

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра инфокоммуникаций и радиофизики

Сдано на кафедру
« 23 » июня 2020 г.
Заведующий кафедрой
_____ д. т. н., профессор _____
степень, звание
Ю.А. Брюханов
личная подпись, и.о. фамилия

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Математическое моделирование и исследование характеристик антенного
элемента, имеющего в составе жидкое вещество

(направление подготовки

03.03.03, радиофизика
(код, наименование)

)

Научный руководитель

ст. преподаватель _____

_____ А. А. Очиров _____
степень, должность, подпись, и.о. фамилия

« 23 » июня 2020 г.

Студент группы _____ РФ – 41 БО _____
С. В. Ходырев
подпись, и.о. фамилия

« 23 » июня 2020 г.

Ярославль 2020

РЕФЕРАТ

Отчет 38 с., 15 рис., 0 табл., 18 источн.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТРУЯ ЖИДКОСТИ, ЭЛЕКТРОКАПИЛЯРНЫЙ РАСПАД СТРУИ, ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ, АНТЕННА, ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Объектом исследования является антенный элемент в состав которого входит жидкое вещество.

Цель работы – построение электродинамической модели антенного элемента и проведение его анализа с учетом электрокапиллярного распада.

В процессе работы был проведен учет влияния заряда на форму поверхности струи, на основе анализа были найдены наиболее неустойчивые волновые моды, построены формы поверхности жидкости с разными величинами поверхностного заряда и построена электродинамическая модель антенного элемента и проведен анализ полученных результатов.

Была построена математическая модель антенного элемента, состоящего из рефлектора, штыревого излучателя и свободно вытекающей вниз цилиндрической струи жидкости, обтекающей штыревой излучатель. Проведен анализ влияния величины заряда на форму струи и на характеристики антенного элемента.

Основные конструктивные показатели: учет влияния электрического поля и капиллярных сил на форму поверхности струи, гравитационное поле в расчет не берется.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Постановка задачи.....	6
1.1 Постановка задачи для незаряженной струи	6
1.2 Постановка задачи для заряженной струи.....	7
2 Решение	9
2.1 Решение для нулевого приближения электрического потенциала.....	10
2.2 Решение для гидродинамического потенциала в первом приближении...	11
2.3 Решение для электрического потенциала в первом приближении.....	15
2.4 Дисперсионное соотношение.....	16
2.4 Анализ дисперсионного соотношения.....	17
2.5 Форма поверхности струи	20
3 Математическое моделирование и анализ.....	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	36
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	37

ВВЕДЕНИЕ

Исследования и развитие антенной техники никогда не потеряет своей актуальности в связи с использованием ее в системах передачи информации. Одним из перспективных направлений является создание антенных элементов с возможностью изменения их геометрии, и как следствие, управление усилительными, направленными и частотных характеристиками антенны.

Возможным вариантом решения этой проблемы является изготовление антенного элемента, имеющего в составе элемент жидкости, управление формой которого приведет к управлению характеристиками антенны. В последнее время в этом направлении проведено множество исследований и опубликован ряд патентов. В некоторых из них используется цилиндрическая емкость, в которую помещают жидкость и проводят исследование зависимостей характеристик антенны от высоты и радиуса столба [1–2]. Использование жидкости, также позволяет варьировать ее физико-химические параметры, тем самым изменять характеристики антенны [3]. В большинстве опубликованных работ проводится исследование похожих антенн, но с выбрасываемой вверх с помощью насоса свободной струи жидкости [4–8].

В настоящей работе, будет предложена модель антенны, в составе которой есть вытекающая вертикально вниз струя жидкости, на поверхности которой равномерно распределен электрический заряд. Известно, что капиллярные силы оказывают влияние на свободную поверхность цилиндрической струи жидкости, что приводит ее к неустойчивому состоянию и дальнейшему распаду на капли [9–15]. Существует исследование, в котором проводится сравнений подобной модели, но без учета заряда с чисто металлической антенной [16].

Целью данной работы, будет являться проведение математического моделирования антенного элемента, имеющего в составе жидкое вещество и провести его анализ.

Задачи, которые необходимо решить для достижения цели:

- Провести учет воздействия капиллярного распада на свободную

поверхность жидкого антенного элемента без воздействия на него электрического поля и с действующим на него электрическим полем

- Построить модели струи, основываясь на полученных результатах
- Построить математическую модель антенного элемента
- Провести сравнительный анализ полученных моделей

1 Постановка задачи

1.1 Постановка задачи для незаряженной струи

Рассмотрим задачу о капиллярном распаде бесконечной цилиндрической струи, идеальной, несжимаемой жидкости с плотностью ρ , радиусом R в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Считается, что свободная поверхность струи, характеризующаяся коэффициентом поверхностного натяжения γ возмущена изначально малыми колебаниями $F = r - R - \xi(\varphi, z, t)$, где $\xi(\varphi, z, t)$ – функция описывающая малые колебания на поверхности. Струя движется поступательно в положительном направлении оси Oz с постоянной скоростью U_0 . Радиус струи будем полагать малым, для пренебрежения силой тяжести. Задачу будем решать в безразмерных переменных, таких что $R = \gamma = \rho = 1$.

Математическая формулировка задачи по определению гидродинамического потенциала ψ в модели потенциального стечения жидкости, гидродинамического давления в жидкости p и отклонения формы поверхности от равновесной ξ в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , в которой ось Oz совпадает с осью симметрии струи, а сама жидкость в среднем неподвижна записывается следующим образом:

$$0 < r < R + \xi: \quad \Delta\psi = 0; \quad (1.1)$$

Кинематическое граничное условие:

$$r = R + \xi: \quad -\partial_t \xi + \partial_r \psi = 0; \quad (1.2)$$

Динамическое граничное условие:

$$r = R + \xi: \quad p - p_0 - \gamma(\nabla \cdot \vec{n}) = 0. \quad (1.3)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_r - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \partial_\varphi \xi - \vec{e}_z \partial_z \xi}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} (\partial_\varphi \xi)^2 + (\partial_z \xi)^2}}$$

Здесь p_0 – константа, имеющая смысл атмосферного давления, \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности жидкости, $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ – единичные вектора.

Математическую формулировку дополняет естественное граничное условие ограниченности скорости на оси цилиндра:

$$r \rightarrow 0: \quad |\text{grad} \psi| < \infty. \quad (1.5)$$

1.2 Постановка задачи для заряженной струи

Усложним постановку задачи рассмотренной в пункте 1.1. Рассмотрим аналогичную задачу распада для идеально проводящей струи на которой в состоянии равновесия равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ_0 . Для этого случая задача по определению гидродинамического потенциала ψ , кинематическое граничное условие остаются неизменными. Динамическое граничное условия дополнится слагаемым характеризующим давление внешнего электрического поля и примет следующий вид:

$$p + \frac{1}{8\pi} (\nabla \phi)^2 - p_0 - \gamma(\nabla \cdot \vec{n}) = 0, \quad (1.6)$$

здесь ϕ – электрический потенциал.

Задача по определению электрического потенциала вытекает из уравнений по нахождению внешнего электрического поля:

$$R + \xi < r < \infty: \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (1.7)$$

$$R + \xi < r < \infty: \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (1.8)$$

где \vec{E} – вектор электрического поля. Таким образом, задача по определению электрического потенциала сводится к уравнению Лапласа:

$$R + \xi < r < \infty: \quad \Delta \phi = 0. \quad (1.9)$$

Математическую формулировку так же дополняют естественные граничные условия.

Граничное условие на электрический потенциал:

$$r \rightarrow \infty: \quad |\vec{\nabla} \phi| \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Условия отсутствия касательной компоненты \vec{E} на поверхности струи:

$$r = R + \xi: \quad \vec{\tau} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.11)$$

где $\vec{\tau}$ – вектор касательной к поверхности струи.

Так же известно, что поверхностная плотность электрического заряда σ определяется величиной нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля:

$$r = R + \xi: \quad E_n = 4\pi\sigma, \quad (1.12)$$

2 Решение

Решение задачи будем проводить сразу для заряженной струи, потому что решения для задачи без заряда получится при помощи предельного перехода. Задача (1.1), (1.2), (1.6), (1.9) решается методом разложения по малому параметру. В соответствии с теорией волн малой амплитуды искомые величины будем искать в виде разложения в ряд Тейлора по малому параметру $\eta = \zeta k$, пропорциональному волновому числу $k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны, а ζ – амплитуда волнового возмущения.:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \psi_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} + O(\eta^2), \quad (2.1)$$

здесь нижний индекс характеризует порядок малости величины, а символ Ландау $O(\eta^2)$ определяет порядок малости остаточных членов. А граничные условия на свободной поверхности (1.2), (1.6) линеаризуются по известной процедуре [17–18]. Подставляя выражение (2.1) в уравнения (1.1), (1.2), (1.6), (1.9) мы разбиваем нашу задачу по порядкам малости. Ограничимся только первым порядком малости, так как вклад в результат второго порядка не превышает 1% [16].

Формулировка задачи в линейном приближении по малому параметру представляется следующим образом:

$$r < R : \quad \Delta\psi_1 = 0; \quad (2.2)$$

$$r \rightarrow R : \quad \phi_1 + \zeta_1 \frac{\partial\phi_0}{\partial r} = 0; \quad (2.3)$$

$$r < \infty: \quad \Delta\phi_1 = 0; \quad (2.4)$$

$$r = R: \quad -\frac{\partial\xi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = 0; \quad (2.5)$$

$$-\partial_t\psi_1 + \frac{1}{r^2}\xi_1 + \frac{1}{r}\partial_{\varphi\varphi}\xi_1 + \partial_{zz}\xi_1 + \frac{1}{8\pi}(\partial_r(\nabla\phi_0)\xi_1 + 2(\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_1)) = 0; \quad (2.6)$$

2.1 Решение для нулевого приближения электрического потенциала

Так как, нулевое приближение означает невозмущенную поверхность цилиндра, то ϕ_0 в цилиндрической системе координат зависит только от радиальной составляющей r . В нулевом приближении для электрического потенциала получаются очевидные соотношения:

$$r < \infty: \quad \Delta\phi_0 = 0; \quad (2.7)$$

$$r \rightarrow R: \quad \phi_0 = 0; \quad (2.8)$$

В цилиндрической системе координат выражение (2.7) запишется следующим образом:

$$r < \infty: \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi_0}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Проинтегрировав уравнение (2.9), мы легко находим решение для ϕ_0 :

$$\phi_0 = C_1 + C_2 \ln(r). \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) удовлетворяет условию (2.7) для любых значений констант. Константу C_1 выразим из (2.8), откуда следует, что $C_1 = 0$, так как $R = 1$.

Константу C_2 выразим из (2.8) через поверхностную плотность в равновесном состоянии и получим, что $-C_2 = 4\pi\sigma_0$. Таким образом, мы получаем явный вид ϕ_0 :

$$\phi_0 = -4\pi\sigma_0 \ln(r). \quad (2.11)$$

2.2 Решение для гидродинамического потенциала в первом приближении

Уравнение (2.2) является уравнением Лапласа и решается стандартными методами математической физики. Гидродинамический потенциал ψ_1 будем искать методом разделения переменных. Представим ψ_1 следующим образом:

$$\psi_1(r, \varphi, z) = \mathbb{R}(r)\mathbb{F}(\varphi)\mathbb{Z}(z). \quad (2.12)$$

Подставив выражение (2.12) в (2.2) получаем:

$$\frac{\mathbb{F}''(\varphi)}{r^2\mathbb{F}(\varphi)} + \frac{\frac{\mathbb{R}'(r)}{r} + \mathbb{R}''(r)}{\mathbb{R}(r)} + \frac{\mathbb{Z}''(z)}{\mathbb{Z}(z)} = 0. \quad (2.13)$$

Разделив переменные для $\mathbb{Z}(z)$ приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\mathbb{Z}''(z) = -k^2\mathbb{Z}(z). \quad (2.14)$$

Решением дифференциального уравнения (2.14) будет:

$$\mathbb{Z}(z) = \frac{1}{2}e^{-ikz}C_3 + \frac{1}{2}e^{ikz}C_3 + \frac{1}{2}ie^{-ikz}C_4 - \frac{1}{2}ie^{ikz}C_4. \quad (2.15)$$

Для функций $\mathbb{R}(r)$ и $\mathbb{F}(\varphi)$ получим уравнение:

$$\frac{\mathbb{F}''(\varphi)}{r^2\mathbb{F}(\varphi)} + \frac{\frac{\mathbb{R}'(r)}{r} + \mathbb{R}''(r)}{\mathbb{R}(r)} = k^2. \quad (2.16)$$

Математическими преобразованиями приходим к выражению:

$$\frac{\mathbb{F}''(\varphi)}{\mathbb{F}(\varphi)} + \frac{r(\mathbb{R}'(r) + r\mathbb{R}''(r))}{\mathbb{R}(r)} - k^2r^2 = 0. \quad (2.17)$$

Заметим, что переменные независимы, значит мы можем переписать уравнение (2.17) в следующем виде, приравняв к константе:

$$\frac{r(\mathbb{R}'(r) + r\mathbb{R}''(r))}{\mathbb{R}(r)} - k^2r^2 = -\frac{\mathbb{F}''(\varphi)}{\mathbb{F}(\varphi)} = m^2. \quad (2.18)$$

Решим уравнения по отдельности:

$$\mathbb{F}''(\varphi) = -m^2\mathbb{F}(\varphi), \quad (2.19)$$

$$\mathbb{F}(\varphi) = \frac{1}{2}e^{-im\varphi}C_5 + \frac{1}{2}e^{im\varphi}C_5 + \frac{1}{2}ie^{-im\varphi}C_6 - \frac{1}{2}ie^{im\varphi}C_6, \quad (2.20)$$

где m – целые числа.

$$\frac{r(\mathbb{R}'(r) + r\mathbb{R}''(r))}{\mathbb{R}(r)} - k^2 r^2 = m^2. \quad (2.21)$$

Умножим уравнение (2.21) на $\mathbb{R}(r)$ и поделим на r^2 , перенеся все в правую часть, получим:

$$\mathbb{R}''(r) + \frac{\mathbb{R}'(r)}{r} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\mathbb{R}(r) = 0. \quad (2.22)$$

Из конструкции уравнения (2.22) видно, что мы имеем дело с модифицированным уравнением Бесселя m -го порядка. Введем замену переменных $x = kr$, $r = x/k$, $dr = dx/k$ и преобразуем выражение (2.22):

$$\mathbb{R}''(r) + \frac{\mathbb{R}'(r)}{x} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)\mathbb{R}(r) = 0. \quad (2.23)$$

Решение уравнения (2.23) легко находится и имеет вид:

$$\mathbb{R}(r) = I_m(x)C_7 + K_m(x)C_8, \quad (2.24)$$

здесь I_m – модифицированная функция Бесселя 1-го рода, K_m – модифицированная функция Бесселя 2-го рода.

Выпишем получившееся решения:

$$\mathbb{Z}(z) = C_3 e^{ikz} + C_4 e^{-ikz}, \quad (2.25)$$

$$\mathbb{F}(\varphi) = C_5 e^{im\varphi} + C_6 e^{-im\varphi}, \quad (2.26)$$

$$\mathbb{R}(r) = C_7 I_m(kr) + C_8 K_m(kr). \quad (2.27)$$

Из естественного граничного условия (1.5) и свойств функции Бесселя 2-го рода следует, что $C_8 = 0$, так как $K_m \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$.

Решением для ψ_1 будет произведение выражений (2.25) – (2.27), опуская комплексно сопряженные слагаемые, получаем:

$$\psi_1(r, \varphi, z) = A(t) \frac{I_m(kr)}{I_m(kR)} e^{im\varphi} e^{ikz}. \quad (2.28)$$

Функцию $A(t)$ найдем из кинематического граничного условия (2.5) путем подстановки в него уравнения (2.28):

$$\frac{\partial \xi(\varphi, z, t)}{\partial t} = e^{i(kz+m\varphi)} k \frac{[I_{m-1}(kR) - I_{m+1}(kR)]}{I_m(kR)} A(t). \quad (2.29)$$

Из вида уравнения (2.29), можно понять, что $\xi(\varphi, z, t)$ имеет следующий вид:

$$\xi_1(\varphi, z, t) = \zeta_1(t) e^{i(kz+m\varphi)}. \quad (2.30)$$

Вычисляя производную по t получаем:

$$e^{i(kz+m\varphi)} \zeta_1'(t). \quad (2.31)$$

Подставляя (2.31) в (2.29), выражаем функцию $A(t)$:

$$A(t) = \frac{2\zeta_1'(t)I_m(kR)}{kI_{m-1}(kR) - kI_{m+1}(kR)}. \quad (2.32)$$

Таким образом, ψ_1 принимает следующий вид при $r = R = 1$:

$$\psi_1(r, \varphi, z) = \zeta_1'(t) \frac{2I_m(k)}{kI_{m-1}(k) - kI_{m+1}(k)} e^{im\varphi} e^{ikz}. \quad (2.33)$$

2.3 Решение для электрического потенциала в первом приближении

Выражение (2.4), как и (2.2) является уравнением Лапласа. Решение (2.4) проводится аналогично, тому, что было проделано в подразделе 2.2, поэтому сразу выпишем финальный результат для ϕ_1 :

$$Z(z) = \tilde{C}_1 e^{ikz} + \tilde{C}_2 e^{-ikz}, \quad (2.34)$$

$$F(\varphi) = \tilde{C}_3 e^{im\varphi} + \tilde{C}_4 e^{-im\varphi}, \quad (2.35)$$

$$R(r) = \tilde{C}_5 I_m(kr) + \tilde{C}_6 K_m(kr). \quad (2.36)$$

Из естественного граничного условия (1.11) и свойств функции Бесселя 1-го рода следует, что $\tilde{C}_5 = 0$, так как $I_m \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Решением для ϕ_1 будет произведение выражений (2.34) – (2.36), опуская комплексно сопряженные слагаемые, получаем:

$$\phi_1(r, \varphi, z) = B(t) \frac{K_m(kr)}{K_m(kR)} e^{im\varphi} e^{ikz}. \quad (2.37)$$

Функцию $V(t)$ найдем из условия эквипотенциальности (2.3) подстановкой в него решения (2.11), (2.37) и функции волнового возмущения на поверхности (2.30). Путем несложных математических преобразований получим:

$$V(t) = 4\pi\sigma_0\zeta_1(t). \quad (2.38)$$

Таким образом, полное решение для ϕ_1 принимает следующий вид :

$$\phi_1(r, \varphi, z) = 4\pi\sigma_0\zeta_1(t) \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} e^{im\varphi} e^{ikz}. \quad (2.39)$$

2.4 Дисперсионное соотношение

Подставляя выражения (2.11), (2.30), (2.33), (2.39) в динамическое граничное условие (2.6), мы получаем дифференциальное уравнение на функцию $\zeta_1(t)$ вида:

$$\zeta_1''(t) + \omega^2(k)\zeta_1(t) = 0. \quad (2.40)$$

Здесь ω – круговая частота волновых возмущений поверхности жидкости, квадрат которой выражается следующим образом:

$$\omega^2(k) = \frac{kI'_m(k) \left(k^2 + m^2 - 1 + 4\pi\sigma_0^2 \left(1 + \frac{kK'_m(k)}{K_m(k)} \right) \right)}{I_m(k)}, \quad (2.41)$$

Выражение (2.40) – является уравнением гармонического осциллятора, решением которого является гармоническая функция времени имеющая вид:

$$\zeta_1(t) = \zeta_1 e^{i\omega(k)t}. \quad (2.42)$$

Выражение (2.41) является дисперсионным соотношением определяющем зависимость круговой частоты ω от волнового числа k , азимутального числа m и других параметров задачи.

Как и было сказано в самом начале, полученные результаты справедливы и для случая незаряженной струи, на которую не действует электрическое поле. Для того, чтобы наши результаты являлись таковыми, нужно осуществить предельный переход $\sigma_0 \rightarrow 0$. В таком случае они будут описывать форму поверхности и для незаряженной струи.

2.4 Анализ дисперсионного соотношения

В дисперсионном соотношении нас интересуют значения параметров, при которых выполнено условие $\omega^2(k) < 0$. В этом случае волновое возмущение поверхности приводит к развитию неустойчивости и распаду струи жидкости. Заметим, что соотношение (2.41), зависит от величины поверхностной плотности заряда в равновесном состоянии σ_0 , произведем замену:

$$Q = 4\pi\sigma_0^2,$$

параметр Q характеризующий поверхностную плотность электрического заряда будем называть зарядовым числом.

Построим зависимости $\omega^2(k)$ в безразмерных переменных, в которых $\rho = R = \gamma = 1$ для разных значений зарядового числа Q , и азимутального числа m и на их основе сделаем выводы о влиянии величины поверхностно заряда на капиллярный распад и как следствие на форму свободной поверхности струи

жидкости. На рисунках 1 – 3 представлены зависимости для разных m и Q . Из описанного выше понятно, что при $\omega^2(k) < 0$ волновые движения неустойчивы, а при $\omega^2(k) > 0$ все волновые возмущения устойчивы.

Из полученной зависимостей на рисунке 1 для $m = 0$ можно сделать вывод о том, что волновые возмущения в отсутствие заряда являются неустойчивыми для всех $k \leq 1$. А наличие заряда приводит к увеличению диапазона неустойчивости и как следствие к увеличению инкремента нарастания амплитуд волн на поверхности струи. Следовательно, наличие заряда является дестабилизирующим фактором для устойчивости поверхности.

Как видно из рисунка 2 для $m = 1$ волновые возмущения в отсутствии заряда являются устойчивыми для любых k . Таким образом делаем вывод о том, что для всех $m \geq 1$ волновые возмущения в отсутствии заряда устойчивы. Наличие заряда, как было сказано ранее является дестабилизирующим фактором. Поэтому присутствие сколь угодно малого поверхностного электрического заряда приводит к появлению неустойчивых мод. А увеличение заряда к увеличению областей неустойчивости, что можно наблюдать на рисунке 2.

Проанализируем зависимость квадрата круговой частоты от волнового числа для азимутального числа $m = 2$, показанную на рисунке 3. Из нее видно, что наличие заряда не гарантирует наличие волновых мод, которые будут являться неустойчивыми к волновому возмущению. Таким образом нарушение устойчивого состояния характеризуется пороговым значением заряда, начиная с которого наблюдаются неустойчивые моды. Аналогичные зависимости получаются для азимутальных чисел $m > 2$.

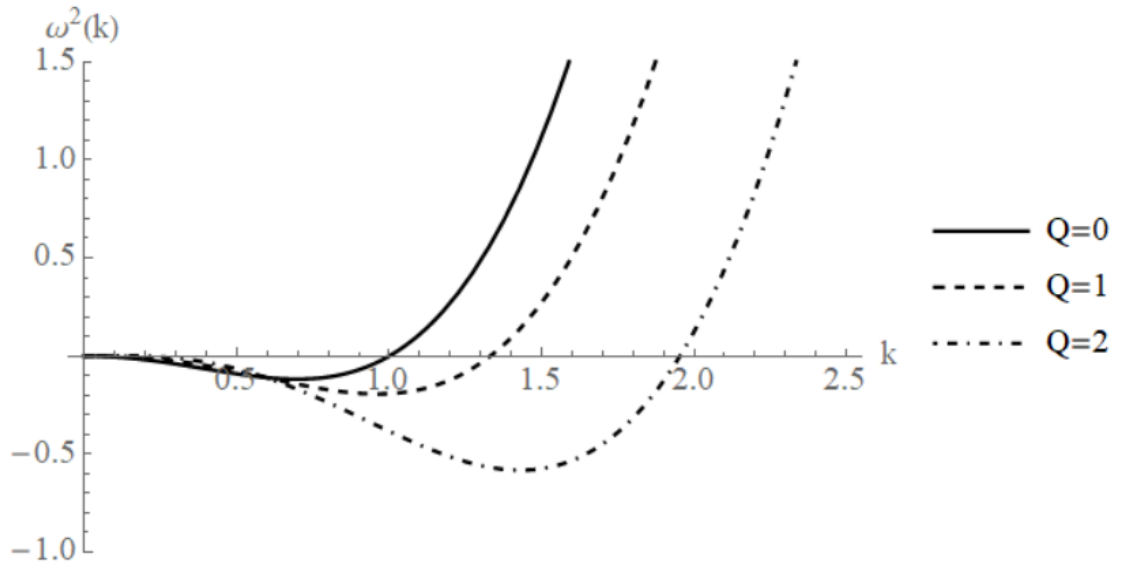


Рисунок 1 – Зависимость ω^2 от волнового числа k для азимутального числа $m = 0$, при различном значении зарядового числа Q в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$

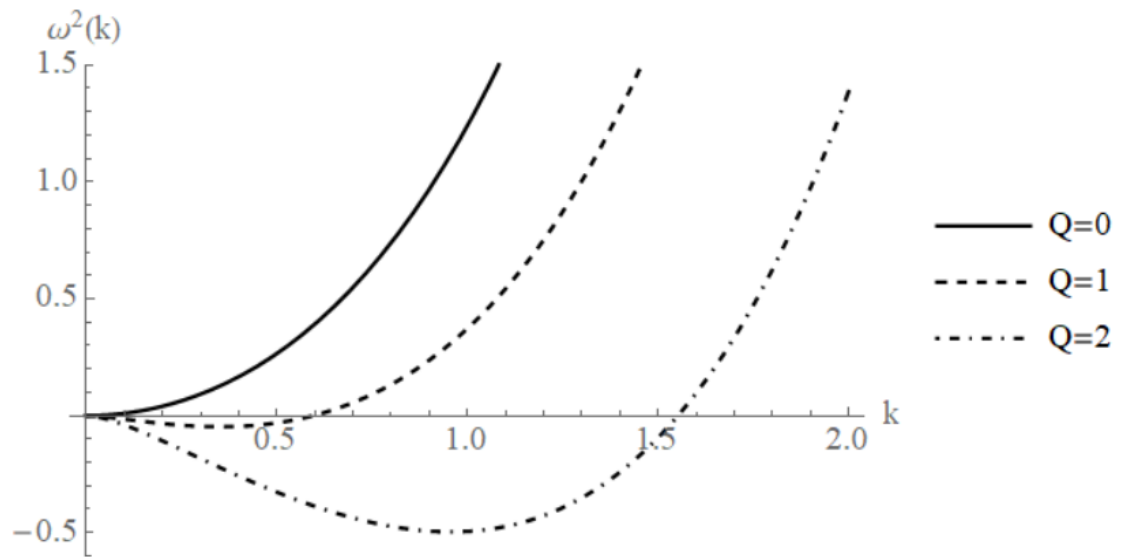


Рисунок 2 – Зависимость ω^2 от волнового числа k для азимутального числа $m = 1$, при различном значении зарядового числа Q в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$

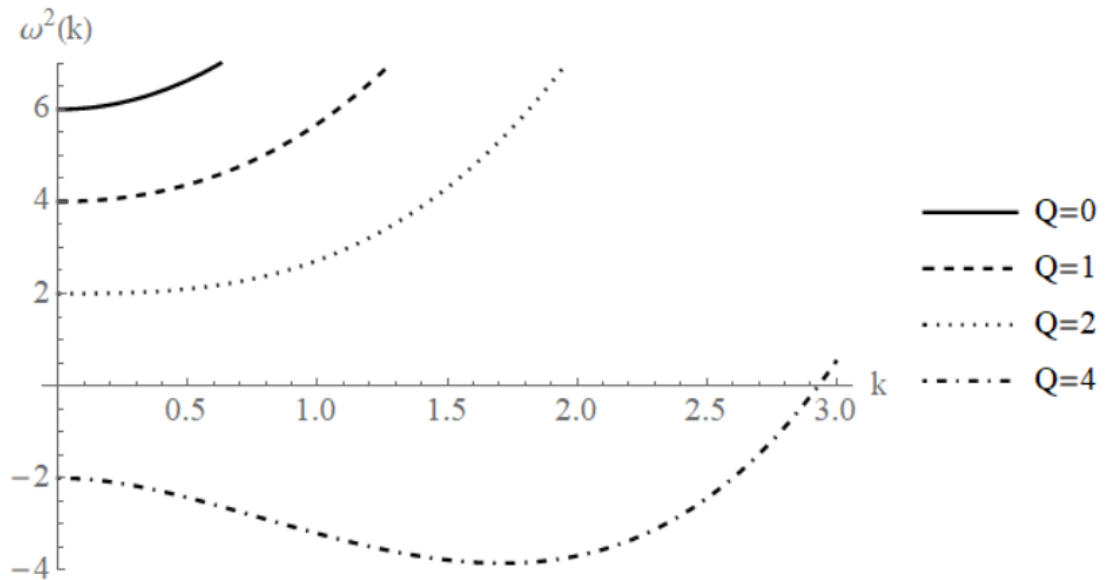


Рисунок 3 – Зависимость ω^2 от волнового числа k для азимутального числа $m = 2$, при различном значении зарядового числа Q в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$

2.5 Форма поверхности струи

Для построения формы поверхности, проведем более подробный анализ дисперсионного соотношения. А именно, найдем наиболее неустойчивую к волновым возмущениям моду при различных значениях зарядового числа.

Для первого случая выберем зарядовое число $Q = 0$, что соответствует незаряженной сводной поверхности струи. Из анализа проведенного выше следует, что в таком случае у нас наблюдаются только осесимметричные волновые возмущения ($m = 0$), а волновые числа лежат в промежутке при котором $k \leq 1$. Для того, чтобы найти волну с наибольшим инкрементом, то есть такое волновое число k при котором волновые возмущения на поверхности максимальны, нам потребуется найти экстремум выражения (2.41). Для этого нам достаточно взять производную от $\omega^2(k)$ и приравнять ее к нулю. Таким образом, для $m = 0$, $Q = 0$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$, наибольший

инкремент имеют моды с безразмерным волновым числом $k = 0,697$ (рисунок 4 пунктирная линия).

Аналогичный анализ проведем для зарядовых чисел $Q = 0,5$ и $Q = 1$. В дальнейшем моделирование антенного элемента будет проводиться для этих значений параметров. Из пункта 2.4 мы знаем, что наличие заряда является дестабилизирующим фактором. Исходя из этого для $Q = 0,5$ и $Q = 1$ можно наблюдать осесимметричные волновые возмущения ($m = 0$) и изгибные волновые возмущения ($m = 1$). Для $m \geq 2$ величина нашего зарядового числа не удовлетворяет пороговому значению, поэтому неустойчивые моды отсутствуют. Процедура поиска наиболее неустойчивых мод аналогична, но она производится отдельно для каждого m . Наибольший инкремент для $m = 0$, $Q = 0,5$ в переменных $\rho = R = \gamma = 1$ имеют моды с безразмерным волновым числом $k = 0,803$ (рисунок 5 пунктирная линия), а для $m = 1$ $k = 0,099$ (рисунок 6 пунктирная линия). Аналогично для $Q = 1$ при $m = 0$, наиболее неустойчивой моде отвечает $k = 0,961$ (рисунок 7 пунктирная линия), для $m = 1$, $k = 0,351$ (рисунок 8 пунктирная линия)

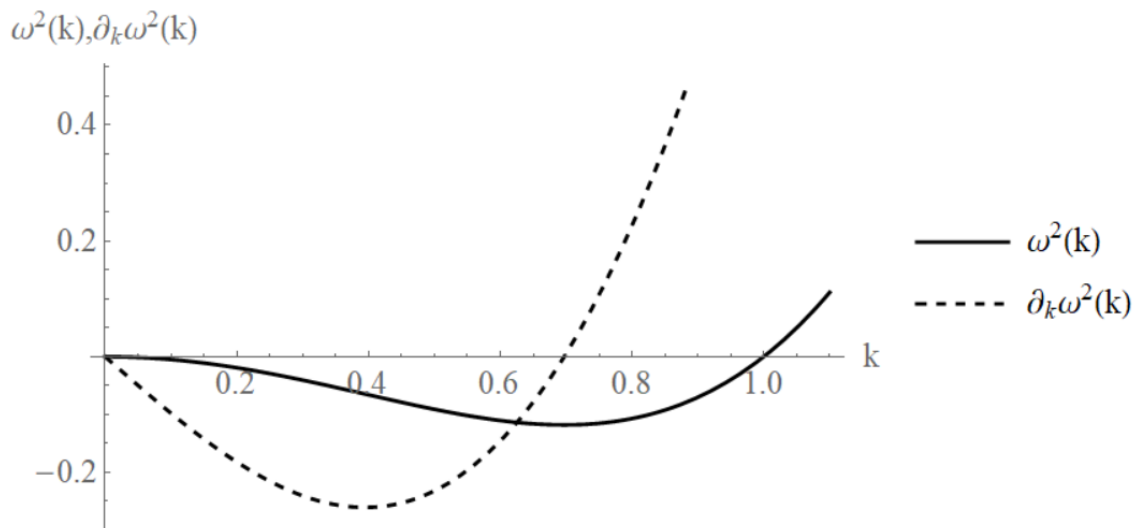


Рисунок 4 – Зависимость квадрата угловой частоты и производной квадрата угловой частоты от волнового числа k при $m=0$, $Q=0$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$.

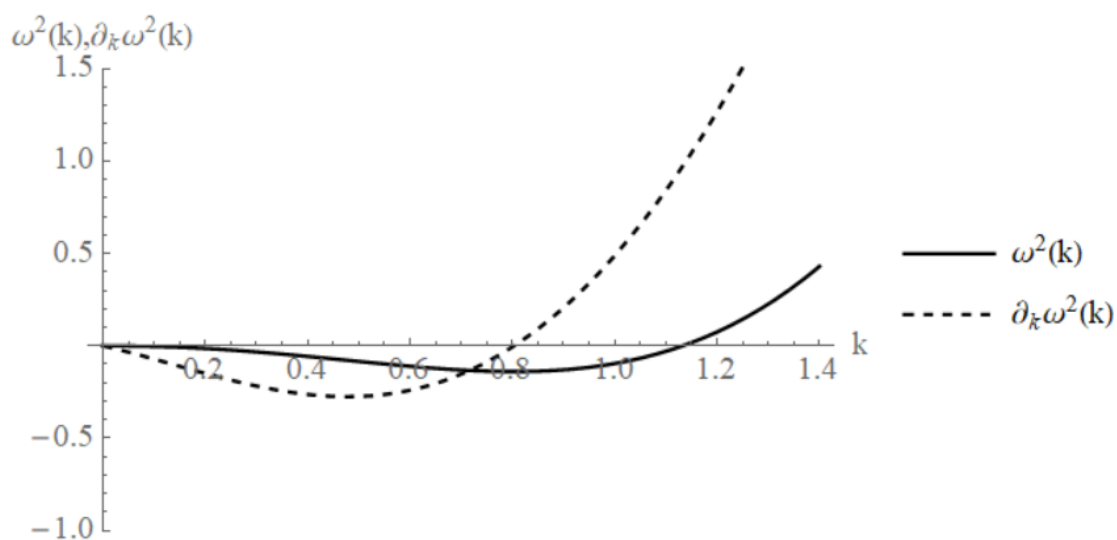


Рисунок 5 – Зависимость квадрата угловой частоты и производной квадрата угловой частоты от волнового числа k при $m=0$, $Q=0,5$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$.

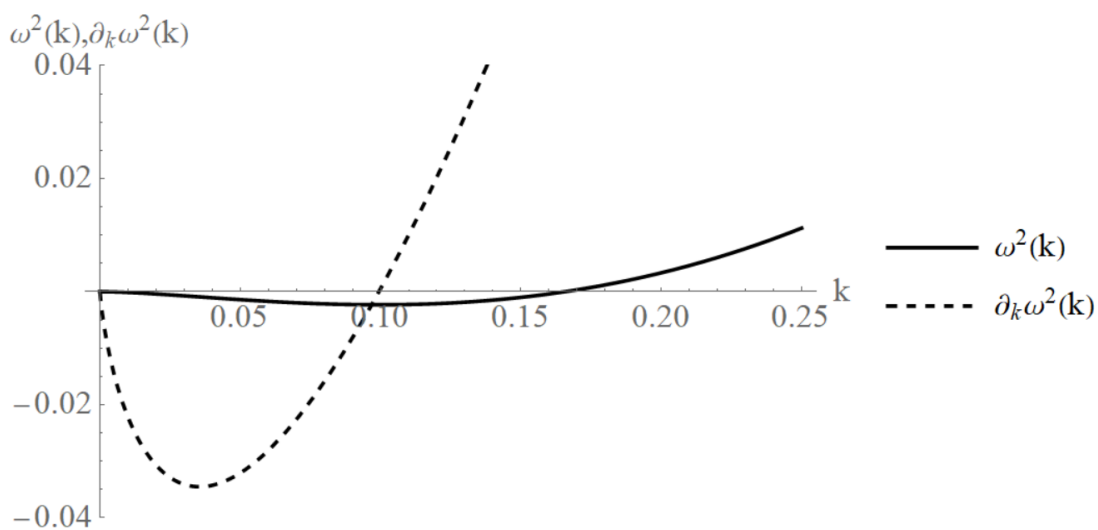


Рисунок 6 – Зависимость квадрата угловой частоты и производной квадрата угловой частоты от волнового числа k при $m=1$, $Q=0,5$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$.

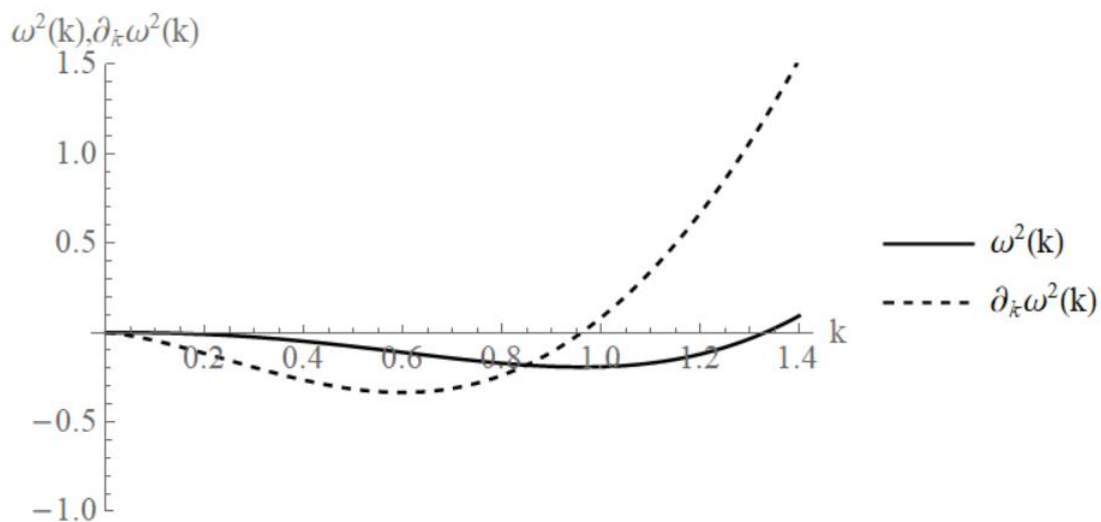


Рисунок 7 – Зависимость квадрата угловой частоты и производной квадрата угловой частоты от волнового числа k при $m=0$, $Q=1$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$.

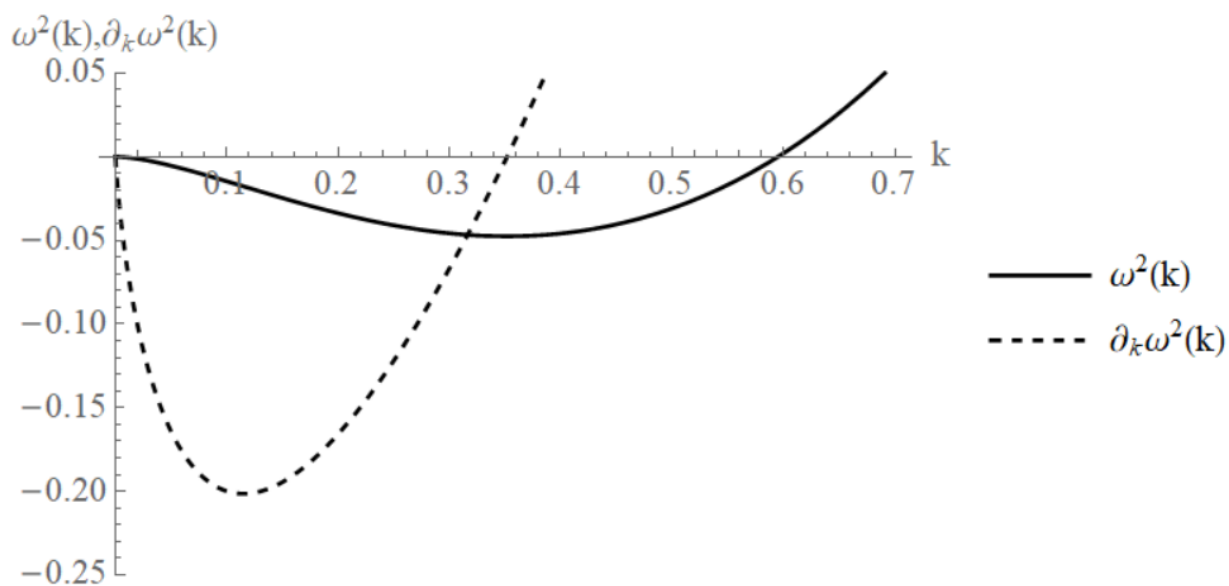


Рисунок 8 – Зависимость квадрата угловой частоты и производной квадрата угловой частоты от волнового числа k при $m=1$, $Q=1$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$.

Из полученных данных построим форму поверхности в случае, если заряд

отсутствует ($Q = 0$). Выпишем выражение для построения возмущенной формы поверхности:

$$\xi(\varphi, z, t) = \frac{\zeta}{2} \left(e^{i(m\varphi + kz + \omega t)} + e^{-i(m\varphi + kz + \omega t)} \right). \quad (2.43)$$

Подставляя в (2.43) дисперсионное соотношение (2.41), полученные выше для незаряженной струи значения $m=0$, $k=0,697$, $Q=0$, мы можем построить форму поверхности струи в системе координат связанной с Землей, в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$. Построения будем производить для жидкости с параметрами воды с соленостью 35г/кг, амплитуду волновых возмущений в начальный момент времени примем $\zeta = 0,01$, и скорости вытекания соответствующей размерной скорости 2 м/с. Полученная форма при таких значениях изображена на рисунке 9.

Рассмотрим влияние поверхностного электрического заряда на форму поверхности жидкой цилиндрической струи. При значении безразмерного зарядового параметра $Q=1$ форма поверхности с учетом только осесимметричных волновых возмущений ($m=0$) с начальной амплитудой $\zeta = 0.01$ в безразмерных переменных $\rho = R = \gamma = 1$ представлена на рисунке 10.

Но нужно понимать, что в присутствии поверхностного электрического заряда неустойчивыми оказываются не только осесимметричные но и изгибные волновые возмущения ($m=1$). Следовательно форма поверхности будет являться суперпозицией этих двух волновых мод.

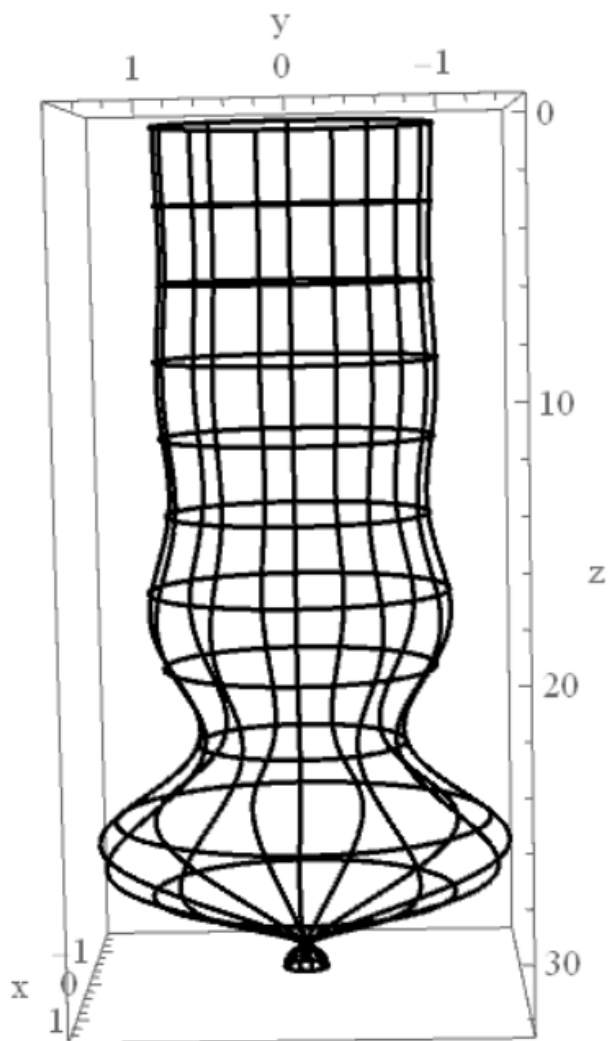


Рисунок 9 – Форма поверхности струи без учета электрического заряда

Введем новые функции: $\xi_1(\varphi, z, t)$ – функция описывающая волновые возмущения для $m=0$ и $\xi_2(\varphi, z, t)$ – функция описывающая волновые возмущения для $m=1$. Обе функции будут описывать возмущения для заряженной струи с зарядовым числом $Q=1$. Выпишем по аналогии с (2.43) явный вид функций $\xi_1(\varphi, z, t)$ и $\xi_2(\varphi, z, t)$:

$$\xi_1(\varphi, z, t) = \frac{\zeta}{2} \left(e^{i(m\varphi + kz + \omega_1 t)} + e^{-i(m\varphi + kz + \omega_1 t)} \right), \quad (2.44)$$

где ω_1 – дисперсионное соотношение для заряженной струи с $m=0$.

$$\xi_2(\varphi, z, t) = \frac{\zeta}{2} \left(e^{i(m\varphi + kz + \omega_2 t)} + e^{-i(m\varphi + kz + \omega_2 t)} \right), \quad (2.45)$$

где ω_2 – дисперсионное соотношение для заряженной струи с $m=1$.

Так как оба возмущения возбуждаются одновременно, то функция описывающая форму поверхности струи будет являться их суперпозицией и иметь следующий вид:

$$\tilde{\xi}(\varphi, z, t) = \xi_1(\varphi, z, t) + \xi_2(\varphi, z, t). \quad (2.46)$$

Сравнение даже форм поверхности с учетом только осесимметричных колебаний показывает, что длина заряженной струи укорачивается по сравнению с незаряженной. Это должно привести к изменению характеристик антенны, в состав которой входит струя жидкости.

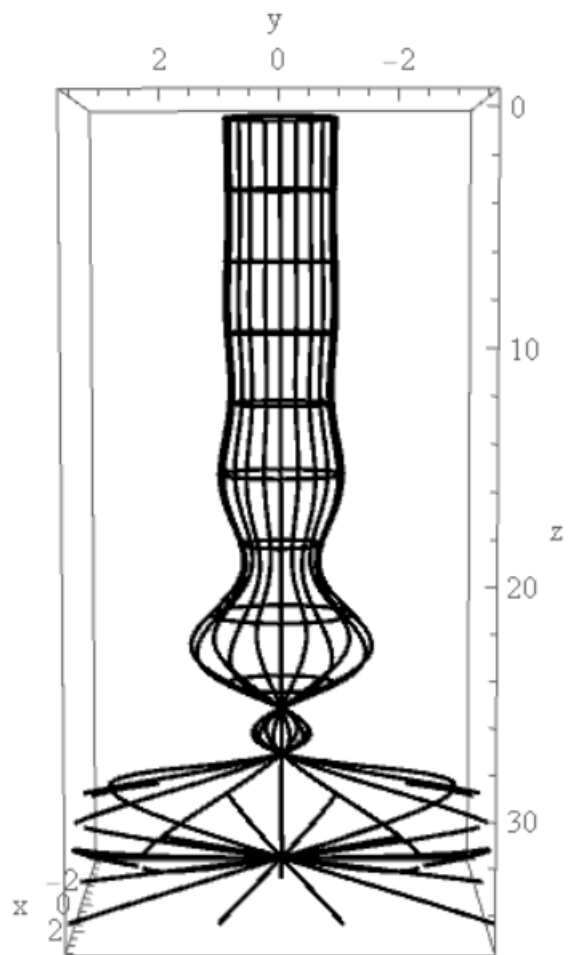
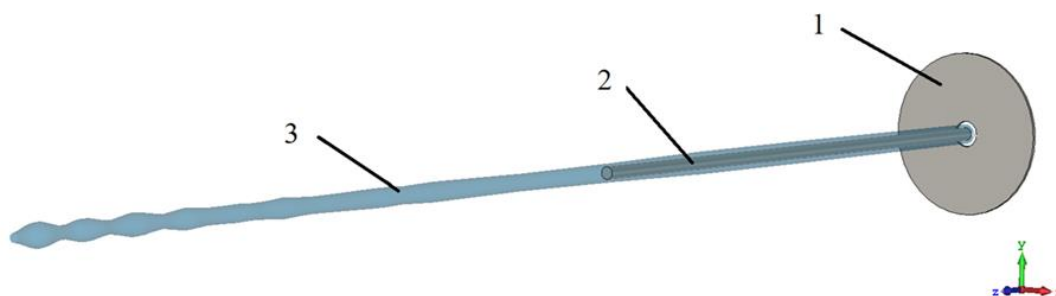


Рисунок 10 – Форма поверхности струи с учетом поверхностного электрического заряда

3 Математическое моделирование и анализ

Рассмотрим антенну, которая в своем составе имеет струю жидкости. Схематически антенна изображена на рисунке 1, она состоит из рефлектора в виде диска, токонесущего штыря и струи жидкости, обтекающей штырь для возможности управления характеристиками антенны. Питание подводилось между токонесущим коротким металлическим штырем длиной 20 см, размещенным вдоль оси струи, и металлическим диском – рефлектором радиусом 2,5 см, расположенным в основании и содержащем отверстие, через которое вытекает струя. Таким образом, струя запитывается и становится составной частью антенны.



1 – рефлектор, 2 – штыревой излучатель, 3 – струя

Рисунок 1 – Схематический чертеж антенны

Рассматривалось влияние поверхностного электрического заряда на форму струи и ее влияние на характеристики антенны. Для сравнительного анализа струй жидкости без заряда и с зарядом была определена форма свободной поверхности для обоих случаев в первом приближении по степеням параметра $\eta = \zeta k$. Как и говорилось в начале, для исключения воздействия сил гравитации на форму поверхности будем анализировать только тонкие струи. Сама струя вытекает из круглого отверстия цилиндрической насадки насоса вертикально

вниз со средней скоростью. Радиус струи будет задаваться радиусом отверстия R из которого она вытекает, а ее длина до распада на капли L определяется скоростью вытекания жидкости U_0 . Все дальнейшие результаты будем проводить для радиуса отверстия 3мм, скорости вытекания воды 2м/с. В качестве жидкого вещества выбирается морская вода соленость которой составляет 35 г / кг.

Поверхность струи в первом приближении с отсутствующим зарядом определяется следующим соотношением:

$$\xi(\varphi, z, t) = \frac{\zeta}{2} \left(e^{i(m\varphi + kz + \omega t)} + e^{-i(m\varphi + kz + \omega t)} \right), \quad (3.1)$$

где ζ – малый параметр разложения отвечающий за амплитуду волнового возмущения, k – волновое число, m – константа принимающая целые значения, ω – угловая частота, t – время, а z и φ – это компоненты цилиндрической системы координат.

А поверхность струи с распределенным по поверхности для исследуемых в дальнейшем значений зарядов определяется следующим соотношением:

$$\tilde{\xi}(\varphi, z, t) = \xi_1(\varphi, z, t) + \xi_2(\varphi, z, t), \quad (3.2)$$

где $\xi_1(\varphi, z, t)$ и $\xi_2(\varphi, z, t)$ формы поверхности для азимутальных чисел $m=0$ и $m=1$ с разными значениями угловых частот (инкрементами), имеющие следующий вид:

$$\xi_1(\varphi, z, t) = \frac{\zeta}{2} \left(e^{i(m\varphi + kz + \omega_1 t)} + e^{-i(m\varphi + kz + \omega_1 t)} \right),$$

$$\xi_2(\varphi, z, t) = \frac{\zeta}{2} \left(e^{i(m\varphi + kz + \omega_2 t)} + e^{-i(m\varphi + kz + \omega_2 t)} \right),$$

где ω_1 – инкремент соответствующий значению $m=0$, а ω_2 – инкремент соответствующий значению $m=1$.

Для формы поверхности (3.2), мы ограничимся только слагаемым $\xi_1(\varphi, z, t)$, которое соответствует моде с $m=0$, потому что именно оно вносит основной вклад в форму поверхности. Для полного описания формы поверхности с помощью выражения (3.2) требуется дополнительный анализ слагаемого $\xi_2(\varphi, z, t)$. При этом характер процесса развития неустойчивости поверхности определяется рядом факторов: радиусом отверстия и физическими свойствами жидкости, такими, например, как плотность, электропроводность, коэффициент поверхностного натяжения и в нашей формулировке задачи величиной поверхностного заряда. Так как все эти факторы для нас заведомо известны, рассмотрим три разных случая для поверхностной плотности заряда. Так, для случая, когда поверхностная плотность заряда равна нулю, мода с максимальным инкрементом амплитуды колебаний, проявляющейся при $kR = k_{\max}R = 0,697$, соответствующее волновое число для струи радиусом 3мм равно $2,32\text{см}^{-1}$, а сам инкремент ω равен $17,62\text{с}^{-1}$. В случае, когда зарядовое число $Q=0,5$, что соответствует поверхностной плотности заряда в равновесном состоянии $\sigma_0 = 3,11\text{г}^{1/2}\text{см}^{-1/2}\text{с}^{-1}$, мода с максимальным инкрементом амплитуды колебаний, проявляющейся при $kR = k_{\max}R = 0,803$, равна $2,68\text{см}^{-1}$, а инкремент ω_1 равен $19,16\text{с}^{-1}$. А для третьего случая, когда зарядовое число $Q=1$, что соответствует поверхностной плотности заряда в равновесном состоянии $\sigma_0 = 4,41\text{г}^{1/2}\text{см}^{-1/2}\text{с}^{-1}$, мода с максимальным инкрементом, проявляющемся при $kR = k_{\max}R = 0,961$, равна $3,20\text{см}^{-1}$, а соответствующий инкремент ω_2 равен $22,56\text{с}^{-1}$. С течением времени

амплитуда неустойчивых мод нарастает, и в некоторый момент времени t_1 образующие поверхности смыкаются, струя полностью пережимается и далее распадается на капли. Длина нераспавшейся части в этом случае будет определяться, как $L = U_0 t_1$. Амплитуда колебаний поверхности в начальный момент времени в первом приближении принимается равной малой величине ζR , где $\zeta = 0,01$.

Анализ проводился в диапазоне частот от 0,1 до 2,5 ГГц, что обусловлено интересом к возможному применению на частотах около 446 МГц (не лицензируемый, свободно используемый маломощными устройствами диапазон частот) и около 2.1 ГГц (Wi-Fi).

Проведем сравнение характеристик антенных элементов, содержащих в составе жидкое вещество с различными величинами поверхностного заряда. Как показывает рисунок 11, коэффициент полезного действия (К.П.Д) для антенных элементов, как и ожидалось, является осциллирующей функцией, а появление на поверхности заряда максимум К.П.Д для первого пика уменьшается приблизительно на 0,5, но не претерпевает никакого частотного сдвига для обоих случаев заряда, чего нельзя сказать о втором пике, так как для зарядового числа $Q = 0,5$ наблюдается сдвиг на более низкие частоты с небольшим его увеличением порядка 0,5. Для зарядового числа $Q = 1$ величина К.П.Д для второго пика уменьшается на 0,5 и остается на той же частоте, что и не заряженная струя.

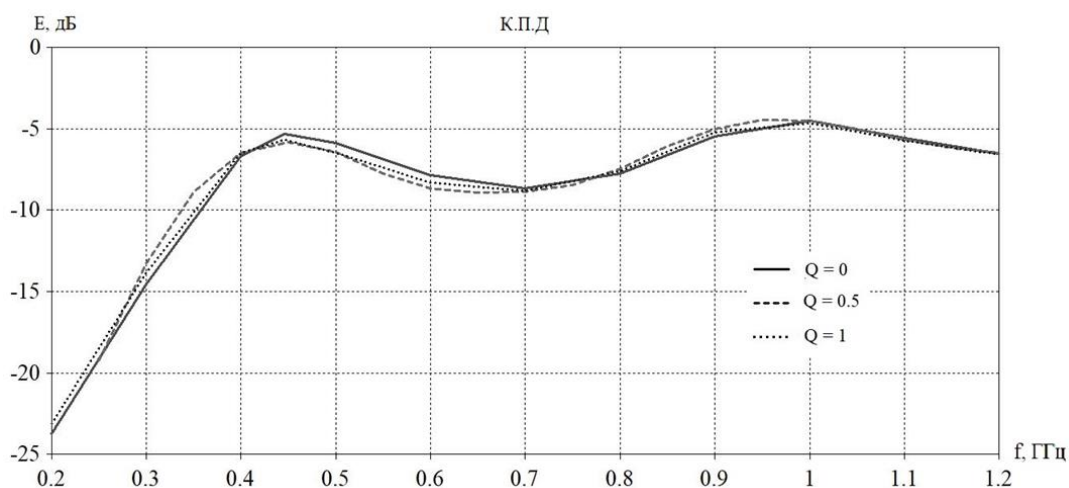


Рисунок 11 – Сравнение К.П.Д антенны с $Q=0$, $Q=0.5$ и $Q=1$

Входное сопротивление, показанное на рисунке 12, при появлении на поверхности струи исследуемых величин заряда сохраняет сглаженную форму резонансов и не претерпевает существенных изменений, за исключением небольшого частотного сдвига резонансов на 10-20 МГц в область меньших частот и небольшого роста сопротивления порядка 4-5 Ом в области 400 МГц.

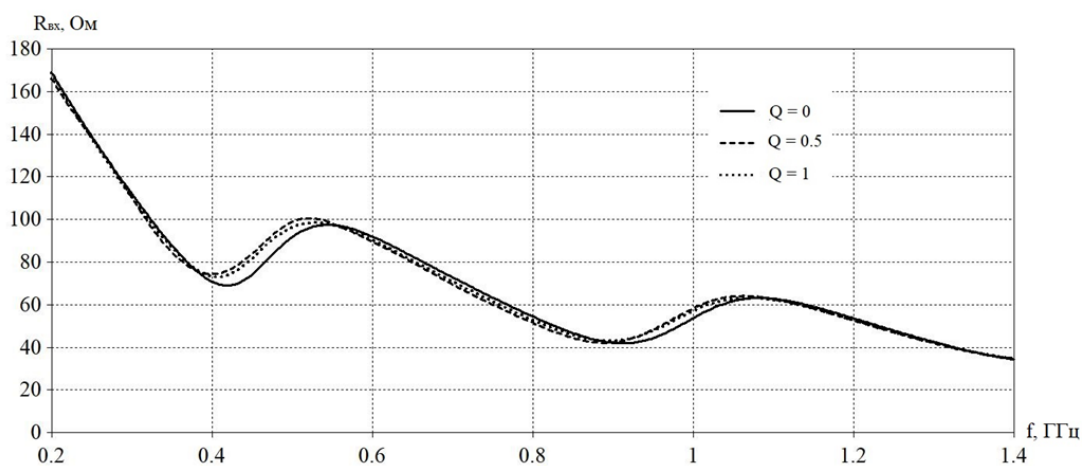


Рисунок 12 – Сравнение $R_{вх}$ для разных зарядовых чисел

Из зависимости на рисунке 13 следует, что наличие поверхностного заряда не меняет форму зависимости параметра S_{11} , а производит сдвиг резонансов на низкие частоты, но не расширяет их, то есть не увеличивает полосу частот

согласования. Из графика так же видно, что при зарядовых числах $Q=0,5$ и $Q=1$ на частотах около 430 МГц происходит увеличение параметра S_{11} на величину порядка 0,6 дБ, что приводит к уменьшению согласованности антенны на этих частотах. А на частотах около 970 МГц зарядовое число $Q=0,5$ демонстрирует увеличение согласованности на этих частотах на сотые доли дБ, когда как $Q=1$ демонстрирует увеличение рассогласованности на десятые доли дБ.

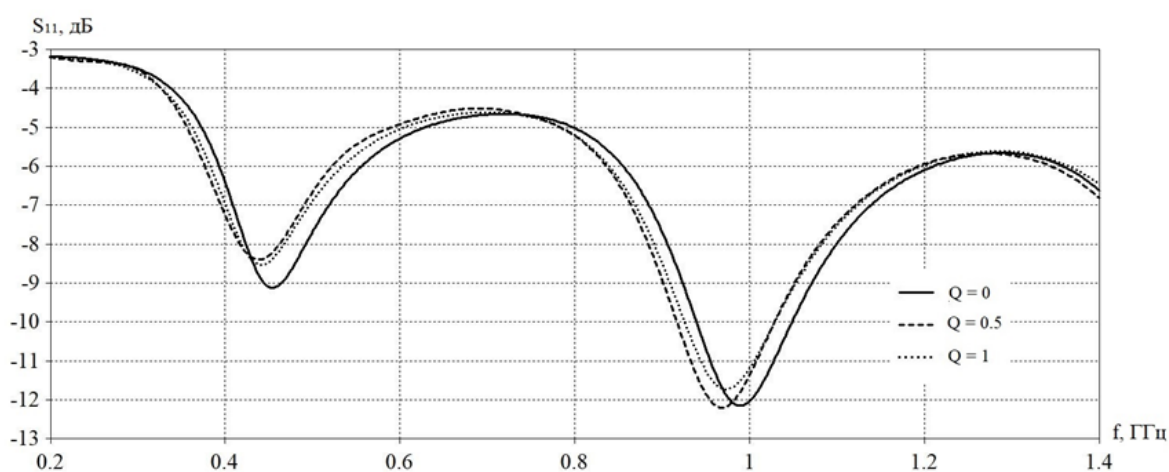


Рисунок 13 – Сравнение параметра S_{11} для разных зарядовых чисел

Проведем анализ диаграмм направленности (ДН) для нескольких значений частот, а именно: 446 МГц и 1,8 ГГц. Как известно, ДН в первую очередь определяется геометрией антенны, следовательно волновые возмущения на поверхности жидкости начинают оказывать влияние, а начиная с некоторой частоты свой вклад начинает вносить рефлектор расположенный у основания. На низких частотах исследуемая модель является ненаправленной и с низкой излучательной эффективностью. Начиная с частот около 360 МГц излучательная эффективность повышается, что оправдывает применение такого рода антенн. ДН на низких частотах, как и ожидалось имеет вид тороида, из рисунка 14 видно, что наличие заряда не вносит практически никакого значительного вклада, кроме небольшого усиления порядка 0,1 дБ и поворота

максимального усиления на 1-2 градуса. Стоит так же заметить, что излучение происходит перпендикулярно оси струи.

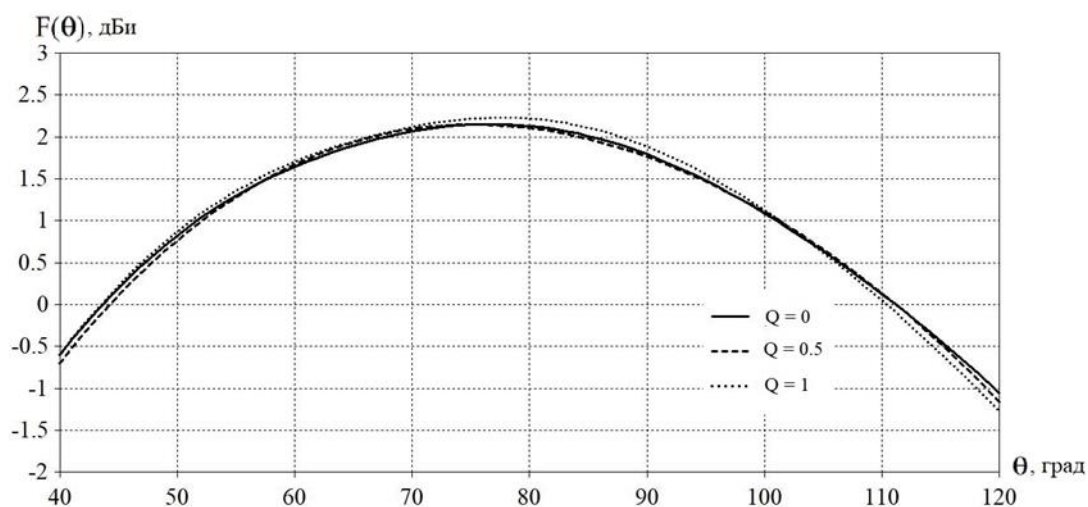


Рисунок 14 – Диаграммы направленности для $Q=0$, $Q=0.5$ и $Q=1$ на частоте 446 МГц

У диаграмм направленности (смотри рисунок 15) на более высоких частотах с поверхностным зарядом, для которого $Q=0,5$, наблюдается поворот основного лепестка и значительное уменьшение выпуклостей и впадин, как на основном, так и на боковых лепестках по сравнению со струей с отсутствующим зарядом. Для более высокого заряда с $Q=1$, лепестки начинают снова поворачиваться, практически повторяя ДН струи с отсутствующим зарядом, только с более узкими боковыми лепестками. Так же следует отметить, что на высоких частотах вокруг оси струи образуется неидеальное кольцо с заметными впадинами, которое направляет основной поток энергии.

Нелинейное поведение характеристик антенны с увеличением зарядового параметра можно попытаться объяснить сложной формой поверхности жидкости, обтекающей токонесущий штырь. Сужение жидкости в одних местах и расширение в других может привести к резонансным эффектам и усилению или ослаблению проявления самого токонесущего штыря на характеристики антенны.

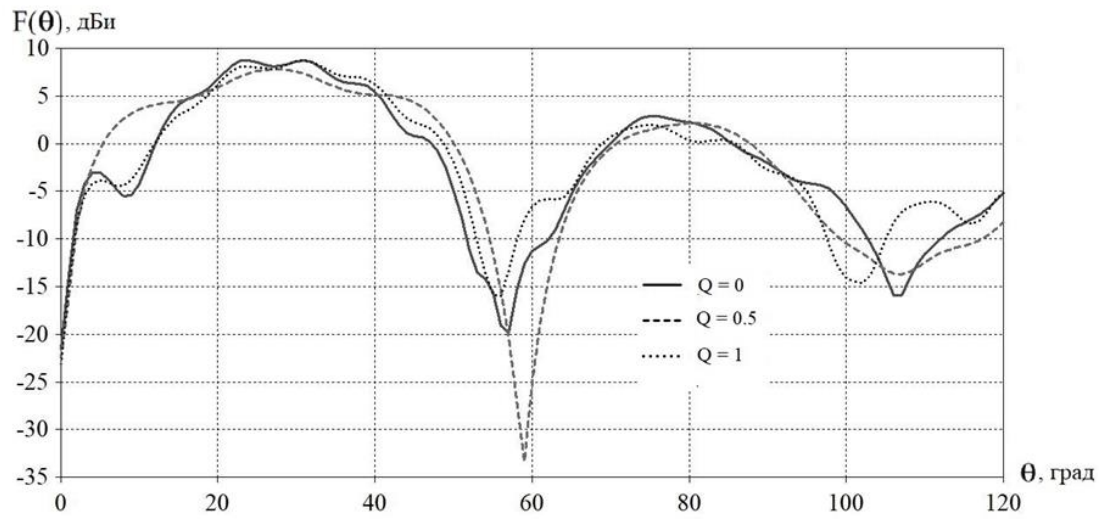


Рисунок 15 – Диаграммы направленности для $Q=0$, $Q=0,5$ и $Q=1$ на частоте 1,8 ГГц

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была построена математическая модель гидродинамического распада цилиндрической струи на поверхности которой находился равномерно распределённый электрический заряд, на ее основе был проведен учет воздействия электрического поля на форму поверхности струи, а также проведено электродинамическое моделирование антенного элемента. Характеристики антенны, содержащей жидкий элемент можно назвать удовлетворительными, так как полученные результаты дают основание полагать, что она способна обеспечить связь на малое расстояние, хотя и в небольшой зоне покрытия. Наиболее приемлемыми частотами для передачи на малые расстояния оказываются частоты в диапазоне от 400 МГц до 480 МГц, что включает в себя устройства LDP (Low Power Devices) и PMR (Private Mobile Radio) связи. Так же оказываются привлекательными диапазоны частот около 1 ГГц из-за улучшения показателей антенны на этой частоте.

Было показано, что присутствие поверхностного электрического заряда нелинейным сложным образом влияет на характеристики антенны. Представлена математическая модель, используя которую можно оценить это влияние. Предложенную математическую модель можно использовать при дальнейшем моделировании такого рода антенн.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Zhang J. et al. The Numerical Simulation of Electrical Characteristic for a New Material Antenna // Advance Materials Research. 2013. Vol. 716. Pp. 586-589.
2. Fayad H., Record P. Broadband liquid antenna // Electronics Letters. 2006. Vol. 42, №. 3. Pp. 133-134.
3. Kar S.J., Sarkar B.K., Chakrabarty A. Fluid Antennas // IEEE Middle East Conference on Antennas and Propagation (MECAP 2010). Cairo, Egypt, 2010. Pp. 1-6.
4. Akimoto S., Yanagi T., Fukasawa T. Antenna device: пат. 3104460 ЕС. 2016.
5. Tam D. W. S. Electrolytic fluid antenna: пат. 7898484 США. 2011.
6. Tam D. W. S. Electrolytic fluid antenna: пат. 8169372 США. 2012.
7. Tam D. W. S. Electrolytic fluid antenna with signal enhancer: пат. 8368605 США. 2013.
8. Akimoto S., Yanagi T., Fukasawa T. Antenna device: пат 6436870 Япония. 2018.
9. Левич В.Г. Физико – химическая гидродинамика М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.
10. Ширяева С.О. Электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью в коллинеарном электростатическом поле // ЖТФ. 2011. Т. 81, № 6. С. 36–41.
11. Ширяева С. О., Григорьев А. И. О неустойчивости и спонтанном капиллярном распаде заряженных струй. Часть 1. Линейные аналитические исследования // Электронная обработка материалов. 2014. № 5. С. 24–34.

12. Зубарев Н.М., Зубарева О.В. Равновесные конфигурации струи идеально проводящей жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле // ЖТФ. 2016. Т. 86, № 6. С. 28–36.
13. Зубарев Н.М., Зубарева О.В., Иванов П.К. Точные решения для равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в электрическом поле заряженной прямой нити // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, № 20. С. 84–88.
14. Зубарев Н.М., Зубарева О.В. Анализ равновесных конфигураций заряженных цилиндрических струй проводящей жидкости // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 1. С. 51–55.
15. Зубарев Н.М., Зубарева О.В. Точное частное решение для равновесной конфигурации незаряженной проводящей струи в поперечном электрическом поле // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 20. С. 14–18.
16. Очиров А. А., Артёмов Т. К., Ходырев С. В. Моделирование и анализ возможностей использования цилиндрической струи жидкости в качестве антенного элемента // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та.. 2019. № 5. С. 1950401-1 – 1950401-8.
17. Найфэ А. Методы возмущений М.: Мир, 1976. 456 с.
18. Очиров А.А. О массопереносе, вызванном распространением волнового пакета по границе раздела жидких сред // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2018. № 6. С. 1860301-1 – 1860301-7.