Исследование тока для поля фермионов на фоне внешнего электрического пульса (бакалаврская работа)

Студент: Андрей Анохин
Научный руководитель: Эмиль Тофикович Ахмедов

МФТИ, ИТЭФ

26 июня 2020

Цели и задачи

Цель работы:

- Получить выражение для вакуумного фермионного тока на фоне внешнего электрического пульса.

Задачи:

- 1.Найти моды, решающие уравнения Дирака в теории с внешним электрическим пульсом;
- 2.Проверить выполнение для них антикоммутационных соотношений, выявить моды с корректным адамаровым поведением;
- 3.Вычислить вакуумное среднее тока фермионного поля в древесном приближении;

План

- Вывод Швингера для плотности рождающихся ферми-частиц в единицу времени;
- Постановка решаемой задачи
- Уравнение Дирака и требование на моды
- Решение уравнения Дирака
- Квантование фермионного поля
- Вычисление древесного тока

Вывод Швингера для плотности частиц

Будем рассматривать четырёхмерную электродинамику с действием:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - j^{\mu,cl} A_\mu \right), \tag{1}$$

на фоне внешнего поля:

$$A_\mu^{cl} = (0, 0, 0, Et). \tag{2}$$

Из квантовой механики известно, что пропагатор в терминах функционального интеграла принимает вид:

$$T(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \int_{x_1(t_1)}^{x_2(t_2)} Dx(t) \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} dt \, \mathrm{L}[x(t)] \right) \tag{3}$$

Вывод Швингера для плотности частиц

Если в выражении (3) устремить $t_1 \to -\infty$, $t_2 \to +\infty$ и стандартным образом перейти к полевой теории:

$$\begin{cases} \int dt\, \mathrm{L}[x(t)] \to \int d^4x L[\psi(x)] \\ \int Dx(t) \to D\psi(x), \end{cases}$$

то получим выражения для in-out матричного элемента матрицы рассеяния:

$$\langle \mathrm{in}|\mathrm{out}\rangle = \int D\psi(x) \exp\left(i \int d^4x\, \mathrm{L}[\psi(x)]\right). \tag{4}$$

В этом выражении мы пренебрегаем влиянием петлевых поправок на ток, поэтому:

$$\mathrm{L}[\psi(x)] = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A^{cl}_\mu(t) - m\right)\psi(x). \tag{5}$$

То есть мы рассмотрели Гауссово приближение для теории на фоне внешнего поля (2).

Вывод Швингера для плотности частиц

После вычисления Гауссового функционального интеграла имеем:

$$\langle \text{in}|\text{out}\rangle = e^{-\alpha}, \tag{6}$$

где:

$$\alpha = -\frac{2V_3}{2(2\pi)^3}\int dp_\perp dp_3 \int_\epsilon^{+\infty} \frac{ds}{s}\exp\left(-(p_\perp^2+m^2)s\right)\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-(2n+1)ieEs\right). \tag{7}$$

Вероятность перехода определятся как:

$$\text{Prob} = |\langle \text{in}|\text{out}\rangle|^2 = \exp\left(-2\,\text{Re}(\alpha)\right) = \exp\left(-\gamma V_3 T\right). \tag{8}$$

При малых значениях $E \ll \frac{m^2}{e}$ в главном приближении получаем:

$$\gamma \approx \frac{(eE)^2}{2\pi^3}\exp\left(-\frac{m^2\pi}{eE}\right). \tag{9}$$

Полученный ответ для γ сам по себе уже нетривиальный.

Постановка задачи

Действие для четырёхмерной квантовой электродинамики имет вид:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - j^{\mu,cl} A_\mu \right). \tag{10}$$

Здесь введены обозначения:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \tag{11}$$

Калибровочное преобразование имеет вид:

$$\psi \to \exp\left(-ie\alpha(x)\right)\psi; \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \tag{12}$$

Отделим классическое поле от квантовых поправок:

$$A_\mu = a_\mu + A_\mu^{cl}, \tag{13}$$

где A_μ^{cl} удовлетворяет уравнению Максвелла:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu,cl} = j^{\nu,cl}. \tag{14}$$

Постановка задачи

После подстановки (13) в действие (10), получим:

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{cl}_{\mu\nu} F^{\mu\nu,cl} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D^{cl}_\mu - m)\psi - \bar{\psi}(i\gamma^\mu a_\mu)\psi \right). \tag{15}$$

Тут были введены новые обозначения:

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad D^{cl}_\mu = \partial_\mu + ieA^{cl}_\mu \tag{16}$$

Внешним полем в данной работе будет электрический пульс:

$$A^{cl}_\mu = \left(0, 0, 0, ET \tanh\left(\frac{t}{T}\right)\right). \tag{17}$$

Электрическое поле для такого векторного потенциала имеет вид:

$$E^{cl}_\mu = \left(0, 0, 0, \frac{E}{\cosh^2\left(\frac{t}{T}\right)}\right). \tag{18}$$

Уравнение Дирака

Уравнение движения фермионного поля:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl} - m\right)\psi(t,x) = 0. \tag{19}$$

Чтобы его решить, сделаем трёхмерное преобразование Фурье:

$$\psi(t,x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\psi_{\boldsymbol{p}}(t)e^{i\boldsymbol{px}}. \tag{20}$$

Введём новую функцию $\phi_{\boldsymbol{p}}(t)$:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(t) = \left(i\gamma^0\partial_t - (\gamma \boldsymbol{P}) + m\right)\phi_{\boldsymbol{p}}(t). \tag{21}$$

Подставляя (21) и (20) в (19), имеем:

$$\left(\partial_t^2 + p_1^2 + p_2^2 + \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right)\right)^2 + m^2 + i\gamma^0\gamma^3\frac{eE}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{t}{T}\right)}\right)\phi_{\boldsymbol{p}}(t) = 0. \tag{22}$$

Уравнение Дирака

Рассмотрим четырёхмерные векторы:

$$\phi^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad \phi^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}; \quad \phi^3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \quad \phi^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Для этих векторов выполнены соотношения:

$$\gamma^0\gamma^3\phi^{1,2} = \phi^{1,2}; \quad \gamma^0\gamma^3\phi^{3,4} = -\phi^{3,4}. \tag{24}$$

Вводя ещё одно обозначение:

$$\phi_p(t) = F^+_{\boldsymbol{p}}(t)\phi^{1,2}; \quad \phi_p(t) = F^-_{\boldsymbol{p}}(t)\phi^{3,4}, \tag{25}$$

окончательно получаем уравнение на моды:

$$\left(\partial_t^2 + p_1^2 + p_2^2 + \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right)\right)^2 + m^2 \pm i\frac{eE}{ch^2\left(\frac{t}{T}\right)}\right)F^{\pm}_{\boldsymbol{p}}(t) = 0. \tag{26}$$

Требование на моды

У каждого из полученных уравнений второго порядка (26) будет два независимых решения. Эти решения будут определять моды поля Дирака (19). Оказывается, что ток, который мы будем вычислять далее, кардинально зависит от выбора решений. Для того, чтобы понять, какой выбор будет “правильным”, нужно конкретизировать задачу. Наша задача состоит в том, чтобы найти ток на плюс бесконечности. Чтобы задача была осмысленной, нужно выбрать такие моды, которые будут давать нулевой ток при $t \to -\infty$. Как будет показано дальше, такому выбору удовлетворяют так называемые in-моды. Эти моды отвечают асимптотически плоским волнам на минус бесконечности. Вообще говоря, такие моды можно найти не для любого внешнего тока, но в нашем случае $A_{\mu}^{cl}(t)$ ведет себя как константа на минус бесконечности, поэтому такое решение найти можно.

Требование на моды

Однако, этих требований недостаточно. От мод нужно требовать условие адамаровости. Условие адамаровости состоит в том, чтобы моды в пределе $|\boldsymbol{p}| \to \infty$ превращались в обычную плоскую волну:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(t) \sim e^{-i|\boldsymbol{p}|t} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}. \tag{27}$$

Такое ограничение требуется для корректного поведения пропогаторов в ультрафиолетовом пределе, что необходимо для независимости лидирующего порядка ультрафиолетовых перенормировок от внешнего поля.

Решение уравнения Дирака

Имея в виду всё вышесказанное, будем решать уравнение (26).
В данном уравнение удобно сделать замену $x = e^{\frac{2t}{T}}$ и ввести набор обозначений:

$$\begin{cases} p_\perp^2 = p_1^2 + p_2^2 \\ P_3(t) = p_3 + eET \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \\ P_{3+} = p_3 + eET; \quad P_{3-} = p_3 - eET \\ w_+ = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m^2 + (p_3 + eET)^2} \\ w_- = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m^2 + (p_3 - eET)^2} \\ \theta = eET^2; \quad \delta = 1 - iw_- T \\ \beta_- = i\theta - \frac{iT}{2}(w_- + w_+); \quad \gamma_- = i\theta - \frac{iT}{2}(w_- - w_+) \\ \beta_+ = -i\theta - \frac{iT}{2}(w_- + w_+); \quad \gamma_+ = -i\theta - \frac{iT}{2}(w_- - w_+) \\ \bar{\beta}_- = i\theta + \frac{iT}{2}(w_- - w_+); \quad \bar{\gamma}_- = i\theta + \frac{iT}{2}(w_- + w_+) \\ \bar{\beta}_+ = -i\theta + \frac{iT}{2}(w_- - w_+); \quad \bar{\gamma}_+ = -i\theta + \frac{iT}{2}(w_- + w_+) \end{cases} \tag{28}$$

Регшение уравнения Дирака

Общее решение уравнений (26):

$$F_{\boldsymbol{p}}^{+}(t) = C_1 e^{iw_- t}(1+e^{2\frac{t}{T}})^{-i\theta}\,{}_1F_2\left(\beta_+,\gamma_+,\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right)+$$
$$+\ C_2 e^{-iw_- t}(1+e^{2\frac{t}{T}})^{-i\theta}\,{}_1F_2\left(\bar{\beta}_+,\bar{\gamma}_+,2-\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right), \tag{29}$$

$$F_{\boldsymbol{p}}^{-}(t) = \bar{C}_1 e^{iw_- t}(1+e^{2\frac{t}{T}})^{i\theta}\,{}_1F_2\left(\beta_-,\gamma_-,\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right)+$$
$$+\ \bar{C}_2 e^{-iw_- t}(1+e^{2\frac{t}{T}})^{i\theta}\,{}_1F_2\left(\bar{\beta}_-,\bar{\gamma}_-,2-\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right). \tag{30}$$

С учётом вышеизложенных требований получаем следующие моды:

$$\begin{cases} F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t) = e^{-iw_- t}(1+e^{2\frac{t}{T}})^{-i\theta}\,{}_1F_2\left(\bar{\beta}_+,\bar{\gamma}_+,2-\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right) \\ F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t) = e^{iw_- t}(1+e^{2\frac{t}{T}})^{i\theta}\,{}_1F_2\left(\beta_-,\gamma_-,\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right). \end{cases} \tag{31}$$

Решение уравнения Дирака

И после обратных подстановок (25), (23) и (21), имеем:

$$\psi^{+}_{\boldsymbol{p},1}(t) = A^{+}\begin{pmatrix} i\partial_t - \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) - m\right) \\ -p_1 - ip_2 \\ -i\partial_t + \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) + m\right) \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t), \tag{32}$$

$$\psi^{+}_{\boldsymbol{p},2}(t) = A^{+}\begin{pmatrix} p_1 - ip_2 \\ i\partial_t - \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) - m\right) \\ p_1 - ip_2 \\ i\partial_t - \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) + m\right) \end{pmatrix} F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t), \tag{33}$$

$$\psi^{-}_{\boldsymbol{p},1}(t) = A^{-}\begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ i\partial_t + \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) + m\right) \\ p_1 - ip_2 \\ -i\partial_t - \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) - m\right) \end{pmatrix} F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t), \tag{34}$$

Решение уравнения Дирака

$$\psi^{-}_{\boldsymbol{p},2}(t) = A^{-}\begin{pmatrix} i\partial_t + \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) + m\right) \\ p_1 + ip_2 \\ i\partial_t + \left(p_3 + eET\tanh\left(\frac{t}{T}\right) - m\right) \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix} F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t). \tag{35}$$

Можно также записать условия нормировки полученных решений $\left(\psi^{\pm}_{\boldsymbol{p},s}(t)\right)^{T}\psi^{\pm}_{\boldsymbol{p},s}(t) = 1$:

$$2\Big(|\partial_t F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t)|^2 + \left(p_\perp^2 + P_3^2(t) + m^2\right)|F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t)|^2 + \\ + \; iP_3(t)\left(\partial_t F^{+*}_{\boldsymbol{p},-}(t)F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t) - \partial_t F^{+}_{\boldsymbol{p},-}(t)F^{+*}_{\boldsymbol{p},-}(t)\right)\Big) = \frac{1}{|A^{+}|^2}, \tag{36}$$

Решение уравнения Дирака

$$2\Big(|\partial_t F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t)|^2 + \left(p_\perp^2 + P_3^2(t) + m^2\right) |F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t)|^2 - \\ - iP_3(t) \left(\partial_t F^{-*}_{\boldsymbol{p},+}(t) F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t) - \partial_t F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t) F^{-*}_{\boldsymbol{p},+}(t)\right) \Big) = \frac{1}{|A^-|^2}. \tag{37}$$

С помощью первого уравнения на моды [знак плюс в (26)], можно показать, что A^+ не зависит от времени, а с помощью второго уравнения на моды [знак минус в (26)], можно показать, что A^- не зависит от времени. На самом деле, тот факт, что нормировка дираковских спиноров не зависит от времени, справедлив для произвольного пульса $A_3(t)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 f_{\boldsymbol{p}}(t) + \left(\omega^2_{\boldsymbol{p}}(t) + ie\partial_t A_3(t)\right) f_{\boldsymbol{p}}(t) = 0 \\ |\partial_t f_{\boldsymbol{p}}(t)|^2 + \omega^2_{\boldsymbol{p}}(t) |f_{\boldsymbol{p}}(t)|^2 + i\bar{P}_3(t) \left(\partial_t f^*_{\boldsymbol{p}}(t) f_{\boldsymbol{p}}(t) - \partial_t f_{\boldsymbol{p}}(t) f^*_{\boldsymbol{p}}(t)\right) = \frac{1}{C(t)} \\ \omega^2_{\boldsymbol{p}}(t) = p_\perp^2 + m^2 + \bar{P}_3(t), \quad \bar{P}_3(t) = p_3 + eA_3(t), \end{cases} \tag{38}$$

следовательно, $C(t)$ есть константа, то есть она не зависит от времени.

Квантование фермионного поля

Стандартным образом квантуем фермионное поле:

$$\Psi_a(x,t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[a_{\boldsymbol{p},s} \psi^{+}_{\boldsymbol{p},s,a}(t) e^{i\boldsymbol{px}} + b^{\dagger}_{\boldsymbol{p},s} \psi^{-}_{-\boldsymbol{p},s,a}(t) e^{-i\boldsymbol{px}} \right]. \tag{39}$$

Заметим, что данное квантование согласуется с тем, как мы выбрали моды: при больших импульсах мы получим комбинацию двух адамаровых плоских волн. Требуем:

$$\left\{ a_{\boldsymbol{p},s}, a^{\dagger}_{\boldsymbol{k},r} \right\} = \left\{ b_{\boldsymbol{p},s}, b^{\dagger}_{\boldsymbol{k},r} \right\} = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}) \delta_{s,r}, \tag{40}$$

$$\left\{ a_{\boldsymbol{p},s}, a_{\boldsymbol{k},r} \right\} = \left\{ b_{\boldsymbol{p},s}, b_{\boldsymbol{k},r} \right\} = \left\{ a_{\boldsymbol{p},s}, b_{\boldsymbol{k},r} \right\} = \left\{ a_{\boldsymbol{p},s}, b^{\dagger}_{\boldsymbol{k},r} \right\} = 0. \tag{41}$$

Из этого требования должно следовать, что:

$$\left\{ \Psi_a(x,t), \Psi^{\dagger}_b(y,t) \right\} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \delta_{a,b}. \tag{42}$$

Квантование фермионного поля

Через моды антикоммутатор записывается следующим образом:

$$\left\{\Psi_a(x,t),\Psi_b^\dagger(y,t)\right\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\left[\psi^+_{\boldsymbol{p},s,a}(t)\psi^{+,*}_{\boldsymbol{p},s,b}(t)+\psi^-_{\boldsymbol{p},s,a}(t)\psi^{-,*}_{\boldsymbol{p},s,b}(t)\right]e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}. \tag{43}$$

При правильном квантовании антикоммутатор (43) полей $\Psi_a(x,t)$ не должен зависеть от времени. Для того чтобы в этом убедиться, нужно следующие шаги. Полезно заметить,что для решений (31) выполняется $F^{-,*}_{\boldsymbol{p},+}(t) = F^+_{\boldsymbol{p},-}(t)$. После этого из соотношений (32), (33), (34) и (35) можно пронаблюдать связь $\psi^+_{\boldsymbol{p}}(t)$ и $\psi^-_{\boldsymbol{p}}(t)$:

$$\psi^-_{\boldsymbol{p},s}(t) = -i\gamma_0\gamma_2\left(\psi^+_{\boldsymbol{p},s}(t)\right)^* . \tag{44}$$

Полученное соотношение, на самом деле, есть симметрия уравнения Дирака (19) в импульсном представлении, поэтому оно снова верно для любой формы внешнего пульса. Рассуждения выше подтверждают правильность наших расчётов.

Квантование фермионного поля

Теперь, используя импульсную форму уравнение Дирака (19) и полученную связь (44), можно в общем виде, без использования явного вида решений, покомпонентно проверить тождество:

$$i\gamma^0\partial_t\left(\sum_{s=1}^{2}\left[\psi^{+}_{\boldsymbol{p},s,a}(t)\psi^{+,*}_{\boldsymbol{p},s,b}(t)+\psi^{-}_{\boldsymbol{p},s,a}(t)\psi^{-,*}_{\boldsymbol{p},s,b}(t)\right]\right)=0. \tag{45}$$

Дополнительная численная проверка подтверждает, что моды действительно удовлетворяют таким коммутационным соотношениям и их антикоммутатор не зависит от времени.

Константа нормировки находится очень просто, если подставить $t=-\infty$:

$$A=\frac{1}{\sqrt{2p_\perp^2+\left(m+P_{3-}-\sqrt{m^2+p_\perp^2+P_{3-}^2}\right)^2+\left(m-P_{3-}+\sqrt{m^2+p_\perp^2+P_{3-}^2}\right)^2}}. \tag{46}$$

Классический ток

В силу симметрии сразу ясно, что ненулевой может быть только третья компонента тока:

$$\left\langle J^3\right\rangle_{tree} \equiv \left\langle\bar{\Psi}\gamma^3\Psi\right\rangle_{tree} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\psi^{-,\dagger}_{\boldsymbol{p},s}(t)\gamma^0\gamma^3\psi^{-}_{\boldsymbol{p},s}(t) = \tag{47}$$

$$= 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(1-4|A|^2\left(m^2+p_1^2+p_2^2\right)|F^{-}_{\boldsymbol{p},+}(t)|^2\right) =$$

$$= 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(1-4|A|^2\left(m^2+p_\perp^2\right)\left|{}_1F_2\left(\beta_-,\gamma_-,\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right)\right|^2\right) = \tag{48}$$

$$= 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(1-4|A|^2\left(m^2+p_\perp^2\right){}_1F_2\left(\beta_-,\gamma_-,\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right){}_1F_2\left(\bar{\beta}_+,\bar{\gamma}_+,2-\delta,-e^{2\frac{t}{T}}\right)\right). \tag{49}$$

Ток при $t \to -\infty$

Формулы (48) и (49) дают точные выражения для тока в произвольный момент времени. Теперь можно посмотреть выражение для тока в случае, когда $t = -\infty$:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=-\infty} = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-P_{3-}}{\sqrt{m^2 + p_\perp^2 + P_{3-}^2}} = 0. \tag{50}$$

Как и ожидалось, выбранные ранее моды действительно in-моды. Важно отметить, что сходимость этого интеграла и некоторых других интегралов в дальнейших вычислениях нужно понимать как сходимость в смысле главного значения.

Ток при $t \to +\infty$

Воспользовавшись свойством гипергеометрической функции, можно получить выражение для тока при $t = +\infty$:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=+\infty} = 2\int \frac{p_\perp dp_\perp dp_3}{(2\pi)^2} \Bigg(1 - (m^2 + p_\perp^2)\times$$
$$\times \frac{w_- \left(-w_+ + P_{3+}\left(\coth(\pi T w_-)\coth(\pi T w_+) - \cosh(2\pi E e T^2)\frac{1}{\sinh(\pi T w_-)\sinh(\pi T w_+)}\right)\right)}{w_+(P_{3-} - w_-)(m^2 + p_\perp^2 + P_{3-}(P_{3-} - w_-))} \Bigg). \tag{51}$$

Непосредственная проверка показывает, что данный интеграл сходится. В пределе

$$eET^2 \gg 1, \quad eET \gg m \tag{52}$$

данный интеграл можно посчитать:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=+\infty} \approx \boxed{\frac{(eE)^2 T}{2\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right)} \tag{53}$$

Заключение

В заключение сравним результаты, один из которых получен при помощи подхода Швингера (9), а второй при вычислении тока (53). Первый результат мы получали для внешнего поля (2), но при вычислениях мы делали обрезание при интегрировании по импульсу p_3 на область $|p_3| < eET$, что соответствует обрезанию поля на временах $t < -T$ и $t > T$. Такое обрезанное поле эквивалентно пульсу (8).
Ответ (9) для γ есть плотность рождающихся ферми-частиц в единицу времени. По определению, ток есть произведение скорости на плотность: $\boldsymbol{J} = n\boldsymbol{v}$. Поэтому, если умножить плотность рождающихся ферми-частиц в единицу времени γ на время действия пульса и на скорость, которая в планковской системе единиц безразмерная величина, получаем:

$$\langle J^3 \rangle_{tree}^{t=-\infty} = T\gamma. \tag{54}$$

Видим, что результат древесного вычисления тока и результат вычисления матричного элемента $\langle \text{in}|\text{out}\rangle$ дают согласованные результаты.

Заключение

Спасибо за внимание!