_2(0,T;V^{-1})$.

Извлекая корень из оценки (14), получим требуемую оценку сверху (12). Поскольку, оператор A – линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $L_2(0,T;V^1)$ в $L_2(0,T;V^{-1})$.

3) Пусть $u \in W_1$. Тогда в силу неравенства (12) получаем, что

$$\|Au\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|u\|^2_{L_2(0,T;V^1)} = \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{V^1}dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{V^2}dt \leqslant C_1^2 \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2_{V^2} \int\limits_0^T dt = C_1^2 T \|u\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\|w\|_{V^1} \leqslant C_1\|w\|_{V^2}$, которое имеет место для любого $w \in V^2$ в силу непрерывного вложения $V^2 \subset V^1$.

Таким образом, для любой функции $u \in W_1$ функция $Au \in L_2(0,T;V^{-1})$, и имеет место первая из требуемых оценок (13) ($C_2 = C_1\sqrt{T}$). В силу непрерывного вложения $C([0,T],V^3) \subset C([0,T],V^2)$ получаем правую часть оценки (13) из которой в силу линейности и следует непрерывность оператора $A : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ (в силу определения нормы в пространстве W_1 справедливо неравенство $\|u\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|u\|_{W_1}$).

□

Перейдем непосредственно к исследованию свойств оператора B_1. Имеет место следующая лемма:

Лемма 2. *Для оператора B_1 имеют место следующие свойства:*

1) Оператор $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}$ — непрерывен и для него имеет место оценка:

$$\|B_1(u)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4 \|u\|^2_{L_4(\Omega)^n}. \tag{15}$$

2) Для любой функции $u \in L_4(0,T; L_4(\Omega)^n)$ функция $B_1(u) \in L_2(0,T; V^{-1})$ и оператор $B_1 : L_4(0,T; L_4(\Omega)^n) \to L_2(0,T; V^{-1})$ непрерывен.

3) Оператор $B_1 : W_1 \to L_2(0,T; V^{-1})$ вполне непрерывен и имеет место оценка:

$$\|B_1(u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_7 \|u\|^2_{C([0,T],V^1)}. \tag{16}$$

Доказательство. *1)* Для любых $v \in L_4(\Omega)^n, \varphi \in V^1$ имеем

$$|\langle B_1(v), \varphi\rangle| = \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left| \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega |v_i||v_j| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v_i\|_{L_4(\Omega)} \|v_j\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \|v\|_{L_4(\Omega)^n} \|v\|_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_{V^1} \leqslant C_4 \|v\|^2_{L_4(\Omega)^n} \|\varphi\|_{V^1}$$

откуда и следует, что

$$\|B_1(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4 \|v\|^2_{L_4(\Omega)^n}$$

с некоторой константой C_4.

Покажем непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем:

$$|\langle B_1(v^m), \varphi\rangle - \langle B_1(v^0), \varphi\rangle| = \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^0 v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} \leqslant \|\varphi\|_{V^1} \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| B_1(v^m) - B_1(v^0) \right\|_{V^{-1}} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 + v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^m - v_i^m v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m v_j^0 - v_i^0 v_j^0 \right\|_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_i^m (v_j^m - v_j^0) \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_j^0 (v_i^m - v_i^0) \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|v_i^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| v_j^m - v_j^0 \right\|_{L_4(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| v_j^0 \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| v_i^m - v_i^0 \right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} + C_5 \left\| v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} =$$
$$= C_5 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\| v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Таким образом получили, что

$$\left\| B_1(v^m) - B_1(v^0) \right\|_{V^{-1}} \leqslant C_5 \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\| v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n} \right) \left\| v^m - v^0 \right\|_{L_4(\Omega)^n}. \quad (17)$$

Полагая $v^m \to v^0$ в $L_4(\Omega)^n$, получаем из последнего неравенства непрерывность отображения $B : L_4(\Omega)^n \to V^{-1}$.

2) Пусть $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega)^n)$. В силу оценки (15) при почти всех $t \in (0, T)$ имеем:

$$\|B_1(v)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4 \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}.$$

Возведем это неравенство в квадрат, проинтегрируем по t от 0 до T и оценим правую часть сверху:

$$\int_0^T \|B_1(v)(t)\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant C_4^2 \int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)^n} dt = C_4^2 \|v\|^4_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства конечна, то конечна и левая часть. Таким образом для $v \in L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)$ мы имеем, что $B_1(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$.

Покажем теперь непрерывность отображения $B_1 : L_4(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_2(0,T;V^{-1})$. Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)$. Из неравенства (17) получим, что при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место оценка

$$\left\|B_1(v^m)(t) - B_1(v^0)(t)\right\|_{V^{-1}} \leqslant C_5 \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}\right) \times \\ \times \left\|(v^m - v^0)(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T. Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим:

$$\int_0^T \left\|B_1(v^m)(t) - B_1(v^0)(t)\right\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant \\ \leqslant C_5^2 \int_0^T \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)^n} + \left\|v^0(t)\right\|_{L_4(\Omega)^n}\right)^2 \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt \leqslant \\ \leqslant 2C_5^2 \int_0^T \left(\|v^m(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n} + \left\|v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n}\right) \left\|v^m(t) - v^0(t)\right\|^2_{L_4(\Omega)^n} dt \leqslant \\ \leqslant 2C_5^2 \|v^m\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} \left\|v^m - v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} + \\ + 2C_5^2 \left\|v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} \left\|v^m - v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} \leqslant \\ \leqslant 2C_5^2 \left(\|v^m\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} + \left\|v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}\right) \left\|v^m - v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}.$$

Таким образом:

$$\left\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\right\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\ \leqslant 2C_5^2 \left(\|v^m\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)} + \left\|v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}\right) \left\|v^m - v^0\right\|^2_{L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)}$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \to +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это и значит, что отображение $B_1 : L_4(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_2(0,T;V^{-1})$ непрерывно.

3) Для доказательства требуемого утверждения воспользуемся сформулированной выше теоремой Обена-Дубинского-Симона.

В нашем случае

$$X = V^1,\ E = L_4(\Omega)^n,\ Y = V^0,$$

$$F = \{v : v \in L_4(0,T;V^1); v' \in L_2(0,T;V^0)\}.$$

Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $V^1 \subset L_4(\Omega)^n$ при $n \leqslant 3$, то выполнены все условия теоремы 1, и из неё следует компактность вложения F в $L_4(0,T;L_4(\Omega)^n)$.

Из того, что вложения

$$C([0,T],V^3) \subset L_4(0,T;V^1) \quad \text{и} \quad L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;V^0)$$

непрерывны, следует, что $W_1 \subset F$, причём вложение непрерывно. Далее, из второго пункта этой леммы мы имеем, что отображение $B_1 : L_4(0,T;L_4(\Omega)^n) \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывно.

Таким образом имеем следующую суперпозицию

$$W_1 \subset F \subset L_4(0,T;L_4(\Omega)^n) \xrightarrow{B_1} L_2(0,T;V^{-1}),$$

где первое вложение — непрерывно, второе вложение — вполне непрерывно, а отображение B_1 — непрерывно. В итоге, для любой функции $v \in W_1$ получили, что функция $B_1(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$, а отображение $B_1 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ — вполне непрерывно.

Пусть $v \in W_1$. Тогда из неравенства (15) следует, что

$$\|B_1(v)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4 \|v(t)\|^2_{L_4(\Omega)^n}$$

при почти всех $t \in (0, T)$.

В силу непрерывного вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)^n$ при $n \leqslant 3$ имеем:

$$\|v(t)\|_{L_4(\Omega)^n} \leqslant C_6 \|v(t)\|_{V^1}.$$

В последней оценке константа C_6 зависит от области Ω. Отсюда

$$\|B_1(v)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4 C_6^2 \|v(t)\|^2_{V^1}.$$

Возводя данное неравенство в квадрат и проинтегрировав его по t от 0 до T, получим:

$$\int\limits_0^T \|B_1(v)(t)\|^2_{V^{-1}}\, dt \leqslant C_4^2 C_6^4 \int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{V^1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_4^2 C_6^4 \left(\max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{V^1} \right)^4 \int\limits_0^T dt = C_4^2 C_6^4 T \|v\|^4_{C([0,T],V^1)}$$

с константой $C_7 = C_4 C_6^2 \sqrt{T}$. □

Лемма 3. *Для оператора B_2 имеют место следующие свойства:*

1) *Оператор $B_2 : V^2 \to V^{-1}$ — непрерывен и для него имеет место оценка:*

$$\|B_2(u)\|_{V^{-1}} \leqslant C_8 \|u\|^2_{V^2}. \tag{18}$$

2) *Для любой функции $u \in L_4(0, T; V^2)$ функция $B_2(u) \in L_2(0, T; V^{-1})$ и оператор $B_2 : L_4(0, T; V^2) \to L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен.*

3) *Оператор $B_2 : W_1 \to L_2(0, T; V^{-1})$ вполне непрерывен и имеет место оценка:*

$$\|B_2(u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_9 \|u\|^2_{C([0,T],V^2)}. \tag{19}$$

Доказательство. *1)* Для любых $u \in V^2$ и $\varphi \in V^1$ имеем

$$|\langle B_2(u), \varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left|\int\limits_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u_i||\Delta u_j| \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i\|_{C(\Omega)} \|\Delta u_j\|_{L_2(\Omega)} \left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u\|_{C(\Omega)^n} \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)^n} \|\varphi\|_{V^1} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \|u\|_{V^2}^2 \|\varphi\|_{V^1}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (18).

Здесь мы воспользовались вложением $V^2 \subset C(\Omega)^n$, в силу которого имеет место неравенство

$$\|u\|_{C(\Omega)^n} \leqslant C_8 \|u\|_{V^2}.$$

Докажем теперь непрерывность рассматриваемого оператора. $\forall u, v \in V^2$ и $\varphi \in V^1$ имеем:

$$|\langle B_2(u), \varphi\rangle - \langle B_2(v), \varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \sum_{i,j}^{n} \int\limits_{\Omega} v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left|\int\limits_{\Omega} (u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j| \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right| dx \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)} \left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{V^1} \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда получаем неравенство: $\|B_2(u) - B_2(v)\|_{V^{-1}} \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)}$.

Оценим правую часть последнего неравенства:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta u_j - v_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta u_j - u_i \Delta v_j + u_i \Delta v_j - v_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta u_j - u_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i \Delta v_j - v_i \Delta v_j\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \|u_i(\Delta u_j - \Delta v_j)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \|(u_i - v_i)\Delta v_j\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|u\|_{C(\Omega)^n} \|\Delta(u-v)\|_{L_2(\Omega)^n} + \sum_{i,j=1}^{n} \|u-v\|_{C(\Omega)^n} \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \|u\|_{V^2} \|u-v\|_{V^2} + C_8 \|u-v\|_{V^2} \|v\|_{V^2} = C_8 \left(\|u\|_{V^2} + \|v\|_{V^2}\right) \|u-v\|_{V^2}$$

Таким образом:

$$\|B_2(u) - B_2(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_8 \|u-v\|_{V^2} \left(\|u\|_{V^2} + \|v\|_{V^2}\right) \qquad (20)$$

Отсюда и следует непрерывность отображения $B_2 : V^2 \to V^{-1}$.

2) Пусть функция $u \in L_4(0,T;V^2)$. Тогда в силу оценки (18) при п. в. $t \in (0,T)$ имеет место оценка:

$$\|B_2(u)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_8 \|u(t)\|_{V^2}^2.$$

Возведем это неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T:

$$\int_0^T \|B_2(u)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leqslant C_8^2 \int_0^T \|u(t)\|_{V^2}^4 dt = C_8^2 \|u\|_{L_4(0,T;V^2)}^4.$$

Так как правая часть последнего неравенства конечна, то конечна и левая часть, следовательно, $B_2(u) \in L_2(0,T;V^{-1})$.

Покажем теперь непрерывность оператора $B_2 : L_4(0,T;V^2) \to L_2(0,T;V^{-1})$.

В силу оценки (20) для любых $u, v \in L_4(0,T;V^2)$ при п. в. $t \in (0,T)$ имеет место неравенство:

$$\|B_2(u)(t) - B(v)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_8 \|(u-v)(t)\|_{V^2} \left(\|u(t)\|_{V^2} + \|v(t)\|_{V^2}\right).$$

Возведем это неравенство в квадрат и преобразуем его, получим:

$$\|B_2(u)(t) - B_2(v)(t)\|^2_{V^{-1}} \leqslant 2C_8^2 \|(u-v)(t)\|^2_{V^2} \left(\|u(t)\|^2_{V^2} + \|v(t)\|^2_{V^2}\right).$$

Проинтегрируем получившееся неравенство по t от 0 до T:

$$\|B_2(u) - B_2(v)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} = \int\limits_0^T \|B_2(u)(t) - B_2(v)(t)\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2C_8^2 \int\limits_0^T \|(u-v)(t)\|^2_{V^2} \left(\|u(t)\|^2_{V^2} + \|v(t)\|^2_{V^2}\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant 2C_8^2 \int\limits_0^T \|(u-v)(t)\|^2_{V^2} \|u(t)\|^2_{V^2} dt + 2C_8^2 \int\limits_0^T \|(u-v)(t)\|^2_{V^2} \|v(t)\|^2_{V^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2C_8^2 \|u-v\|^2_{L_4(\Omega)^4(0,T;V^2)} \left(\|u\|^2_{L_4(\Omega)^4(0,T;V^2)} + \|v\|^2_{L_4(\Omega)^4(0,T;V^2)}\right).$$

Отсюда и получаем неравенство:

$$\|B_2(u) - B_2(v)\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant 2C_8^2 \|u-v\|^2_{L_4(\Omega)^4(0,T;V^2)} \left(\|u\|^2_{L_4(\Omega)^4(0,T;V^2)} + \|v\|^2_{L_4(\Omega)^4(0,T;V^2)}\right), \quad (21)$$

из которого и следует непрерывность отображения $B_2 : L_4(0,T;V^2) \to L_2(0,T;V^{-1})$.

3) Для доказательства этого утверждения еще раз воспользуемся теоремой Обена-Дубинского-Симона. В нашем случае

$$X = V^3 \quad E = V^2 \quad Y = V^0;$$
$$F = \left\{u : L_4(0,T;V^3); u' \in L_2(0,T;V^0)\right\}.$$

Таким образом, поскольку $C([0,T],V^3) \subset L_4(0,T;V^3)$ и $L_2(0,T;V^3) \subset L_2(0,T;V^0)$, и эти вложения непрерывны, то вложение $W_1 \subset F$ непрерывно.

В итоге, получим следующую цепочку вложений:

$$W_1 \subset F \hookrightarrow L_4(0,T;V^2) \xrightarrow{B_2} L_2(0,T;V^{-1}).$$

Здесь первое вложение непрерывно, второе вложение компактно, а отображение B_2 непрерывно, как оператор из $L_4(0,T;V^2)$ в $L_2(0,T;V^{-1})$. Таким образом, $B_2 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ — вполне непрерывное отображение.

Докажем оценку (19). В силу оценки (18) для $u \in W_1$ при п. в. $t \in (0,T)$ имеет место неравенство:

$$\|B_2(u)(t)\|_{V^{-1}} \leqslant C_8 \|u(t)\|^2_{V^2}.$$

Возведем эту оценку в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T:

$$\int\limits_0^T \|B_2(u)(t)\|^2_{V^{-1}} dt \leqslant C_8^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|^4_{V^2} dt \leqslant C_8^2 \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^4_{V^2} \int\limits_0^T dt =$$

$$= C_8^2 T \|u\|^4_{C([0,T],V^2)}.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (19) константой $C_9 = C_8\sqrt{T}$. □

Для получения одной из априорных оценок потребуется следующее утверждение.

Лемма 4. *Имеют место следующие оценки:*

1. *Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^3)$ имеет место оценка:*

$$\|A^2 u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|u\|_{L_2(0,T;V^3)}. \tag{22}$$

2. *Для любой функции $u \in L_2(0,T;V^1)$ имеет место оценка:*

$$\varkappa \|u\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \|(\varkappa A + J)u\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{23}$$

Доказательство. *1)* Пусть функция $u \in L_2(0,T;V^3)$. Тогда по определению оператора A^2 для любой $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ имеем

$$\left|\langle A^2 u(t), \varphi\rangle\right| = \left|\int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta u(t)\right) : \nabla\varphi\, dx\right| \leqslant \|u(t)\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1}.$$

Отсюда следует оценка, имеющая место при почти всех $t \in (0,T)$: $\|A^2u(t)\|_{V^{-1}} \leqslant \|u(t)\|_{V^3}$. Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получаем требуемое неравенство (22).

2) Пусть функция $u \in L_2(0,T;V^1)$, тогда при почти всех $t \in (0,T)$ в силу определения операторов A и J имеем

$$\langle(\varkappa A + J)u(t), u(t)\rangle = \varkappa\langle Au(t), u(t)\rangle + \langle Ju(t), u(t)\rangle =$$
$$= \varkappa\int\limits_{\Omega} \nabla u(t) : \nabla u(t)\,dx + \int\limits_{\Omega} u(t)u(t)\,dx = \varkappa\|u(t)\|^2_{V^1} + \|u(t)\|^2_{V^0} \geqslant \varkappa\|u(t)\|^2_{V^1}.$$

С другой стороны: $\langle(\varkappa A + J)u(t), u(t)\rangle \leqslant \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}}\|u\|_{V^1}$. Таким образом получим: $\varkappa\|u(t)\|^2_{V^1} \leqslant \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}}\|u(t)\|_{V^1}$. Отсюда следует оценка снизу, имеющая место при почти всех $t \in (0,T)$: $\varkappa\|u(t)\|_{V^1} \leqslant \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}}$. Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T, получаем требуемую оценку (23). $\square$

Лемма 5. *Для оператора $J + \varkappa A + \varepsilon A^2$ имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ — линейный, непрерывный, обратимый и для него имеют место оценки:*

$$\varepsilon\|u\|_{V^3} \leqslant \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \leqslant (C_{10} + \varkappa C_{11} + \varepsilon)\|u\|_{V^3}. \tag{24}$$

Обратный оператор $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} : V^{-1} \to V^3$ непрерывен и для любой $w \in V^{-1}$ имеет место оценка:

$$\|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}w\|_{V^3} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|w\|_{V^{-1}}. \tag{25}$$

2. *Функция $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u \in L_2(0,T;V^{-1})$, оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ — непрерывен, обратим для любой функции*

$u \in L_2(0,T;V^3)$ и для него имеют место оценки:

$$\varepsilon\|u\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant (C_{10}+\varkappa C_{11}+\varepsilon)\|u\|_{L_2(0,T;V^3)}. \quad (26)$$

Обратный оператор $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^3)$ непрерывен.

Доказательство. *1)* Линейность оператора $J+\varkappa A+\varepsilon A^2$ следует из линейности каждого из операторов $J, \varkappa A, \varepsilon A^2$. Покажем теперь его непрерывность. В силу линейности нам для этого достаточно показать его ограниченность:

$$\|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varphi\in V^1\setminus\{0\}} \frac{|\langle (J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{V^1}} =$$
$$= \sup_{\varphi\in V^1\setminus\{0\}} \frac{\left|\int\limits_\Omega u\varphi\,dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla u : \nabla\varphi\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla\varphi\,dx\right|}{\|\varphi\|_{V^1}} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varphi\in V^1\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{V^0}\|\varphi\|_{V^0} + \varkappa\|u\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^1} + \varepsilon\|u\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1}}{\|\varphi\|_{V^1}} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varphi\in V^1\setminus\{0\}} \frac{C_{10}\|u\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1} + \varkappa C_{11}\|u\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1} + \varepsilon\|u\|_{V^3}\|\varphi\|_{V^1}}{\|\varphi\|_{V^1}} =$$
$$= (C_{10}+\varkappa C_{11}+\varepsilon)\|u\|_{V^3}.$$

Таким образом, оператор $J+\varkappa A+\varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ — непрерывен, и имеет место правая часть оценки (24).

Далее, в силу первого пункта леммы 1 и непрерывного вложения $V^1 \subset V^{-1}$ получаем, что оператор $J+\varkappa A : V^1 \to V^{-1}$ непрерывен. Следовательно, поскольку вложение $V^3 \subset V^1$ вполне непрерывно, то оператор $J+\varkappa A : V^3 \to V^{-1}$ является вполне непрерывным как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного операторов.

Таким образом, оператор $J+\varkappa A+\varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ можно представить как сумму непрерывно обратимого оператора $\varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ (в силу определения оператора A и пространств $V^{\beta}, \beta \in \mathbb{R}$ имеем, что оператор $A^2 : V^3 \to V^{-1}$ непрерывен, обратим и обратный к нему оператор $(A^2)^{-1} : V^{-1} \to V^3$ непрерывен) и вполне непрерывного оператора $J + \varkappa A : V^3 \to V^{-1}$.

Но, тогда оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ является линейным фредгольмовым оператором индекса нуль (как сумма непрерывно обратимого и вполне непрерывного операторов, теорема 7.4.3 из [10], с. 288). Более того, $\mathrm{Ker}(J + \varkappa A + \varepsilon A^2) = \{0\}$.

На самом деле, пусть $u \in V^3$, тогда получим, что $Au \in V^1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\langle (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u, Au\rangle = \\
&\quad = -\int\limits_{\Omega} u\Delta u dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \nabla u : \nabla(\Delta u)\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta u)\, dx = \\
&\quad = \int\limits_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx + \varkappa \int\limits_{\Omega} \Delta u \Delta u dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta u)\, dx = \\
&\qquad = \|u\|^2_{V^1} + \varkappa \|u\|^2_{V^2} + \varepsilon \|u\|^2_{V^3} \geqslant \varepsilon \|u\|^2_{V^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\langle (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u, Au\rangle \geqslant \varepsilon \|u\|^2_{V^3}. \tag{27}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
\langle (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u, Au\rangle &\leqslant \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \|Au\|_{V^1} = \\
&= \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \|u\|_{V^3}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

В итоге из (27) и (28) получим левую часть оценки (24):

$$\varepsilon \|u\|_{V^3} \leqslant \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}}.$$

Из последней оценки и следует, что ядро оператора $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \to V^{-1}$ состоит только из нуля. Следовательно, в силу теоремы 7.4.3 из ([10], с.

288) он обратим (линейный фредгольмов оператор индекса нуль с нулевым ядром), причём обратный оператор $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)^{-1} : V^{-1} \to V^3$ непрерывен.

Неравенство (25) получается из левой части оценки (24). На самом деле, в силу обратимости оператора $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)$ для каждого $w \in V^{-1}$ существует единственный элемент, $v \in V^3$ такой, что $v = (J+\varkappa A+\varepsilon A^2)^{-1}w$ и имеет место неравенство (24):

$$\varepsilon\|v\|_{V^3} \leqslant \|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)v\|_{V^{-1}}.$$

Или, что то же самое, что для любого $w \in V^{-1}$ выполняется неравенство:

$$\varepsilon\|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)^{-1}w\|_{V^3} \leqslant \|w\|_{V^{-1}}.$$

Из последней оценки и следует (25).

2) Пусть $u \in L_2(0,T;V^3)$. В силу правой части оценки (24) при почти всех $t \in (0,T)$ имеет место оценка $\|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u(t)\|_{V^{-1}} \leqslant (C_{10}+\varkappa C_{11}+\varepsilon)\|u(t)\|_{V^3}$. Возводя её в квадрат и проинтегрировав полученное неравенство по t от 0 до T, получим:

$$\int\limits_0^T \|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u(t)\|^2_{V^{-1}}\,dt \leqslant (C_{10}+\varkappa C_{11}+\varepsilon)^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{V^3}dt.$$

Так как $u \in L_2(0,T;V^3)$, то правая часть неравенства конечна, и, следовательно, левая часть неравенства конечна. Отсюда следует, что $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u \in L_2(0,T;V^{-1})$, и, что имеет место правая часть оценки (26).

Поскольку оператор $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)$ — линейный и ограниченный, то получаем, что он непрерывен как оператор из $L_2(0,T;V^3)$ в $L_2(0,T;V^{-1})$.

Покажем теперь его обратимость. Сначала докажем, что множество значений оператора $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2) : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ совпадает со всем $L_2(0,T;V^{-1})$. Для этого надо показать, что для любого $w \in L_2(0,T;V^{-1})$ уравнение $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u = w$ имеет решение $u \in L_2(0,T;V^3)$.

В силу того, что оператор $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2) : V^3 \to V^{-1}$ обратим, мы имеем, что при почти всех $t \in (0,T)$ это уравнение имеет решение $u(t) = (J+\varkappa A+\varepsilon A^2)^{-1}w(t)$.

Осталось показать, что определённая таким образом функция u принадлежит пространству $L_2(0,T;V^3)$. В силу левой части оценки (24) при почти всех $t \in (0,T)$ мы имеем:

$$\varepsilon\|u(t)\|_{V^3} \leqslant \|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u(t)\|_{V^{-1}} = \|w(t)\|_{V^{-1}}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя его по отрезку $[0,T]$, получим:

$$\varepsilon\int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{V^3}dt \leqslant \int\limits_0^T \|(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)u(t)\|^2_{V^{-1}}dt = \int\limits_0^T \|w(t)\|^2_{V^{-1}}dt. \tag{29}$$

Поскольку $w \in L_2(0,T;V^{-1})$, то из последнего неравенства следует, что $u \in L_2(0,T;V^3)$. Таким образом мы получили, что множество значений оператора $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2) : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ совпадает со всем пространством $L_2(0,T;V^{-1})$.

Также непосредственно из неравенства (29) получим левую часть оценки (26). Откуда, как и в первом пункте, непосредственно получаем, что $\mathrm{Ker}(J+\varkappa A+\varepsilon A^2) = \{0\}$.

В итоге получили, что $(J+\varkappa A+\varepsilon A^2)$ обратим как оператор из $L_2(0,T;V^3)$ в $L_2(0,T;V^{-1})$. Более того, в силу теоремы Банаха обратный к нему оператор является непрерывным. □

Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$L(u) = \left(\left(J+\varkappa A+\varepsilon A^2\right)u' + \nu Au, u|_{t=0}\right), \quad L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3;$$
$$K(u) = (B_1(u) - \varkappa B_2(u), 0), \quad K : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3.$$

Для операторов L и K справедливы следующие леммы.

Лемма 6. *Оператор* $L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ *— обратим и обратный к нему оператор* $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_1$ *непрерывен.*

Доказательство. Для доказательства непрерывной обратимости оператора

$$L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3,\ L(v) = ((J + \varkappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu A v, v|_{t=0})$$

мы воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе. Сначала покажем его непрерывность. В силу линейности этого оператора достаточно показать его ограниченность.

Для любой функции $v \in W_1$ в силу неравенств (13),(26) имеем

$$\begin{aligned}
\|L(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})\times V^3} &= \left\|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu A v\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3} \leqslant \\
&\leqslant \left\|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)v'\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \nu \|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_{V^3} \leqslant \\
&\leqslant (C_{10} + \varkappa C_{11} + \varepsilon)\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \nu C_3 \|v\|_{C([0,T];V^3)} + \|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \\
&\leqslant (C_{10} + \varkappa C_{11} + \varepsilon + \nu C_3 + 1)\left(\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} + \|v\|_{C([0,T];V^3)}\right) = \\
&= (C_{10} + \varkappa C_{11} + \varepsilon + \nu C_3 + 1)\,\|v\|_{W_1}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что линейный оператор $L : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ ограничен и, следовательно, непрерывен.

Покажем теперь, что оператор L является взаимно однозначным. Для этого достаточно показать, что для каждого $f \in L_2(0,T;V^0), a \in V^3$ существует единственный элемент $v \in W_1$ такой, что

$$L(v) = (f, a).$$

Последнее уравнение можно переписать в виде следующей задачи Коши:

$$(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu A v = f, \tag{30}$$

$$v(0) = a. \tag{31}$$

Покажем, что при каждом $f \in L_2(0,T;V^0), a \in V^3$ данная задача имеет единственное решение $v \in W_1$.

В силу второго пункта леммы 5 имеем, что оператор $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2) : L_2(0,T;V^3) \to L_2(0,T;V^{-1})$ обратим и обратный к нему оператор непрерывен. Следовательно, применяя оператор $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}$ к (30) получаем, что задача (30),(31) эквивалентна следующей задаче Коши:

$$v' + \nu(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}Av = (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}f, \tag{32}$$

$$v(0) = a. \tag{33}$$

Проинтегрировав (32) от 0 до t где $t \in [0,T]$, получим, что задача нахождения решения $v \in W_1$ задачи Коши (32),(33) эквивалентна задаче нахождения решения $v \in C([0,T],V^3)$ следующего операторного уравнения:

$$v(t) = a - \int\limits_0^t \big(\nu(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}Av(s) - (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}f(s)\big)\, ds. \tag{34}$$

Введём вспомогательное отображение $t \in [0,T]$

$$(Uv)(t) = a - \int\limits_0^t \big(\nu(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}Av(s) - (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}f(s)\big)\, ds.$$

Поскольку интеграл Бохнера от интегрируемой функции есть функция непрерывная, мы получаем, что $U : C([0,T],V^3) \to C([0,T],V^3)$.

Покажем, что отображение U является сжимающим, для того чтобы воспользоваться принципом сжимающих отображений. Для любых $v, w \in C([0,T],V^3)$ в силу определения оператора U, воспользовавшись неравенствами (25), (11) и непрерывностью вложения $V^3 \subset V^1$, получим для любого вещественного числа $k > 0$ (точное значение числа k будет указано ниже)

$$\|(Uv)(t) - (Uw)(t)\|_{V^3} =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t \nu(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} Av(s)ds - \int\limits_0^t \nu(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} Aw(s)ds \right\|_{V^3} =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t \nu(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} A(v - w)(s)ds \right\|_{V^3} \leqslant$$

$$\leqslant \nu \int\limits_0^t \left\| (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} A(v - w)(s) \right\|_{V^3} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\nu}{\varepsilon} \int\limits_0^t \|A(v - w)(s)\|_{V^{-1}} ds \leqslant C_{11} \frac{\nu}{\varepsilon} \int\limits_0^t \|v(s) - w(s)\|_{V^3} ds =$$

$$= C_{11} \frac{\nu}{\varepsilon} \int\limits_0^t \|v(s) - w(s)\|_{V^3} e^{-ks} e^{ks} ds \leqslant$$

$$\leqslant C_{11} \frac{\nu}{\varepsilon} \int\limits_0^t \max_{s \in [0,t]} \left(e^{-ks} \|v(s) - w(s)\|_{V^3} \right) e^{ks} ds =$$

$$= C_{11} \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0,t],V^3),k} \int\limits_0^t e^{ks} ds \leqslant C_{11} \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0,T],V^3),k} \left(\frac{e^{kt} - 1}{k} \right),$$

где $\|u\|_{C([0,T],V^3),k} = \max\limits_{t \in [0,T]} \left(e^{-kt} \|u(t)\|_{V^3} \right), k \geqslant 0$ – норма, эквивалентная стандартной норме $C([0,T], V^3)$. ([19], с. 191, лемма 1.2)

В итоге получили, что при $t \in [0,T]$ имеет место неравенство

$$\|(Uv)(t) - (Uw)(t)\|_{V^3} \leqslant C_{11} \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0,T],V^3),k} \left(\frac{e^{kt} - 1}{k} \right).$$

Умножая теперь обе части последнего неравенства на e^{-kt} и оценивая правую часть сверху, окончательно получим

$$e^{-kt}\|(Uv)(t)-(Uw)(t)\|_{V^3}\leqslant C_{11}\frac{\nu}{\varepsilon}\|v-w\|_{C([0,T],V^3),k}\left(\frac{1-e^{-kT}}{k}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_{11}\frac{\nu}{k\varepsilon}\|v-w\|_{C([0,T],V^3),k}.$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от t. Тогда, переходя к максимуму по $t\in[0,T]$ в левой части и выбирая постоянную k таким образом, чтобы $\frac{C_{11}\nu}{k\varepsilon}<1$, получим неравенство

$$\|Uv-Uw\|_{C([0,T],V^3),k}\leqslant\eta\|v-w\|_{C([0,T],V^3),k}, \tag{35}$$

где η — константа, $0<\eta<1$.

Таким образом, из неравенства (35) непосредственно получаем, что отображение $U: C([0,T],V^3)\to C([0,T],V^3)$ является сжимающим. Тогда в силу принципа сжимающих отображений отображение U имеет единственную неподвижную точку, то есть такую точку $w\in C([0,T],V^3)$, что $Uw=w$. Следовательно, эта функция $w\in C([0,T],V^3)$ удовлетворяет уравнению (34).

В силу проведенных выше рассуждений имеем, что для каждой пары $f\in L_2(0,T;V^0)$, $a\ \in\ V^3$ существует единственное решение $w\in W_1$ задачи (30),(31). Следовательно получим, что оператор $L:\ W_1\ \to\ L_2(0,T;V^{-1})\times V^3$ является взаимно однозначным. Таким образом, в силу теоремы Банаха об обратном операторе оператор $L\ :\ W_1\to\ L_2(0,T;V^{-1})\times V^3$ обратим и обратный оператор оператор $L^{-1}\ :\ L_2(0,T;V^{-1})\times\ V^3\ \to\ W_1$ непрерывен. □

Лемма 7. *Оператор $K: W_1\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3$ вполне непрерывный.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения оператора K :

$$K: W_1\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\quad K(v)=(B_1(v)-\varkappa B_2(v),0)$$

и вполне непрерывности операторов: $B_1 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ (третий пункт леммы 2); $B_2 : W_1 \to L_2(0,T;V^{-1})$ (третий пункт леммы 3). $\square$

7 Априорные оценки

Вместе с операторным уравнением (10) будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений:

$$L(u) - \lambda K(u) = \lambda(f, b), \quad \text{где} \quad \lambda \in [0, 1]. \tag{36}$$

Лемма 8. *Если $u \in W_1$ — решение (36) для какого-то $\lambda \in [0, 1]$, то для него имеют место оценки:*

$$\|u\|^2_{C([0,T],V^2)} \leqslant \frac{2}{\varkappa^2} C_{13}; \tag{37}$$

$$\frac{\varepsilon\varkappa}{2} \|u\|^2_{C([0,T],V^3)} \leqslant C_{13}, \tag{38}$$

где $C_{13} = \dfrac{C_{12}^2 + \varkappa^2}{\nu\varkappa} \|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} + \dfrac{1}{2}\|b\|^2_{V^0} + \varkappa\|b\|^2_{V^1} + \dfrac{\varepsilon + \varkappa^2}{2}\|b\|^2_{V^2} + \dfrac{\varepsilon\varkappa}{2}\|b\|^2_{V^3}.$

Доказательство. Если $u \in W_1$ — решение (36) для некоторого $\varepsilon > 0, \lambda \in [0, 1]$, то

$$\left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u' + \nu A u - \lambda B_1(u) + \lambda\varkappa B_2(u) = \lambda f, \tag{39}$$

$$u(0) = \lambda b. \tag{40}$$

Применим (39) к функции $\varphi = (J + \varkappa A) u$. Получим:

$$\langle \left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u', (J + \varkappa A) u \rangle + \langle \nu A u, (J + \varkappa A) u \rangle - \lambda \langle B_1(u), (J + \varkappa A u) \rangle +$$
$$+ \lambda\varkappa \langle B_2(u), (J + \varkappa A) u \rangle = \lambda \langle f, (J + \varkappa A) u \rangle.$$

Преобразуем слагаемые следующим образом:

$$\langle \left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u', (J + \varkappa A) u \rangle =$$
$$= \langle (J + \varkappa A) u', (J + \varkappa A) u \rangle + \varepsilon \langle A^2 u', u \rangle + \varepsilon\varkappa \langle A^2 u', A u \rangle =$$
$$= \int\limits_\Omega u' u dx - \varkappa \int\limits_\Omega u' \Delta u dx + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla u' : \nabla u dx - \varkappa^2 \int\limits_\Omega \nabla u' : \nabla \Delta u dx -$$

$$
-\varepsilon\int\limits_{\Omega}\nabla\Delta u':\nabla u dx+\varepsilon\varkappa\int\limits_{\Omega}\nabla\Delta u':\nabla\Delta u dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}u^2dx+
$$

$$
+\frac{\varkappa}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla u:\nabla u\right)dx+\frac{\varkappa}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla u:\nabla u\right)dx+\frac{\varkappa^2}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u\Delta u\right)dx+
$$

$$
+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u\Delta u\right)dx+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\Delta u:\nabla\Delta u\right)dx=
$$

$$
=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^0}+\varkappa\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^1}+\frac{\varepsilon+\varkappa^2}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^3}.
$$

Переходим к следующему слагаемому

$$
\langle\nu Au,\left(J+\varkappa A\right)u\rangle=\nu\langle Au,u\rangle+\nu\varkappa\langle Au,Au\rangle=
$$

$$
=\nu\int\limits_{\Omega}\nabla u:\nabla u dx+\nu\varkappa\int\limits_{\Omega}\Delta u\Delta u dx=\nu\|u\|^2_{V^1}+\nu\varkappa\|u\|^2_{V^2}.
$$

Заметим, что

$$
-\lambda\langle B_1(u),\left(J+\varkappa A\right)u\rangle+\lambda\varkappa\langle B_2(u),\left(J+\varkappa A\right)u\rangle=
$$

$$
=-\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_iu_j\frac{\partial(u-\varkappa\Delta u)_j}{\partial x_i}dx+\lambda\varkappa\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_i\Delta u_j\frac{\partial(u-\varkappa\Delta u)_j}{\partial x_i}dx=
$$

$$
=-\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\left(\int\limits_{\Omega}u_i(u-\varkappa\Delta u)_j\frac{\partial(u-\varkappa\Delta u)_j}{\partial x_i}dx\right)=
$$

$$
=-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}u_i\frac{\partial\left((u-\varkappa\Delta u)_j(u-\varkappa\Delta u)_j\right)}{\partial x_i}dx=
$$

$$
=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(u-\varkappa\Delta u)_j(u-\varkappa\Delta u)_jdx=0.
$$

Оценим правую часть сверху:

$$
\langle f,\left(J+\varkappa A\right)u\rangle=\langle f,u\rangle+\varkappa\langle f,Au\rangle\leqslant\|f\|_{V^0}\|u\|_{V^0}+\varkappa\|f\|_{V^0}\|Au\|_{V^0}\leqslant
$$

$$
\leqslant C_{12}\|f\|_{V^0}\|u\|_{V^2}+\varkappa\|f\|_{V^0}\|u\|_{V^2}\leqslant\|u\|_{V^2}\left(C_{12}\|f\|_{V^0}+\varkappa\|f\|_{V^0}\right)\leqslant
$$

$$
\leqslant\frac{\nu\varkappa}{2}\|u\|^2_{V^2}+\frac{\left(C_{12}+\varkappa\right)^2\|f\|^2_{V^0}}{2\nu\varkappa}\leqslant\frac{\nu\varkappa}{2}\|u\|^2_{V^2}+\frac{\left(C_{12}^2+\varkappa^2\right)}{\nu\varkappa}\|f\|^2_{V^0}.
$$

Приводя подобные слагаемые, получим следующее неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^0}+\varkappa\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^1}+\frac{\varepsilon+\varkappa^2}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{V^3}+\nu\|u\|^2_{V^1}+\frac{\nu\varkappa}{2}\|u\|^2_{V^2}\leqslant \\ \leqslant\frac{C_{12}^2+\varkappa^2}{\nu\varkappa}\|f\|^2_{V^0}.$$

Проинтегрируем это неравенство по t от 0 до t :

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{V^0}+\varkappa\|u(t)\|^2_{V^1}+\frac{\varepsilon+\varkappa^2}{2}\|u(t)\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\|u(t)\|^2_{V^3}+\nu\int\limits_0^t\|u(s)\|^2_{V^1}ds+ \\ +\frac{\nu\varkappa}{2}\int\limits_0^t\|u(s)\|^2_{V^2}ds\leqslant\frac{C_{12}^2+\varkappa^2}{\nu\varkappa}\int\limits_0^t\|f(s)\|^2_{V^0}ds+\frac{\lambda^2}{2}\|b\|^2_{V^0}+\varkappa\lambda^2\|b\|^2_{V^1}+ \\ +\frac{\varepsilon+\varkappa^2}{2}\lambda^2\|b\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon\varkappa\lambda^2}{2}\|b\|^2_{V^3}\leqslant\frac{C_{12}^2+\varkappa^2}{\nu\varkappa}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)}+\frac{1}{2}\|b\|^2_{V^0}+\varkappa\|b\|^2_{V^1}+ \\ +\frac{\varepsilon+\varkappa^2}{2}\|b\|^2_{V^2}+\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\|b\|^2_{V^3}=C_{13}$$

Так как в левой части неравенства все слагаемые положительные, то каждое из них не больше правой части, поэтому имеем:

$$\frac{\varkappa^2}{2}\|u(t)\|^2_{V^2}\leqslant C_{13}\quad\text{и}\quad\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\|u(t)\|^2_{V^3}\leqslant C_{13}.$$

Поскольку правая часть этих неравенств не зависит от t, то можно перейти к максимуму по $t\in[0,T]$ в левой части. Получим:

$$\frac{\varkappa^2}{2}\max_{t\in[0,T]}\|u\|^2_{V^2}\leqslant C_{13}\quad\text{и}\quad\frac{\varepsilon\varkappa}{2}\max_{t\in[0,T]}\|u\|^2_{V^3}\leqslant C_{13}.$$

Отсюда и следуют требуемые оценки. □

Лемма 9. *Пусть* $v\in W_1$ *— решение семейства операторных уравнений* (36). *Тогда для него имеют место следующие оценки:*

$$\varepsilon\|u'\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant C_{16} \tag{41}$$

$$\varkappa\|u'\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant 2C_{16}. \tag{42}$$

Доказательство. Если $u \in W_1$ — решение (36) при некоторых $\varepsilon > 0, \lambda \in [0,1]$, то для него имеет место равенство (39):

$$\left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u' + \nu A u - \lambda B_1(u) + \lambda \varkappa B_2(u) = \lambda f.$$

Откуда

$$\left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u' = -\nu A u + \lambda B_1(u) - \lambda \varkappa B_2(u) + \lambda f.$$

Следовательно, в силу неравенств (13), (16), (19) и оценки (37), получим

$$\begin{gathered}
\| \left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u' \|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \\
= \| - \nu A u + \lambda B_1(u) - \lambda \varkappa B_2(u) + \lambda f \|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \nu \| A u \|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \\
+ \| B_1(u) \|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \varkappa \| B_2(u) \|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \| f \|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\
\leqslant C_2 \nu \| u \|_{C([0,T],V^2)} + C_7 \| u \|^2_{C([0,T],V^1)} + \varkappa C_9 \| u \|^2_{C([0,T],V^2)} + C_{14} \| f \|_{L_2(0,T;V^0)} \leqslant \\
\leqslant \nu C_2 \left(\| u \|^2_{C([0,T],V^2)} + 1 \right) + C_7 C_{15}^2 \| u \|^2_{C([0,T],V^2)} + \varkappa C_9 \| u \|^2_{C([0,T],V^2)} + \\
+ C_{14} \| f \|_{L_2(0,T;V^0)} \leqslant \left(\nu C_2 + C_7 C_{15}^2 + \varkappa C_9 \right) \left(\frac{2}{\varkappa^2} C_{13} + 1 \right) + \\
+ C_{14} \| f \|_{L_2(0,T;V^0)} = C_{16}.
\end{gathered}$$

Таким образом $\left\| \left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) u' \right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{16}$.

Так как в силу левой части неравенства (26) для любого $w \in L_2(0,T;V^3)$ справедливо неравенство $\left\| \left(J + \varkappa A + \varepsilon A^2\right) w \right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \geqslant \varepsilon \| w \|_{L_2(0,T;V^3)}$, получаем оценку (41). Аналогично, воспользовавшись полученной оценкой и неравенством (22), имеем

$$\begin{aligned}
&\| (J + \varkappa A) u' \|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \\
&\qquad = \left\| -\varepsilon A^2 u' - \nu A u + \lambda B_1(u) - \lambda \varkappa B_2(u) + \lambda f \right\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \| A^2 u' \|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \| \nu A u + \lambda B_1(u) - \lambda \varkappa B_2(u) + \lambda f \|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \varepsilon \| u' \|_{L_2(0,T;V^3)} + C_{16} \leqslant 2 C_{16}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\|(J+\varkappa A)\,w\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \geqslant \varkappa\|w\|_{L_2(0,T;V^1)}$, то получаем оценку (42). $\square$

Из теорем 8 и 9 непосредственно получаем:

Следствие 1. *Пусть* $v \in W_1$ *— решение* (36)*. Тогда имеет место оценка:*

$$\|v\|_{W_1} \leqslant C_* = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\varkappa}C_{13}} + \frac{C_{16}}{\varepsilon}; \tag{43}$$

8 Теорема существования решения аппроксимационной задачи

Теорема 2. *Операторное уравнение* (10) *имеет хотя бы одно решение* $v \in W_1$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теорией степени Лере-Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу оценки (43) все решения семейства уравнений (36):

$$L(v) - \lambda K(v) = \lambda(f, b), \quad \text{где} \quad \lambda \in [0, 1]$$

лежат в шаре $B_R \subset W_1$ радиуса $R = C_* + 1$ с центром в нуле, где

$$C_* = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon\varkappa} C_{13}} + \frac{C_{16}}{\varepsilon}.$$

И, следовательно, все решения семейства уравнений

$$v - \lambda L^{-1}\left[K(v) + (f, b)\right] = 0, \quad \text{где} \quad \lambda \in [0, 1],$$

лежат в том же шаре B_R. По лемме 7 отображение $[K(\cdot) + (f, b)] : W_1 \to L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является вполне непрерывным. В силу леммы 6 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \to W_1$ непрерывен. Таким образом отображение $L^{-1}\left[K(\cdot) + (f, b)\right] : W_1 \to W_1$ вполне непрерывно. Тогда отображение

$$G : [0, 1] \times W_1 \to W_1, \quad G(\lambda, v) = \lambda L^{-1}\left[K(v) + (f, b)\right]$$

вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере-Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и по условию нормировки: $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$.

Отсюда, $\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1$.

Таким образом получили, что существует хотя бы одно решение $v \in W_1$ уравнения

$$v - L^{-1}\left[K(v) + (f, b)\right] = 0$$

и, следовательно, уравнения (10). $\square$

Поскольку существует решение $v \in W_1$ уравнения (10), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача (8), (9) имеет хотя бы одно решение $v \in W_1$.

9 Предельный переход

В силу теоремы 2 при каждом $\varepsilon > 0$ существует слабое решение аппроксимационной задачи (8), (9). Следовательно, вспоминая определения операторов, существует функция $v_\varepsilon \in W_1$, которая удовлетворяет равенству

$$\int\limits_\Omega v_\varepsilon'\varphi dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla v_\varepsilon' : \nabla\varphi dx - \varepsilon\int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_\varepsilon') : \nabla\varphi dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla v_\varepsilon : \nabla\varphi dx -$$
$$- \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_\varepsilon)_i (v_\varepsilon)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx + \varkappa\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_\varepsilon)_i (\Delta v_\varepsilon)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} = \int\limits_\Omega f\varphi dx \quad (44)$$

и начальному условию

$$v_\varepsilon(0) = b. \quad (45)$$

Выберем теперь последовательность ε_n, сходящуюся к нулю следующим образом. Если начальное условие исходной задачи $a \equiv 0$, то положим $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, если же $a \not\equiv 0$, то в силу плотности V^3 в V^2 найдется такая последовательность $\{b_n\} \subset V^3$, которая сходится к a по норме V^2 и, начиная с некоторого номера, возможно, переходя к подпоследовательности, $\|b_n\|_{V^3} \neq 0$. Таким образом, положим в этом случае $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n\|b_n\|^2_{V^3}}$.

Тогда, в силу оценок (37) и (42) решение v_n, удовлетворяющее соотношениям (44), (45), удовлетворяет также оценкам (без ограничения общности можно считать, что что $\varepsilon_n \leqslant 1$):

$$\|v_n\|^2_{L_\infty(0,T;V^2)} \leqslant C_{17}; \quad (46)$$

$$\|v_n'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{16}, \quad (47)$$

где $$C_{17} = \frac{2C_{11}^2 + 2\varkappa^2}{\nu\varkappa^3}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^0)} +$$
$$+ \left(\frac{2}{\varkappa} + \frac{2+\varkappa^2}{\varkappa^2}\right)\left(\|a\|^2_{V^0} + \|a\|^2_{V^1} + \|a\|^2_{V^2} + 1\right) + \frac{1}{\varkappa}.$$

Следовательно, в силу оценки (46) без ограничения общности и, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, получим что $\{v_n\}$ сходится $*$-слабо к функции $u \in L_\infty(0,T;V^2)$ (а также слабо к той же функции в любом $L_p(0,T;V^2)$ для $1 < p < \infty$), а в силу оценки (47) также без ограничения общности и, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, имеем, что v_n' сходится слабо к функции u' в $L_2(0,T;V^1)$.

Отсюда имеет, что

$$\int\limits_\Omega v_n'\varphi dx \to \int\limits_\Omega u'\varphi dx \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

$$\varkappa \int\limits_\Omega \nabla v_n' : \nabla\varphi dx \to \varkappa \int\limits_\Omega \nabla u' : \nabla\varphi dx \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v_n : \nabla\varphi dx \to \nu \int\limits_\Omega \nabla u : \nabla\varphi dx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

По теореме Обена-Дубинского-Симона [21] в силу компактности вложений $V^2 \hookrightarrow C(\overline{\Omega})^n$ и $V^2 \hookrightarrow V^1$(см. [22]) имеют место компактные вложения

$$W = \{w : w \in L_\infty(0,T;V^2), w' \in L_2(0,T;V^1)\} \subset C([0,T], C(\overline{\Omega})^n), \tag{48}$$

$$W = \{w : w \in L_\infty(0,T;V^2), w' \in L_2(0,T;V^1)\} \subset C([0,T], V^1). \tag{49}$$

В силу второго из этих вложений и оценок (46) и (47) как и ранее, в случае необходимости переходя к последовательности, получим, что последовательность $\{v_n\}$ сходится сильно в $C([0,T], V^1)$ к той же самой функции u.

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (v_n)_i (v_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \to \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее, в силу вложения (48) получаем (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) сильную сходимость $v_n \to u$ в $C([0,T], C(\overline{\Omega})^n))$. Откуда и из упомянутой выше слабой сходимости $v_n \to u$ в $L_2(0,T;V^2)$ получим

$$\varkappa \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} (v_n)_i (\Delta v_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \to \varkappa \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее, в силу оценки (41) пользуясь тем, что $\varepsilon \leqslant 1$ имеем, что

$$\varepsilon_n \|v_n'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant \left(\nu C_2 + C_7 C_{15}^2 + \varkappa C_9\right) \left(\frac{2}{\varkappa^2} C_{13} + 1\right) + C_{14} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)}. \quad (50)$$

Как и ранее, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\varepsilon_n v_n'\}$ сходится слабо к некоторой функции w в $L_2(0,T;V^3)$. Но в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3} эта последовательность сходится к нулю. Действительно, для любых $\chi \in \mathfrak{D}(0,T), \varphi \in V^3$, используя формулу интегрирования по частям и тот факт, что v_n' слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$ к u', и, следовательно, сходится к u' и в смысле распределений, мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \left| \varepsilon_n \int_0^T \int_{\Omega} \nabla\left(\Delta v_n'\right) : \nabla\varphi \, dx \chi dt \right| = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \left| \int_0^T \int_{\Omega} \Delta v_n' \Delta\varphi \, dx \chi dt \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(v_n') : \nabla(\Delta\varphi) \, dx \chi dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(u') : \nabla(\Delta\varphi) \, dx \chi dt \right| \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_n \int_{\Omega} \nabla(\Delta v_{\varepsilon_n}'(t)) : \nabla\varphi dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Далее, из сильной сходимости $\{v_n\}$ в $C([0,T], C(\overline{\Omega})^n)$ к функции u следует поточечная сходимость и, следовательно, в силу выбора последовательности начальных условий $\{b_n\}$, получаем, что предельная функция $u(0) = a$.

Таким образом, переходя к пределу при $n \to \infty$ в (44), (45), получим, что предельная функция $u \in W$ и удовлетворяет интегральному равенству (5) и начальному условию (6). То есть является слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4).

10 Заключение

В заключении магистерской диссертации необходимо отметить, что рассматриваемая математическая модель впервые была введена В. А. Павловским в работе [1]. Система уравнений (1)–(2) была получена им при экспериментальных исследованиях растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы (см, например, [2], [3]). Также важно отметить, что данная модель независимым образом была получена как частный случай модели движения жидкости второго порядка (см, например, [4], [5]).

Впервые начально-краевая задача (1)–(4) была рассмотрена А. П. Осколковым в работах [6], [7]. Позже в его работе [8] им было замечено, что доказательства в [6], [7] содержат пробелы и что в ограниченной области Ω ему методом Галеркина-Фаэдо не удалось доказать теоремы существования слабых решений для данной начально-краевой задачи. В своей работе [9] О. А. Ладыженская отмечает, что метод введения вспомогательной вязкости, использованный А. П. Осколковым для изучения этой начально-краевой задачи является ошибочным, и вопрос о существовании решений задачи (1)–(4) оставался открытым.

Применение аппроксимационно-топологического подхода к задачам математической гидродинамики позволило доказать теорему существования слабых решений для задачи (1)–(4). Доказательство проводилось в несколько этапов. На первом этапе рассмотрена операторная трактовка задачи о слабых решениях в подходящих функциональных пространствах. Затем введено операторное уравнение, аппроксимирующее исходное. Оно получается путем добавления операторов, обладающих более «хорошими» свойствами. На основе этих «хороших» свойств операторов, теории степени Лере-Шаудера и априорных оценок решений доказана разрешимость аппроксимационной задачи. Далее на основе априорных оценок решений, не зависящих от параметра аппроксимации, показано, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Список литературы

[1] Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В.А. Павловский // ДАН СССР. – 1971. – №200 (4). – С. 809-812.

[2] Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев [и др.] // Тр. Ленинградск. ордена Ленина кораблестроительного института. – 1975. –№96. – С. 3–9.

[3] Амфилохиев В.Б. Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах / В.Б. Амфилохиев, В.А. Павловский // Тр. Ленинградск. ордена Ленина кораблестроительного института. – 1976. – №104. – С. 3–5.

[4] Noll W. The nonlinear field theories of mechanics. In: Handbuch der Physik (Flugge, S., ed.) / W. Noll, C. Truesdell. – Berlin: Springer, 1965. – 602 p.

[5] Rivlin R.S. Stress-deformation relations for isotropic materials / R.S. Rivlin, J.L. Ericksen // Journal of Rational Mechanics and Analysis. – 1955. – №4. – pp. 323-425.

[6] Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1973. – №38. – С. 98-136.

[7] Осколков А.П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости / А.П. Осколков // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – №27. – С. 145-160.

[8] Осколков А.П. О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / А.П. Осколков // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1975 – №52. – С. 128–157.

[9] Ладыженская О.А. О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье—Стокса и их исправлениях / О.А. Ладыженская // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2000. – №271. – С. 151-155.

[10] Звягин В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин , М.В. Турбин. – М.:КРАСАНД (URSS), 2012. – 416 с.

[11] Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко. – М.:Едиториал УРСС, 2004. – 112 с.

[12] Zvyagin V.G. Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinearhydrodynamics. / V.G. Zvyagin, D.A. Vorotnikov. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008. – 230 p.

[13] Звягин А.В. О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А.В. Звягин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2011. – №2. С. 103-105.

[14] Звягин А.В. О разрешимости одной альфа-модели движения жидкости с памятью / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2018. – №6. – С. 78–84.

[15] Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М.:Мир, 1981. – 408 с.

[16] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.:ГИФМЛ, 1961. – 288 с.

[17] Солонников В.А. Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач / В.А. Солонников // ДАН СССР. – 1960. – №130 (5). – С. 988-991.

[18] Ворович И.И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости. / И.И. Ворович, В.И. Юдович // Математический сборник. – 1961. – №53 (4). – С. 393-428.

[19] Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

[20] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.

[21] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ / J. Simon // Ann. Mat. Pura Appl. – 1987. – №146. – C. 65-96.

[22] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. / С.Л. Соболев. – М.:Наука, 1988. – 336 с.