

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
(бакалавриат)

**Направленность (профиль) подготовки:** Фундаментальная и прикладная физика

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ТОКА ДЛЯ ПОЛЯ ФЕРМИОНОВ НА ФОНЕ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПУЛЬСА**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Анохин Андрей Владимирович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Ахмедов Эмиль Тофик Оглы,  
д-р физ.-мат. наук, доц.

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Введение</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Вывод Швингера для матричного элемента $\langle \text{in}   \text{out} \rangle$ ..... | 3         |
| <b>2. Задача</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1 Постановка задачи .....   | 7         |
| <b>3. Решение уравнений движения</b>  | <b>9</b>  |
| 3.1 Уравнение на моды .....   | 9         |
| 3.2 In-моды .....   | 10        |
| 3.3 Квантование фермионного поля .....  | 14        |
| <b>4. Ток</b>   | <b>16</b> |
| 4.1 Классический ток .....  | 16        |
| 4.2 Ток в нулевом порядке .....   | 16        |
| <b>5. Заключение</b>  | <b>20</b> |
| <b>Литература</b>   | <b>21</b> |

# 1 Введение

Основной задачей квантовой теории поля является расчет корреляционных функций. Корреляционные функции интересны тем, что они соответствуют измеримым физическим величинам. Квантовая теория поля позволяет вычислять данные величины как в древесном случае, так и считать петлевые поправки к ним. Петлевые поправки вычисляются по диаграммным техникам с помощью теории возмущений.

В стационарном случае для расчёта петлевых поправок можно использовать диаграммную технику Фейнмана. А в более сложных случаях нестационарных полей нужно использовать более общую технику Келдыша-Швингера. В случае, когда в теории имеется температура, можно пользоваться Мацубаровской диаграммной техникой для квазистационарных возмущений.

В данной задаче в качестве корреляционной функции мы будем изучать фермионный ток под воздействием внешнего электрического пульса. Мы остановимся на изучении лишь древесного случая, так как и он уже будет нести достаточно много интересной информации. Задачи подобного типа были исследованы и ранее. Например, рассматривались теории, в которых исследовался фермионный ток на фоне поля скалярных бозонов [1], [2] и [3]. Интересно, что такие задачи можно ставить в различных измерениях и получать при этом качественно различные результаты.

В главе (2) будет явно выписано действие исследуемой теории, а также будет конкретизирована форма внешнего пульса. В главе (3) мы проведем исследование решений уравнения Дирака, в ходе которого запишем решения уравнения на моды. В данном разделе мы также стандартным образом проквантуем фермионное поле. В главе (4) будет проведено основное вычисление корреляционной функции тока в пределах  $t \rightarrow \pm\infty$ . В заключении (5) мы представим физическое обоснование полученного результата.

## 1.1 Вывод Швингера для матричного элемента $\langle \text{in} | \text{out} \rangle$

В этом разделе мы приведём вывод для матричного элемента  $\langle \text{in} | \text{out} \rangle$  на фоне внешнего электрического поля. Больше подробностей можно найти в [4]. Будем рассматривать четырехмерную электродинамику (действие аналогично (2.1)) с классическим внешним векторным потенциалом:

$$A_\mu^{cl} = (0, 0, 0, Et). \quad (1.1)$$

Такой вид внешнего потенциала будет использоваться только в этом разделе. В главе (2) мы рассмотрим пульс (2.1). Отметим, что на протяжении этого раздела мы будем ссылаться на формулы, которые выписаны в главе (2). Это не вызовет никаких противоречий, так как мы будем опираться лишь на те формулы, которые одновременно и независимо верны для любого вида внешнего пульса. Из квантовой механики известно, что пропагатор в терминах

функционального интеграла принимает вид:

$$T(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \int_{x_1(t_1)}^{x_2(t_2)} Dx(t) \exp \left( i \int_{t_1}^{t_2} dt L[x(t)] \right) \quad (1.2)$$

Если в этом выражении устремить  $t_1 \rightarrow -\infty$ ,  $t_2 \rightarrow +\infty$  и стандартным образом перейти к полевой теории:

$$\begin{cases} \int dt L[x(t)] \rightarrow \int d^4x L[\psi(x)] \\ \int Dx(t) \rightarrow D\psi(x), \end{cases}$$

то получим выражения для in-out матричного элемента матрицы рассеяния:

$$\langle \text{in} | \text{out} \rangle = \int D\psi(x) \exp \left( i \int d^4x L[\psi(x)] \right). \quad (1.3)$$

Более подробный вывод этого факта представлен в [5]. В этом выражении мы пренебрегаем влиянием петлевых поправок на ток, поэтому:

$$L[\psi(x)] = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl}(t) - m) \psi(x). \quad (1.4)$$

То есть мы рассмотрели Гауссово приближение для теории на фоне внешнего поля (1.1). Результатом функционального интегрирования будет:

$$\langle \text{in} | \text{out} \rangle = \det \hat{O} = \sqrt{|\det \hat{O} \det \hat{O}^*|} = \sqrt{|\det \hat{O} \hat{O}^*|}. \quad (1.5)$$

Под операторами  $\hat{O}$  и  $\hat{O}^*$  тут понимается:

$$\begin{cases} \hat{O} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl}(t) - m), \\ \hat{O}^* = (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl}(t) + m). \end{cases} \quad (1.6)$$

Чтобы вычислить полученный детерминант, нам нужно найти собственные функции оператора  $\hat{O}\hat{O}^*$ . Это проще всего сделать в Фурье-пространстве трёхмерных импульсов. После взятие Фурье образа (3.2) от оператора  $\hat{O}$ , и умножения его на Фурье-образ  $\hat{O}^*$ , получаем уравнение на собственные значения  $\hat{O}_p \hat{O}_p^*$ :

$$(\partial_t^2 + m^2 + p_\perp^2 + (p_z + eEt)^2 + i\gamma_0 \gamma_3 eE) \Sigma(t) = \lambda_p \Sigma(t). \quad (1.7)$$

Снова позаимствуем рассуждения из следующей главы, используя свойства (3.7) и (3.8). На основании этих свойств можно ввести функции:

$$\Sigma(t) = \sigma^+(t) \phi^{1,2}; \quad \Sigma(t) = \sigma^-(t) \phi^{3,4}. \quad (1.8)$$

После этого получаем одномерные уравнения на собственные значения:

$$(\partial_t^2 + M_{\pm}^2 + p_{\perp}^2 + (p_3 + eEt)^2) \sigma(t) = \lambda_{\mathbf{p}} \sigma(t). \quad (1.9)$$

Тут  $M_{\pm}^2 = m^2 \pm ieE$ . Если теперь сделать замену  $t \rightarrow t - \frac{eE}{p_3}$  и формально поменять  $E \rightarrow iE$ , получим:

$$((\partial_t^2 - e^2 E^2 t^2) + m_{\pm}^2 + p_{\perp}^2 \pm eE) \sigma(t) = \lambda_{\mathbf{p}} \sigma(t). \quad (1.10)$$

Полученное уравнение есть уравнение Шредингера для осциллятора. После обратной замены  $E \rightarrow -iE$ , получаем:

$$\lambda_{\mathbf{p}}^n = p_{\perp}^2 + m^2 + (2n + 1)ieE. \quad (1.11)$$

Теперь, используя формулу Фруллани, получаем ответ для детерминанта:

$$\langle \text{in} | \text{out} \rangle = \sqrt{|\det \hat{O} \hat{O}^*|} = \exp \left( \frac{1}{2} \log \left( \prod_{n, \mathbf{p}, V_3} \lambda_{\mathbf{p}}^n \right) \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{n, \mathbf{p}, V_3} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{ds}{s} e^{\lambda_{\mathbf{p}}^n s} \right) \right) = e^{-\alpha}. \quad (1.12)$$

В этой формуле под  $\sum_{n, \mathbf{p}, V_3}$  и  $\prod_{n, \mathbf{p}, V_3}$  подразумевается суммирование и произведение соответственно по всем уровням  $n$ , импульсам  $\mathbf{p}$  и по трёхмерному объёму  $V_3$ . Наша задача посчитать  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{V_3}{2(2\pi)^3} \int dp_{\perp} dp_3 \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{ds}{s} \exp(-(p_{\perp}^2 + m^2)s) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(2n+1)ieEs) \quad (1.13)$$

Интеграл по  $p_3$  расходится, но его в силу калибровки  $t \rightarrow t - \frac{p_3}{eE}$  можно свести к интегралу по времени и обрезать на временном объёме:  $eET$ . Интеграл по  $p_{\perp}$  Гауссов. Для вычисления суммы нужно воспользоваться формулой:

$$\frac{1}{\sin(x)} = 2i \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)ix}. \quad (1.14)$$

Используя всё вышесказанное, получаем:

$$\alpha = \frac{eETV_3}{32\pi^2} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{e^{-m^2 s}}{\sin(eEs)}. \quad (1.15)$$

Получившийся интеграл по  $s$  можно взять вычетами, а регуляризация  $\epsilon \rightarrow 0$  вырежет лишний полюс в нуле. Таким образом, окончательно получаем:

$$\alpha = \frac{(eE)^2 TV_3}{16\pi^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left(-\frac{m^2 \pi}{eE} k\right). \quad (1.16)$$

Вероятность перехода определяются как:

$$\text{Prob} = |\langle \text{in} | \text{out} \rangle|^2 = \exp(-2 \text{Re}(\alpha)) = \exp(-2\gamma V_3 T). \quad (1.17)$$

В конечном счете имеем:

$$\gamma = \frac{(eE)^2}{8\pi^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left(-\frac{m^2\pi}{eE} k\right). \quad (1.18)$$

При малых значениях  $E \ll \frac{m^2}{e}$  сумма по  $k$  быстро убывает, поэтому можно ограничиться первым членом:

$$\gamma \approx \frac{(eE)^2}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{m^2\pi}{eE}\right). \quad (1.19)$$

Стоит сразу обсудить полученный результат. Полученный ответ (1.19) для  $\gamma$  сам по себе уже интересен тем, что он показывает нам, что в квантовой теории поля во внешних полях происходят какие-то интересные нетривиальные процессы. Однако, важно отметить, что имеющийся ответ не включает в себя петлевых поправок от электромагнитного поля. К сожалению, таким методом учесть квантовые поправки не представляется возможным. Необходимо использовать теорию возмущения и диаграммную технику Келдыша-Швингера. Петлевые поправки могут оказаться важными в случае сильного поля  $E \gg \frac{m^2}{e}$  или в случае очень продолжительного импульса [3].

## 2 Задача

### 2.1 Постановка задачи

Наша задача состоит в том, чтобы исследовать электронный ток в четырёхмерной квантовой электродинамике на фоне внешнего электрического пульса. Будем изучать действие:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - j^{\mu,cl} A_\mu \right). \quad (2.1)$$

Мы здесь стандартным образом ввели:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (2.2)$$

Калибровочное преобразование имеет вид:

$$\psi \rightarrow \exp(-ie\alpha(x))\psi; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x). \quad (2.3)$$

Мы исследуем теорию в плоском пространстве Минковского:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Алгебра Гамма-матриц Дирака имеет вид:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}; \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Здесь мы использовали обозначение для алгебры Сигма-матриц Паули:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\varepsilon_{ijk}\sigma_k; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Отделим классическое поле от квантовых поправок:

$$A_\mu = a_\mu + A_\mu^{cl}, \quad (2.7)$$

где  $A_\mu^{cl}$  удовлетворяет уравнению Максвелла:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu,cl} = j^{\nu,cl}. \quad (2.8)$$

После подстановки (2.7) в действие (2.1), получим:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{cl} F^{\mu\nu,cl} \right) + \int d^4x \left( -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu^{cl} - m) \psi - \bar{\psi} (i\gamma^\mu a_\mu) \psi \right). \quad (2.9)$$

Тут были введены новые обозначения:

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad D_\mu^{cl} = \partial_\mu + ieA_\mu^{cl} \quad (2.10)$$

Внешним полем в данной работе будет электрический импульс:

$$A_\mu^{cl} = \left( 0, 0, 0, ET \tanh \left( \frac{t}{T} \right) \right). \quad (2.11)$$

Электрическое поле для такого векторного потенциала имеет вид:

$$E_\mu^{cl} = \left( 0, 0, 0, E \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{t}{T} \right)} \right). \quad (2.12)$$

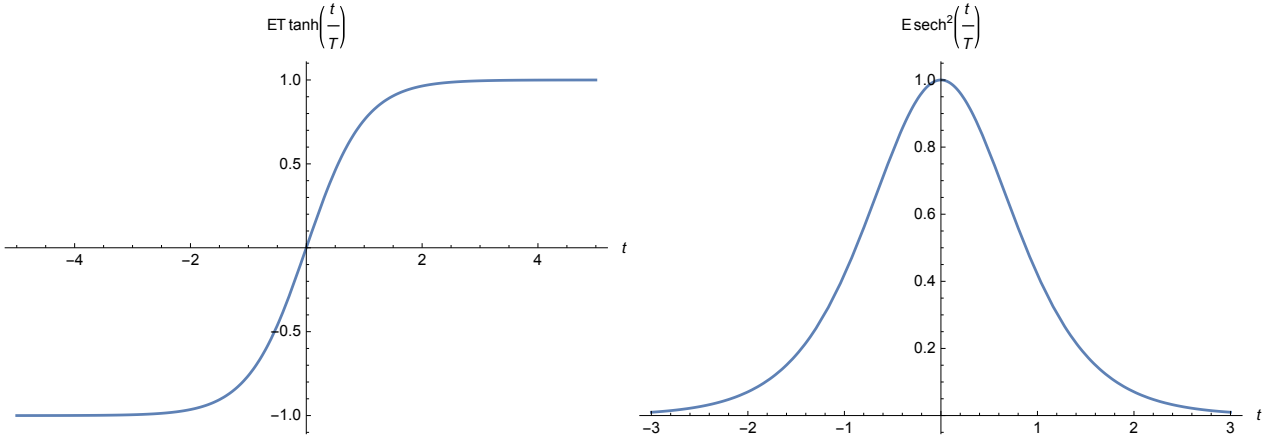


Рисунок 2.0.  $A_3(t)$  и  $E_3(t)$



## 3 Решение уравнений движения

### 3.1 Уравнение на моды

Уравнение движения фермионного поля:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl} - m) \psi(t, x) = 0. \quad (3.1)$$

Чтобы его решить, сделаем трёхмерное преобразование Фурье:

$$\psi(t, x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \psi_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (3.2)$$

С этого момента и дальше жирным шрифтом будут выделяться трёхмерные векторы и трёхмерные скалярные произведения в Евклидовой метрике. После подстановки (3.2) в (3.1):

$$(i\gamma^0 \partial_t - (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) - m) \psi_{\mathbf{p}}(t) = 0, \quad (3.3)$$

здесь было введено обозначение для импульса:

$$\mathbf{P} = \left( p_1, p_2, p_3 + eET \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \right). \quad (3.4)$$

Введём новую функцию  $\phi_{\mathbf{p}}(t)$ :

$$\psi_{\mathbf{p}}(t) = (i\gamma^0 \partial_t - (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) + m) \phi_{\mathbf{p}}(t). \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.3), имеем:

$$\left( \partial_t^2 + p_1^2 + p_2^2 + \left( p_3 + eET \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \right)^2 + m^2 + i\gamma^0 \gamma^3 \frac{eE}{\text{ch}^2\left(\frac{t}{T}\right)} \right) \phi_{\mathbf{p}}(t) = 0. \quad (3.6)$$

Дальнейшие выкладки были использованы, например, в [6] и [7].

Рассмотрим четырёхмерные векторы:

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \phi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \phi^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \phi^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Для этих векторов выполнены соотношения:

$$\gamma^0 \gamma^3 \phi^{1,2} = \phi^{1,2}; \quad \gamma^0 \gamma^3 \phi^{3,4} = -\phi^{3,4}. \quad (3.8)$$

Вводя ещё одно обозначение:

$$\phi_{\mathbf{p}}(t) = F_{\mathbf{p}}^+(t)\phi^{1,2}; \quad \phi_{\mathbf{p}}(t) = F_{\mathbf{p}}^-(t)\phi^{3,4}, \quad (3.9)$$

окончательно получаем уравнение на моды:

$$\left( \partial_t^2 + p_1^2 + p_2^2 + \left( p_3 + eET \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \right)^2 + m^2 \pm i \frac{eE}{ch^2\left(\frac{t}{T}\right)} \right) F_{\mathbf{p}}^{\pm}(t) = 0. \quad (3.10)$$

Решения этих уравнений можно найти в [8] и [9].

## 3.2 In-моды

У каждого из полученных уравнений второго порядка (3.10) будет два независимых решения. Эти решения будут определять моды поля Дирака (3.3). Оказывается, что ток, который мы будем вычислять далее, кардинально зависит от выбора решений. Для того, чтобы понять, какой выбор будет “правильным”, нужно конкретизировать задачу. Наша задача состоит в том, чтобы найти ток на плюс бесконечности. Чтобы задача была осмысленной, нужно выбрать такие моды, которые будут давать нулевой ток при  $t \rightarrow -\infty$ . Как будет показано дальше, такому выбору удовлетворяют так называемые in-моды. Эти моды отвечают асимптотически плоским волнам на минус бесконечности. Вообще говоря, такие моды можно найти не для любого внешнего тока, но в нашем случае  $A_{\mu}^{cl}(t)$  ведет себя как константа на минус бесконечности, поэтому такое решение найти можно. Однако, этих требований недостаточно. От мод нужно требовать условие адамаровости. Условие адамаровости состоит в том, чтобы моды в пределе  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$  превращались в обычную плоскую волну:

$$\psi_{\mathbf{p}}(t) \sim e^{-i|\mathbf{p}|t} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (3.11)$$

Такое ограничение требуется для корректного поведения пропэгаторов в ультрафиолетовом пределе, что необходимо для независимости лидирующего порядка ультрафиолетовых перенормировок от внешнего поля.

Имея в виду всё вышесказанное, будем решать уравнение (3.10).

В данном уравнение удобно сделать замену  $x = e^{\frac{2t}{T}}$  и ввести набор обозначений:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{\perp}^2 = p_1^2 + p_2^2 \\ P_3(t) = p_3 + eET \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \\ P_{3+} = p_3 + eET \\ P_{3-} = p_3 - eET \\ w_+ = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m^2 + (p_3 + eET)^2} \\ w_- = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m^2 + (p_3 - eET)^2} \\ \theta = eET^2; \quad \delta = 1 - iw_-T \\ \beta_- = i\theta - \frac{iT}{2}(w_- + w_+) \\ \gamma_- = i\theta - \frac{iT}{2}(w_- - w_+) \\ \beta_+ = -i\theta - \frac{iT}{2}(w_- + w_+) \\ \gamma_+ = -i\theta - \frac{iT}{2}(w_- - w_+) \\ \bar{\beta}_- = i\theta + \frac{iT}{2}(w_- - w_+) \\ \bar{\gamma}_- = i\theta + \frac{iT}{2}(w_- + w_+) \\ \bar{\beta}_+ = -i\theta + \frac{iT}{2}(w_- - w_+) \\ \bar{\gamma}_+ = -i\theta + \frac{iT}{2}(w_- + w_+) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Тогда решение данных уравнений можно искать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\mathbf{p}}^+(t) = e^{iw_-t}(1+x)^{-i\theta}g^+(x) \\ F_{\mathbf{p}}^-(t) = e^{iw_-t}(1+x)^{i\theta}g^-(x) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

После подстановки(3.13) в (3.10), получим:

$$\{x(1+x)\partial_x^2 + (\delta + (1 + \beta_{\pm} + \gamma_{\pm})x) + \beta_{\pm}\gamma_{\pm}\}g^{\pm}(x) = 0 \quad (3.14)$$

В качестве решений таких уравнений можно взять следующие гипергеометрические функции:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{p}}^+(t) &= C_1 e^{iw_-t}(1 + e^{2\frac{t}{T}})^{-i\theta} {}_1F_2\left(\beta_+, \gamma_+, \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right) + \\ &+ C_2 e^{-iw_-t}(1 + e^{2\frac{t}{T}})^{-i\theta} {}_1F_2\left(\bar{\beta}_+, \bar{\gamma}_+, 2 - \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{p}}^-(t) &= \bar{C}_1 e^{iw_-t}(1 + e^{2\frac{t}{T}})^{i\theta} {}_1F_2\left(\beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right) + \\ &+ \bar{C}_2 e^{-iw_-t}(1 + e^{2\frac{t}{T}})^{i\theta} {}_1F_2\left(\bar{\beta}_-, \bar{\gamma}_-, 2 - \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отметим, что при  $t \rightarrow -\infty$  последний аргумент гипергеометрических функций из (3.15) и (3.16) стремится к нулю, а в таком пределе гипергеометрическая функция может быть

разложена в ряд:

$${}_1F_2(a, b, c, x) = 1 + \frac{1}{1!} \frac{ab}{c} x + \frac{1}{2!} \frac{a(a-1)b(b-1)}{c(c-1)} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{a(a-1)(a-2)b(b-1)(b-2)}{c(c-1)(c-2)} x^3 + \dots \quad (3.17)$$

Полезно записать еще несколько свойств гипергеометрической функции:

$${}_1F_2(a, b, c, x) = {}_1F_2(b, a, c, x), \quad (3.18)$$

$${}_1F_2(a, 0, c, x) = 1, \quad (3.19)$$

$${}_1F_2(a, b, c, 0) = 1, \quad (3.20)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty, \rightarrow \infty} {}_1F_2(a, b, c, x) = (1+x)^b. \quad (3.21)$$

Также понадобятся очевидные свойства:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(1 + e^{-\frac{2t}{T}}\right)^{\pm i\theta} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + e^{-\frac{2t}{T}}\right)^{\pm i\theta} = 1. \quad (3.22)$$

Теперь нужно убедиться в том, что выбранные моды удовлетворяют описанным выше требованиям. Первым шагом легко проверятся, что при  $E \rightarrow 0$  в силу (3.19) решения (3.15) и (3.16) переходят в линейную комбинацию плоских волн. Следующим шагом нужно положить  $C_1 = 0$  и  $\bar{C}_2 = 0$ . Это удовлетворит одно из условий адомаровости, следующее из (3.2), если полагать, что решение  $F_{\mathbf{p}}^+(t)$  описывает обычную волну, бегущую вправо, а  $F_{\mathbf{p}}^-(t)$  обычную волну, бегущую влево. Такой выбор будет согласован с процедурой квантования (3.31). Третьим шагом нужно убедиться, что полученные решения отвечают in-модам. Требуется показать, что моды будут иметь вид плоских волн при  $t \rightarrow -\infty$ . Это опять же тривиально следует из (3.20) и (3.22). Тот факт, что выбранные моды дают нулевой ток, будет показан позднее. Наконец, последнее, что нужно проверить, это второе условие адомаровости. Рассмотрим  $|\bar{p}| \rightarrow \infty$ . Пользуясь тем, что  $\theta$  чисто действительная, а  $\gamma_+, \beta_+, \gamma_-, \beta_-, \bar{\gamma}_+, \bar{\beta}_+, \bar{\gamma}_-, \bar{\beta}_-$  чисто мнимые, а также свойствами (3.19) и (3.21), можно показать, что множитель перед  $e^{\pm iw-t} \rightarrow e^{\pm i|\mathbf{p}|t}$  в каждом из слагаемых (3.15) и (3.16) будет давать лишь несущественную фазу. Таким образом, полученные моды действительно подходят для решения поставленной задачи.

После вышеизложенных аргументов получаем следующие моды:

$$\begin{cases} F_{\mathbf{p},-}^+(t) = e^{-iw-t} (1 + e^{2\frac{t}{T}})^{-i\theta} {}_1F_2\left(\bar{\beta}_+, \bar{\gamma}_+, 2 - \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right) \\ F_{\mathbf{p},+}^-(t) = e^{iw-t} (1 + e^{2\frac{t}{T}})^{i\theta} {}_1F_2\left(\beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right). \end{cases} \quad (3.23)$$

И после обратных подстановок (3.9), (3.7) и (3.5), имеем:

$$\psi_{\mathbf{p},1}^+(t) = A^+ \begin{pmatrix} i\partial_t - (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) - m) \\ -p_1 - ip_2 \\ -i\partial_t + (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) + m) \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} F_{\mathbf{p},-}^+(t), \quad (3.24)$$

$$\psi_{\mathbf{p},2}^+(t) = A^+ \begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ i\partial_t - (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) - m) \\ p_1 - ip_2 \\ i\partial_t - (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) + m) \end{pmatrix} F_{\mathbf{p},-}^+(t), \quad (3.25)$$

$$\psi_{\mathbf{p},1}^-(t) = A^- \begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ i\partial_t + (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) + m) \\ p_1 - ip_2 \\ -i\partial_t - (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) - m) \end{pmatrix} F_{\mathbf{p},+}^-(t), \quad (3.26)$$

$$\psi_{\mathbf{p},2}^-(t) = A^- \begin{pmatrix} i\partial_t + (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) + m) \\ p_1 + ip_2 \\ i\partial_t + (p_3 + eET \tanh(\frac{t}{T}) - m) \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} F_{\mathbf{p},+}^-(t). \quad (3.27)$$

Можно также записать условия нормировки полученных решений  $(\psi_{\mathbf{p},s}^\pm(t))^T \psi_{\mathbf{p},s}^\pm(t) = 1$ :

$$2 \left( |\partial_t F_{\mathbf{p},-}^+(t)|^2 + (p_\perp^2 + P_3^2(t) + m^2) |F_{\mathbf{p},-}^+(t)|^2 + \right. \\ \left. + iP_3(t) (\partial_t F_{\mathbf{p},-}^{+*}(t) F_{\mathbf{p},-}^+(t) - \partial_t F_{\mathbf{p},-}^+(t) F_{\mathbf{p},-}^{+*}(t)) \right) = \frac{1}{|A^+|^2}, \quad (3.28)$$

$$2 \left( |\partial_t F_{\mathbf{p},+}^-(t)|^2 + (p_\perp^2 + P_3^2(t) + m^2) |F_{\mathbf{p},+}^-(t)|^2 - \right. \\ \left. - iP_3(t) (\partial_t F_{\mathbf{p},+}^{-*}(t) F_{\mathbf{p},+}^-(t) - \partial_t F_{\mathbf{p},+}^-(t) F_{\mathbf{p},+}^{-*}(t)) \right) = \frac{1}{|A^-|^2}. \quad (3.29)$$

С помощью первого уравнения на моды [знак плюс в (3.10)], можно показать, что  $A^+$  не зависит от времени, а с помощью второго уравнения на моды [знак минус в (3.10)], можно показать, что  $A^-$  не зависит от времени. На самом деле, тот факт, что нормировка дираковских спиноров не зависит от времени, справедлив для произвольного пульса  $A_3(t)$ :

$$\begin{cases} \partial_t^2 f_{\mathbf{p}}(t) + (\omega_{\mathbf{p}}^2(t) + ie\partial_t A_3(t)) f_{\mathbf{p}}(t) = 0 \\ |\partial_t f_{\mathbf{p}}(t)|^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2(t) |f_{\mathbf{p}}(t)|^2 + i\bar{P}_3(t) (\partial_t f_{\mathbf{p}}^*(t) f_{\mathbf{p}}(t) - \partial_t f_{\mathbf{p}}(t) f_{\mathbf{p}}^*(t)) = \frac{1}{C(t)} \\ \omega_{\mathbf{p}}^2(t) = p_\perp^2 + m^2 + \bar{P}_3(t), \quad \bar{P}_3(t) = p_3 + eA_3(t), \end{cases} \quad (3.30)$$

следовательно,  $C(t)$  есть константа, то есть она не зависит от времени.

### 3.3 Квантование фермионного поля

Стандартным образом квантуем фермионное поле:

$$\Psi_a(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 [a_{\mathbf{p},s} \psi_{\mathbf{p},s,a}^+(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger \psi_{-\mathbf{p},s,a}^-(t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}]. \quad (3.31)$$

Заметим, что данное квантование согласуется с тем, как мы выбрали моды: при больших импульсах мы получим комбинацию двух Адамаровых плоских волн. Требуем:

$$\{a_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{k},r}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{k},r}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta_{s,r}, \quad (3.32)$$

$$\{a_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{k},r}\} = \{b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{k},r}\} = \{a_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{k},r}\} = \{a_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{k},r}^\dagger\} = 0. \quad (3.33)$$

Из этого требования должно следовать, что:

$$\{\Psi_a(x, t), \Psi_b^\dagger(y, t)\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{a,b}. \quad (3.34)$$

Через моды антикоммутирует записывается следующим образом:

$$\{\Psi_a(x, t), \Psi_b^\dagger(y, t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 [\psi_{\mathbf{p},s,a}^+(t) \psi_{\mathbf{p},s,b}^{+,*}(t) + \psi_{\mathbf{p},s,a}^-(t) \psi_{\mathbf{p},s,b}^{-,*}(t)] e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.35)$$

При правильном квантовании антикоммутирует (3.35) полей  $\Psi_a(x, t)$  не должен зависеть от времени. Чтобы понять, почему это так, полезно выписать ещё одно соотношение на гипергеометрические функции, которое проверяется путем подстановки  $\beta_\pm, \bar{\beta}_\pm, \gamma_\pm, \bar{\gamma}_\pm, \theta$  из (3.12) и использования (3.17):

$$\begin{cases} {}_1F_2^* \left( \beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right) = {}_1F_2 \left( \bar{\beta}_+, \bar{\gamma}_+, 2 - \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right) \\ {}_1F_2^* \left( \beta_+, \gamma_+, \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right) = {}_1F_2 \left( \bar{\beta}_-, \bar{\gamma}_-, 2 - \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right). \end{cases} \quad (3.36)$$

Отсюда сразу следует, что для решений (3.23) выполняется  $F_{\mathbf{p},+}^{-,*}(t) = F_{\mathbf{p},-}^+(t)$ . Теперь из соотношений (3.24), (3.25), (3.26) и (3.27) можно пронаблюдать связь  $\psi_{\mathbf{p}}^+(t)$  и  $\psi_{\mathbf{p}}^-(t)$ :

$$\psi_{\mathbf{p},s}^-(t) = -i\gamma_0\gamma_2 (\psi_{\mathbf{p},s}^+(t))^*. \quad (3.37)$$

Полученное соотношение, на самом деле, есть симметрия уравнения Дирака в импульсном представлении (3.3), поэтому оно снова верно для любой формы внешнего пульса. Рассуждения выше подтверждают правильность наших расчётов. Теперь, используя уравнение Дирака (3.3) и полученную связь (3.37), можно в общем виде, без использования явного вида ре-

шений, покомпонентно проверить тождество:

$$i\gamma^0\partial_t\left(\sum_{s=1}^2[\psi_{\mathbf{p},s,a}^+(t)\psi_{\mathbf{p},s,b}^{+,*}(t)+\psi_{\mathbf{p},s,a}^-(t)\psi_{\mathbf{p},s,b}^{-,*}(t)]\right)=0. \quad (3.38)$$

Дополнительная численная проверка подтверждает, что моды действительно удовлетворяют таким коммутационным соотношениям и их антикоммутатор не зависит от времени.

Константа нормировки находится очень просто, если подставить  $t = -\infty$ :

$$A \equiv |A^\pm| = \frac{1}{\sqrt{2p_\perp^2 + (m + P_{3-} - \sqrt{m^2 + p_\perp^2 + P_{3-}^2})^2 + (m - P_{3-} + \sqrt{m^2 + p_\perp^2 + P_{3-}^2})^2}}. \quad (3.39)$$

## 4 Ток

Более подробно с тонкостями в выборе мод и вычислениями разного рода токов можно ознакомиться в наборе статей от специалистов в этой области С. П. Гаврилова и Д. М. Гитмана: [10], [11], [12], [13], [14] и [15]. Существует еще альтернативный способ вычисления тока при помощи техники WKБ. Пример применения этой техники для вычисления тока можно найти в [16].

### 4.1 Классический ток

В силу симметрии сразу ясно, что ненулевой может быть только третья компонента тока:

$$\langle J^3 \rangle_{tree} \equiv \langle \bar{\Psi} \gamma^3 \Psi \rangle_{tree} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 \psi_{\mathbf{p},s}^{-,\dagger}(t) \gamma^0 \gamma^3 \psi_{\mathbf{p},s}^-(t) = \quad (4.1)$$

$$= -2|A|^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( (m^2 + p_{\perp}^2 - P_3^2(t)) |F_{\mathbf{p},+}^-(t)|^2 - |\partial_t F_{\mathbf{p},+}^-(t)|^2 + \right. \\ \left. + iP_3(t) (\partial_t F_{\mathbf{p},+}^{-,*}(t) F_{\mathbf{p},+}^-(t) - \partial_t F_{\mathbf{p},+}^-(t) F_{\mathbf{p},+}^{-,*}(t)) \right). \quad (4.2)$$

Используя второе условие нормировки (3.29), получаем:

$$\langle J^3 \rangle_{tree} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (1 - 4|A|^2 (m^2 + p_1^2 + p_2^2) |F_{\mathbf{p},+}^-(t)|^2) = \\ = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( 1 - 4|A|^2 (m^2 + p_{\perp}^2) \left| {}_1F_2 \left( \beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right) \right|^2 \right) = \quad (4.3)$$

Из первого соотношения (3.36) следует, что  $F_{\mathbf{p},+}^{-,*}(t) = F_{\mathbf{p},-}^+(t)$ , откуда:

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( 1 - 4|A|^2 (m^2 + p_{\perp}^2) {}_1F_2 \left( \beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right) {}_1F_2 \left( \bar{\beta}_+, \bar{\gamma}_+, 2 - \delta, -e^{2\frac{t}{T}} \right) \right). \quad (4.4)$$

### 4.2 Ток в нулевом порядке

Формулы (4.3) и (4.4) дают точные выражения для тока в произвольный момент времени. Теперь можно посмотреть выражение для тока в случае, когда  $t = -\infty$ . Подстановка тривиальна в силу свойства (3.20), и после упрощения получаем:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=-\infty} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-P_{3-}}{\sqrt{m^2 + p_{\perp}^2 + P_{3-}^2}} = 0. \quad (4.5)$$

Как и ожидалось, полученные моды действительно in-моды. Важно отметить, что сходимость этого интеграла и некоторых других интегралов в дальнейших вычислениях нужно понимать как сходимость в смысле главного значения.



Теперь рассмотрим ток в случае, когда  $t = +\infty$ . Разложение исходных гипергеометрических функций (4.3) в таком пределе будет давать бесконечный ряд, который сложно исследовать, поэтому удобно воспользоваться тождеством, которые было взято из [17]:

$$\begin{aligned} {}_1F_2(a, b, c, x) &= (-x)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} {}_1F_2\left(a, 1+a-c, 1+a-b, \frac{1}{x}\right) + \\ &+ (-x)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)} {}_1F_2\left(b, 1+b-c, 1+b-a, \frac{1}{x}\right), \quad a-b \notin \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

После применения данного соотношения, можно явно подставить  $x = -\infty$  в выражение для гипергеометрической функции:

$${}_1F_2(a, b, c, x \rightarrow -\infty) = (-x)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} + (-x)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}. \quad (4.7)$$

Следующим шагом вычисляем квадрат модуля от имеющихся слагаемых. Чтобы его расписать, нам понадобятся некоторые соотношения на Гамма-функцию:

$$\Gamma(1+ix)\Gamma(1-ix) = \Gamma(1+ix)\Gamma^*(1+ix) = \frac{\pi x}{\sinh(\pi x)}, \quad (4.8)$$

$$\Gamma(ix)\Gamma(-ix) = \Gamma(ix)\Gamma^*(ix) = \frac{\pi}{x \sinh(\pi x)}, \quad (4.9)$$

$$\Gamma(2+ix)\Gamma(2-ix) = \Gamma(2+ix)\Gamma^*(2+ix) = \frac{\pi x(1+x^2)}{\sinh(\pi x)}. \quad (4.10)$$

Так как ответ для выражения  $\left| {}_1F_2\left(\beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right) \right|^2$  даже в нулевом порядке по  $t = +\infty$  достаточно большой, то выпишем по отдельности слагаемые, которые имеют зависимость по времени и не имеют таковой:

$$\left| {}_1F_2\left(\beta_-, \gamma_-, \delta, -e^{2\frac{t}{T}}\right) \right|^2 \approx j_1 + j_2(t). \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} j_2(t) &= e^{-\frac{2t}{T}i w_+ t} \frac{\pi w_- T}{\sinh(\pi w_- T)} \frac{\pi}{\sinh(\pi w_+ T)(w_+ T)} \frac{1}{\Gamma\left(1+i\theta + \frac{iT}{2}(w_- - w_+)\right)} \times \\ &\times \frac{1}{\Gamma\left(-i\theta + \frac{iT}{2}(w_- - w_+)\right) \Gamma\left(i\theta - \frac{iT}{2}(w_- + w_+)\right) \Gamma\left(1-i\theta - \frac{iT}{2}(w_- + w_+)\right)} + C.C. \end{aligned} \quad (4.12)$$

С.С. - комплексное сопряжение члена, стоящего слева от этого символа.

Полученное выражение является действительной периодической функцией по времени. В силу теоремы Римана об осцилляциях интеграл от этого выражения по импульсам при  $t \rightarrow +\infty$  будет равен нулю:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (p_\perp^2 + m^2) j_2(t) |A|^2 = 0. \quad (4.13)$$

Нетривиальны членом будет  $j_1$ :

$$j_1 = \frac{\pi w_- T}{\sinh(\pi w_- T)} \frac{\pi}{\sinh(\pi w_+ T)(w_+ T)} \left( \frac{\sinh\left(\pi\left(\theta - \frac{T}{2}(w_- + w_+)\right)\right) \sinh\left(\pi\left(\theta + \frac{T}{2}(w_- + w_+)\right)\right)}{\pi\left(\theta + \frac{T}{2}(w_- + w_+)\right)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\left(\theta - \frac{T}{2}(w_- + w_+)\right)}{1} + \frac{\sinh\left(\pi\left(\theta - \frac{T}{2}(w_- - w_+)\right)\right) \sinh\left(\pi\left(\theta + \frac{T}{2}(w_- - w_+)\right)\right) \left(\theta - \frac{T}{2}(w_- - w_+)\right)}{\pi\left(\theta + \frac{T}{2}(w_- - w_+)\right)} \right). \quad (4.14)$$

После использования обозначений (3.12) выражение для  $j_1$  можно упростить до:

$$j_1 = \frac{w_- \left( -w_+ + P_{3+} \left( \coth(\pi T w_-) \coth(\pi T w_+) - \cosh(2\pi E e T^2) \frac{1}{\sinh(\pi T w_-) \sinh(\pi T w_+)} \right) \right)}{w_+(P_{3-} - w_-)}. \quad (4.15)$$

Промежуточным шагом полезно сделать проверку правильности вычислений. Для этого можно убедиться, что предел свободной задачи по-прежнему выполнен:

$$\lim_{E \rightarrow 0} j_1 = 1. \quad (4.16)$$

Теперь можно записать выражение для тока при  $t = +\infty$ :

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=+\infty} = \int \frac{p_\perp dp_\perp dp_3}{(2\pi)^2} \left( 1 - (m^2 + p_\perp^2) \times \right. \\ \left. \times \frac{w_- \left( -w_+ + P_{3+} \left( \coth(\pi T w_-) \coth(\pi T w_+) - \cosh(2\pi E e T^2) \frac{1}{\sinh(\pi T w_-) \sinh(\pi T w_+)} \right) \right)}{w_+(P_{3-} - w_-)(m^2 + p_\perp^2 + P_{3-}(P_{3-} - w_-))} \right). \quad (4.17)$$

Имея явное выражение для тока, нужно исследовать интеграл на сходимость, а также выяснить при каких импульсах набирается интеграл, если он конечен.

Будем раскладывать подынтегральное выражение до первого порядка по большим импульсам и смотреть на сходимость. Сразу отметим, что мы выбрасываем все экспоненциально малые члены. Также можно пренебречь всеми порядками старше первого, ибо интегралы вида  $\int_{\#}^{+\infty} \frac{1}{p^2} dp$  набираются только при малых импульсах. Учтя это, выпишем разложение для трёх случаев.

Случай  $p_\perp \rightarrow +\infty$ ,  $p_3$  никак не фиксирован:

$$\int \frac{dp_\perp dp_3}{(2\pi)^2} \left( (-p_3 + 3eET) + \frac{eET(p_3 - eET)}{p_\perp} + O\left(\frac{1}{p_\perp^2}\right) \right). \quad (4.18)$$

Полученный интеграл равен нулю в смысле главного значения при интегрировании по  $p_3$  для каждого из порядков разложения.

Случай  $p_3 \rightarrow +\infty$ ,  $p_\perp$  не фиксирован:

$$\int \frac{p_\perp dp_\perp dp_3}{(2\pi)^2} \left( -1 + O\left(\frac{1}{p_3^3}\right) \right). \quad (4.19)$$

Случай  $p_3 \rightarrow -\infty$ ,  $p_\perp$  не фиксирован:

$$\int \frac{p_\perp dp_\perp dp_3}{(2\pi)^2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{p_3^3}\right) \right). \quad (4.20)$$

Два последних случая доказывают, что при больших  $p_3$  мы получили интеграл от антисимметричной функции, что является причиной его обнуления.

Итак, мы доказали тот факт, что интеграл (4.17) сходится, причём основной его вклад набирается на ограниченных импульсах. Из физических соображений ясно, что интегрирование по  $p_3$  можно лимитировать областью  $|p_3| < eET$ , так как именно при таких импульсах поле существенно влияет на физику.

Можно рассмотреть предел больших  $T$  и малых масс  $m$ :

$$eET^2 \gg 1, \quad eET \gg m. \quad (4.21)$$

Сделаем замену  $p_3 \rightarrow P_{3-}$  в интеграле (4.17) и сделаем разложение при  $T \rightarrow +\infty$ , используя формулу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\cosh(x+a+b) \cosh(x+a-b) - \cosh(2x)}{\sinh(x+a+b) \sinh(x+a-b)} - 1 = -2e^{-2a}. \quad (4.22)$$

В таком пределе, считая  $eET^2 \gg 1$ , с точностью до членов старшего порядка по  $\frac{1}{T}$ , получаем:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=+\infty} \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dp_\perp \int_{-eET}^{eET} dp_3 \left( e^{-\frac{\pi m^2}{eE}} e^{-\frac{\pi p_\perp^2}{eE}} p_\perp \right) \approx \boxed{\frac{(eE)^2 T}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right)} \quad (4.23)$$

Таким образом, выражение (4.23) даёт выражение для тока в случае сильных полей в пределе  $t \rightarrow +\infty$ . Мы получили, что ток с течением времени меняется от нуля до некоторого фиксированного значения. В силу аналитичности тока как функции времени, при произвольном значении времени ток должен быть конечной величиной. Такое требование идёт из того, что ток есть физическая величина.

## 5 Заключение

В заключение сравним результаты, один из которых получен при помощи подхода Швингера (1.19), а второй при вычислении тока (4.23). Первый результат мы получали для внешнего поля (1.1), но при вычислениях мы делали обрезание при интегрировании по импульсу  $p_3$  на область  $|p_3| < eET$ , что соответствует обрезанию поля на временах  $t < -T$  и  $t > T$ . Такое обрезанное поле эквивалентно пульзу (2.1).

Ответ (1.19) для  $\gamma$  есть плотность рождающихся ферми-частиц в единицу времени. По определению, ток есть произведение скорости на плотность:  $\mathbf{J} = n\mathbf{v}$ . Поэтому, если умножить плотность рождающихся ферми-частиц в единицу времени  $\gamma$  на время действия пульса и на скорость, которая в планковской системе единиц безразмерная величина, получаем:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=-\infty} = T\gamma. \quad (5.1)$$

Видим, что результат древесного вычисления тока и результат вычисления матричного элемента  $\langle \text{in} | \text{out} \rangle$  дают согласованные результаты.

## Литература

- [1] Akhmedov E.T., Lanina E.N., Trunin D.A. Quantization in background scalar fields // Phys. Rev. D. 2020. Т. 101, № 2. с. 025005.
- [2] Akhmedov E.T., Astrakhantsev N., Popov F.K. Secularly growing loop corrections in strong electric fields // JHEP. 2014. Т. 09. с. 071.
- [3] Akhmedov E.T., Popov F.K. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields // JHEP. 2015. Т. 09. с. 085.
- [4] Mu Ben-Rong, Wang Peng, Yang Hai-Tang. Minimal Length Effects on Schwinger Mechanism // Commun. Theor. Phys. 2015. Т. 63, № 6. С. 715–720.
- [5] Weinberg S. The Quantum Theory of Fields, Volume 1. Cambridge University Press, 1995. p. 634.
- [6] Chervyakov A., Kleinert H. On Electron–Positron Pair Production by a Spatially Inhomogeneous Electric Field // Phys. Part. Nucl. 2018. Т. 49, № 3. С. 374–396.
- [7] Fermion pair production in a strong electric field / Yuval Kluger, J. Eisenberg, B Svetitsky [и др.] // Physical review D: Particles and fields. 1992. 07. Т. 45. С. 4659–4671.
- [8] Гриб А. А. Мамаев С. Г. Мостепаненко В. М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. Энергоатомиздат, 1988. с. 288.
- [9] Akhmedov E.T., Musaev E.T. Comments on QED with background electric fields // New J. Phys. 2009. Т. 11. с. 103048.
- [10] Gavrilov S.P., Gitman D.M. Vacuum instability in external fields // Phys. Rev. D. 1996. Т. 53. С. 7162–7175.
- [11] Gavrilov S.P., Gitman Dmitry M. One-loop energy-momentum tensor in QED with electric-like background // Phys. Rev. D. 2008. Т. 78. с. 045017.
- [12] Gavrilov S.P., Gitman D.M. Energy-momentum tensor in thermal strong-field QED with unstable vacuum // J. Phys. A. 2008. Т. 41. с. 164046.
- [13] Gavrilov S.P., Gitman D.M. Consistency restrictions on maximal electric field strength in QFT // Phys. Rev. Lett. 2008. Т. 101. с. 130403.
- [14] Gavrilov S.P., Gitman D.M., Yokomizo N. Dirac fermions in strong electric field and quantum transport in graphene // Phys. Rev. D. 2012. Т. 86. с. 125022.
- [15] Gavrilov S.P. Effective energy-momentum tensor of strong-field QED with unstable vacuum // J. Phys. A. 2006. Т. 39. С. 6407–6413.

- [16] Krotov Dmitry, Polyakov Alexander M. Infrared Sensitivity of Unstable Vacua // Nucl. Phys. B. 2011. T. 849. C. 410–432.
- [17] Akhmedova V., Akhmedov E. T. Selected Special Functions for Fundamental Physics. Springer Briefs in Physics, 2019. p. 122.