

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт передовых производственных технологий

Работа допущена к защите

Руководитель ОП

_____ О.В. Антонова

« ____ » _____ 2019 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС ЖИДКОСТИ
ПЛАСТИНЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

по направлению 15.04.03 Прикладная механика
15.04.03_07 Компьютерный инжиниринг и цифровое производство

Выполнил
студент гр.24341/1

Д.И. Морозов

Руководитель
доцент, к.т.н.

А.И. Боровков

Соруководитель:

А.А. Михайлов

Санкт-Петербург
2019

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОП

О.В. Антонова

« » _____ 2019 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту

Морозову Даниилу Игоревичу, 24341/1

фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Определение присоединенных масс жидкости пластины, совершающей вынужденные колебания
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2019
3. Исходные данные по работе:
 - 1) Теоретические выкладки для изучения взаимодействия пластины с внешней средой;
 - 2) Подбор конечно-элементной модели для решения задачи о колебаниях пластины, оптимальной с точки зрения затрачиваемого на расчет времени и точности результатов;
 - 3) Рассмотрение конечно-элементной модели с моделированием пограничного слоя и ее сравнение с предыдущими моделями;
 - 4) Решение серии задач FSI с целью построения АЧХ колебаний; определение оценки присоединенной массы пластины при ее колебаниях в воде; гармонический анализ колебаний пластины с учетом добавления присоединенной массы воды.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
 - 1) Подборка оптимальной модели для решения задачи FSI;
 - 2) Поиск присоединенных масс с помощью решения серии FSI задач;
 - 3) Проведение гармонического анализа с учетом добавления присоединенных масс;
 - 4) Построение АЧХ путем решения серии задач FSI;
 - 5) Построение АЧХ по результатам гармонического анализа;
 - 6) Сравнение полученных результатов в ходе проведения АЧХ для получения вывода о возможности использования гармонического анализа для исследования напряженно-деформированного состояния пластины при ее колебаниях в воде.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей):

Упругая пластина на поверхности жидкости, вделанная в экран; размеры пространства жидкости; КЭ модель жидкого объема. Размер элемента 10 см.; Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX-Fluent); Скорость потока вдоль оси X (ANSYS CFX-Fluent); Скорость потока вдоль оси y (ANSYS CFX-Fluent); Перемещения верхнего края пластины вдоль оси X; КЭ модель жидкого объема. Размер элемента 5 см.; Пограничный слой; Расчетная модель с пограничным слоем; Пограничный слой между жидкостью и пластиной; Расчетная модель с пограничным слоем; Пограничный слой между жидкостью и дном сосуда; Характеристика численных моделей; Тонкая пластина, заделанная на дне контейнера; Результат статистического анализа пластины; АЧХ

колебаний пластины в воде под действием периодической нагрузки; Сравнение АЧХ, полученной в результате гармонического анализа, и АЧХ, полученной путем решения серии задач FSI.

6. Консультанты по работе: - _____

7. Дата выдачи задания _____

Руководитель ВКР _____ А.И. Боровков
(подпись) инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению 21.02.2019
(дата)

Студент _____ Д.И. Морозов
(подпись) инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

Название работы: Определение присоединенных масс жидкости пластины, совершающей вынужденные колебания

Воздействие жидкости на механическую конструкцию в некоторых случаях может привести к катастрофическим последствиям, таким как разрушение модели. Во избежание таких случаев требуется улучшенное моделирование взаимодействия жидкости и конструкции, которое помогает обеспечить безопасность конструкции на каждой ступени численного моделирования. В данной работе представлено исследование взаимодействия тонкой пластины с жидкостью. Предполагается, что пластина находится в ограниченном водном пространстве и совершает вынужденные колебания. Таким образом, необходимо вычислить значение присоединенных масс жидкости. Задача решается методом FSI, так как аналитическое решение для такой постановки задачи представить довольно сложно. Получив оценку присоединенных масс жидкости, проводится гармонический анализ колебаний пластины с учетом добавления присоединенной массы жидкости. Результаты гармонического анализа сравниваются с серией задач FSI. Для того чтобы удостовериться в корректности метода решения данной задачи, приведено решение модельной задачи о взаимодействии пластинки, закрепленной на дне контейнера с жидкостью и совершающей колебания под приложенной нагрузкой. Данная модельная задача имеет соответствующее решение.

Общее количество страниц: 72

Количество рисунков: 83

Количество литературных источников: 12

Ключевые слова: колебания пластин, собственные частоты и формы колебаний, FSI, МКЭ, присоединенная масса жидкости, гармонический анализ, уравнение Лапласа.

ESSAY

Work name: Determination of the added masses of the liquid plate, making the forced oscillations

Exposure of a fluid to a mechanical structure in some cases can lead to catastrophic consequences, such as the destruction of a model. In order to avoid such cases, improved modeling of the interaction between the fluid and the structure is required, which helps to ensure the safety of the structure at each stage of numerical simulation. This work presents a study of the interaction of a thin plate with a liquid. It is assumed that the plate is in a limited water space and makes forced oscillations. Thus, it is necessary to calculate the value of the added fluid masses. The problem is solved by the FSI method, since it is rather difficult to imagine an analytical solution for such a problem statement. Having obtained an estimate of the added masses of the fluid, a harmonic analysis of the plate oscillations is carried out taking into account the addition of the added fluid mass. The results of harmonic analysis are compared with a series of FSI problems. In order to verify the correctness of the method for solving this problem, a solution is given to a model problem of the interaction of a plate fixed at the bottom of a container with a liquid and oscillating under an applied load. This model problem has an appropriate solution.

Total pages: 72

Number of drawings: 83

Number of references: 12

Keywords: plate oscillations, natural frequencies and vibration modes, FSI, FEM, added fluid mass, harmonic analysis, Laplace equation.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПЕРВАЯ ЧАСТЬ. ВИБРАЦИИ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ПОТОК ЖИДКОСТИ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	4
1.1 Аналитическое определение присоединенных масс.....	4
1.1.1 Моделирование потока жидкости.....	5
1.1.2 Описание движения границы жидкости и конструкции	6
1.1.3 Модальное разложение реакции жидкости	6
1.1.4 Подходы к определению присоединенной массы жидкости ...	6
1.2 Решение связанной задачи о колебаниях пластины в жидкой среде	9
1.3 Решение задачи о колебаниях пластины в жидкости с использованием моделирования пограничного слоя между пластиной и жидкостью	33
ВТОРАЯ ЧАСТЬ. ВИБРАЦИИ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ НАГРУЗОК.....	53
2.1 Колебания стальной пластины в воде при импульсным воздействием	53
2.2 Вынужденные колебания стальной пластины в воде под действием периодической нагрузки.....	61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	68
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	70

ВВЕДЕНИЕ

Большая масса колебательной системы может служить причиной возникновения вибраций инженерных конструкций, что в свою очередь может привести к необратимым последствиям. В свою очередь большие колебания конструкции возбуждают поток жидкости, окружающий конструкцию, таким образом, что данное взаимодействие носит разрушающий характер для инженерных сооружений. Взаимодействие между потоком жидкости и конструкциями стало особенно важным в свете появления новых материалов, используемых для более легких конструкций, так как облегченные конструкции больше подвержены взаимодействиям с потоком жидкости, а, следовательно, более легкие конструкции лучше подвержены разрушению под действием потока жидкости. В целом конструкции чаще всего более чувствительны к динамическому возбуждению, тем не менее, общее поведение конструкции под влиянием возбуждения, вызванного потоком, сложно предсказать.

В гражданской инженерии большинство конструкций подвержены влиянию потоков воздуха и жидкости. Таким образом, общие гражданские сооружения должны соответствовать критериям безопасности, таким как статическое сопротивление и наличие безопасного спектра реакций на воздействия от дорожного транспорта, землетрясений и т.д. По причине большого числа разрушений конструкций, которые в определенное время считались инновационными, - были приняты во внимание аэроупругие эффекты при моделировании легковесных конструкций, сильнее подверженных потокам. Более того, аэроупругая безопасность и аэродинамический контроль становятся решающими факторами для всех конструкций. Как следствие, инженерам теперь необходимо соблюдать допустимые правила проектирования и оценки безопасности конструкций, подвергающихся вибрациям. Однако сложность большинства явлений взаимодействия жидкости и конструкции означает, что все еще очень трудно

определить надежные и точные оценки риска, которые будут применимы к широкому диапазону эксплуатационных состояний.

Отсутствие универсальной и простой модели взаимодействия жидкости и конструкции (далее FSI=fluid-structure interaction) побудило создать область экспериментального и численного исследования колебаний, вызванных потоком. Сегодня численное моделирование усиливает влияние в инженерии, так как обеспечивает важные локальную и глобальную оценку параметров, таких как напряжение и деформация. Данный инструмент позволяет инженерам увеличивать дальнейшее понимание физических механизмов связанной задачи взаимодействия жидкости и конструкции.

Целью данной работы является прямое численное моделирование задачи о пластине, погруженной в жидкость, совершающей вынужденные колебания под действием приложенной нагрузки. Необходимо исследовать механизм поведения данного взаимодействия и определить присоединенные массы жидкости. Знание присоединенных масс помогает оценить влияние жидкости. Решение задачи о вынужденных колебаниях плоской пластины в жидкости поможет нам перейти к исследованию взаимодействия реальных судов с водой.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ. ВИБРАЦИИ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ПОТОК ЖИДКОСТИ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1 Аналитическое определение присоединенных масс

Определение присоединенных масс состоит из нескольких важных шагов: определение модели используемой жидкости, описание движения конструкции и оценка сил жидкости, вызывающих это движение. Этап оценки включает в себя вычисление чувствительности сил жидкости к модам движения и деформации твердого тела из базовых уравнений модели жидкости. Это может быть достигнуто с помощью приближенных решений. Если применяемая модель жидкости и область течения не слишком сложны,

то присоединенные массы могут быть определены с помощью аналитических решений, которые представлены в справочнике Короткина (2009 г.) для судовых конструкций.

1.1.1 Моделирование потока жидкости

Для возможности проведения аналитического исследования предполагаем, что рассматриваемая жидкость является *невязкой*, *несжимаемой*, а также пренебрегаем *наличием вихрей* [11]. Уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{v}_F = 0$ и условие отсутствия вращения $\nabla \times \mathbf{v}_F = 0$, где \mathbf{v}_F – вектор скорости потока жидкости, позволяют ввести потенциал Φ , который обеспечивает соотношение $\mathbf{v}_F = \nabla \Phi$ и приводит к уравнению Лапласа [6] для потенциального потока на всем объеме жидкости, V

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1)$$

и к граничным условиям Неймана на поверхности раздела жидкости и конструкции, S

$$(\nabla \Phi - \dot{\mathbf{w}}_S) \cdot \mathbf{n}_S = 0, \quad (2)$$

где вектор нормали \mathbf{n}_S направлен наружу от области жидкости, а \mathbf{w}_S – вектор перемещения конструкции. Аналогично, определим условие непроницаемости вдоль внешней поверхности границы жидкости Σ

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0. \quad (3)$$

С помощью уравнения Бернулли для неустановившихся потоков в отсутствие объемных сил имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla \Phi\|_2^2 + \frac{p}{\rho_F} = 0, \quad (4)$$

давление жидкости может быть представлено как

$$p = -\rho_F \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_F \|\nabla \Phi\|_2^2, \quad (5)$$

где ρ_F – плотность жидкости. Здесь скорость на границе раздела жидкости и конструкции, S может изменяться из-за колебательного поведения конструкции, которое может быть представлено в качестве линейной комбинации движения как твердого тела и гибких мод [10, 12].

1.1.2 Описание движения границы жидкости и конструкции

Движение поверхности раздела жидкости и конструкции \mathbf{S} , которое является эквивалентом движению внешней поверхности конструкции, может быть представлено с помощью разложения перемещений в пространстве (поверхностная координата \mathbf{s}) и во времени t , используя базис линейных независимых мод деформаций [9, 12]

$$\mathbf{w}_S(\mathbf{s}, t) = \sum_k \mathbf{u}_k(\mathbf{s}) \cdot g_k(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{u}_k(\mathbf{s})$ – вектор координатных функций, а $\mathbf{g}_k(t)$ – соответствующий вектор обобщенных координат.

1.1.3 Модальное разложение реакции жидкости

Так как используемые уравнения для выбранной модели жидкости линейные, потенциал скоростей жидкости, связанный с каждой формой колебания внешней поверхности конструкции, может быть представлен с помощью суперпозиции [12]

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_k \Phi_k(x, y, z) \cdot g_k(t), \quad (7)$$

а уравнение Лапласа (1) решается теперь для переменных Φ_k со следующими граничными условиями

$$(\nabla \Phi_k - \mathbf{u}_k \mathbf{g}_k) \cdot \mathbf{n}_S = 0 \text{ на } S \text{ и } \nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (8)$$

1.1.4 Подходы к определению присоединенной массы жидкости

Рассматриваются три различных подхода по определению присоединенных масс жидкости в рамках модального разложения движения конструкции [12]:

- Прямая оценка результирующей силы жидкости $f_{F,k}$, действующей на k -ю моду колебаний конструкции, может быть получена интегрированием модальной проекции давления, действующего на внешнюю поверхность конструкции, т.е.

$$f_{F,k} = \int_S (\mathbf{u}_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{n}_S) p dS \quad (9)$$

$$= \int_S (\mathbf{u}_k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{n}_S) \rho_F \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \|\nabla \Phi\|_2^2 \right) dS \quad (10)$$

$$= \int_S (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) \rho_F \left(-\sum_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right) dS \quad (11)$$

$$= \int_S (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) \rho_F \left(-\sum_n \Phi_n \cdot \ddot{g}_n \right) dS \quad (12)$$

$$= \sum_n \left(-\rho_F \int_S (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) \Phi_n dS \right) \cdot \ddot{g}_n \quad (13)$$

$$= \sum_n \lambda_{m;kn} \cdot \ddot{g}_n. \quad (14)$$

Слагаемое, относящееся к кинетической энергии жидкости в уравнении (10) исчезает, так как интеграл по замкнутой поверхности от непрерывной подынтегральной функции равен нулю. Выражение в формуле (13) для модальной силы, вызванной потоком жидкости, есть функция обобщенного ускорения конструкции \ddot{g}_n для моды n . Финальный результат был получен введением коэффициента *присоединенных масс жидкости*

$$\lambda_{m;kn} = -\rho_F \int_S (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) \Phi_n dS \quad (15)$$

для k – й моды колебания конструкции в результате воздействия (ускорения жидкости), совершенного n – й моды. Коэффициент присоединенных масс является симметричным

$$\lambda_{m;kn} = \lambda_{m;nk}. \quad (16)$$

- С помощью функции работы давления на поверхности раздела жидкости и конструкции

$$W = \int_S (\mathbf{w}_S \cdot \mathbf{n}_S) p dS \quad (17)$$

$$= \int_S \left(\sum_k (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_S) g_k \right) \rho_F \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \|\nabla \Phi\|_2^2 \right) dS \quad (18)$$

$$= \int_S \left(\sum_k (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) g_k \right) \rho_F \left(-\sum_n \Phi_n \cdot \ddot{g}_n \right) dS, \quad (19)$$

компонента силы, соответствующая моде k , определяется как производная от функции работы по обобщенной координате k

$$f_{F,k}(g_1, g_2, \dots) = \frac{\partial W}{\partial g_k} = \sum_n \lambda_{m;kn} \cdot \ddot{g}_n. \quad (20)$$

Таким образом, использование коэффициента присоединенных масс позволяет напрямую определять взаимодействие и взаимосвязь между жидкостью и конструкцией с точки зрения вклада инерционной силы жидкости.

- Оценка кинетической энергии объема жидкости,

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho_F \|\mathbf{v}_F\|_2^2 dV = \frac{1}{2} \rho_F \int_V \|\nabla \Phi\|_2^2 dV, \quad (21)$$

вызванной определенной модой деформации конструкции устанавливает третий метод определения коэффициента присоединенных масс жидкости. Интегрирование по частям уравнения (21) приводит к следующему выражению

$$T = \frac{\rho_F}{2} \left[\int_V \Delta \Phi \Phi dV - \int_S (\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_S) \Phi dS - \int_\Sigma (\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_\Sigma) \Phi d\Sigma \right]. \quad (22)$$

Используя граничные условия, определенные в уравнении (8), и выполнение уравнения (1) следует, что

$$T = -\frac{1}{2} \rho_F \int_S (\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}_S) \Phi dS \quad (23)$$

$$= \frac{1}{2} \int_S -\rho_F (\sum_k (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) \dot{g}_k) (\sum_n \Phi_n \cdot \dot{g}_n) dS \quad (24)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \sum_n \dot{g}_k \cdot \lambda_{m;kn} \cdot \dot{g}_n, \quad (25)$$

где $\lambda_{m;kn} = -\rho_F \int_S (\nabla \Phi_k \cdot \mathbf{n}_S) \Phi_n dS$ – искомый коэффициент присоединенных масс жидкости.

1.2 Решение связанной задачи о колебаниях пластины в жидкой среде

Постановка задачи заключается в определении взаимодействия тонкой пластинки толщиной 0,06 м и высотой 1 м с жидкостью. Пластина жестко заделана на дне контейнера, который наполнен жидкостью. Геометрическая постановка задачи представлена на Рис. 2.

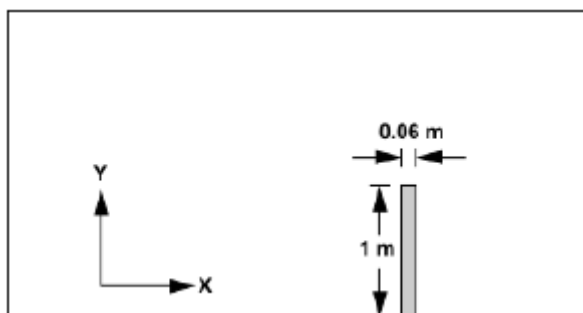


Рис. 2. Тонкая пластина, заделанная на дне контейнера

Начальное давление величиной 100 Па прикладывается на одну из сторон пластины и действует на неё в течение 0,5 секунд, для того чтобы деформировать пластину. Когда приложенное давление прекращает свое действие, пластина начинает колебаться вперед и назад в попытках достичь состояния вертикального равновесия при этом, вовлекая в движение жидкость. Окружающая жидкость демпфирует колебания пластины, тем самым уменьшая со временем амплитуду колебаний. Таким образом, происходит совместный процесс влияния конструкции на жидкость и жидкости на конструкцию.

Данная задача рассматривается в качестве примера, для того чтобы удостовериться, что метод решения связанных задач – FSI (Fluid Structure Interaction) работает для простых постановок задач. Отталкиваясь от результатов данной задачи, планируется её усложнение до задачи, которая является темой данной работы.

В корректности метода FSI будем убеждаться, решая представленную задачу методом конечных элементов в двух расчетных программах, а именно: **ANSYS CFX** и **ANSYS Fluent**.

Механизм решения задач методом FSI

Существуют три режима моделирования задач FSI:

- Rigid Body FSI (предполагается отсутствие деформаций твердых тел, рассматриваются только движения твердых тел в жидкости, анализ может быть осуществлен в одиночку в CFD)
- 1-way FSI – односторонняя связь, когда рассматриваются очень малые деформации конструкции, поток и температурные поля вычисляются и передаются из CFD в качестве нагрузок для анализа НДС
- 2-way FSI – двухсторонняя связь, когда рассматриваются большие деформации конструкции, поток и температурные поля вычисляются и передаются из CFD в качестве нагрузок для анализа НДС, а полученные перемещения, передаются обратно в CFD для обновления положения твердого тела при вычислении потока жидкости. Данный подход является итерационным для определения положения равновесия тела в потоке жидкости.

При данной задаче используется 2-way FSI метод, т.е. решается связанная задача между колебаниями пластины и образующимся потоком жидкости. Решатель CFX вычисляет, как жидкость реагирует на движение пластины, а решатель ANSYS Mechanical рассчитывает, как пластина деформируется в результате, как начального приложенного давления, так и давления, вызванного присутствием жидкости. Таким образом, решатель CFX передает усилия в решатель ANSYS Mechanical на границе пересечения пластины и жидкости, и получает величины смещения сетки из решателя ANSYS Mechanical под действием сил от CFX или других нагрузок.

Для данной задачи вводится предположение о том, что колебания пластины создают ламинарный поток жидкости, охватывающий пластину.

Таким образом, скорости потока жидкости, образующиеся при колебаниях пластины, имеют малые значения, и числа Рейнолдса, вычисленные по формуле

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu},$$

где ρ – плотность жидкости,

v – скорость потока,

L – характерный размер объекта,

μ – динамический коэффициент вязкости,

не превышают величину $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$.

Движение жидкости описывается системой дифференциальных уравнений Навье – Стокса (59) [6], а колебания пластины, расположенной в плоскости XU - уравнением изгибных колебаний пластины (60) [8,10]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (59)$$

где p – давление жидкости,

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (60)$$

где $w(x, y, t)$ – прогиб пластины,

D – ее изгибная жесткость,

m – погонная масса (масса пластины на единицу площади),

$q(x, y, t)$ – интенсивность нормальной нагрузки.

Уравнения Навье – Стокса хорошо моделируют движение жидкости в сплошной среде. Как говорилось выше, решаемая задача является ламинарной. Решение задач ламинарного течения жидкости проще получить численно, чем экспериментально.

При расчете пластин обычно принимают следующие допущения [4]:

- 1) изгибные деформации пластин при колебаниях малы по сравнению с её толщиной, упругие деформации подчиняются закону Гука;
- 2) пластина имеет постоянную толщину;
- 3) в пластине имеется нейтральный слой, который при изгибных колебаниях пластины не подвержен деформациям растяжения - сжатия;
- 4) материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный.

Ламинарным движением жидкости будем называть упорядоченное течение жидкости или газа, при котором частицы следуют по траекториям, представляющим собой плавные кривые, определяемые видом поверхностей, ограничивающих течение. При ламинарном течении отсутствуют пульсации величин и перемешивание жидкости [11].

Геометрия пластины и окружающего её объема жидкости представлены на Рис. 3 и 4.

Механические характеристики материала пластины:

- модуль упругости, $E = 2,5$ МПа;
- плотность, $\rho = 2550$ кг/м³;
- коэффициент Пуассона, $\nu = 0,35$.

Свойства жидкости подобраны таким образом, чтобы пластина совершала колебания с разумной величиной амплитуды, которые не затухают слишком быстро под воздействием жидкости.

Свойства жидкости:

- плотность, $\rho = 2550$ кг/м³;
- коэффициент динамической вязкости, $\mu = 0,2$ Па · с.

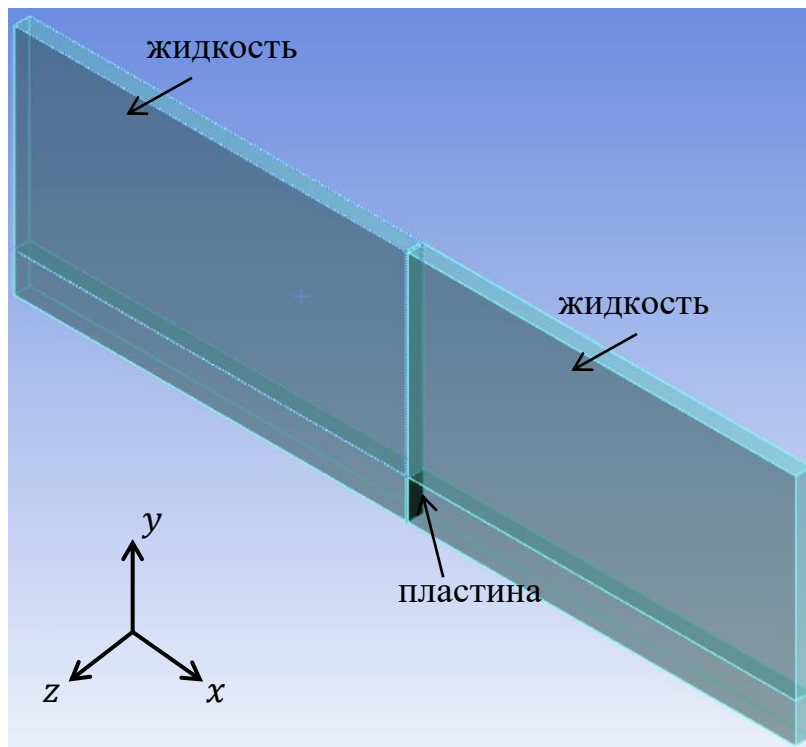


Рис.3. Геометрия пластины и жидкого объема



Рис.4. Геометрия пластины и жидкого объема

На Рис. 5 представлены размеры окружающего пластину пространства жидкости.

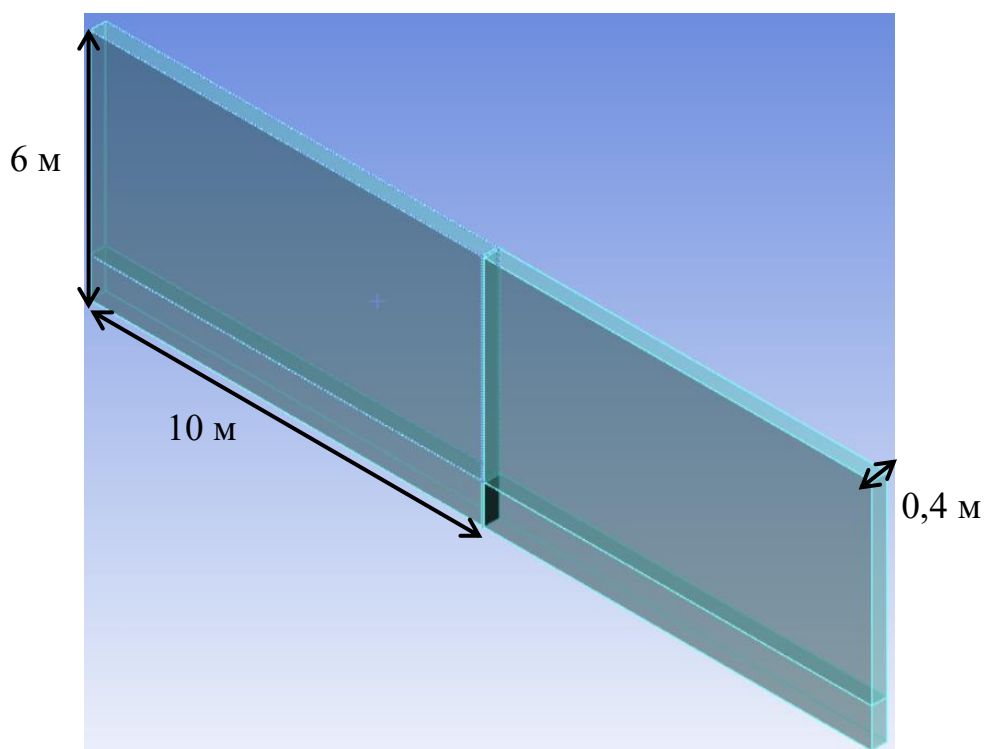


Рис. 5. Размеры пространства жидкости

Как видно из Рис. 3 - 5 расчетная модель состоит из двух областей, а именно: из пластины и окружающей жидкости, поэтому расчетная область включает в себя как пластину, так и объем жидкости вокруг. На практике CFD анализ ресурсоемкий и требует больших вычислительных мощностей, поэтому подберем размер конечного объема жидкого пространства, таким образом, чтобы добиться баланса между точностью и затраченным временем на вычисления.

Размер конечного элемента пластины выберем равным 2 см. Соответствуя размерам пластины, выбор данного размера конечного элемента достаточен для точного описания взаимодействия пластины и жидкости. Конечно – элементная модель пластины представлена на Рис. 6.

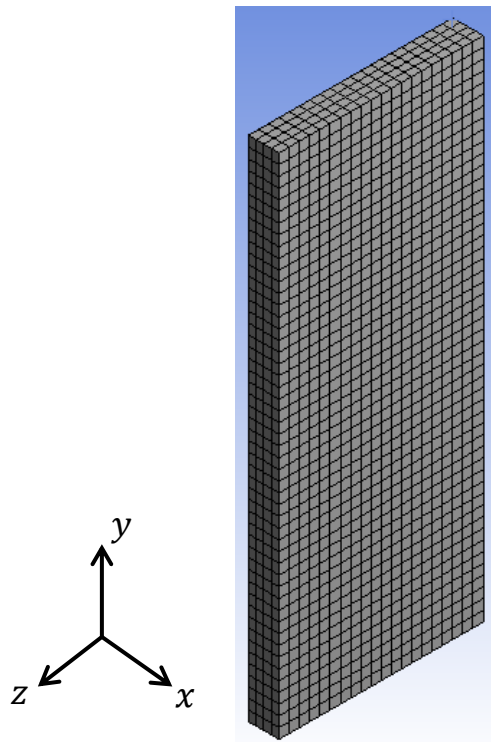


Рис. 6. Конечно – элементная модель пластины

В данном случае будем варьировать размер конечного объема сетки жидкой среды, который окружает пластину, так как нас интересует взаимодействие пластины и жидкости. Размер конечного объема жидкости выберем равным 10 см и 5 см.

- **размер КЭ равный 10 см**

Конечно – элементная модель для данного размера сетки жидкого пространства представлена на Рис. 7 и 8.

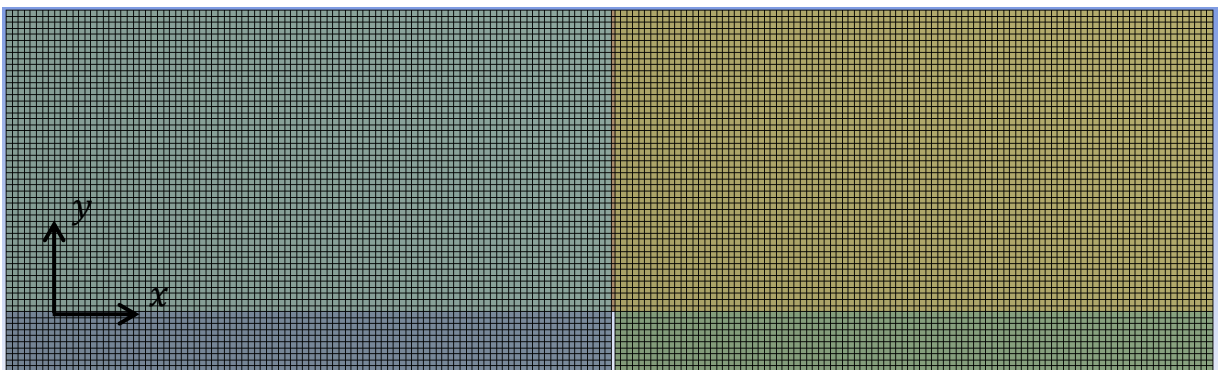


Рис. 7. КЭ модель жидкого объема. Размер элемента 10 см

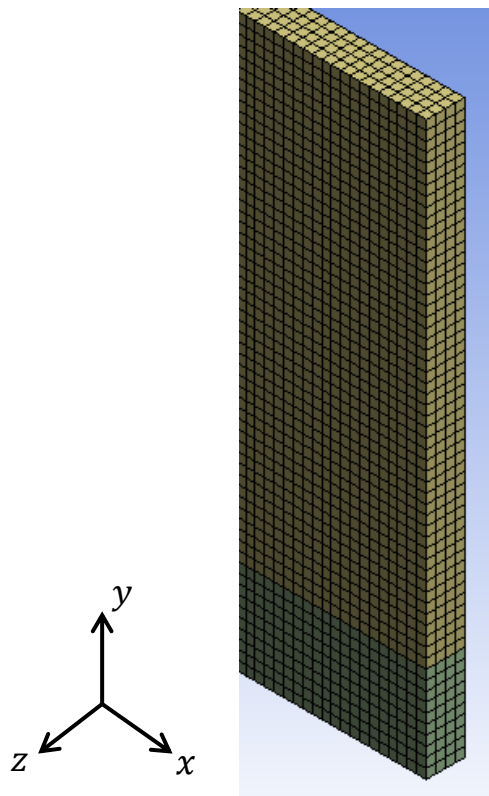


Рис. 8. Часть КЭ модели жидкого объема. Размер элемента 10 см

Как говорилось выше, данная задача решается в двух расчетных программах ANSYS CFX и ANSYS Fluent.

Так как расчет длится 10 секунд, т.е. осуществляется нестационарный временной анализ, необходимо выбрать момент времени, в который необходимо снять результаты. Выберем данный момент времени равный 6 секунд, предполагая, что за это время жидкость успевает разогнаться вместе с пластиной. На Рис. 9 – 20 представлены результаты распределений поля скорости потока и компонент скоростей потока вдоль осей x и y . Очевидно, что скорость потока вдоль оси z равна нулю, поэтому данное распределение нас не интересует. Для двух расчетных программ сравниваются именно распределения скоростей потока вдоль осей x и y , так как в дальнейшем с помощью данных распределений планируется определять присоединенные массы жидкости, образованные при движениях пластины.

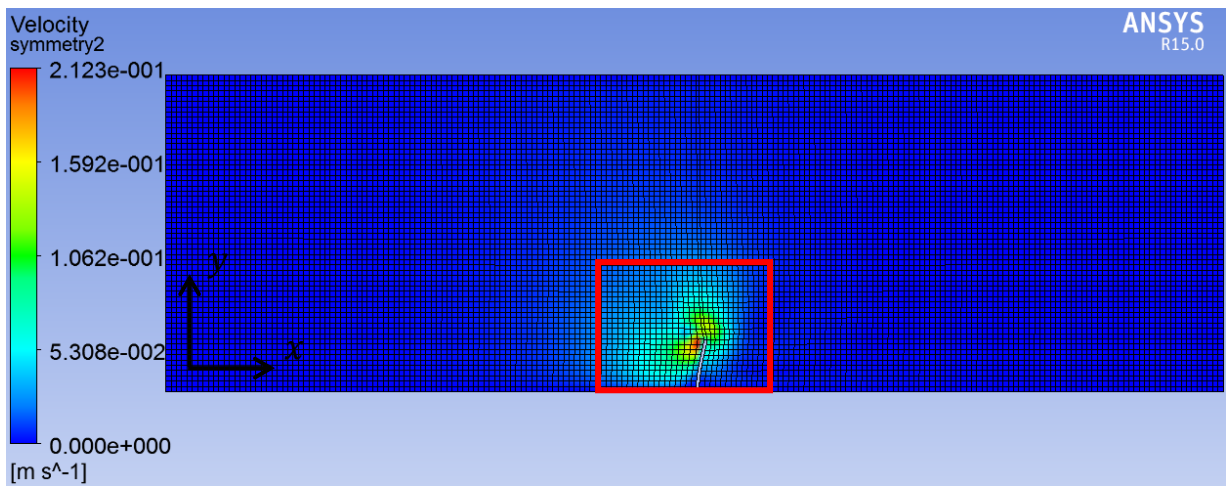


Рис.9. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

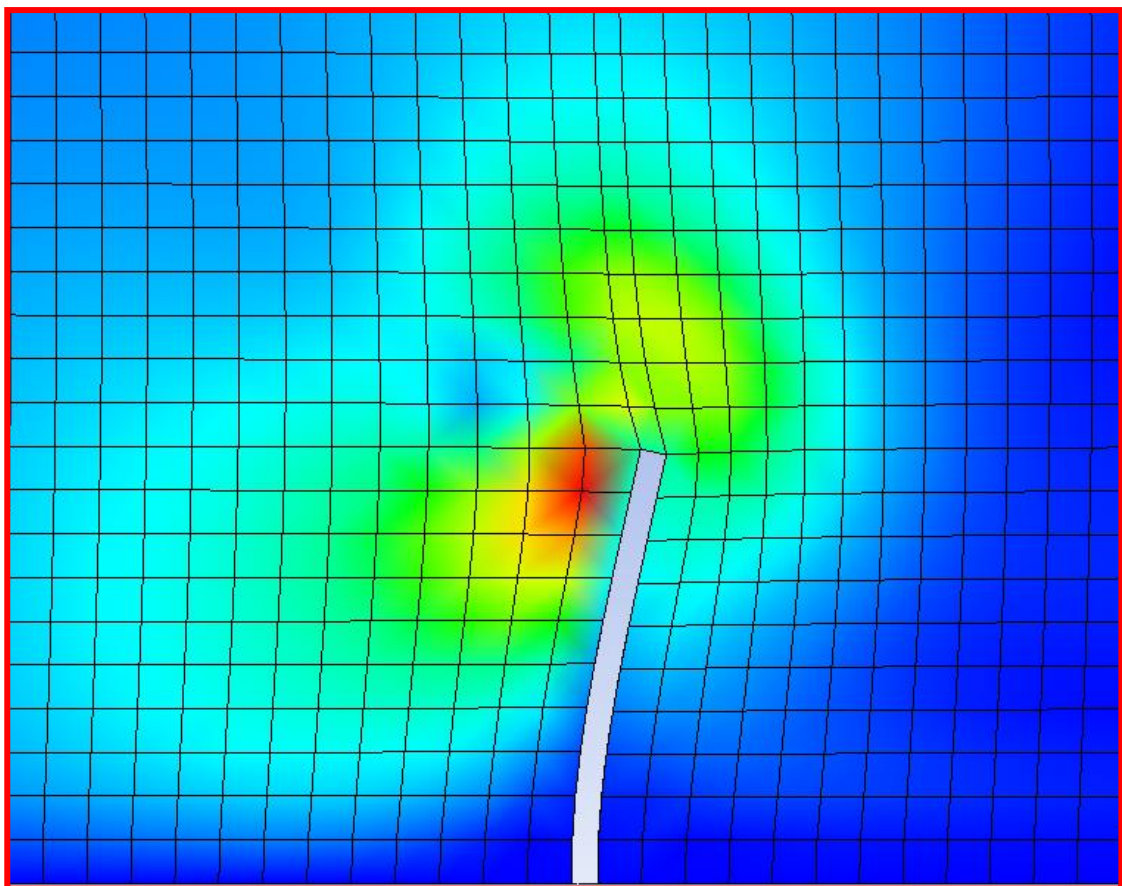


Рис.10. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

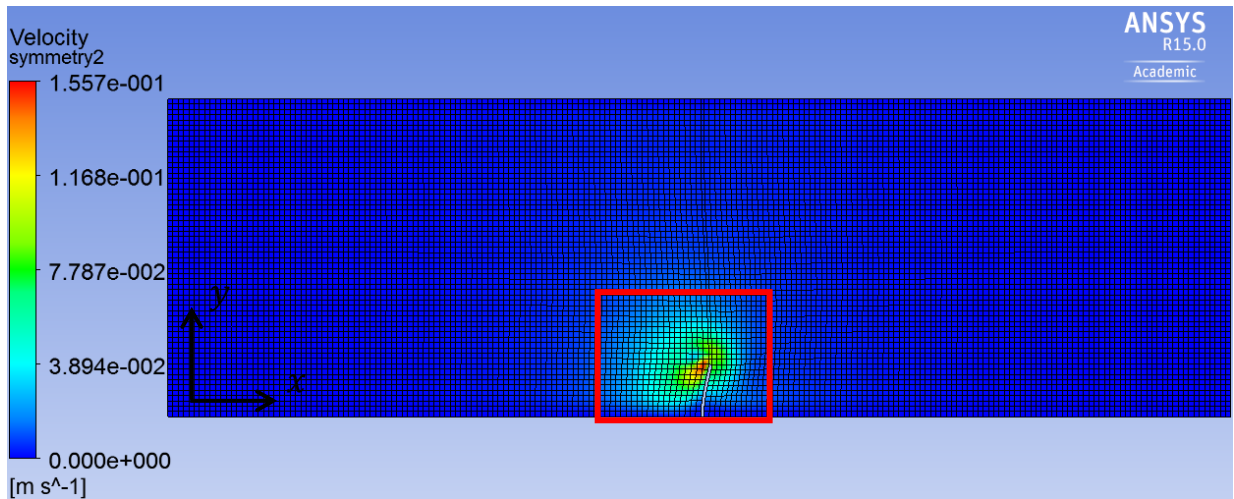


Рис.11. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

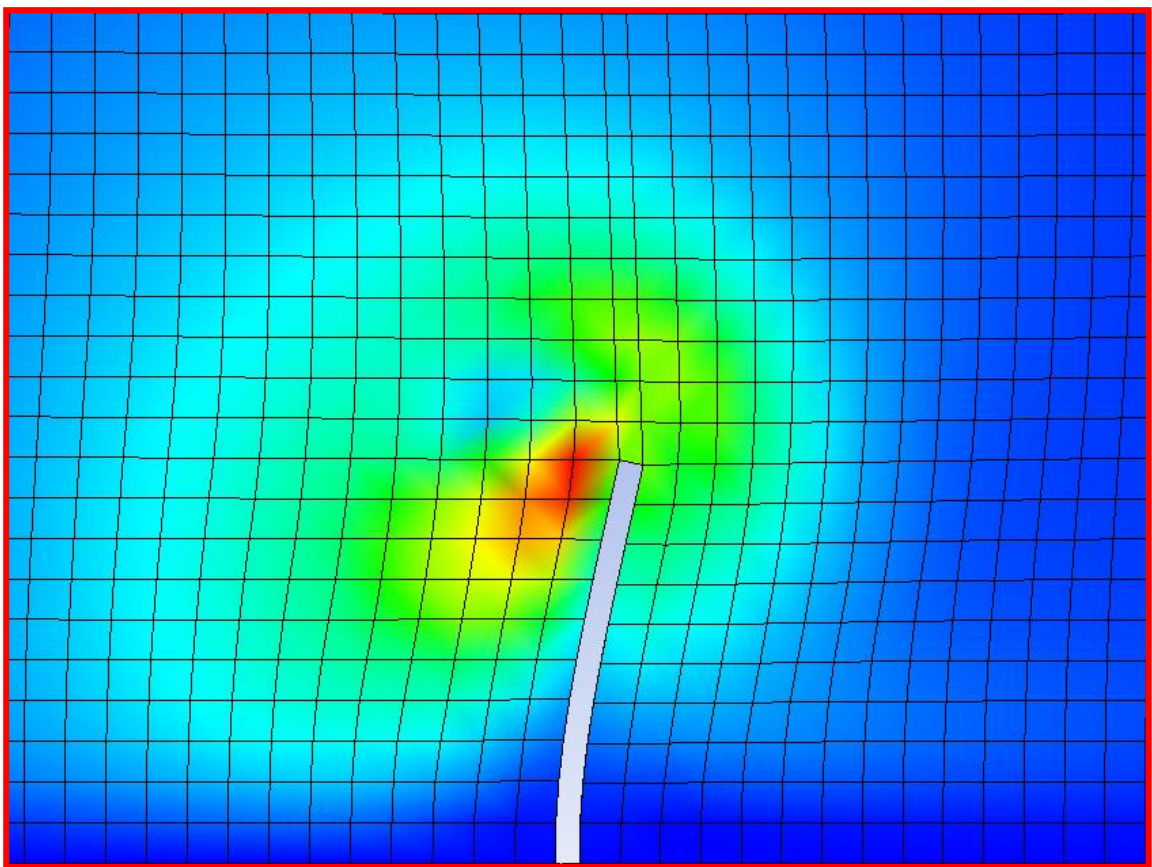


Рис.12. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

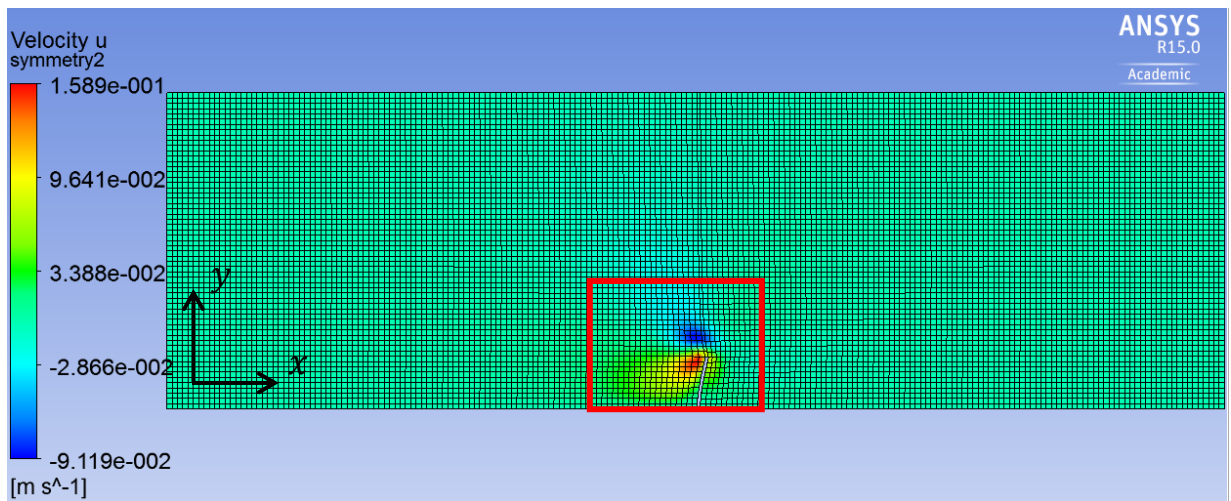


Рис.13. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

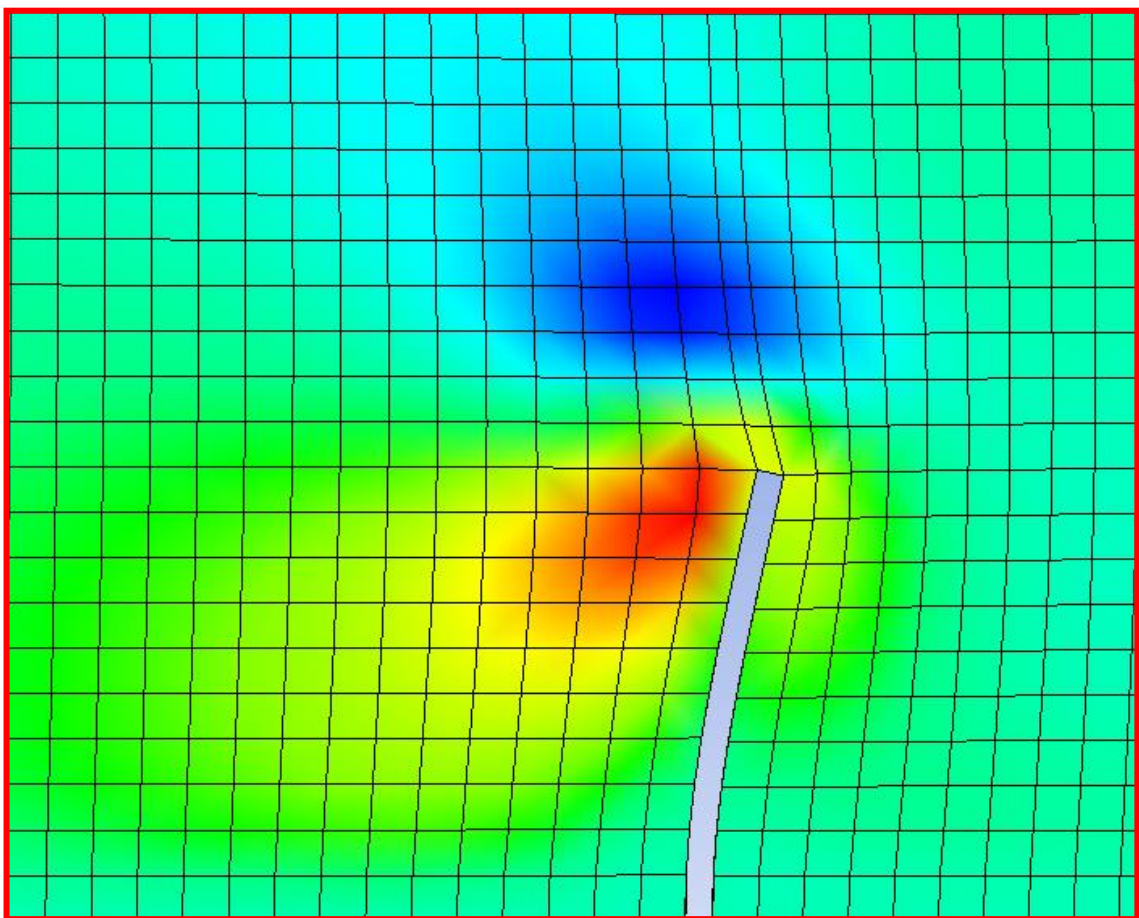


Рис.14. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

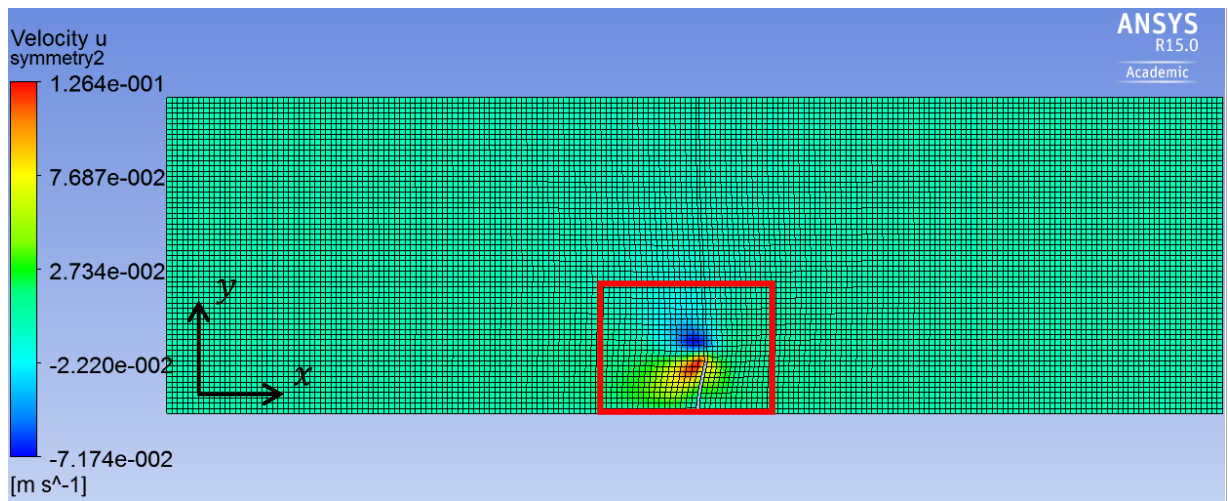


Рис.15. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

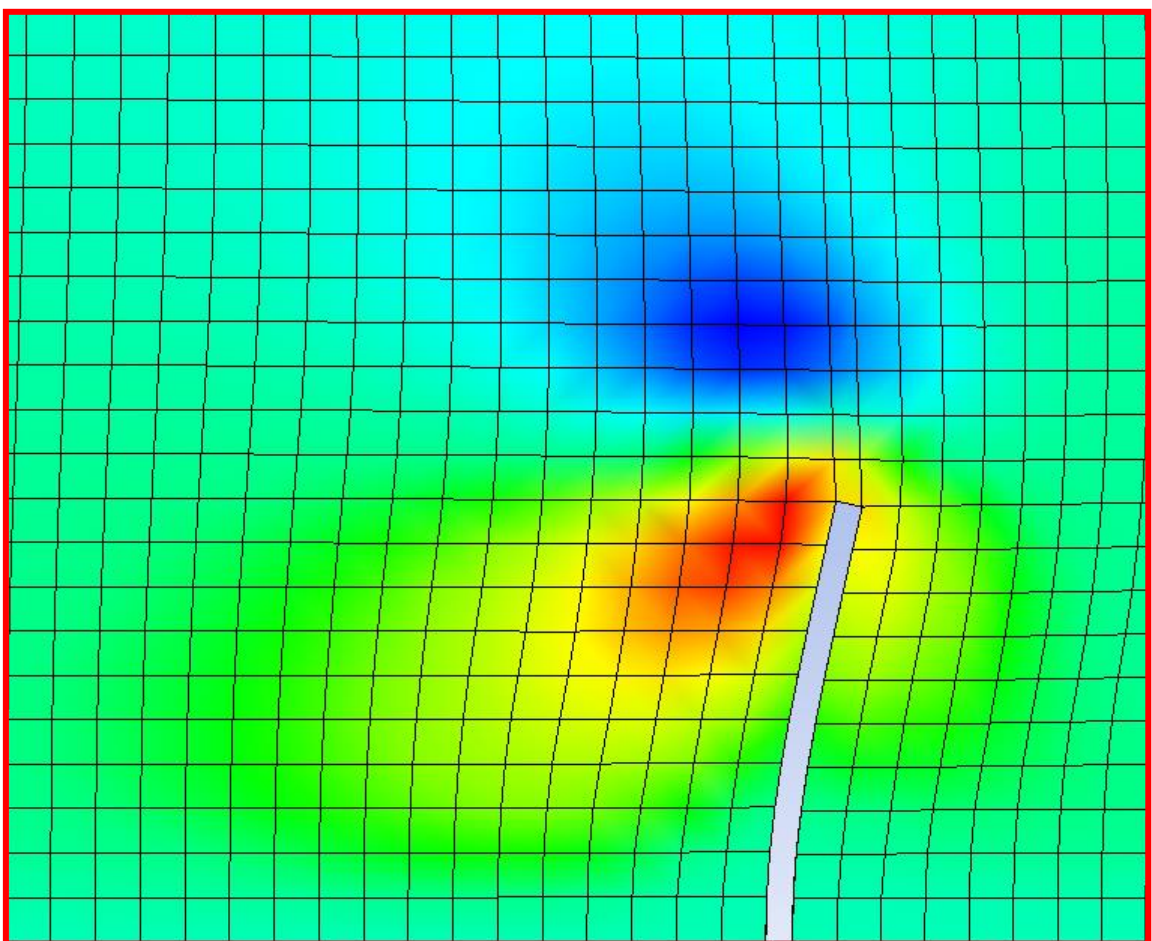


Рис.16. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

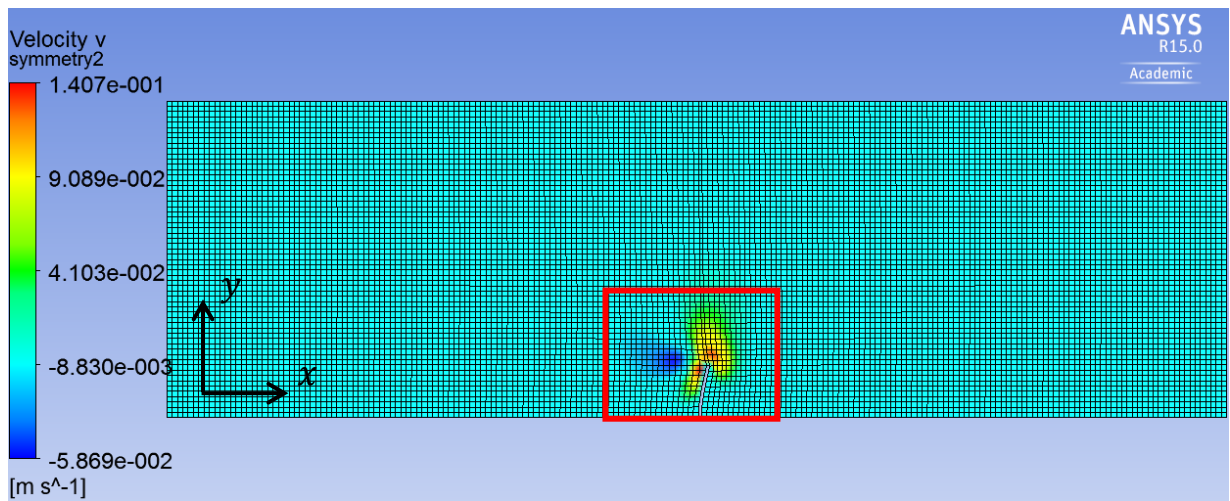


Рис.17. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS CFX)

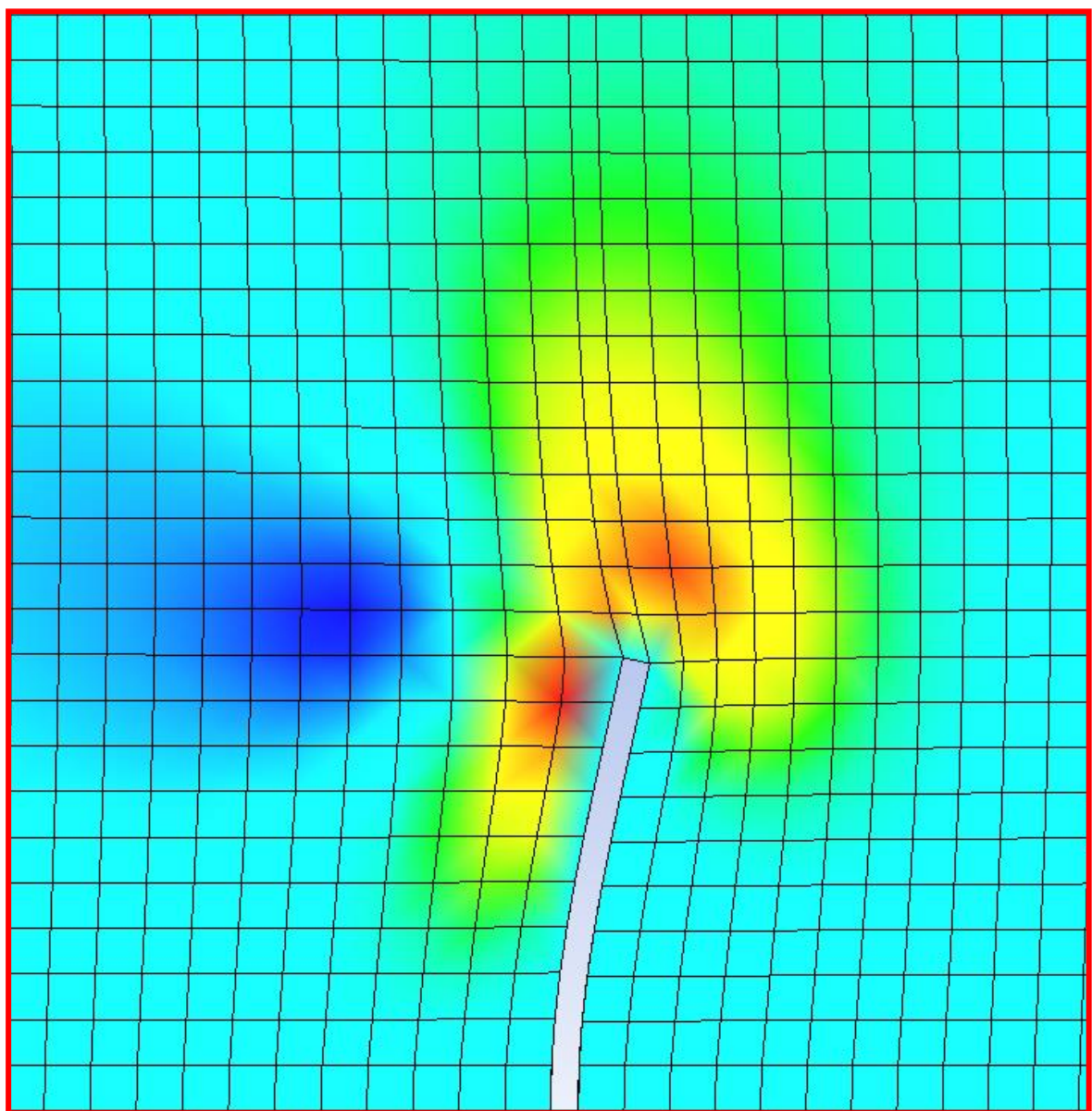


Рис.18. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS CFX)

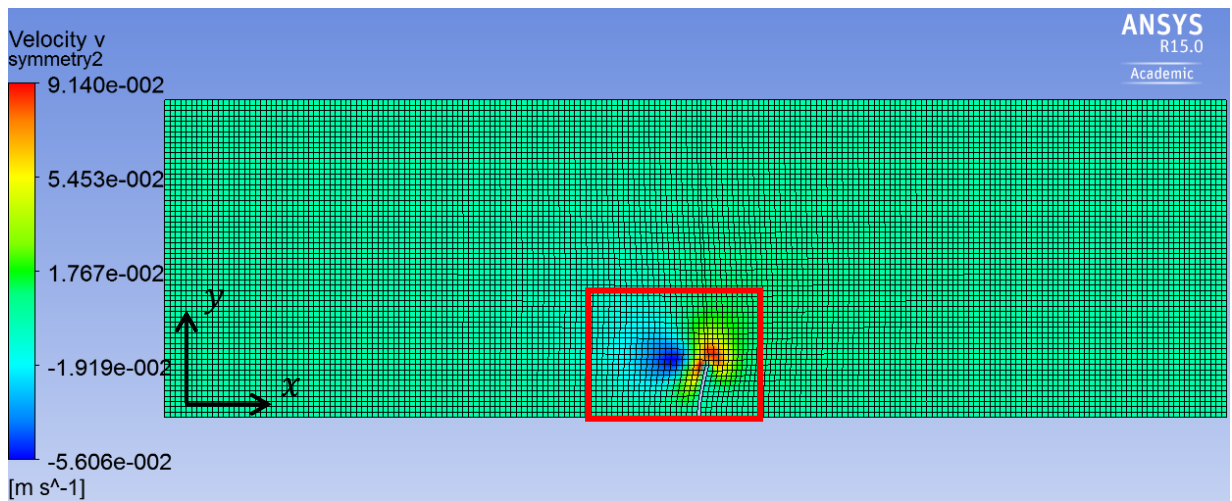


Рис.19. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

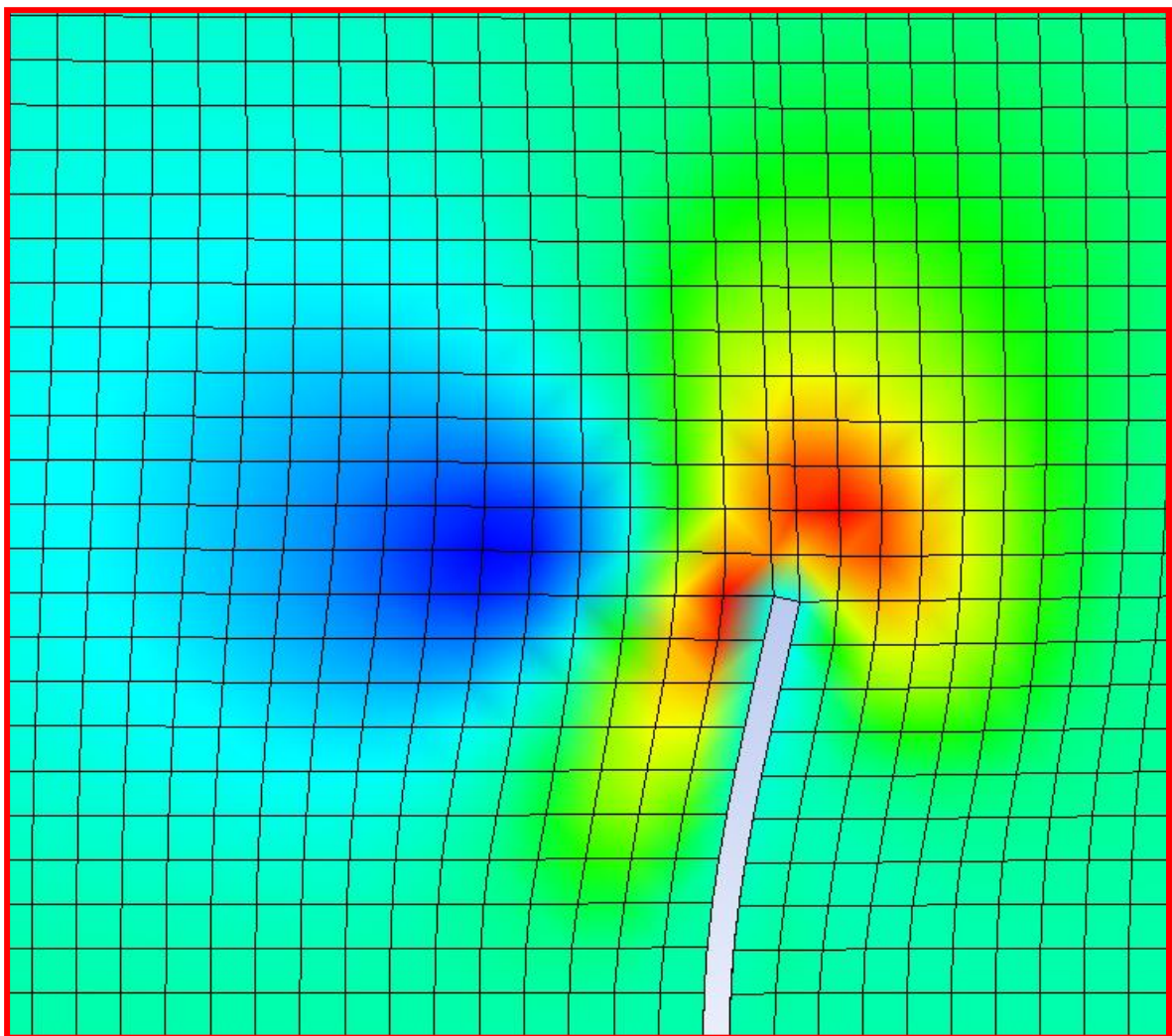


Рис.20. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

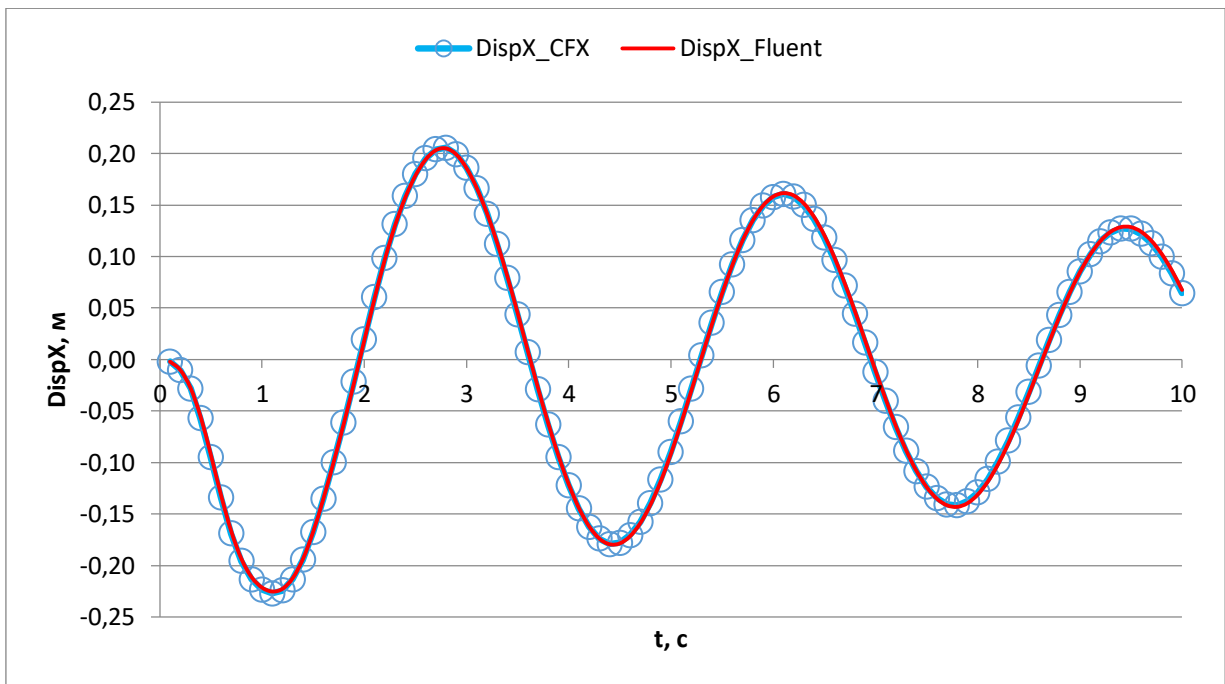


Рис. 21. Перемещения верхнего края пластины вдоль оси x

Из Рис. 21 видно, что для выбранного размера конечного объема сетки жидкости, равного 10 см, обе используемые расчетные программы показывают одинаковые перемещения верхнего края пластины вдоль оси x от времени. Это говорит о том, что для решения данной задачи можно использовать любую из двух расчетных программ.

- размер КЭ равный 5 см

Конечно – элементная модель для данного размера сетки жидкого пространства представлена на Рис. 22 и 23.

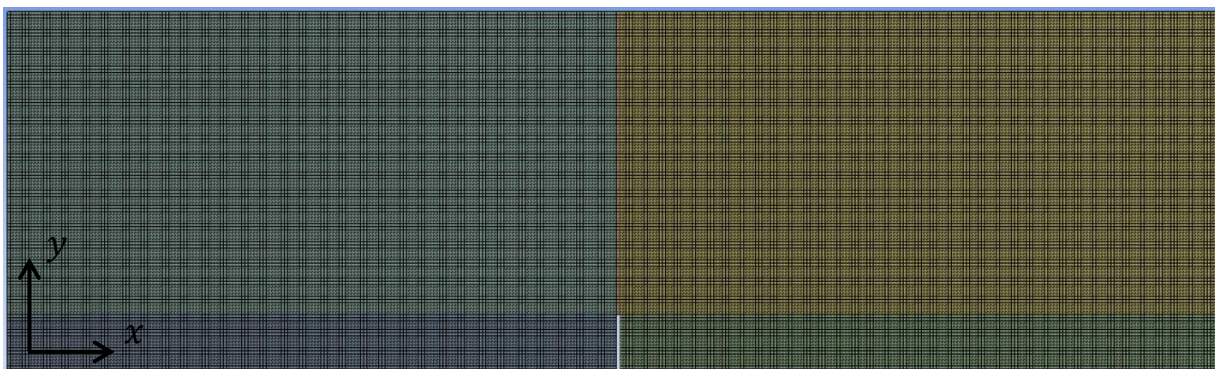


Рис.22. КЭ модель жидкого объема. Размер элемента 5 см

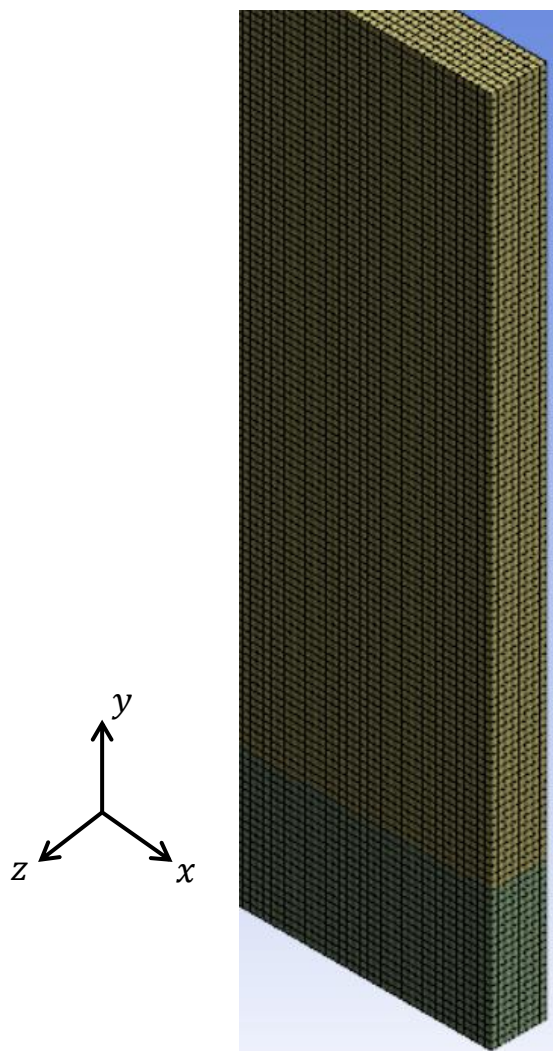


Рис.23. КЭ модель жидкого объема. Размер элемента 5 см

На Рис. 24 – 35 представлены результаты распределений поля скорости потока и компонент скоростей потока вдоль осей x и y .

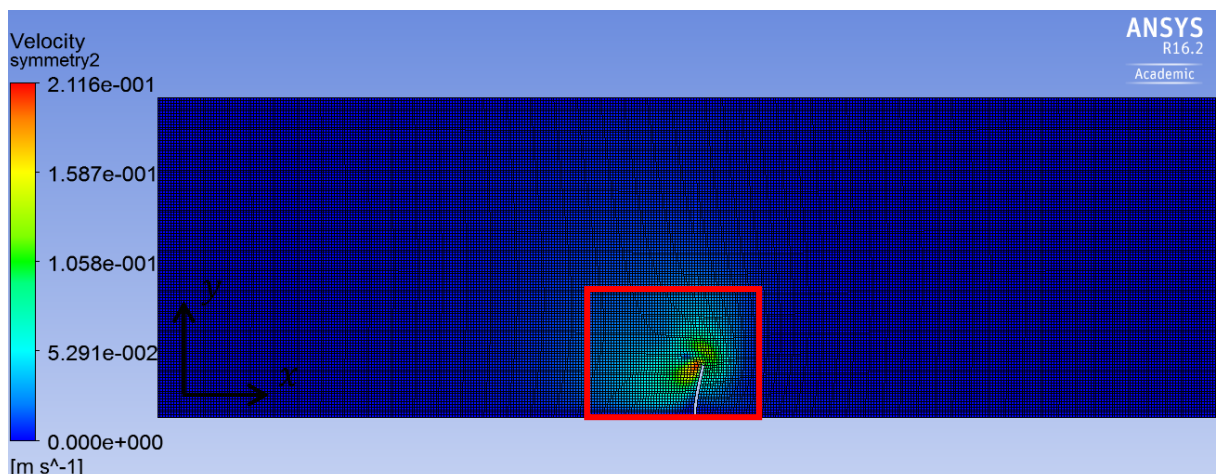


Рис.24. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

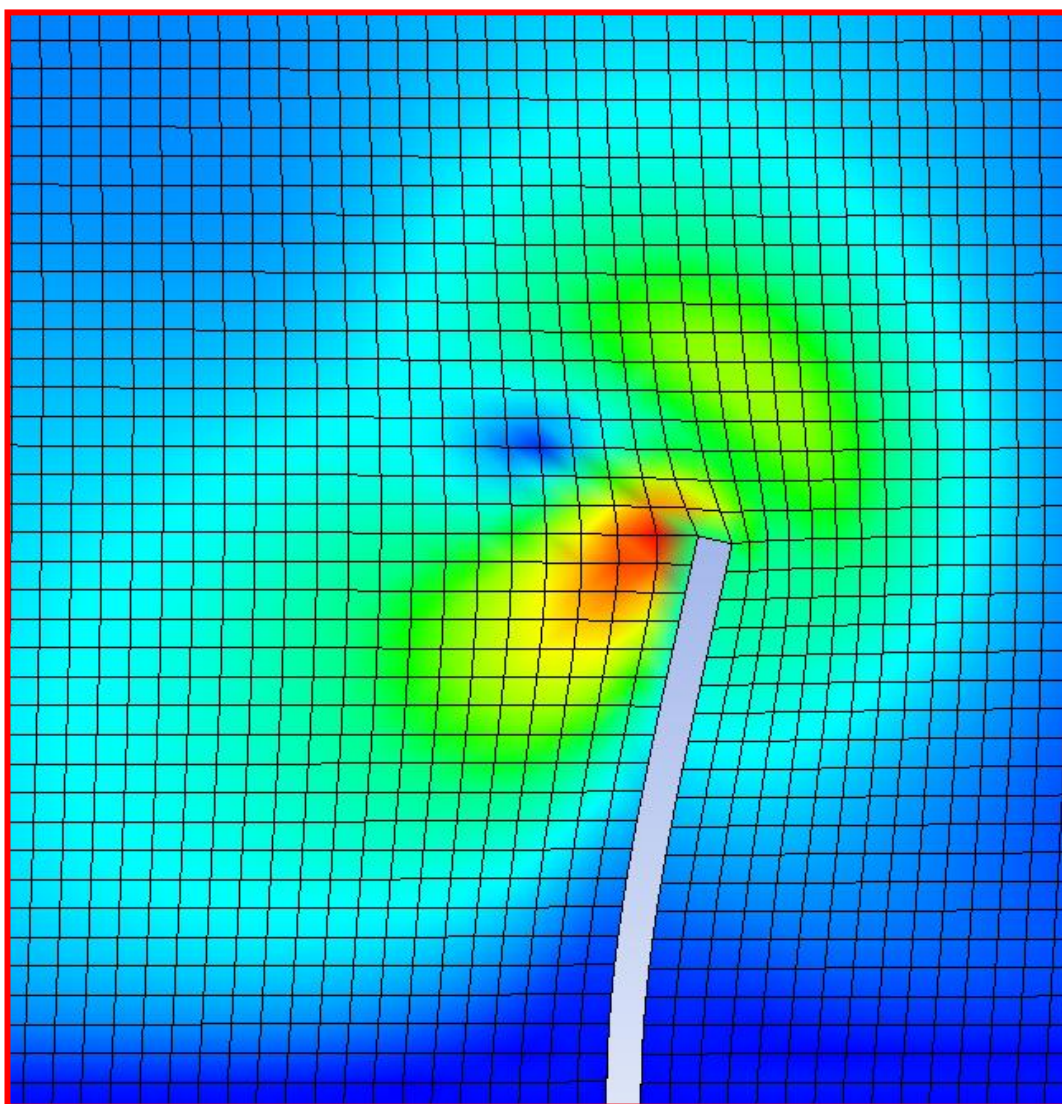


Рис.25. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

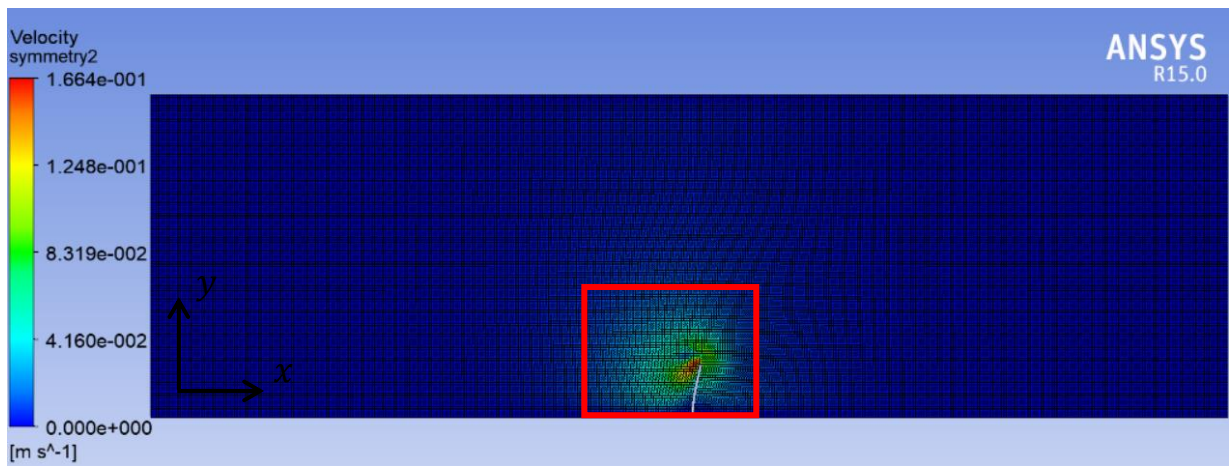


Рис.26. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

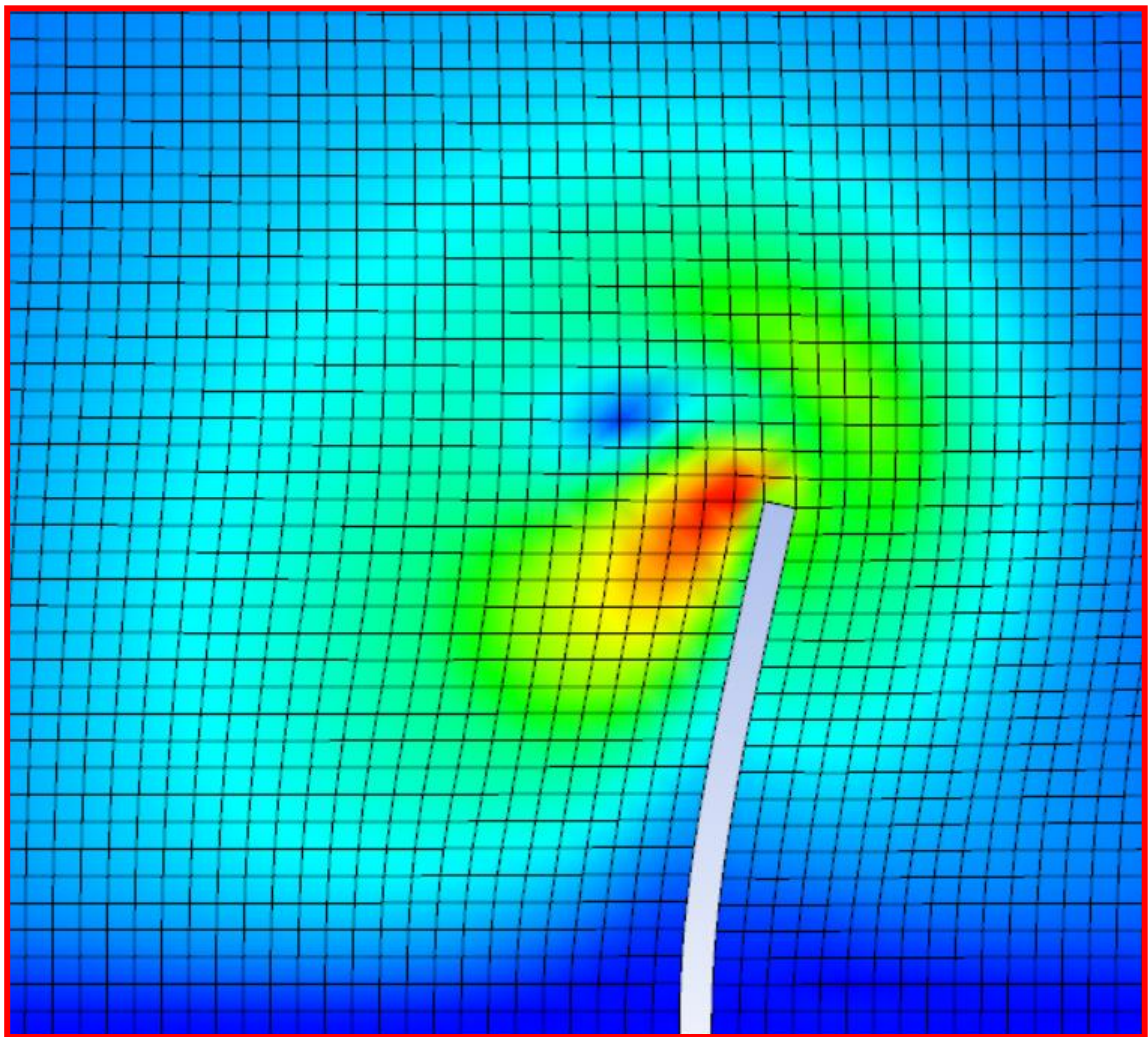


Рис.27. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

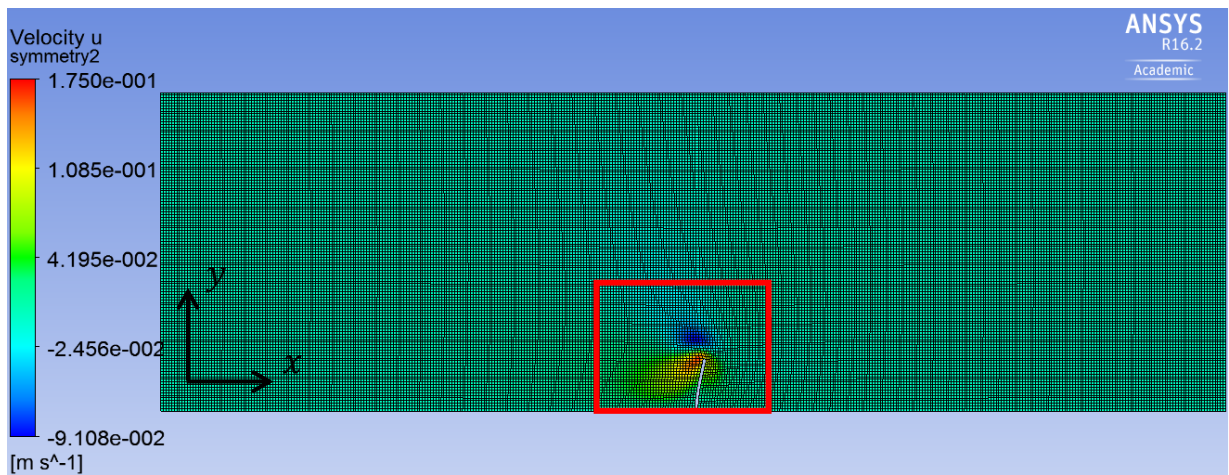


Рис.28. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

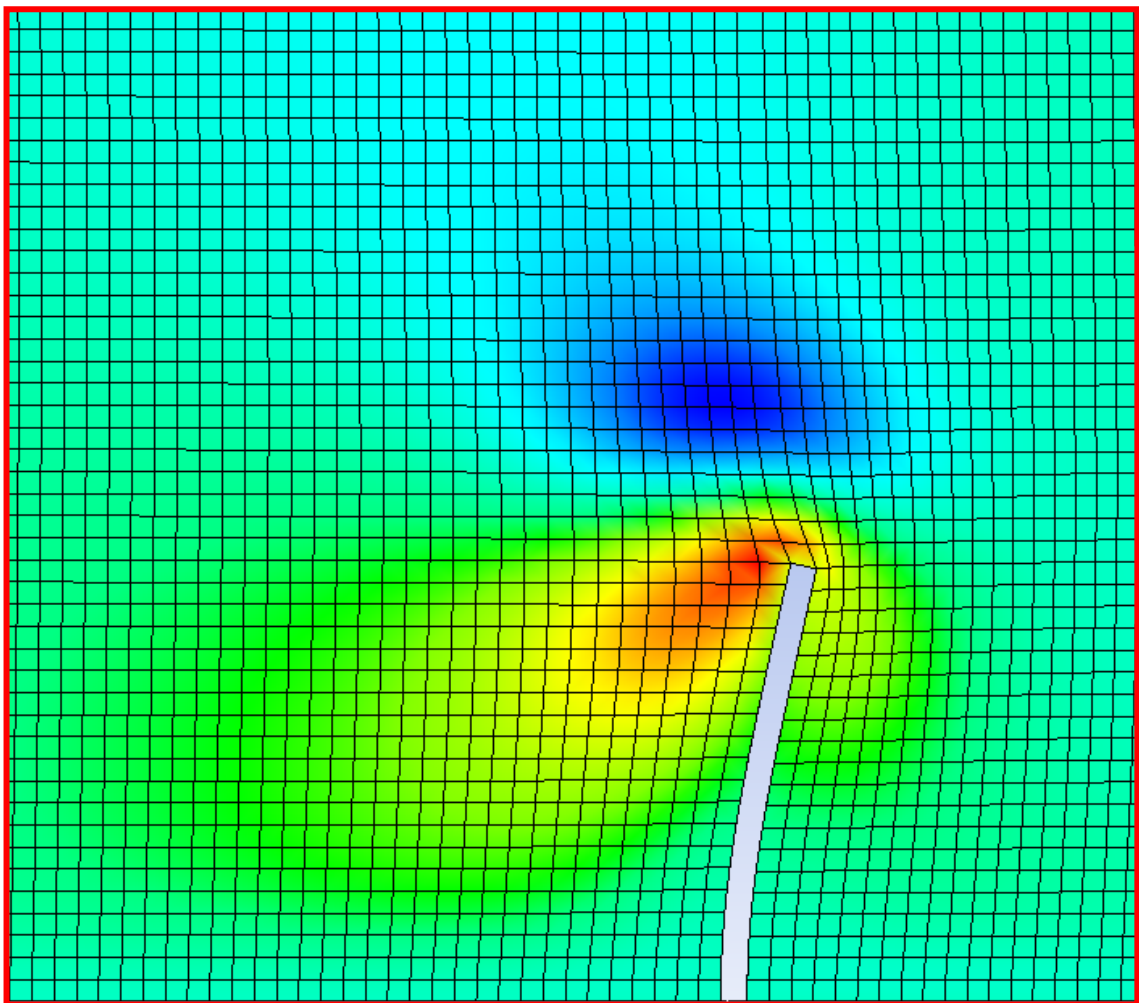


Рис.29. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

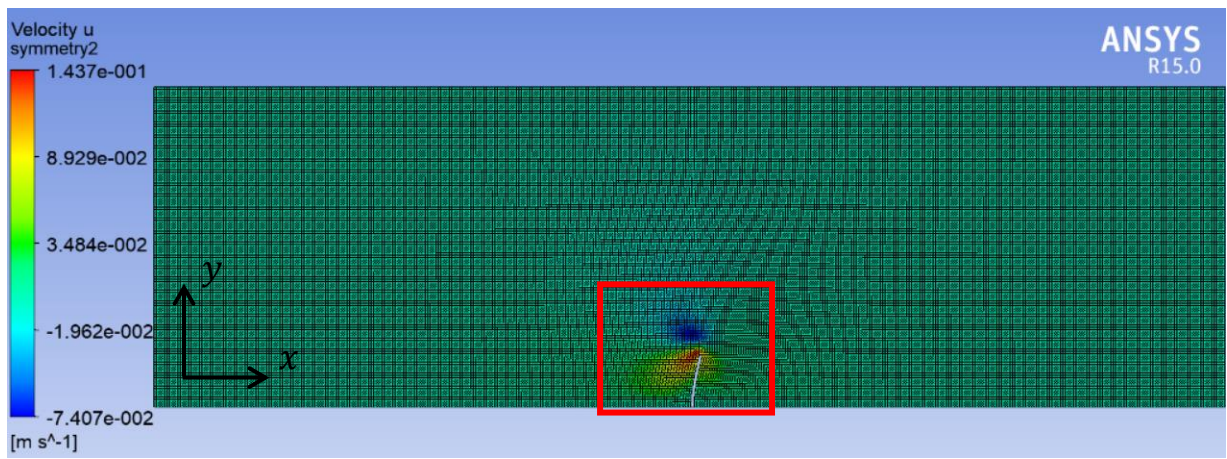


Рис.30. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

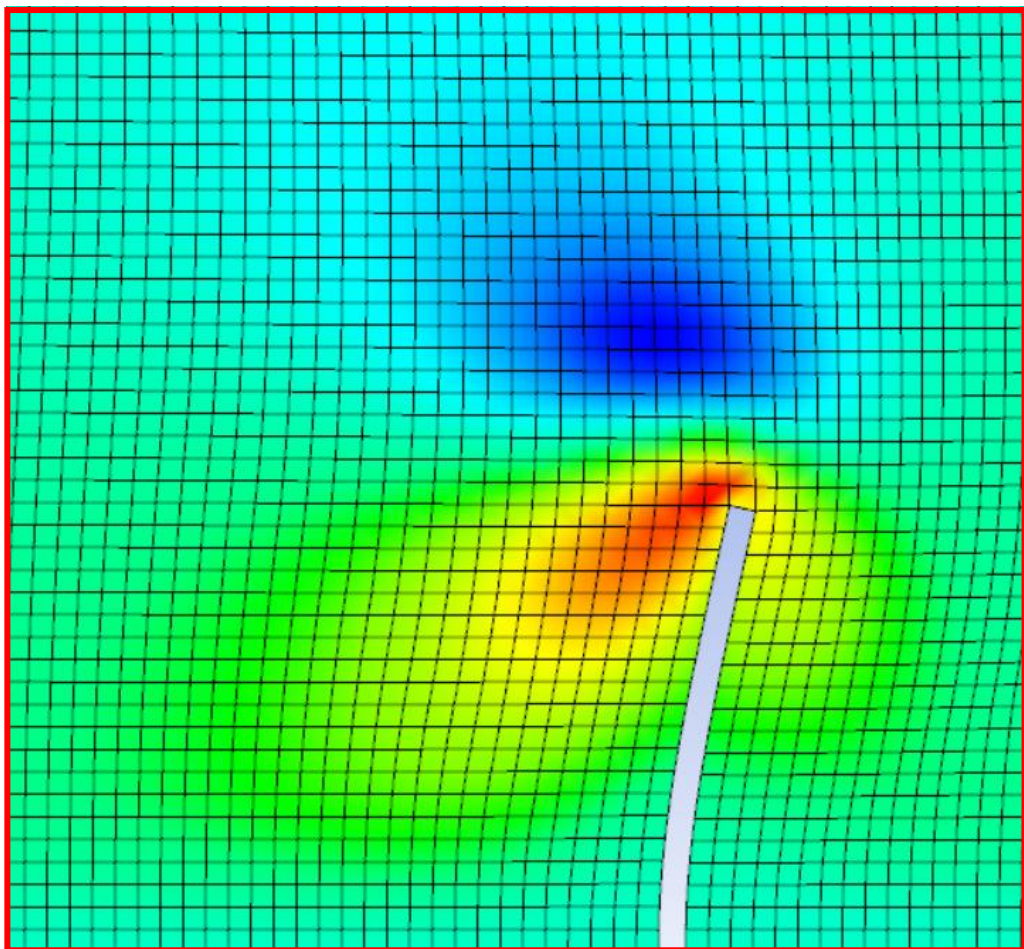


Рис.31. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

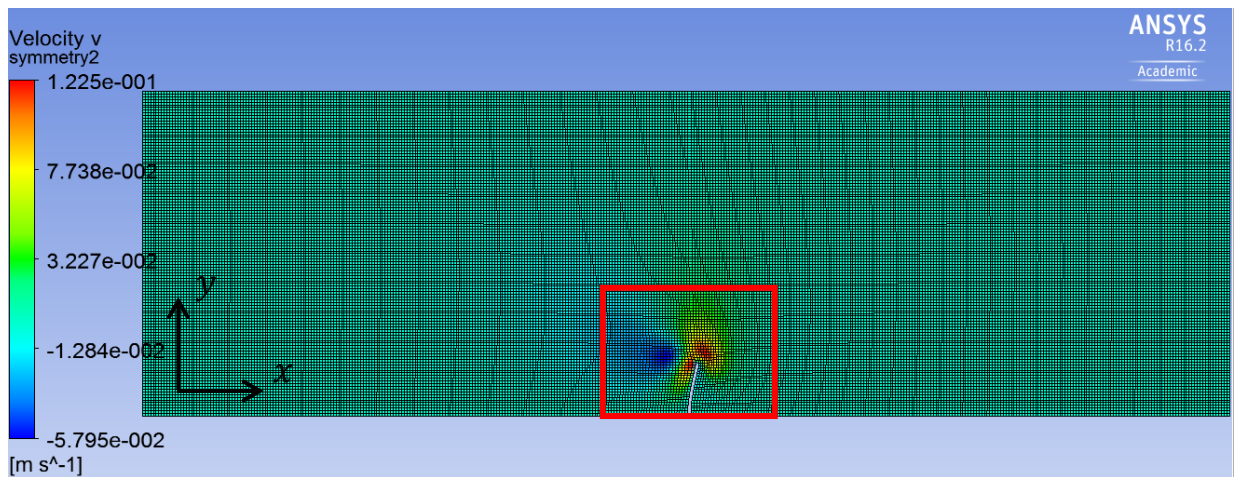


Рис.32. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS CFX)

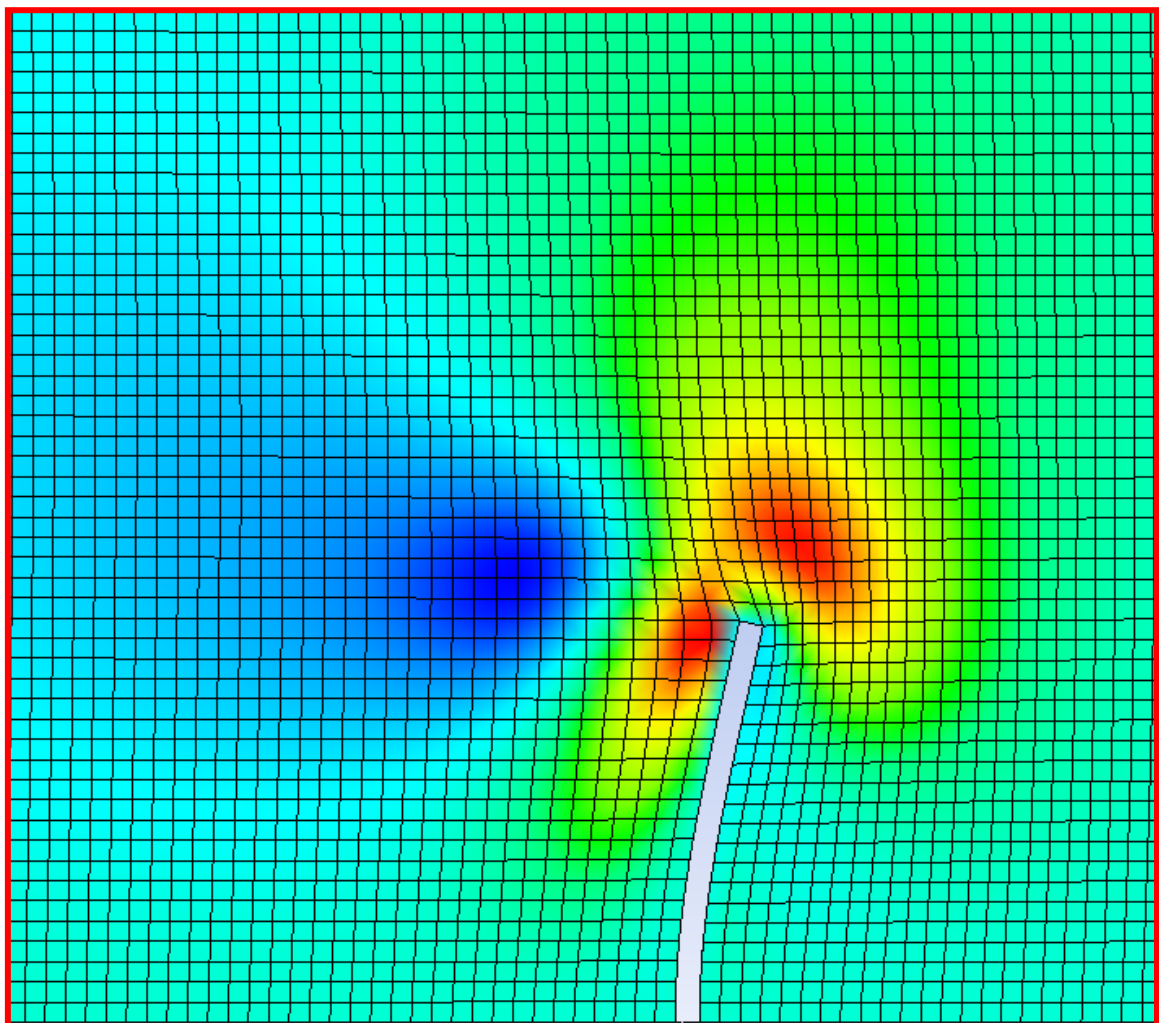


Рис.33. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS CFX)

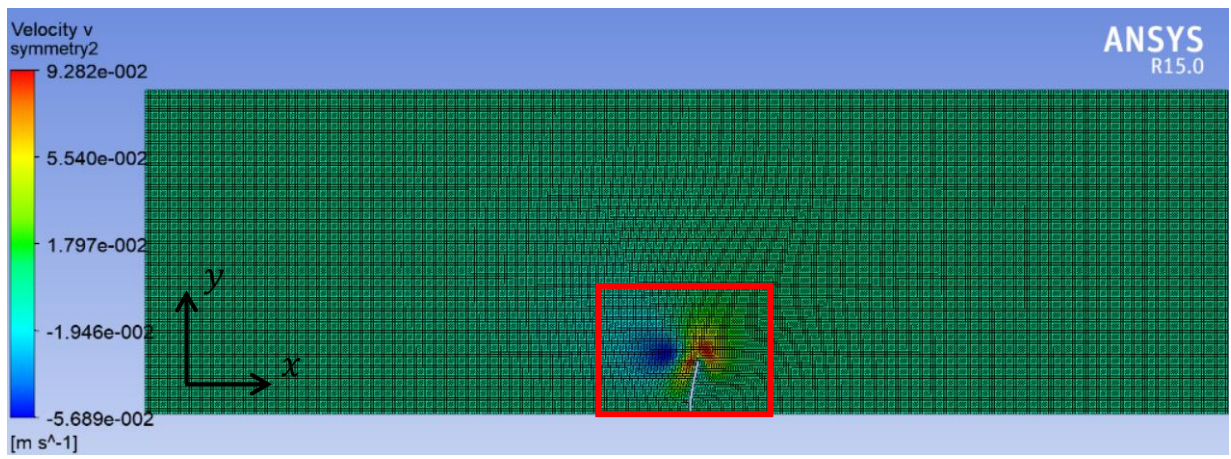


Рис.34. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

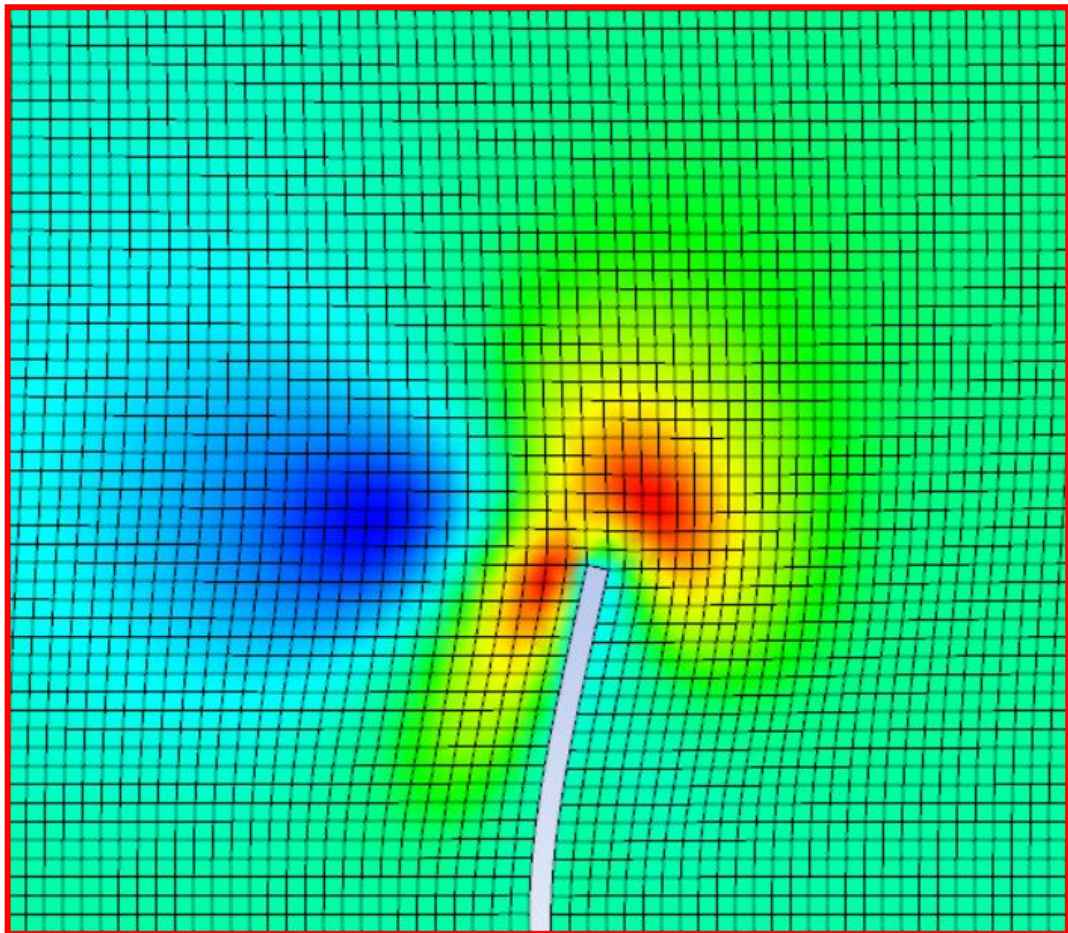


Рис.35. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

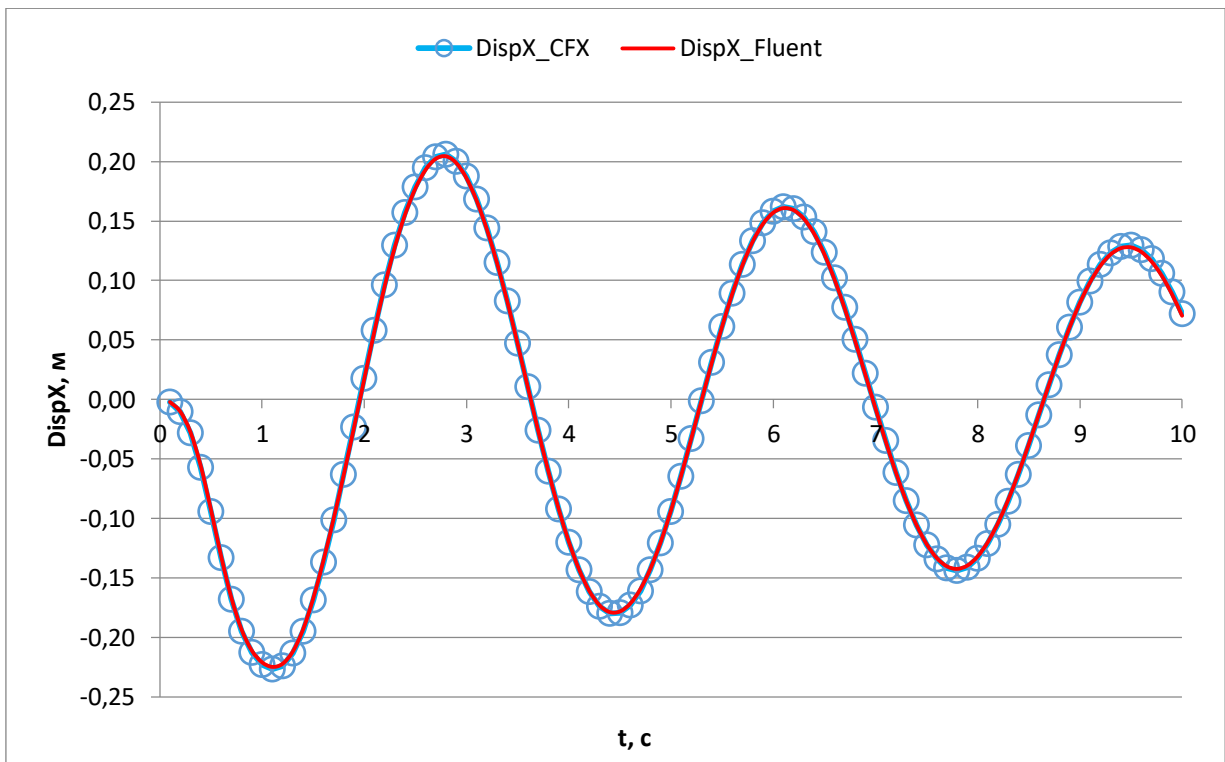


Рис.36. Перемещение верхнего края пластины вдоль оси x

Для размера конечного элемента сетки жидкого пространства равного 5 см перемещения верхнего края пластины вдоль оси x также совпадают для двух выбранных расчетных программ, что неудивительно. Теперь сравним перемещения верхнего края пластины, полученные в ANSYS CFX и ANSYS Fluent, для двух размеров конечного элемента сетки жидкого пространства.

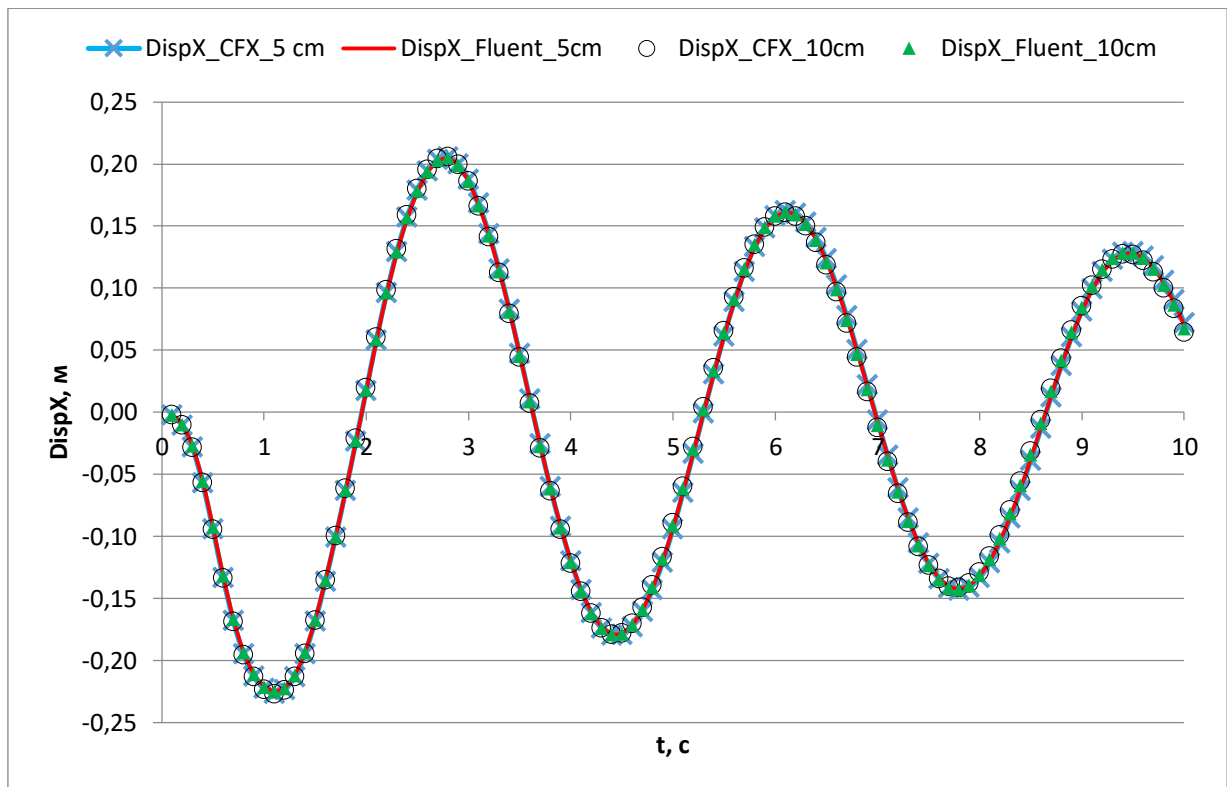


Рис. 37. Перемещение верхнего края пластины вдоль оси x

Как видно из приведенных результатов, для решения данной задачи можем использовать размер конечного элемента сетки жидкого пространства равный 10 см. Это не навредит точности результатов, но значительно уменьшит время расчета задачи.

Также нужно обратить внимание на то, что результаты не нарушают гипотезу о ламинарном потоке жидкости при колебаниях пластины. Максимальное значение скорости потока достигает значения $\sim 2 \cdot 10^{-1} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, подставляя это значение в формулу по определению числа Рейнолдса $R_e = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu}$, получаем значение числа Рейнолдса в данном случае $R_e = 10$, что соответствует ламинарному потоку.

1.3 Решение задачи о колебаниях пластины в жидкости с использованием моделирования пограничного слоя между пластиной и жидкостью

В предыдущей части работы рассматривались две расчетные модели данной задачи: с размером конечного элемента жидкого пространства равным 10 см и 5 см. Для данных моделей были получены распределения скоростей и перемещения верхнего края пластины. Результаты для данных моделей получились практически одинаковыми, что говорит о возможности использовать любую из них, но необходимо отталкиваться от времени расчета. Очевидно, что необходимо выбрать модель с наименьшим затраченным временем на расчет.

В данной части работы представлено моделирование задачи с использованием построения пограничного слоя жидкости вокруг исследуемой пластины, так как в реальности жидкость обтекает последнюю. Интерес заключается в том, чтобы сравнить результаты для первых двух моделей и для моделей с пограничным слоем и пронаблюдать, как пограничный слой влияет на результаты расчета задачи.

Пограничный слой – тонкая область сечения вблизи стенки объекта, где вязкие эффекты играют существенную роль, и имеются резкие изменения скорости потока от нуля на стенке (прилипание) до своего полного значения во внешнем потоке, в котором жидкость можно рассматривать текущей без трения [8,11].

Движение жидкости, при котором траектории частиц быстро изменяются во времени, и изменение носит случайный характер, называется *турбулентным*. В турбулентном течении при наличии статистически средних характеристик имеет место нерегулярное, беспорядочное изменение скорости и других гидродинамических переменных по величине и направлению, т.е. пульсации гидродинамических переменных.

Суть рассматривания численных моделей для данной задачи заключается в поиске простой оптимальной численной модели, которая имела бы баланс между точностью результатов и ресурсоемкостью.

В численных моделях также учтена модель турбулентности SST – Shear Stress Transport. SST-модель представляет собой комбинацию $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ моделей турбулентности: для расчета течения в свободном потоке используются уравнения $k - \varepsilon$ модели, а в области вблизи стенок — уравнения $k - \omega$ модели [8]. Это низкорейнольдсовая модель, которая стала своего рода стандартом для инженерных приложений. В $k - \varepsilon$ модели турбулентности записываются два дополнительных уравнения для расчета кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации кинетической энергии ε . Модель $k - \omega$ похожа на $k - \varepsilon$, только здесь решается уравнение для удельной скорости диссипации кинетической энергии ω .

Название "низкорейнольдсовая модель турбулентности" может показаться противоречивым, поскольку турбулентный режим течения наблюдается только при достаточно высоких значениях числа Рейнольдса. Однако термин "низкорейнольдсовая" относится не ко всей области течения, а только к пристеночной области, где доминируют вязкие эффекты, то есть к области вязкого пограничного слоя. Низкорейнольдсовая модель турбулентности — это модель, которая позволяет корректно рассчитать асимптотическое поведение различных характеристик потока, когда расстояние от стенки стремится к нулю [11].

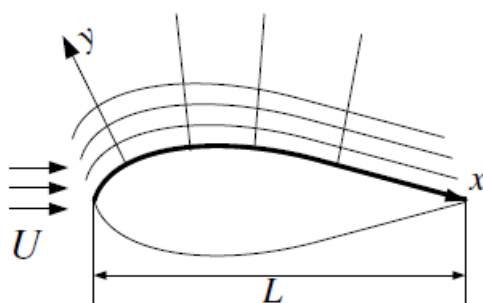


Рис. 38. Пограничный слой

1. Первый метод моделирования пограничного слоя

Данный метод основан на использовании встроенной функции Inflation в ANSYS Workbench по автоматическому построению пограничного слоя между жидкостью и пластиной. Минус данного метода заключается в том, что конечные объемы, моделирующие жидкость, имеют форму тетраэдров. Полученные результаты также будут сравниваться для двух расчетных пакетов, как и в случае моделирования задачи без пограничного слоя, ANSYS CFX и ANSYS Fluent.

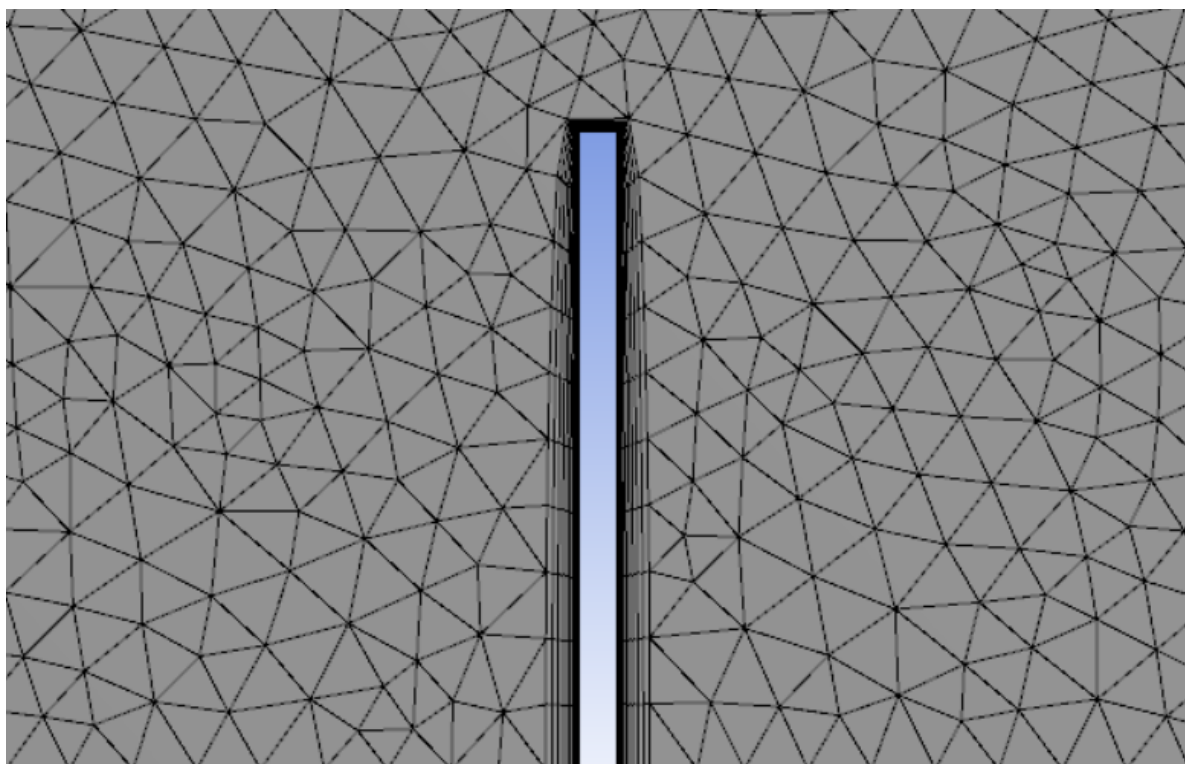


Рис. 39. Расчетная модель с пограничным слоем

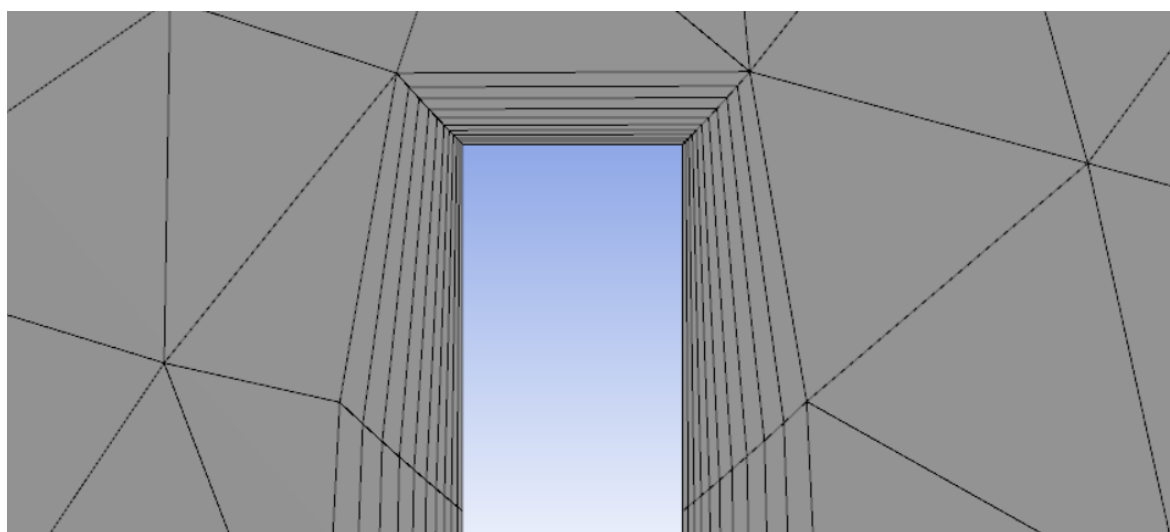


Рис. 40. Пограничный слой между жидкостью и пластиной

Пограничный слой моделируется следующим образом: средний размер конечного элемента сетки водного пространства равен 10 см, первый элемент пограничного слоя имеет толщину в 50 раз меньшую, чем средний размер элемента сетки водного пространства, т.е. 2 мм. Коэффициент увеличения размеров конечных объемов пограничного слоя равен 1,2.

На Рис. 41 – 52 представлены результаты распределений поля скорости потока и компоненты скоростей потока вдоль осей x и y .

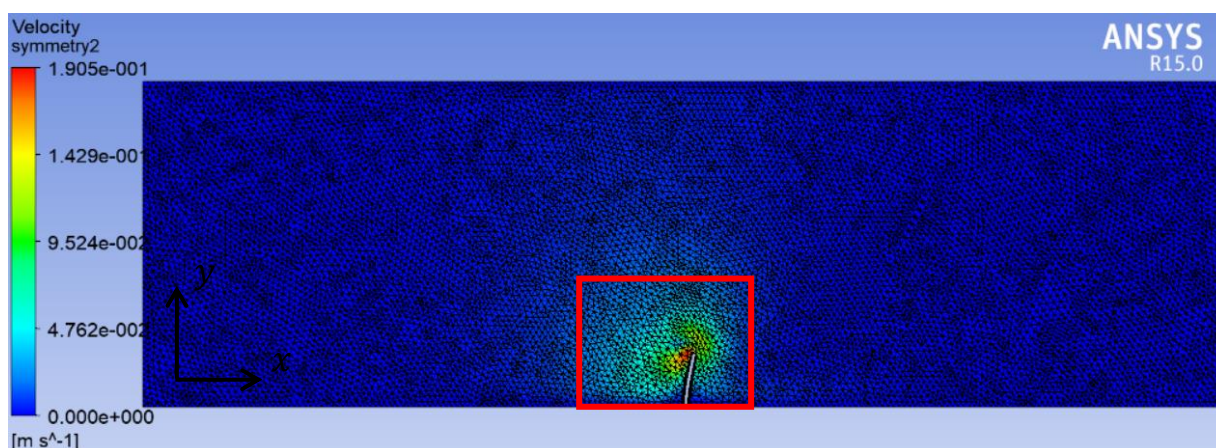


Рис. 41. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

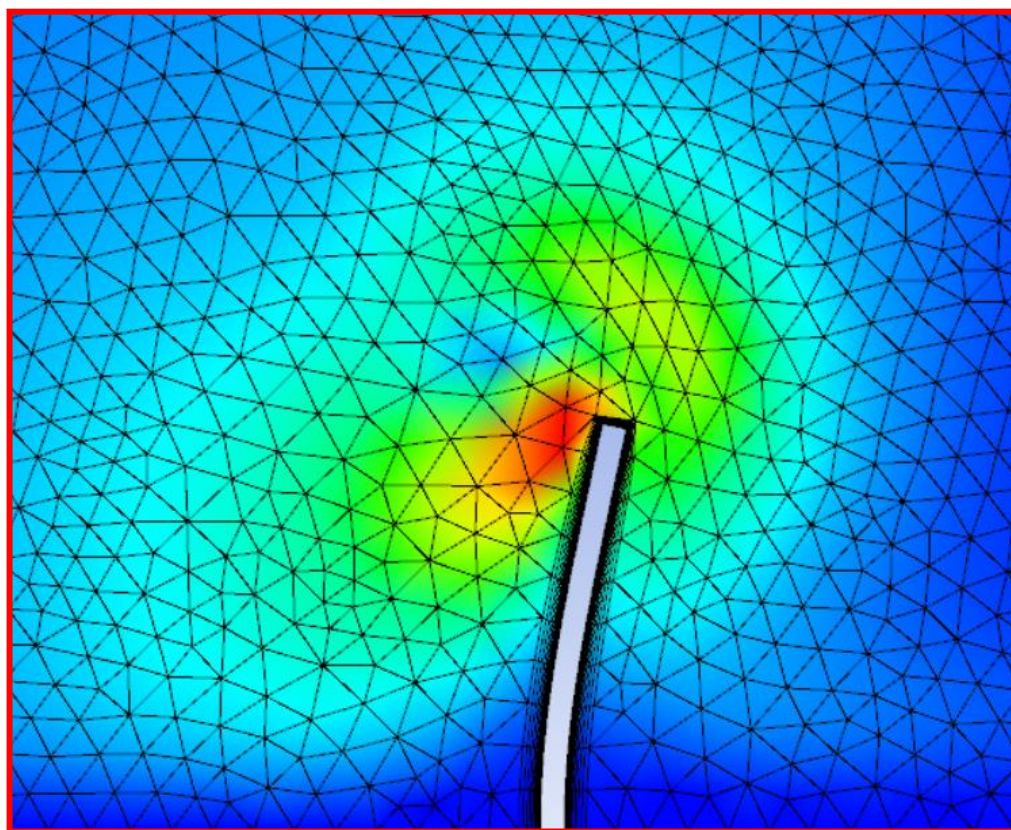


Рис. 42. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

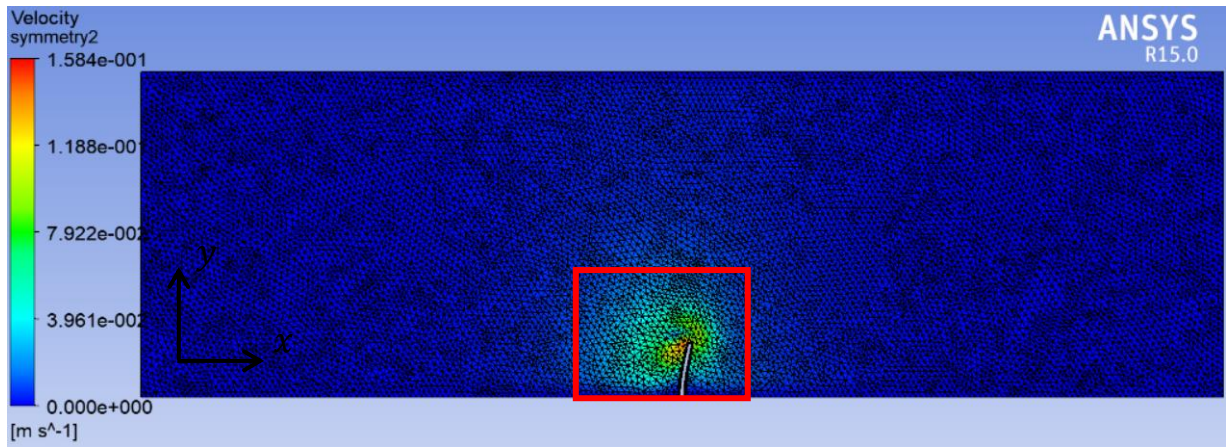


Рис.43. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

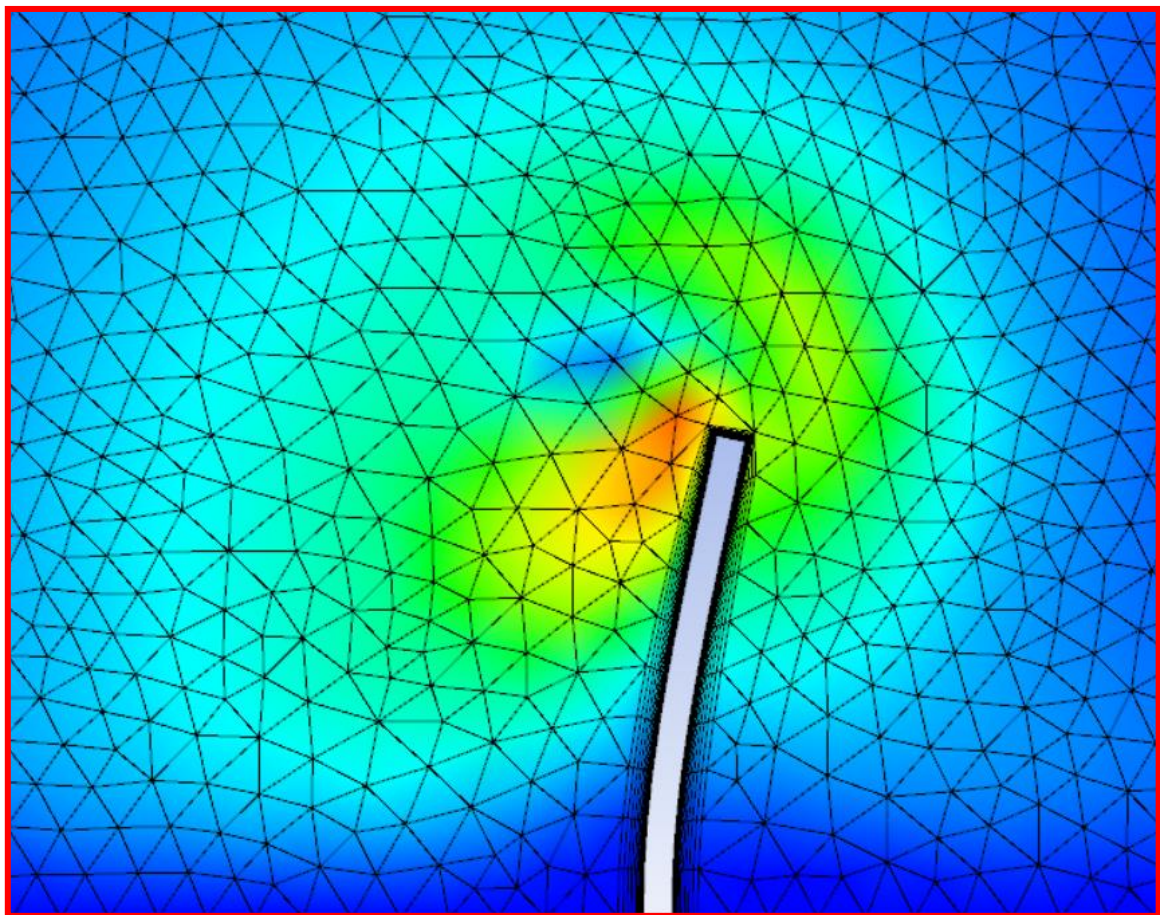


Рис.44. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

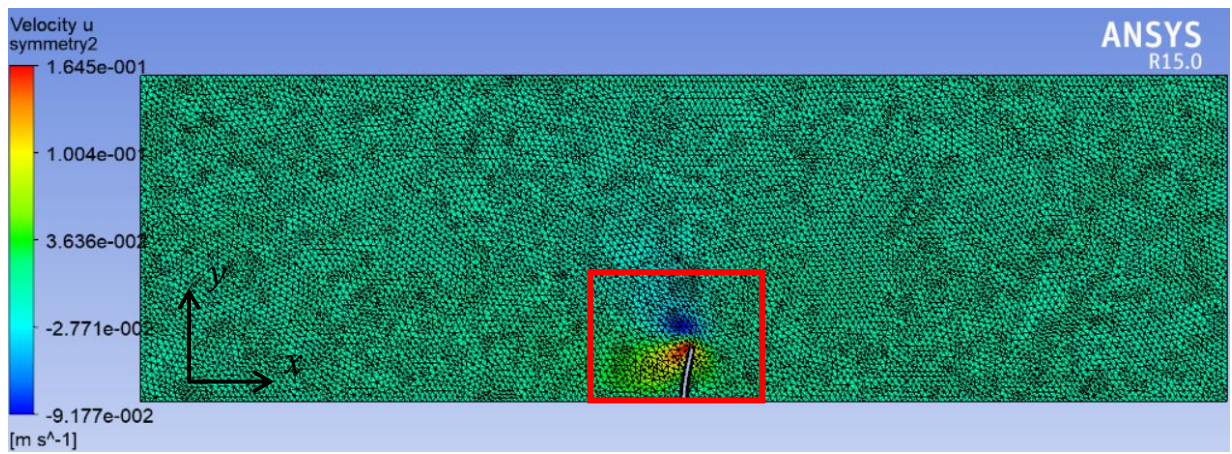


Рис.45. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

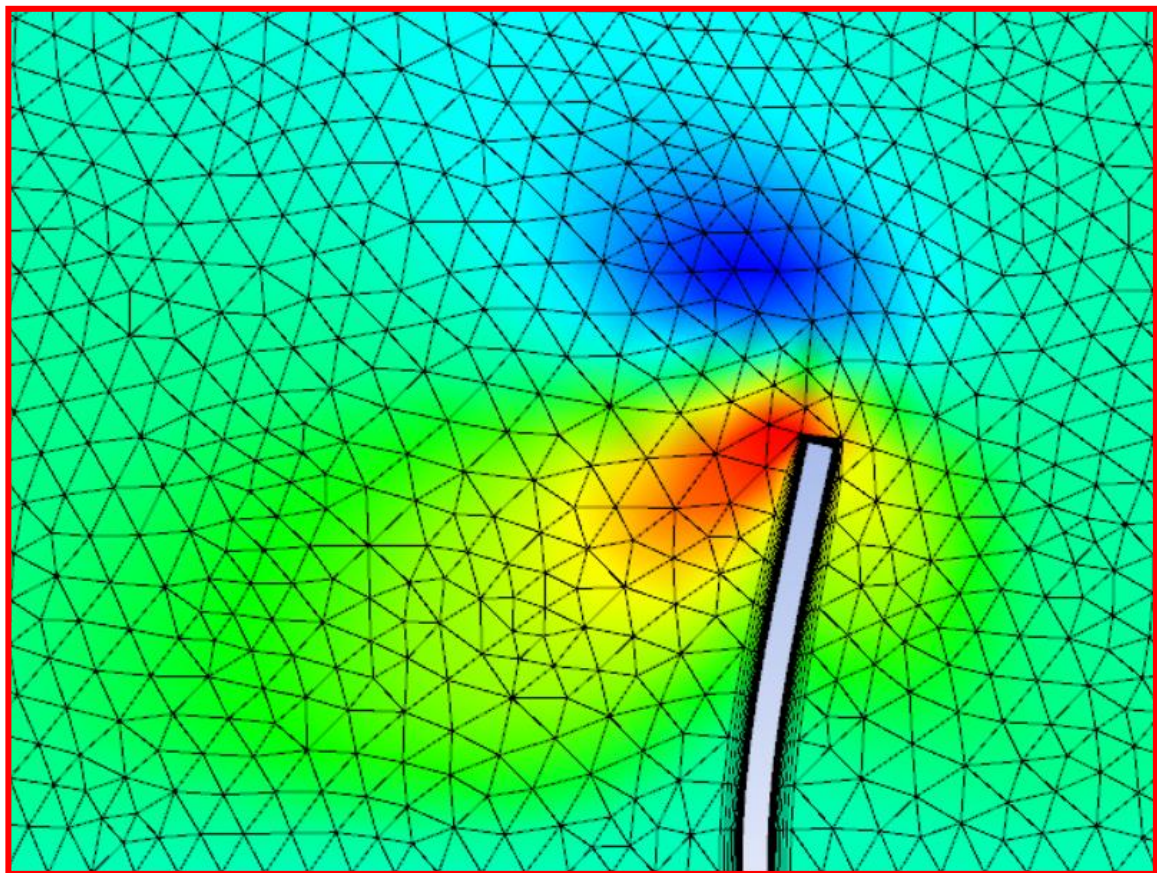


Рис.46. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

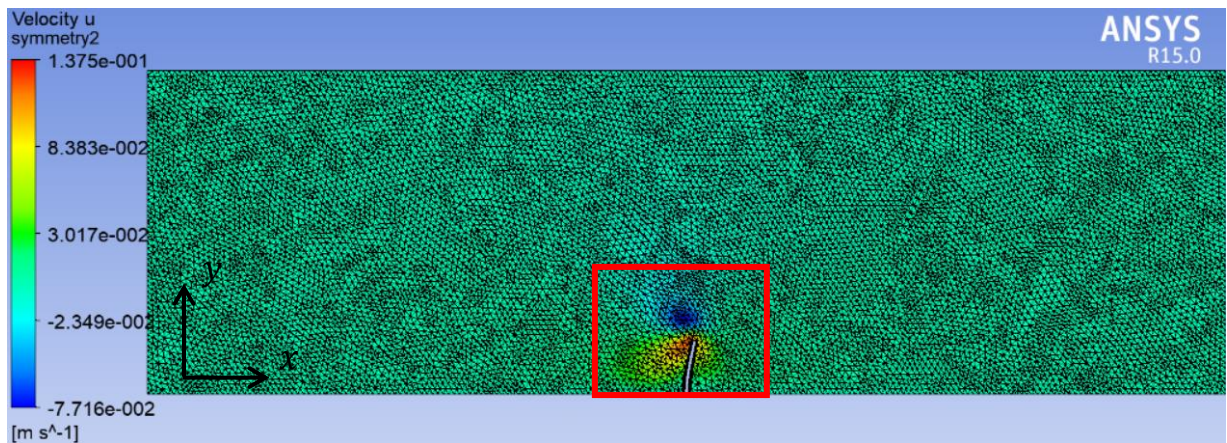


Рис.47. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

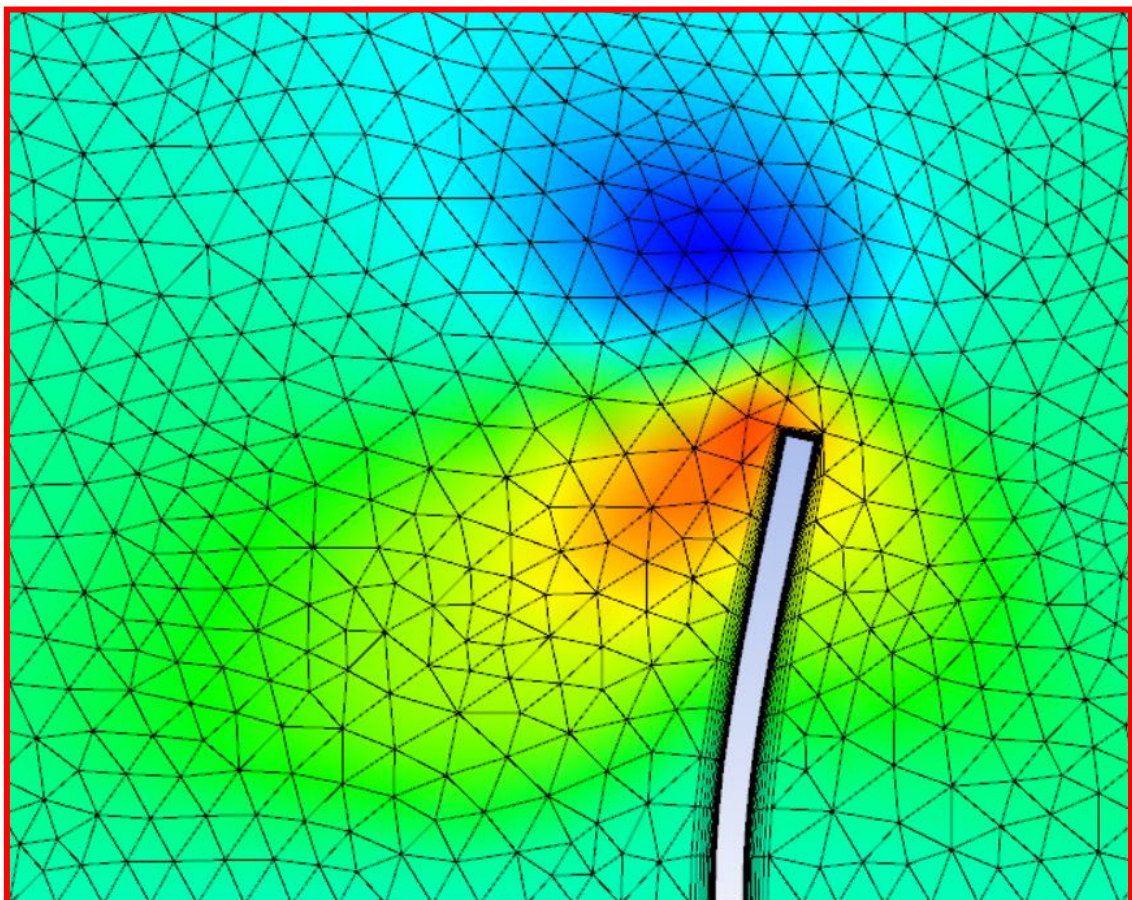


Рис.48. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

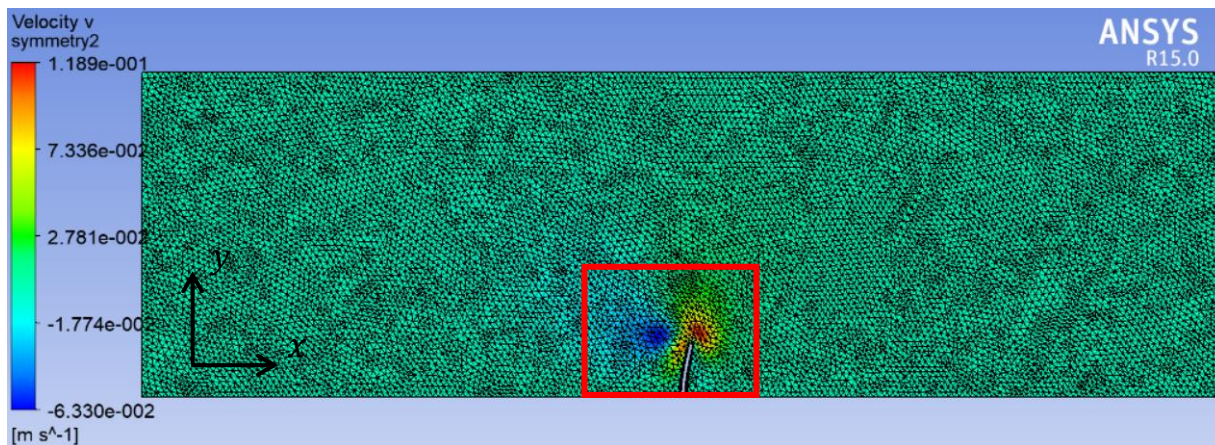


Рис.49. Скорость потока вдоль оси у (ANSYS CFX)

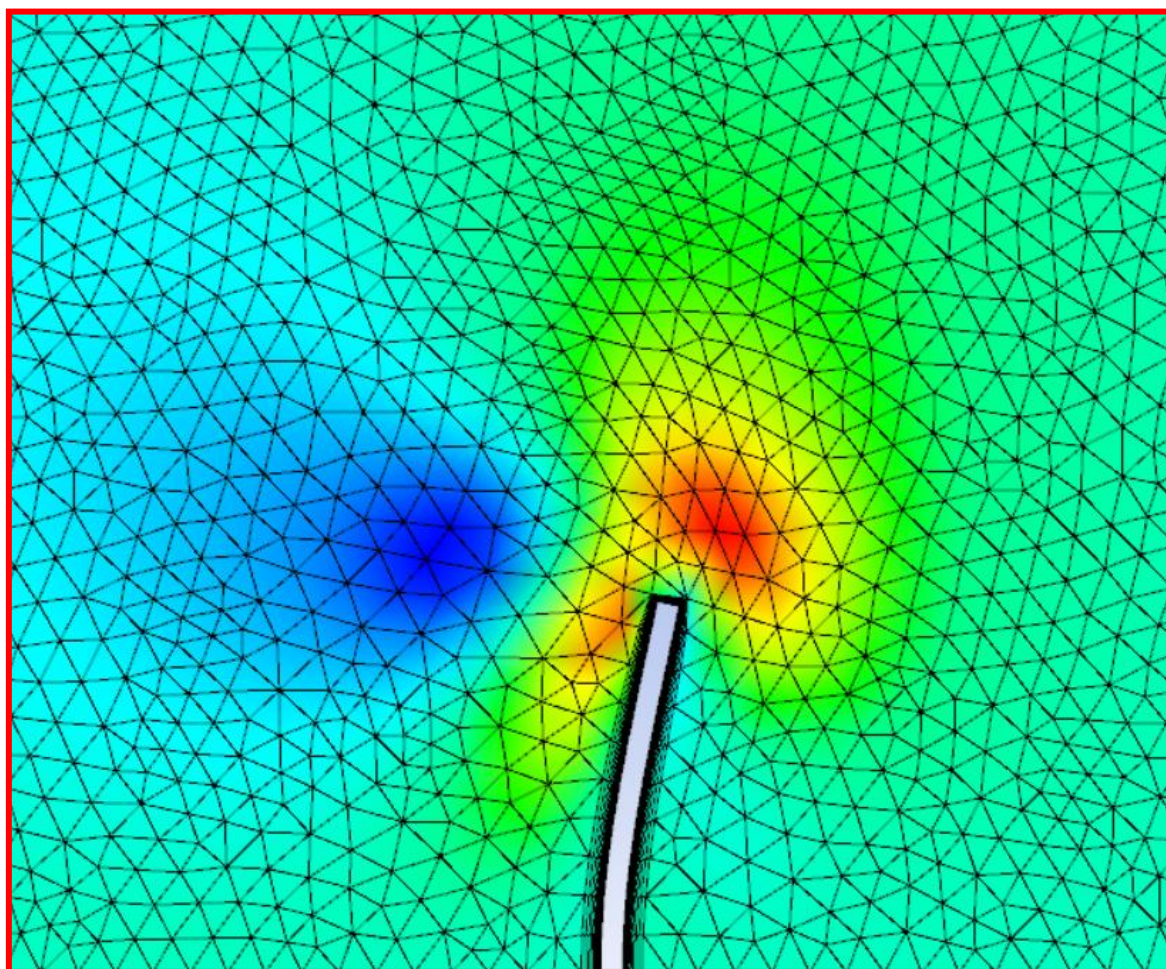


Рис.50. Скорость потока вдоль оси у (ANSYS CFX)

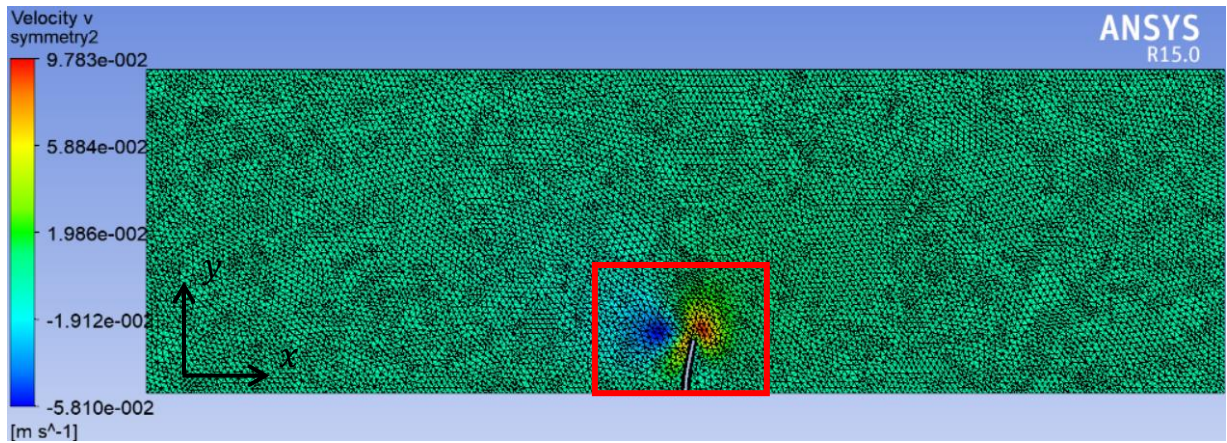


Рис.51. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

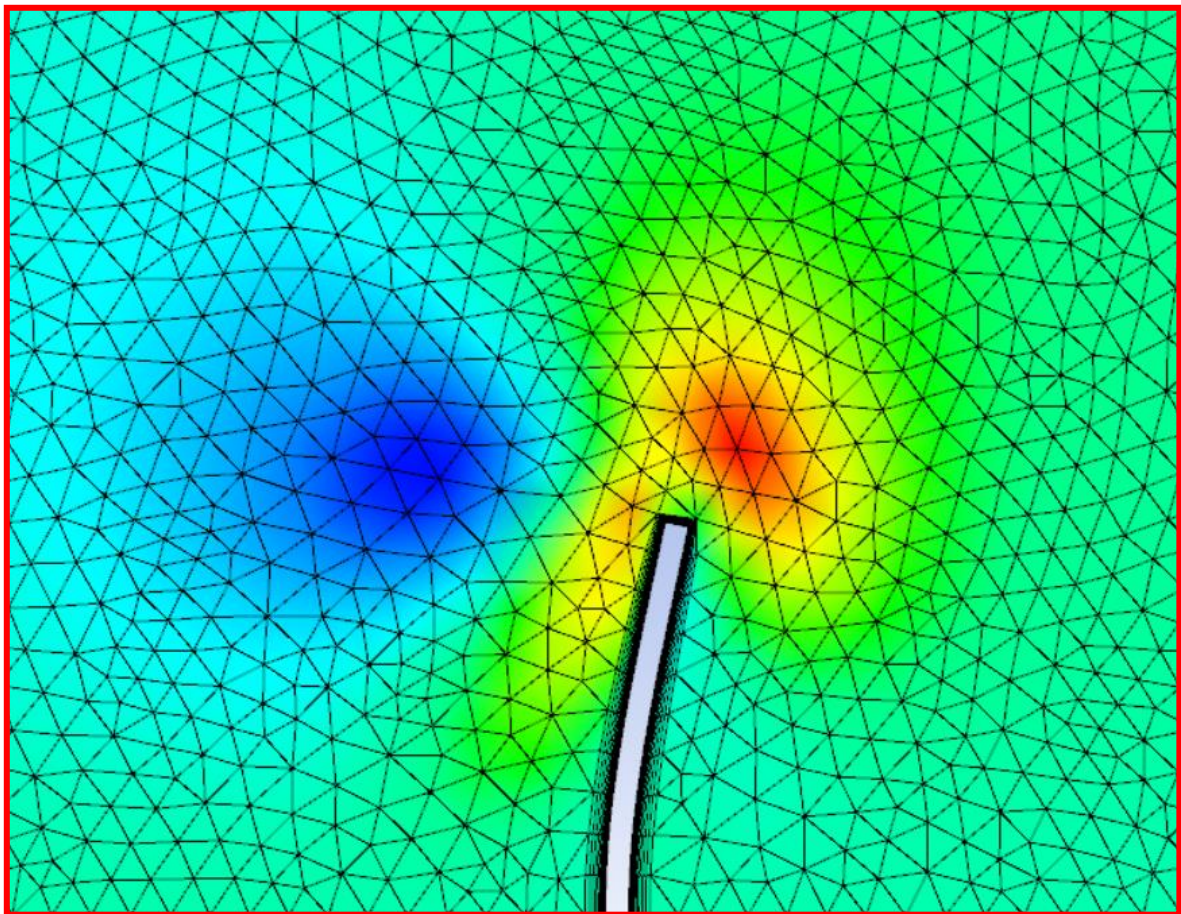


Рис.52. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

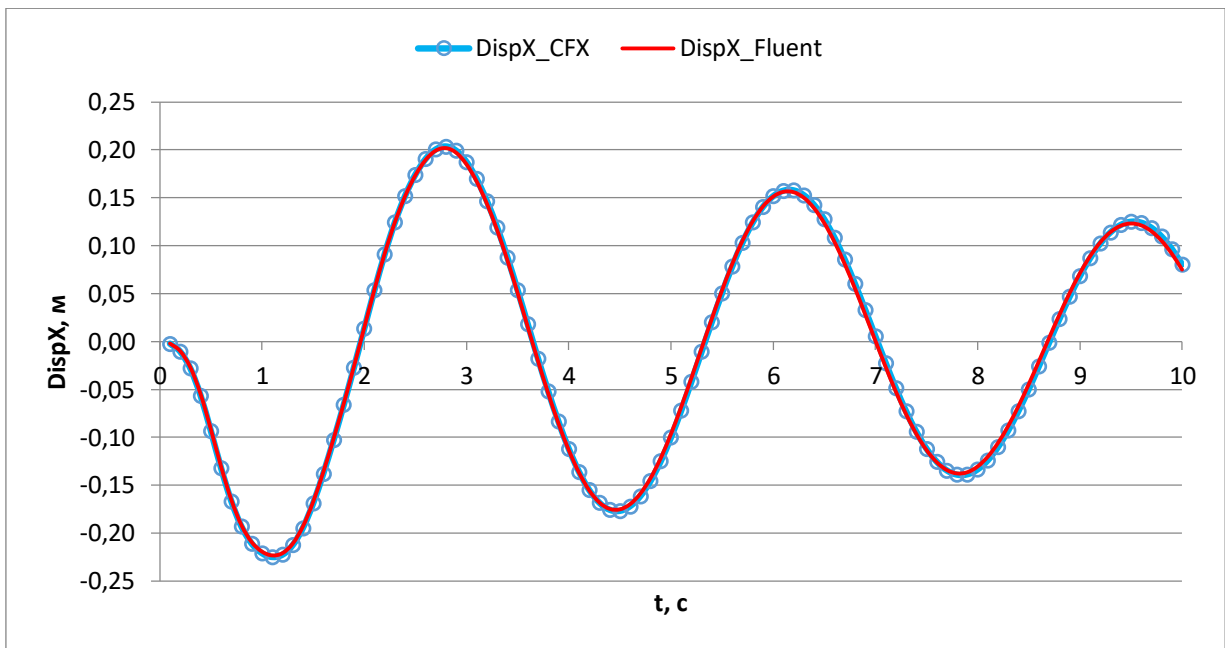


Рис.53. Перемещение верхнего края пластины вдоль оси x

На Рис. 53 видно, что для выбранной модели пограничного слоя обе используемые расчетные программы показывают одинаковые перемещения верхнего края пластины вдоль оси x . Это также говорит о том, что для решения нашей задачи в данной постановке можно использовать обе расчетные программы.

2. Второй метод моделирования пограничного слоя

Данный метод основан на использовании сеточного генератора ICEM CFD, в котором можно построить пограничный слой, не используя тетраэдральные конечные объемы. С помощью данного генератора строится тонкий пограничный слой, а все остальное пространство жидкости разбивается гексаэдральными конечными объемами, что улучшает точность расчета. Полученные результаты также будут сравниваться для двух расчетных пакетов, как и в остальных рассматриваемых случаях расчетов данной задачи, ANSYS CFX и ANSYS Fluent.

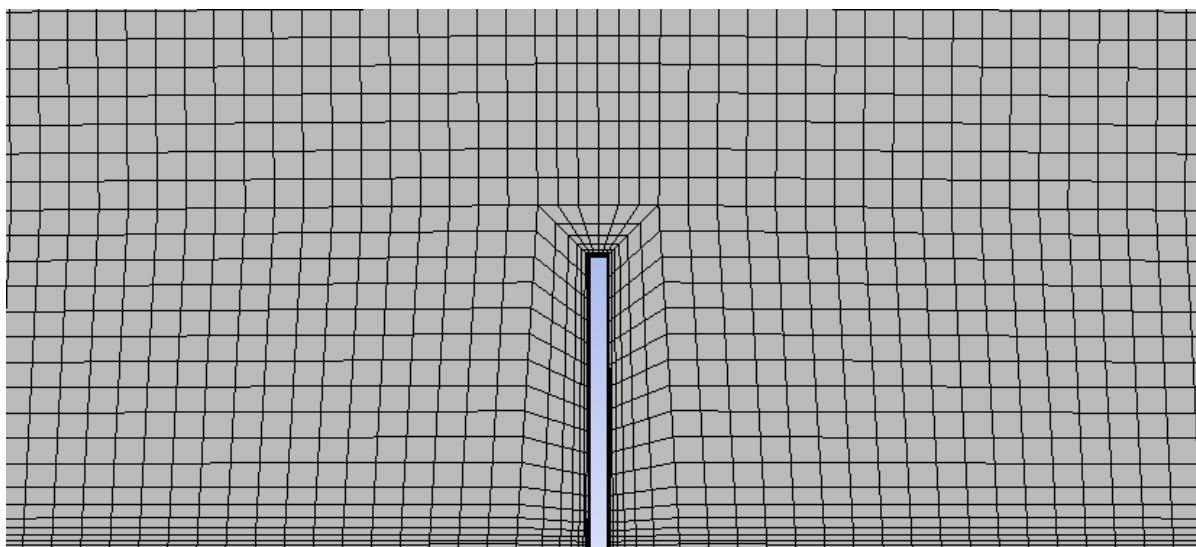


Рис. 54. Расчетная модель с пограничным слоем

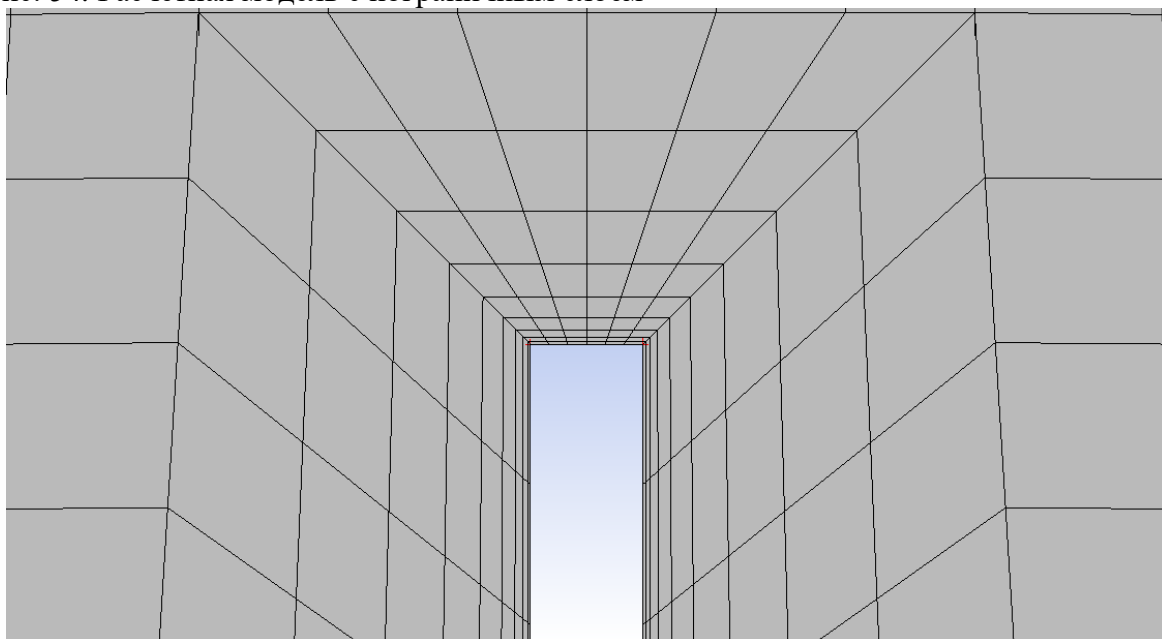


Рис. 55. Пограничный слой между жидкостью и пластиной

Пограничный слой моделируется следующим образом: средний размер конечного элемента сетки водного пространства равен 10 см, первый элемент пограничного слоя имеет толщину в 50 раз меньшую, чем средний размер элемента сетки водного пространства, т.е. 2 мм. Коэффициент роста конечных объемов между слоями пограничного слоя равен 1,2. Дополнительно пограничный слой был смоделирован в месте соприкосновения жидкости и нижней стенки сосуда (см. Рис. 56).

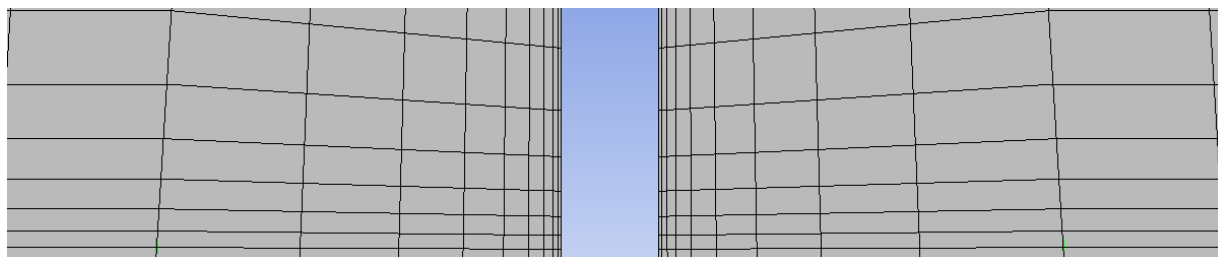


Рис. 56. Пограничный слой между жидкостью и дном сосуда

На Рис. 57 – 68 представлены результаты распределений поля скорости потока и компонент скоростей потока вдоль осей x и y .

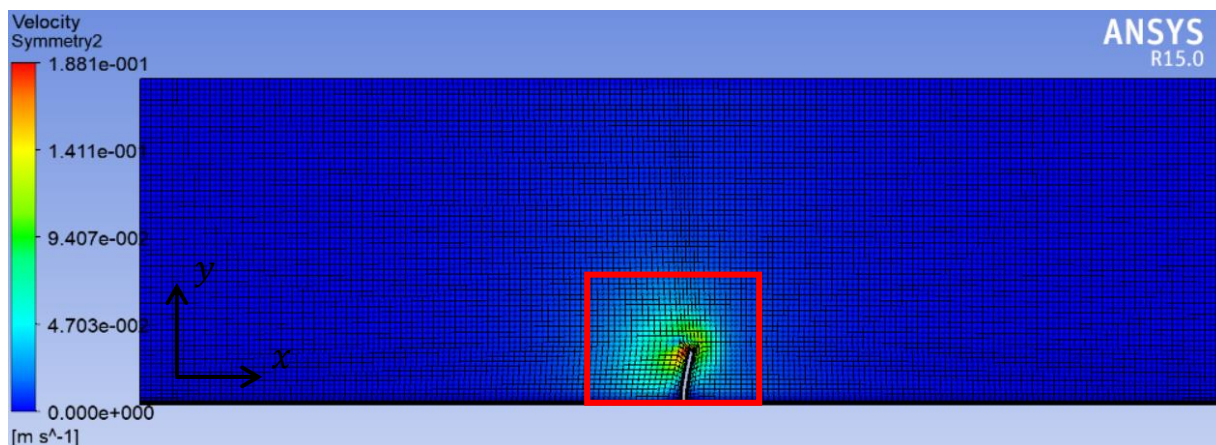


Рис. 57. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

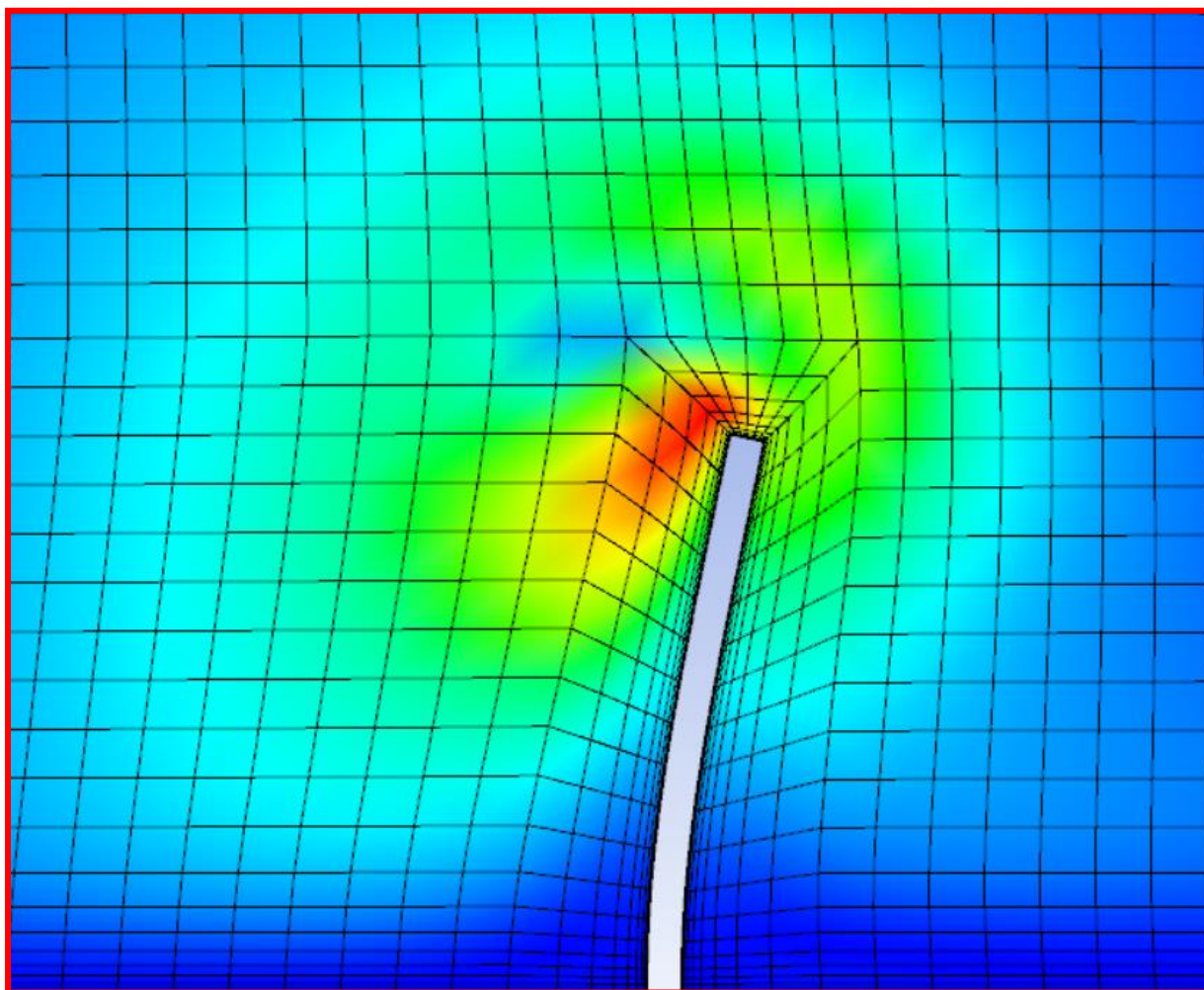


Рис. 58. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS CFX)

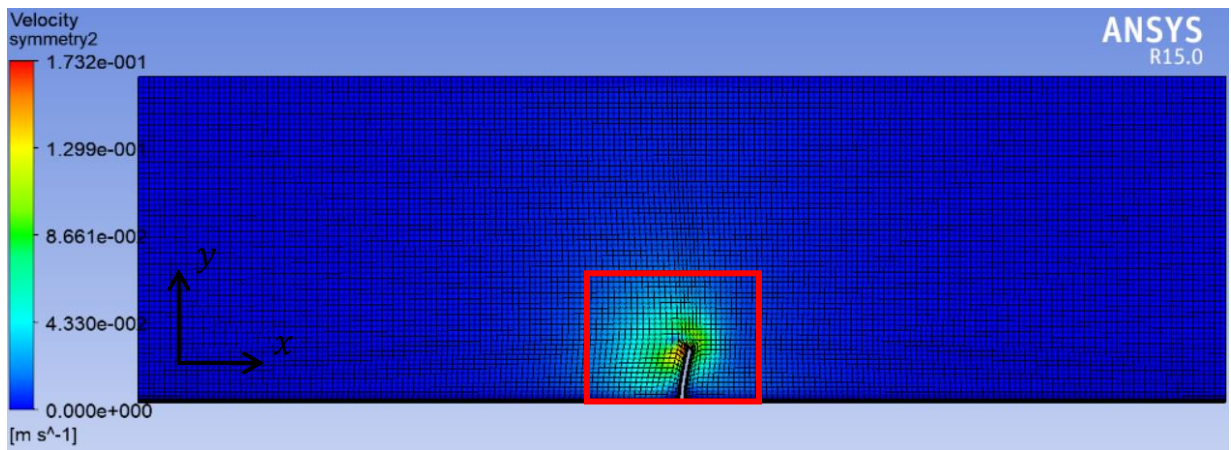


Рис.59. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

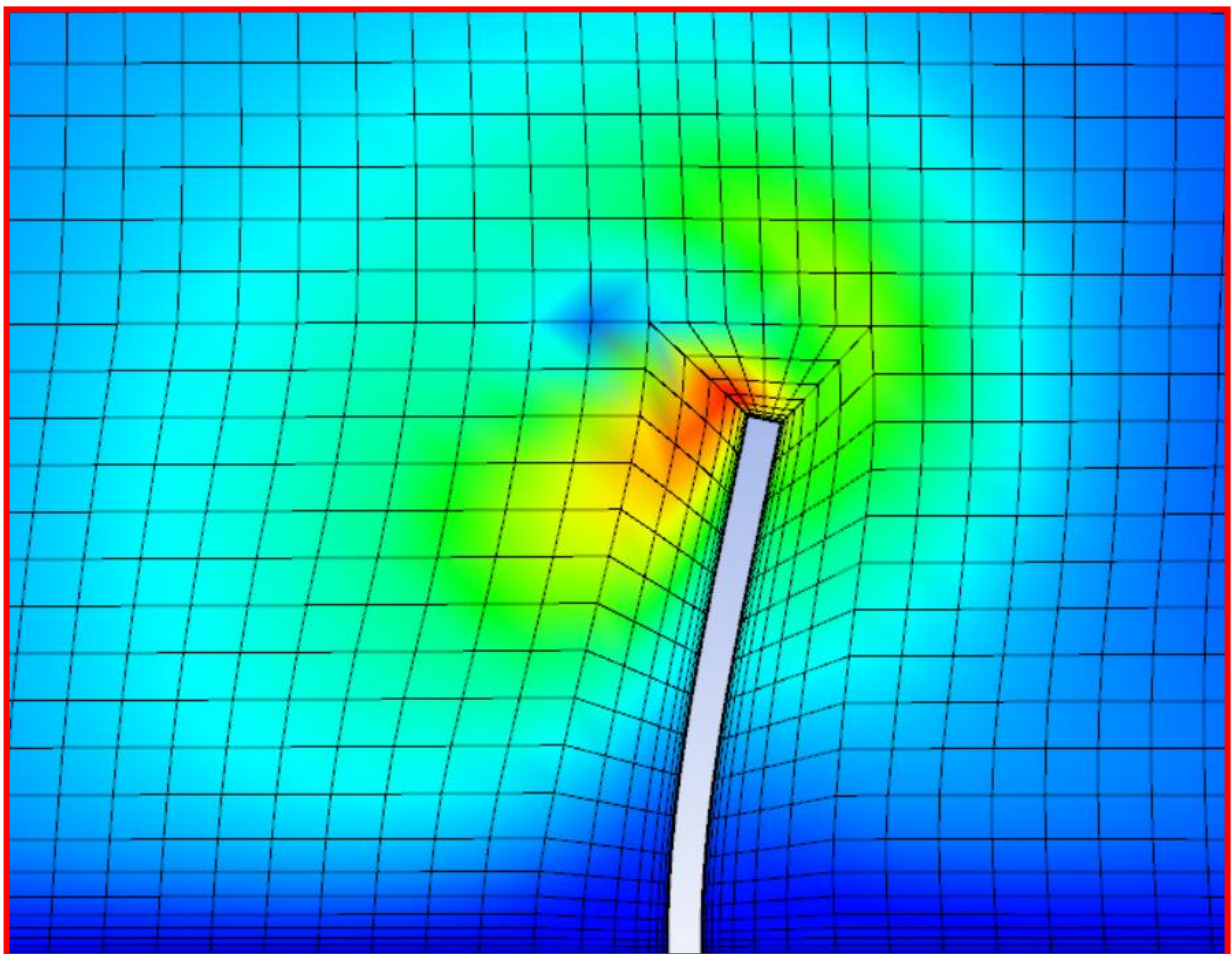


Рис.60. Скалярное поле скоростей потока жидкости (ANSYS Fluent)

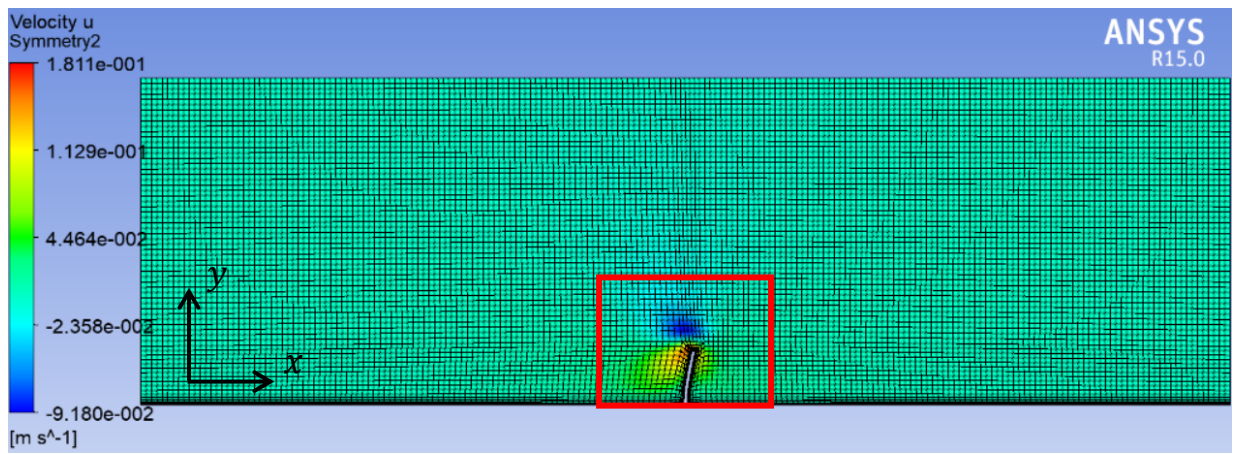


Рис.61. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

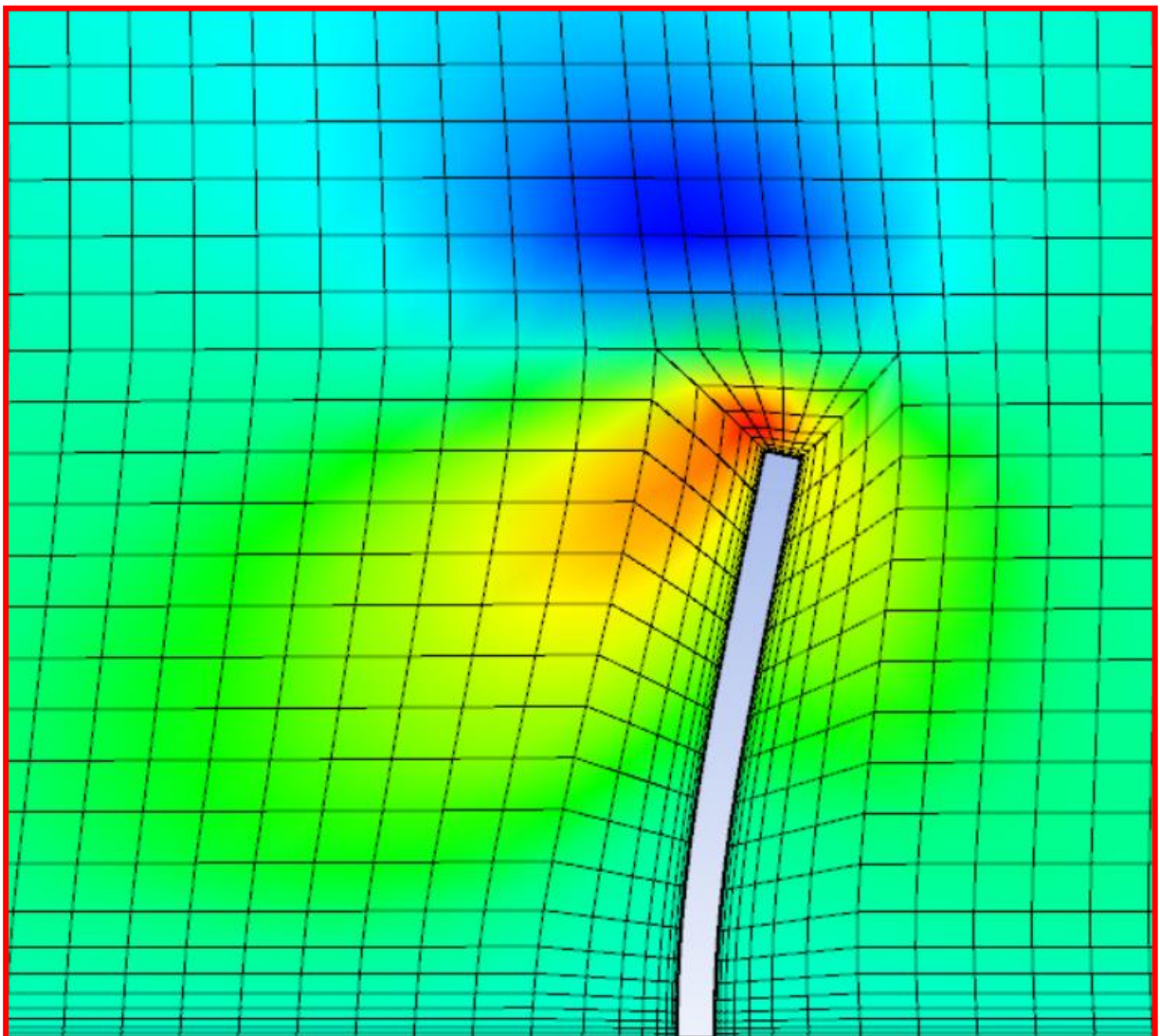


Рис.62. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS CFX)

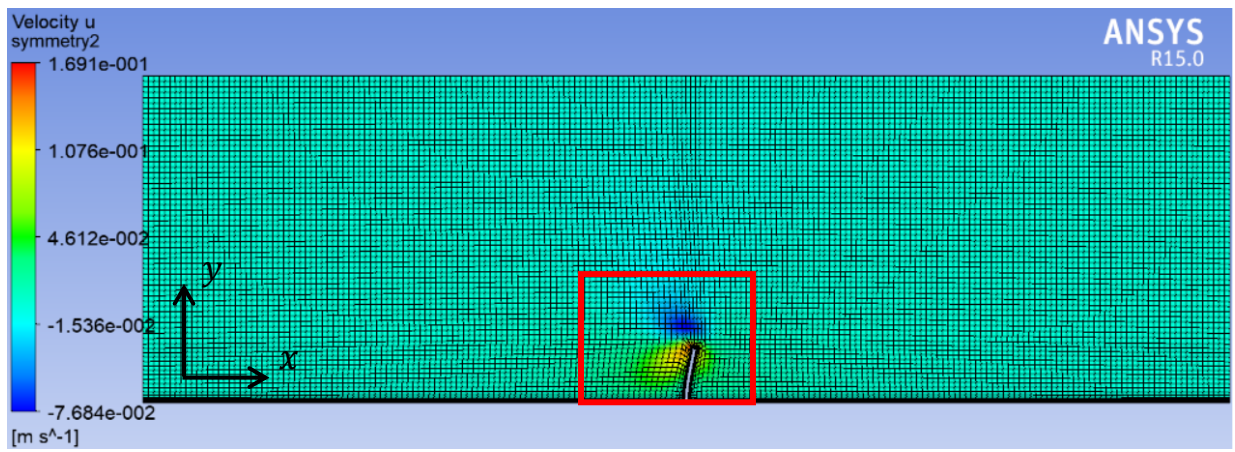


Рис.63. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

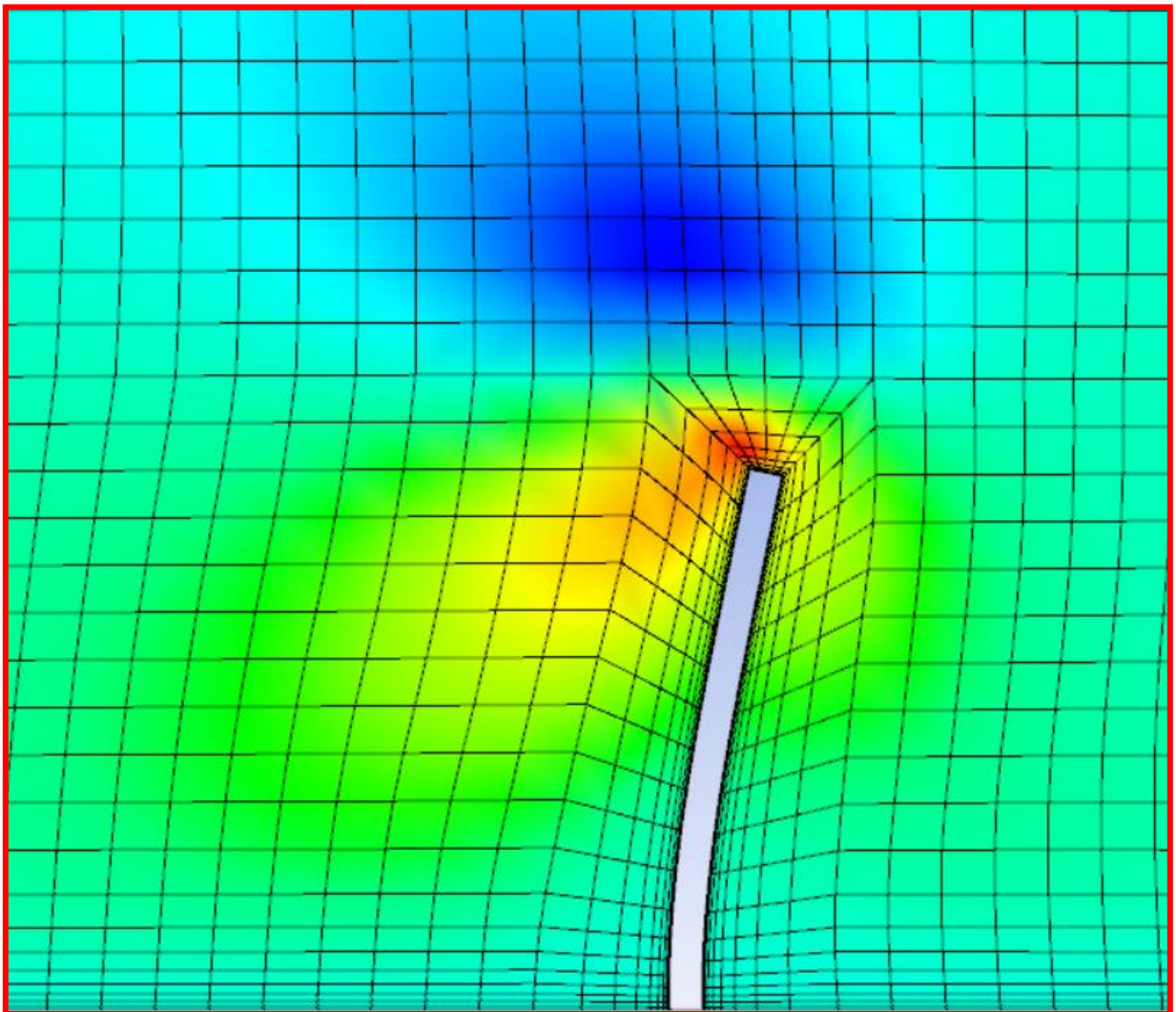


Рис.64. Скорость потока вдоль оси x (ANSYS Fluent)

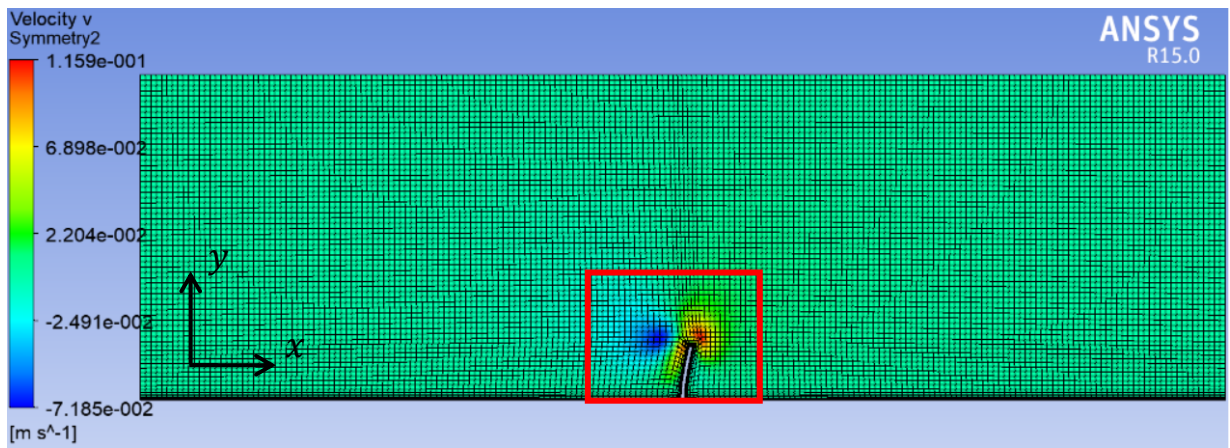


Рис.65. Скорость потока вдоль оси у (ANSYS CFX)

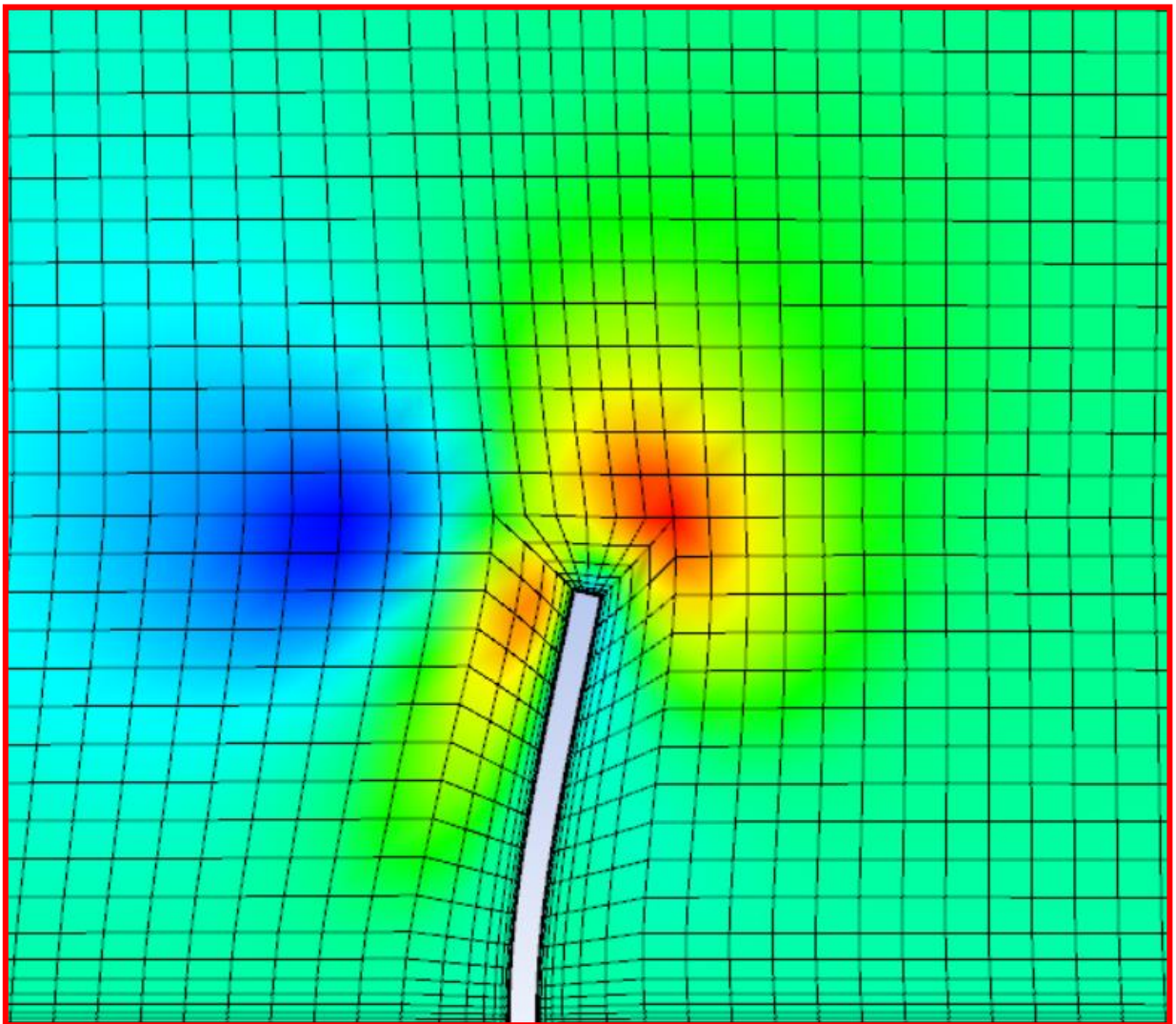


Рис.66. Скорость потока вдоль оси у (ANSYS CFX)

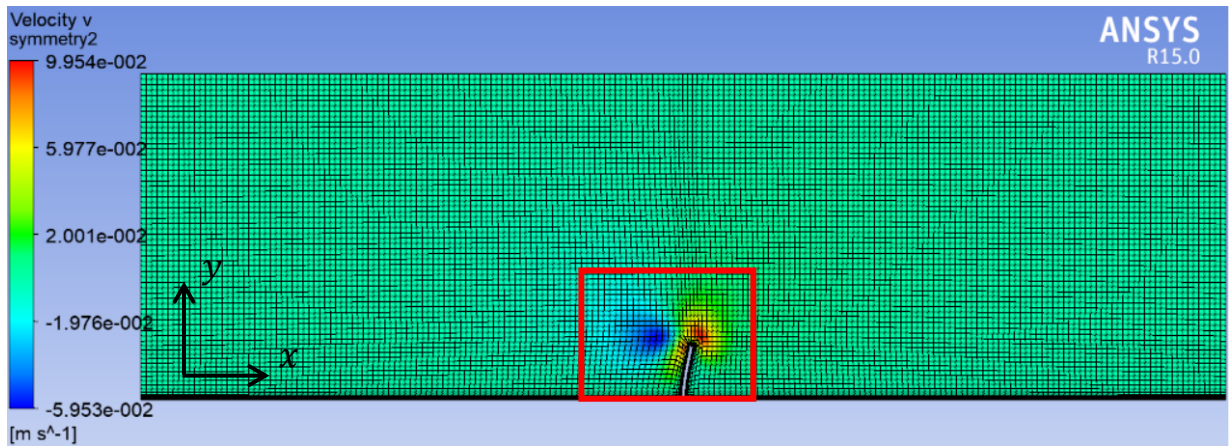


Рис.67. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

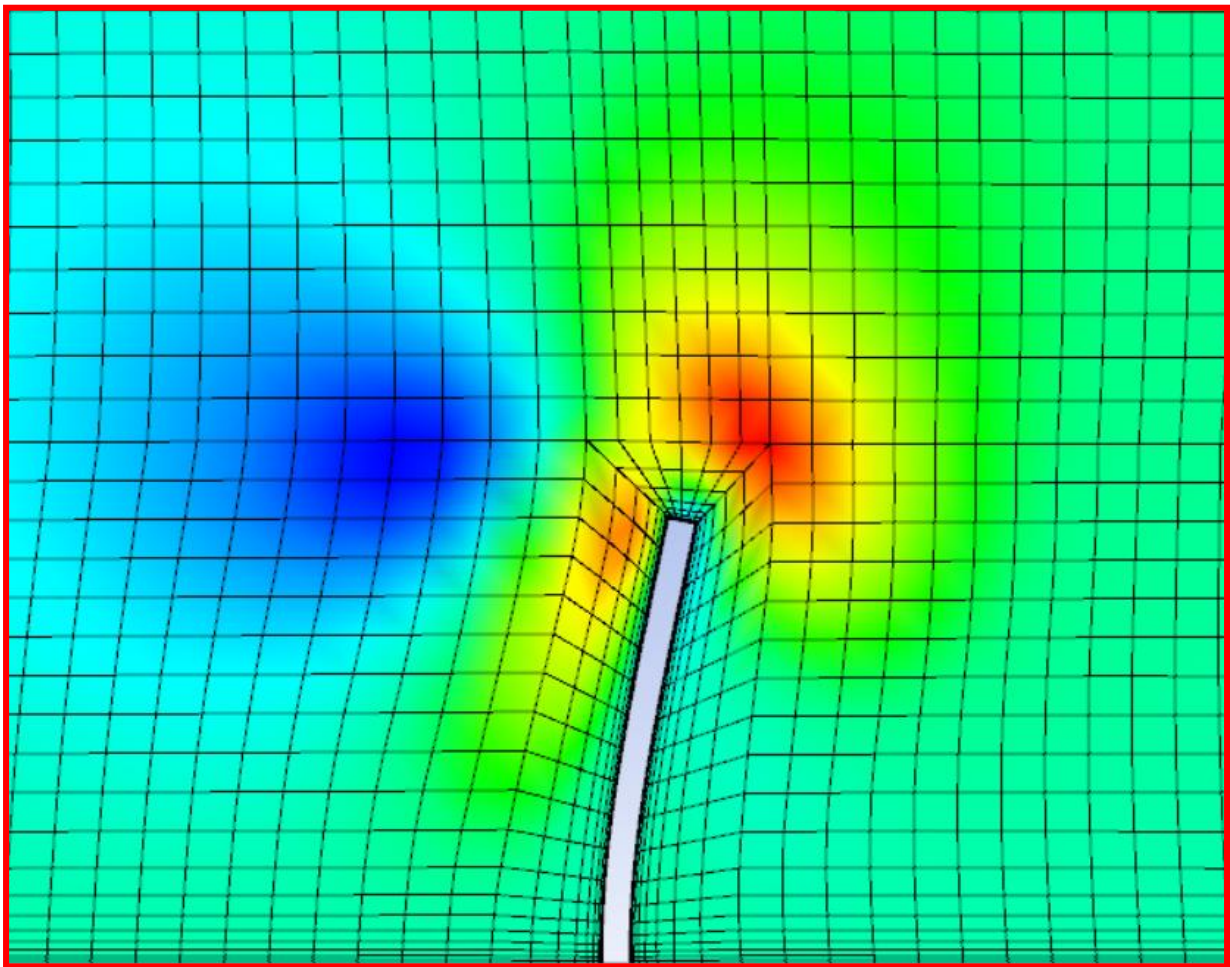


Рис.68. Скорость потока вдоль оси y (ANSYS Fluent)

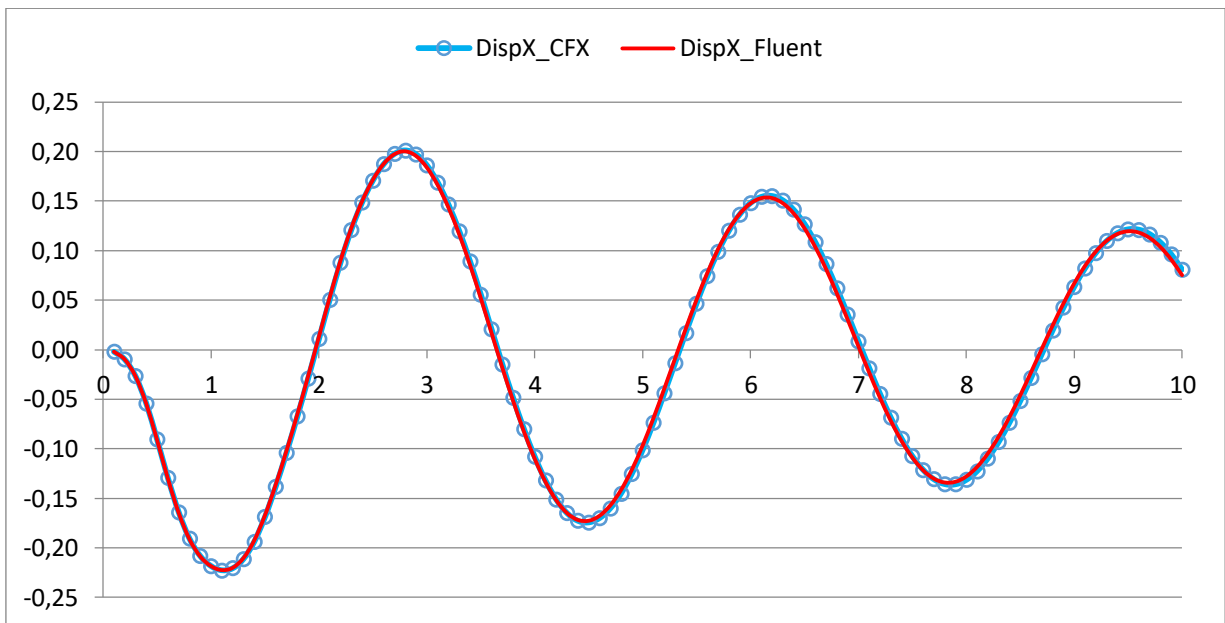


Рис.69. Перемещение верхнего края пластины вдоль оси x

На Рис. 69 видно, что для выбранной модели пограничного слоя обе используемые расчетные программы показывают одинаковые перемещения верхнего края пластины вдоль оси x . Это также говорит о том, что для решения нашей задачи в данной постановке можно использовать обе расчетные программы. Как показали расчеты, обе модели с пограничным слоем дают в целом одинаковые результаты. В силу простоты геометрии модели, очевидно, что предпочтительнее использовать вторую модель пограничного слоя, так как для неё используются гексаэдральные конечные объемы, которые выигрывают по точности у конечных объемов тетраэдральной формы.

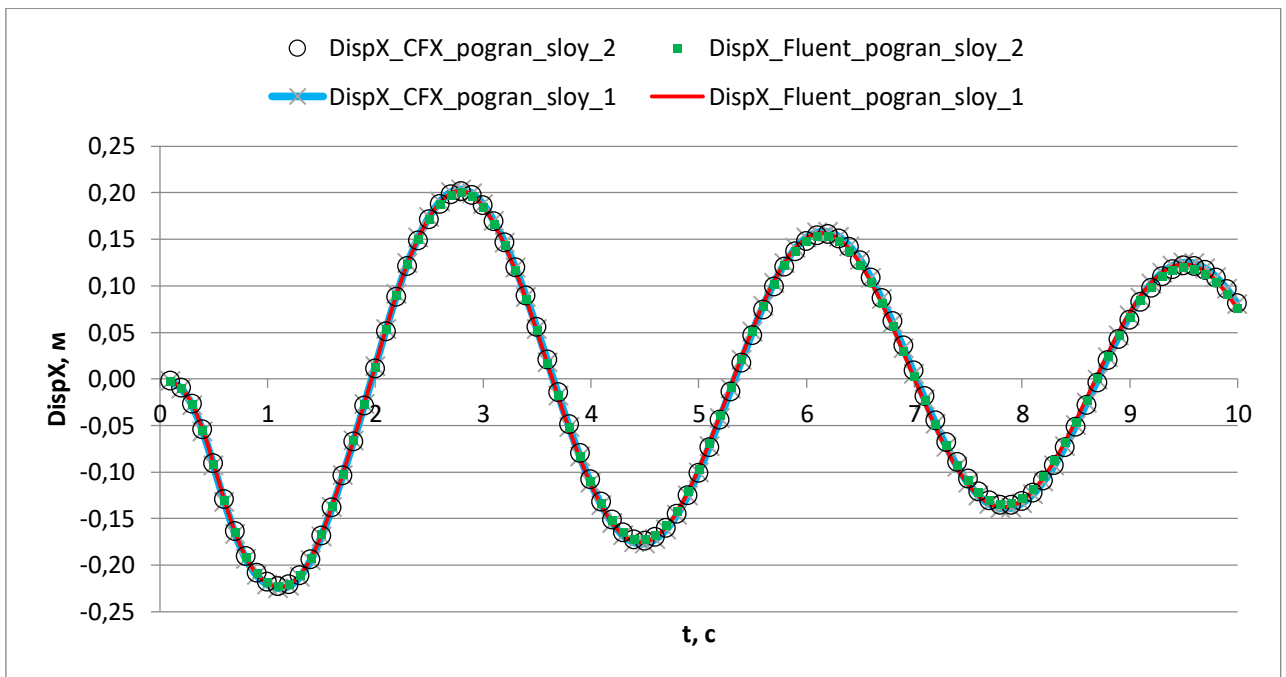


Рисунок 70. Перемещение верхнего края пластины вдоль оси x

Как видно из приведенных результатов, для решения данной задачи лучше использовать вторую модель пограничного слоя. Это не навредит точности результатов, но значительно уменьшит время расчета.

Проанализировав полученные результаты для всех численных моделей поставленной задачи (см. Таблица №1), приходим к выводу о том, что для решения задачи необходимо использовать первую модель с размером конечного элемента жидкого пространства равного 10 см. Данная модель является оптимальной с точки зрения точности полученных результатов и требований к вычислительным ресурсам. Таким образом, данная модель обеспечивает выполнение двух основных критериев: точность результатов и затраченное на расчет время.

Таблица №1. Характеристики численных моделей

№ модели	Характеристики модели
1	размер КЭ жидкого объема 10 см, форма элемента - гексаэдр
2	размер КЭ жидкого объема 5 см, форма элемента - гексаэдр
3	пограничный слой с тетраэдрами, средний размер КЭ жидкого объема 10см
4	пограничный слой с гексаэдрами, средний размер КЭ жидкого объема 10см

ВТОРАЯ ЧАСТЬ. ВИБРАЦИИ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ НАГРУЗОК

Во второй части работы исследуются свободные колебания в воздухе и воде стальной пластины жестко заделанной с одной стороны при действии импульсной нагрузки, а также вынужденные колебания под действием внешней периодической нагрузки.

2.1 Колебания стальной пластины в воде при импульсном воздействии

Для того чтобы перейти к вынужденным колебаниям пластины, для начала нам необходимо определить частоту свободных колебаний пластины в жидкости. Если определение частоты свободных колебаний пластины в воздухе не составляет труда, то определение частоты свободных колебаний пластины в воде становится нетривиальной задачей. Для нахождения собственных частот колебаний пластины в воде рассмотрим решение следующей связанной задачи в динамической постановке: на одну из поверхностей пластины прикладывается начальное давление величиной 250 Па, действующее на пластину в течение 0,2 с. Габариты пластины представлены на Рис. 71. Как и в первой части работы рассматривается пластина, жестко заделанная на дне контейнера, который заполнен водой.

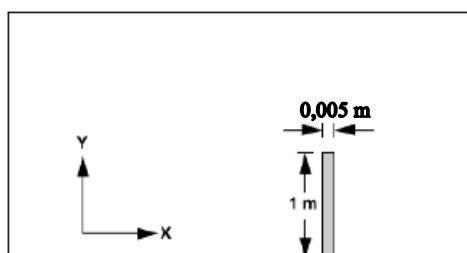


Рис. 71. Тонкая пластина, заделанная на дне контейнера.

Ширина пластины такая же, как и в задачах, рассмотренных в первой части данной работы, 0,4 м. Начальное давление, действующее на пластину, подобрано таким образом, чтобы максимальное отклонение пластины составляло порядка 1 см.

Материал пластины – сталь. Механические характеристики стали:

- модуль упругости, $E = 210$ ГПа;
- плотность, $\rho = 7850$ кг/м³;
- коэффициент Пуассона, $\nu = 0,3$.

Свойства воды:

- плотность, $\rho = 1000$ кг/м³;
- коэффициент динамической вязкости, $\mu = 0,0008899$ Па · с.

Для поиска величины начального давления был проведен статический анализ прогиба данной пластины, который показал, что при приложении на одну сторону пластины давление 250 Па, максимальное отклонение последней составит порядка 1 см. Конечно – элементная модель и результаты статического анализа приведены на Рис. 72 и 73. Размер конечного элемента, описывающего пластину, равен 2 см.

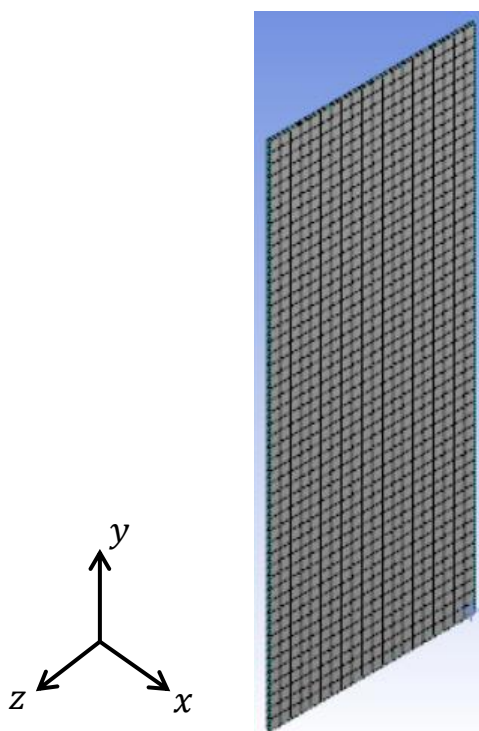


Рис. 72. Конечно – элементная модель пластины

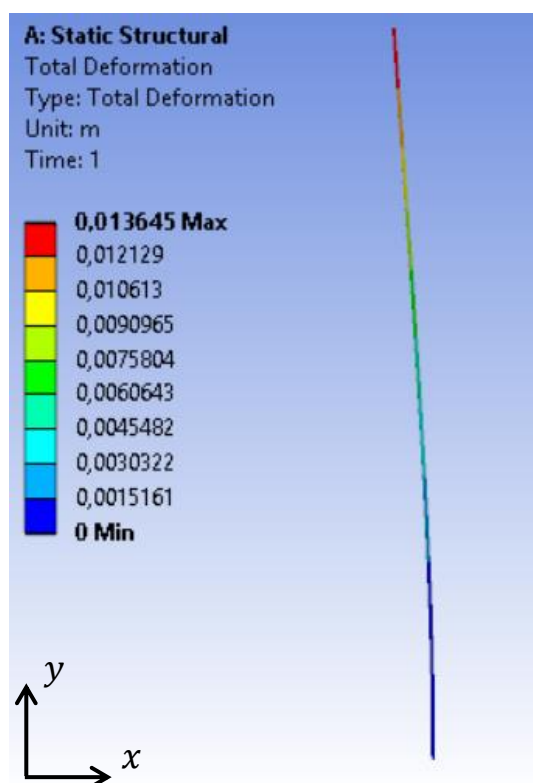


Рис. 73. Результат статического анализа пластины

Для решения задачи о колебаниях пластины в воде под действием импульсной нагрузки используется численная модель номер 1, полученная в первой части работы (см. Таблицу №1). Размеры водного пространства остаются такими же, как и в задачах рассмотренных ранее. Меняется только толщина и материал пластины. Время моделирования процесса колебаний пластины в воде устанавливается равным 2 секундам, для того чтобы проследить затухание колебаний.

В задачах, представленных в первой части работы, использовались две расчетные программы, ANSYS CFX и ANSYS Fluent, которые показывали одинаковые результаты. Здесь мы остановимся на одной из них, ANSYS CFX, и все расчеты будем проводить в ней.

Так как расчет длится 2 секунды, т.е. нестационарный процесс, необходимо выбрать момент времени, в который необходимо фиксировать результаты. Выберем данный момент времени равный 0,3 секунды, предполагая, что за это время жидкость успевает разогнаться вместе с пластиной. С течением времени колебания пластины в воде будут резко

затухать, а нам необходимо зафиксировать отклонения пластины из состояния равновесия, это мы можем наблюдать в момент времени 0,3 секунды. На Рис. 74 – 79 представлены результаты распределений поля скорости потока и компонент скоростей потока вдоль осей x и y .

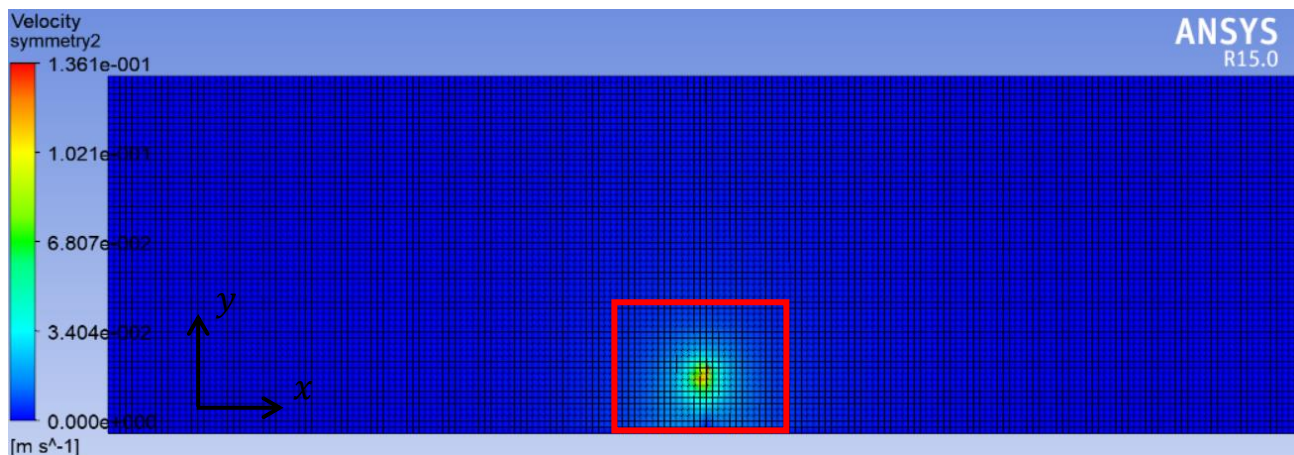


Рис. 74. Скалярное поле скоростей потока жидкости

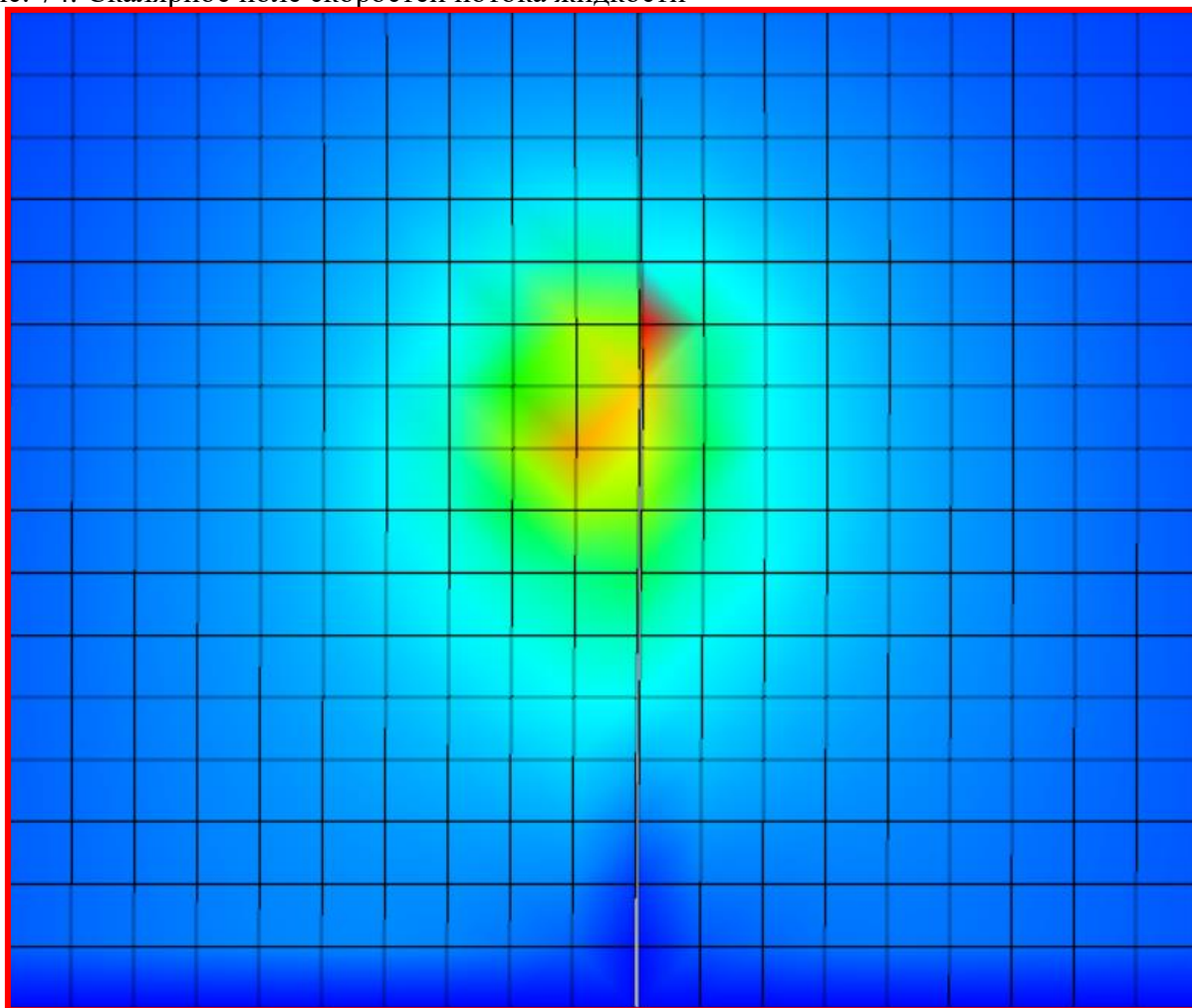


Рис. 75. Скалярное поле скоростей потока жидкости

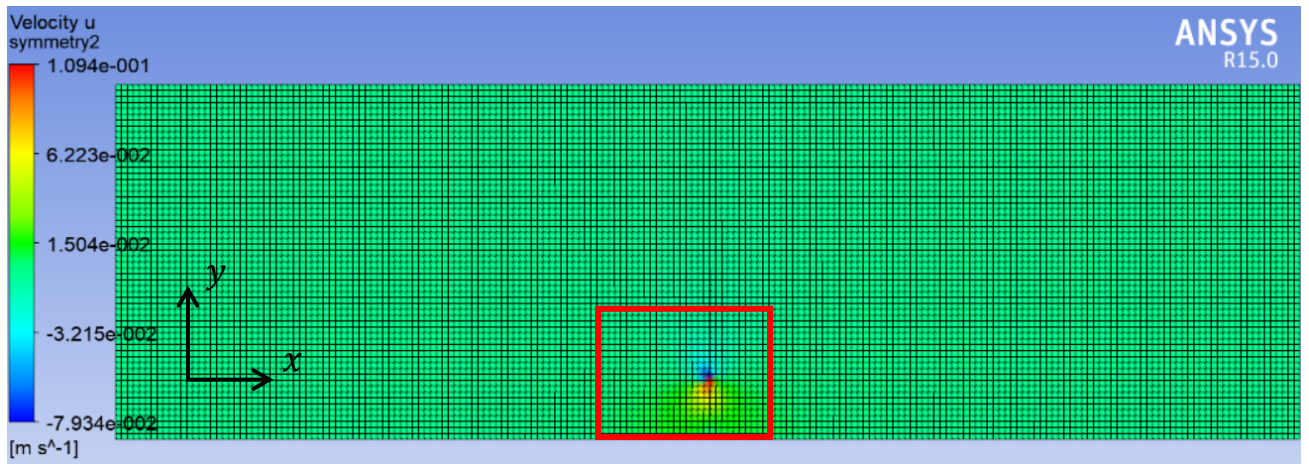


Рис.76. Скорость потока вдоль оси x

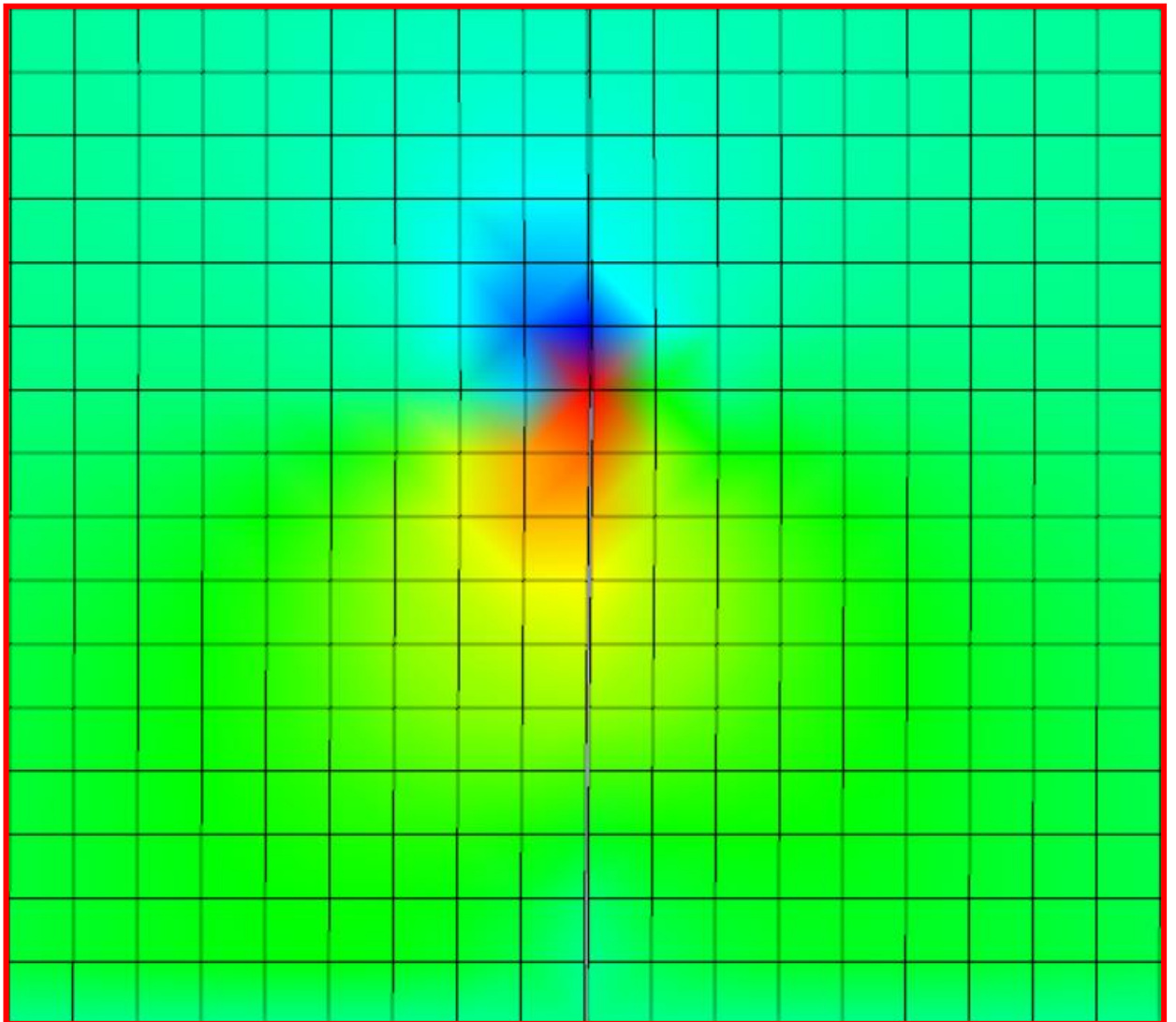


Рис.77. Скорость потока вдоль оси x

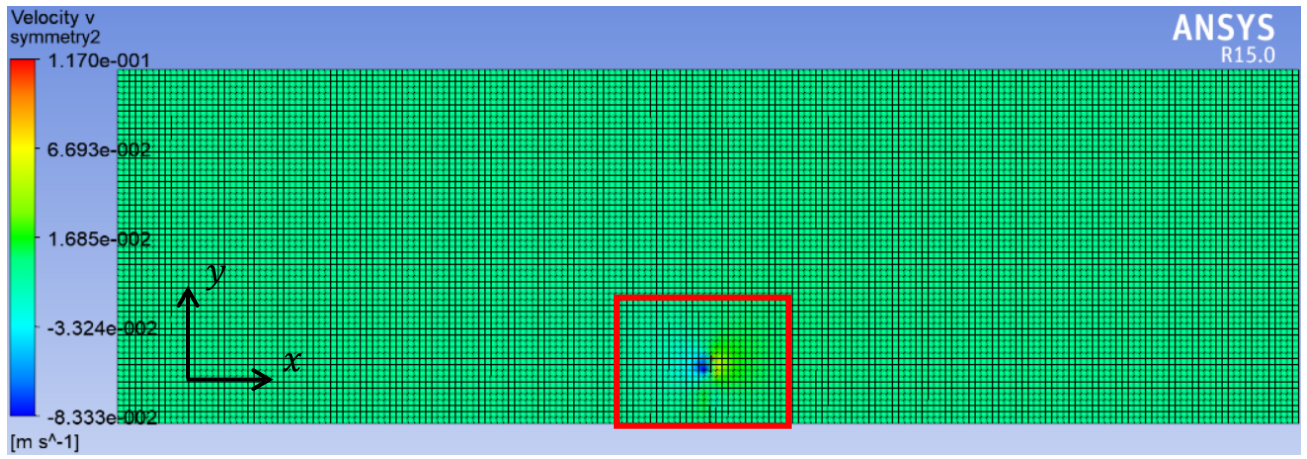


Рис.78. Скорость потока вдоль оси y

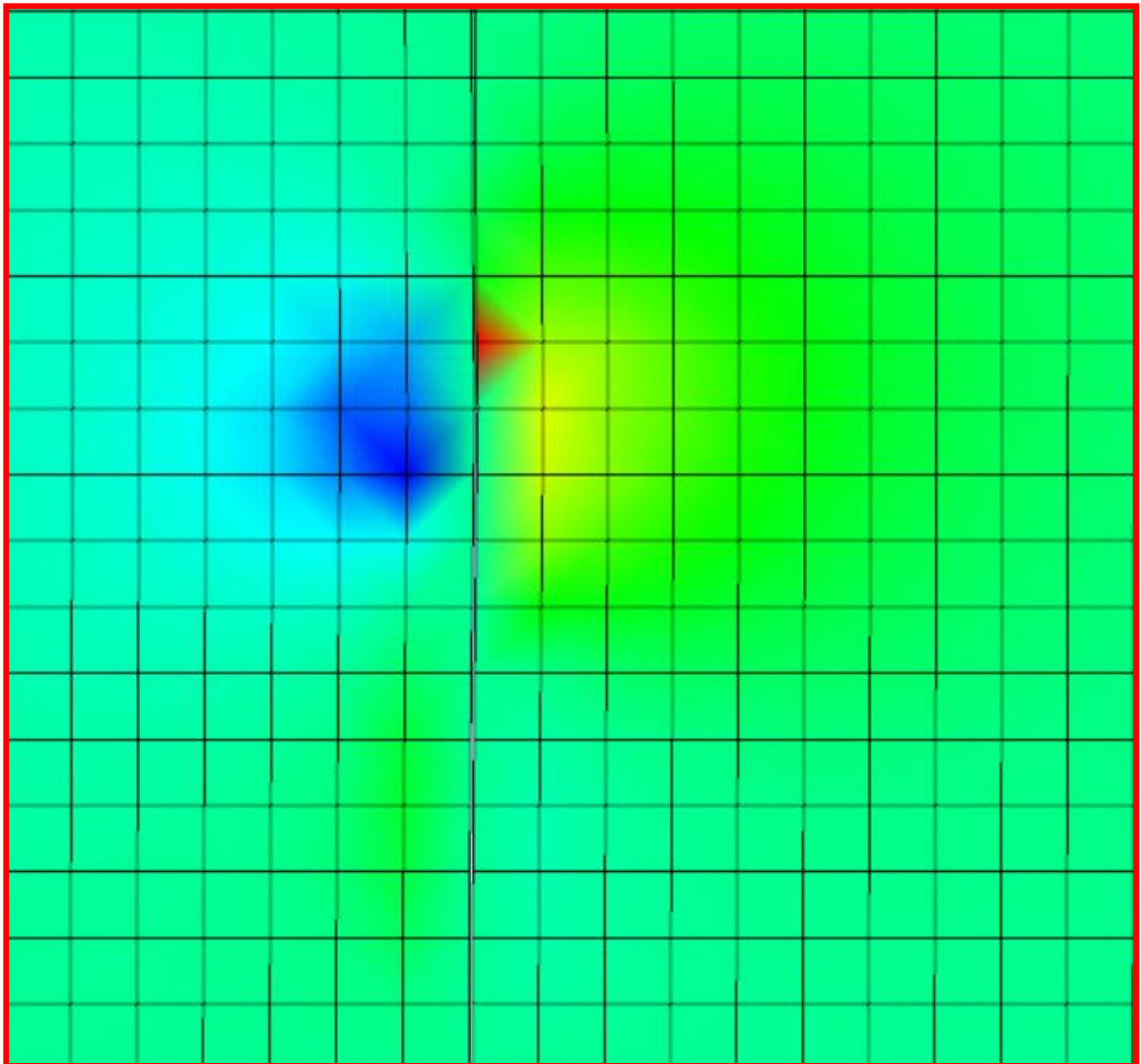


Рис.79. Скорость потока вдоль оси y

На Рис. 80 приведено распределение перемещений верхнего края пластины вдоль оси x при колебаниях в воде. На графике отчетливо наблюдается затухание амплитуды колебаний пластины. Это происходит из-за того, что жидкость обладает свойством вязкости, которая оказывает сопротивление движению пластины.

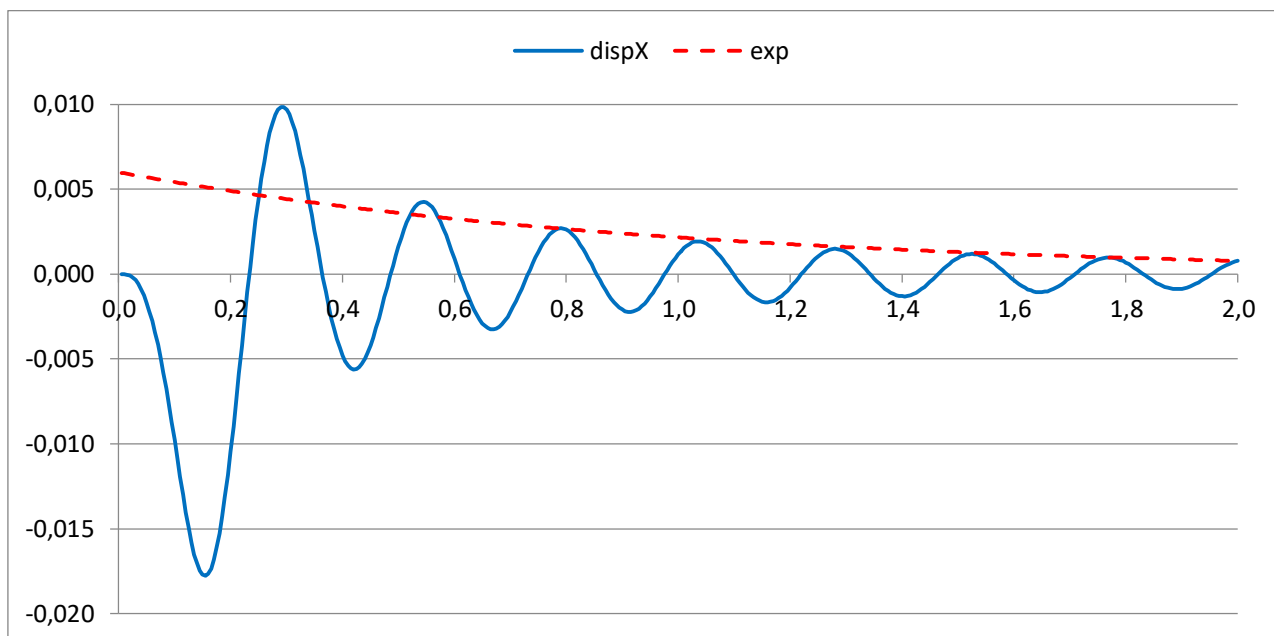


Рис.80. Перемещение верхнего края пластины вдоль оси x

Из графика на Рис. 80 определим частоту затухающих колебаний пластины в воде. Обратим внимание на то, что данном графике наблюдается переходной и установившийся режим колебаний. Все необходимые величины определяются нами на установившемся режиме колебаний пластины.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (61)$$

Для определения первой частоты свободных колебаний пластины в воде воспользуемся следующей формулой

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}, \quad (62)$$

где ω — частота затухающих колебаний пластины в воде,

ω_0 — частота собственных колебаний пластины в воде без учета демпфирования,

n — коэффициент затухания колебаний.

Значение частоты затухающих колебаний пластины в воде, ω , определяется с помощью периода затухающих колебаний, T

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (63)$$

значение T , определяется из графика затухающих колебаний (см. Рис. 80), $T = 0,26$ с, таким образом, $\omega = 24,165 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Коэффициент затухания n численно равен обратному времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Время жизни колебаний τ – это промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-nt}}{A_0 e^{-n(t+\tau)}} = e^{n\tau} = e. \quad (64)$$

Таким образом, коэффициент затухания n равен

$$n = \frac{1}{\tau}, \quad (65)$$

значение τ , определяется из графика затухающих колебаний (см. Рис. 80), $\tau = 0,98$ с, следовательно, $n = 1,0204$.

Зная величину коэффициента затухания n , определим первую частоту свободных колебаний пластины в воде, ω_0 , по формуле (62). После вычислений частота собственных колебаний воды имеет значение $\omega_0 = 24,237 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Значение первой частоты собственных колебаний пластины в воде будет нам необходимо для определения оценки присоединенных масс воды, образующихся при колебаниях пластины. Отметим, что на Рис. 80 помимо перемещения верхнего конца пластины вдоль оси x представлен график экспоненты $A_0 e^{-nt}$, описывающей затухание колебаний.

Также с помощью модального анализа была определена первая частота свободных колебаний пластины в воздухе. Значение первой частоты свободных колебаний пластины в воздухе нам также будет необходима для оценки присоединенных масс жидкости. На Рис. 81 приведены результаты модального анализа пластины в воздухе.

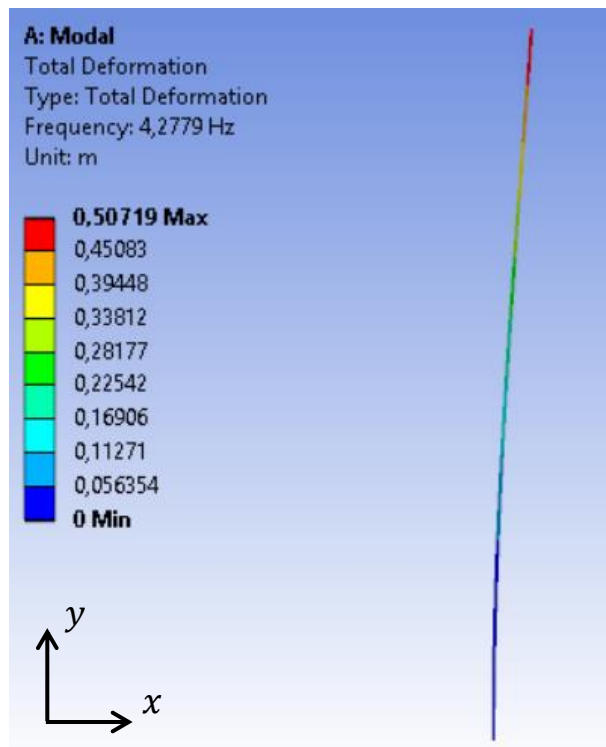


Рис. 81. Результат модального анализа пластины в воздухе

Исходя из модального анализа колебаний пластины в воздухе, первая собственная частота имеет значение $\omega_0^* = 4,2779 \frac{1}{c} = 26,879 \frac{\text{рад}}{c}$.

Далее будут рассмотрены вынужденные колебания пластины в воде и определена оценка присоединенных масс воды при колебаниях пластины.

2.2 Вынужденные колебания стальной пластины в воде под действием периодической нагрузки

В данной части работы будут рассмотрены вынужденные колебания пластины в жидкости под действием периодических нагрузок с разной частотой. Здесь необходимо построить АЧХ колебаний пластины в воде в зависимости от частоты вынуждающей нагрузки. Из теории вынужденных колебаний известно, что резонанс, то есть резкое возрастание амплитуды колебаний, наблюдается в том случае, когда частота свободных колебаний конструкции совпадает с частотой вынуждающей нагрузки. Таким образом, необходимо решать задачу FSI для пластины в воде под действием периодической нагрузки n число раз для построения АЧХ. По АЧХ определяем резонансную частоту колебаний пластины.

На Рис. 82 представлена АЧХ для рассматриваемого случая, построенная по 30 точкам, то есть для построения данной АЧХ понадобилось провести 30 расчетов FSI задачи для пластины в воде под действием периодической нагрузки с 30-ю разными частотами возбуждающей силы. Для решения задач FSI используется численная модель номер 1, полученная в первой части работы (см. Таблицу №2). Периодическая нагрузка прикладывается на одну из сторон пластины в следующем виде

$$P = P_0 \sin(\omega_i \cdot t), \quad (62)$$

где $P_0 = 250$ Па – начальное давление, ω_i – частоты периодической нагрузки, $i = 1 \dots 30$.

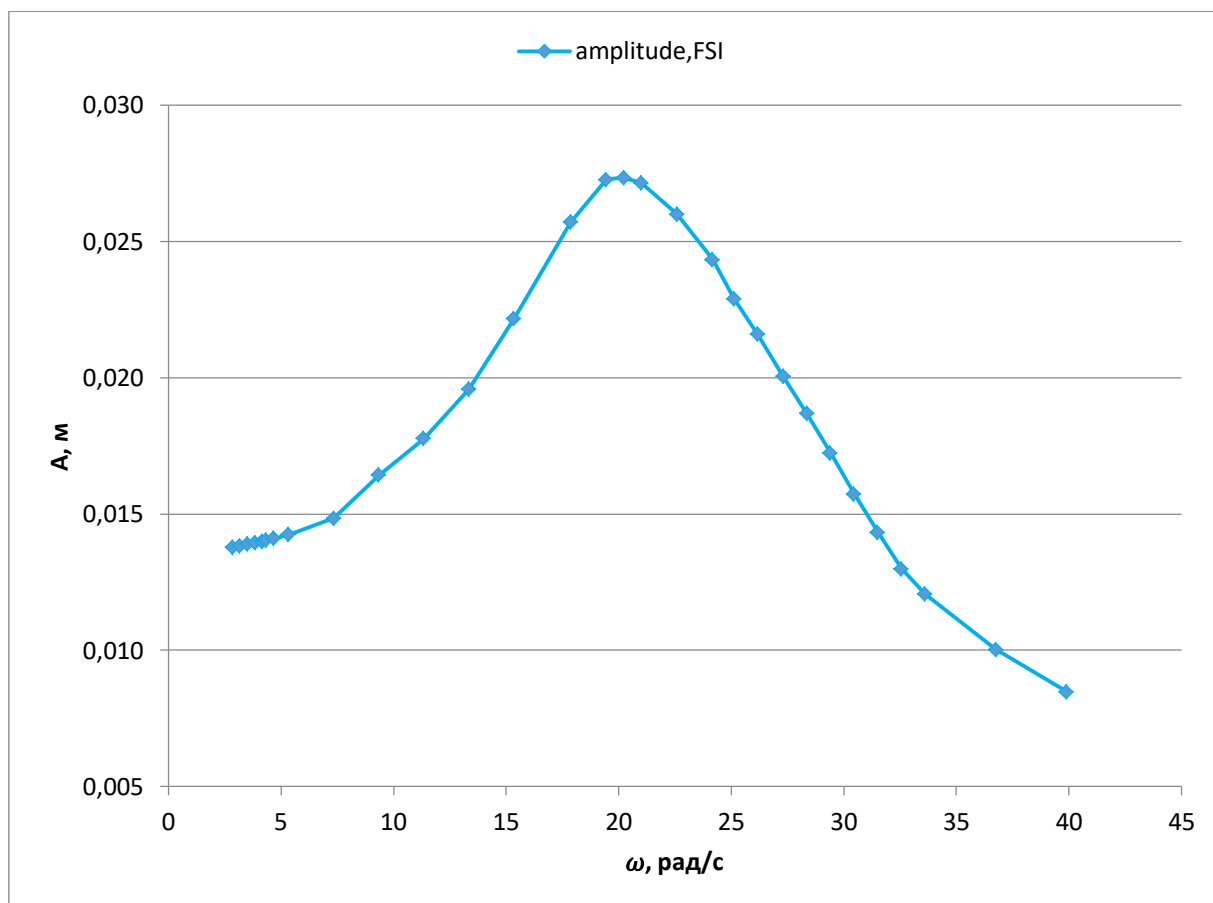


Рис. 82. АЧХ колебаний пластины в воде под действием периодической нагрузки

Из приведенной на Рис. №82 АЧХ можем определить резонансную частоту колебаний пластины в воде. В нашем случае резонансная частота – это частота, на которой достигается максимальная амплитуда колебаний

пластины. Таким образом, резонансная частота колебаний пластины в воде имеет значение $\omega_p = 20,23 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Как отмечалось выше, знание собственных частот колебаний пластины в воздухе и воде необходимы для оценки присоединенных масс жидкости вокруг пластины при её колебаниях. Оценка проводится по следующей формуле [2]

$$\omega_0^2 \approx \frac{\omega_0^{*2}}{1 + \frac{\lambda}{m}}, \quad (63)$$

$$\lambda = \left(\frac{\omega_0^{*2}}{\omega_0^2} - 1 \right) \cdot m, \quad (64)$$

где ω_0^* – первая частота свободных колебаний конструкции в воздухе, ω_0 – первая частота свободных колебаний конструкции в воде, m – масса конструкции. В нашем случае $m = 15,7$ кг. Подставив все полученные значения переменных в формулу (63), получим значение присоединенной массы воды пластины при колебаниях под действием импульсной нагрузки $\lambda = 3,61$ кг.

Так как задачи FSI в силу своей природы довольно ресурсоемкие, то решение n числа таких задач о колебаниях пластины в жидкости под действием различных нагрузок, чтобы исследовать напряженно-деформированное состояние колебательной системы, не слишком удобный метод. Возникает вопрос, можно ли избежать решения задач FSI и найти более простой способ решения задач о колебаниях конструкций в жидкости. Поскольку нам известна оценка присоединенных масс воды пластины, то можно предположить, что данная присоединенная масса воды распределена вокруг пластины равномерно и с учетом этого факта можем выполнить гармонический анализ. Но необходимо заметить, что масса пластины в силу наличия присоединенной массы воды увеличилась на величину λ , то есть

$$m_{\text{нов}} = m + \lambda = 15,7 \text{ кг} + 3,61 \text{ кг} = 19,31 \text{ кг}. \quad (65)$$

В связи с тем, что объем V пластины постоянен, а масса изменилась, изменилась и плотность пластины

$$\rho = \frac{m_{\text{нов}}}{V} = \frac{19,31 \text{ кг}}{0,002 \text{ м}^3} = 9655 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (66)$$

Теперь можем провести гармонический анализ пластины с новой плотностью материала и построить АЧХ колебаний пластины с учетом наличия присоединенной массы воды.

Как было отмечено выше в силу наличия вязкости вода демпфирует амплитуду свободных колебаний пластины. Таким образом, для того чтобы можно было сравнивать результаты серии задач FSI и гармонического анализа, последний необходимо моделировать с учетом демпфирования в модели. Демпфирование для расчетной модели гармонического анализа будем определять с помощью констант Релея α и β [12]. Матрица демпфирования $[C]$ рассчитывается с использованием этих констант в виде множителей для матрицы масс $[M]$ и матрицы жесткости $[K]$

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (67)$$

Коэффициент α подразумевает под собой наличие в системе инерциального демпфирования (вязкого трения). Коэффициент β описывает демпфирование, связанное с энергетическими потерями (конструкционное), обусловленными силами сухого (кулоновского) трения. Значения коэффициентов α и β обычно напрямую не определяются, но рассчитываются по коэффициентам демпфирования ξ . ξ – отношение фактического демпфирования к критическому демпфированию для конкретного режима вибрации. Критическое демпфирование определяется как пороговое значение между колебательным и не колебательным поведением, где коэффициент демпфирования единице. Если ω_k - собственная частота моды колебаний k , то α и β удовлетворяют следующему соотношению [12]

$$\alpha/2\omega_k + \beta\omega_k/2 = \xi. \quad (68)$$

В нашем случае коэффициент демпфирования ξ может быть получен с помощью графика перемещений верхнего края пластины вдоль оси x (см. Рис. 80), который был построен для случая колебаний пластины в жидкости под действием импульсной нагрузки. Для этого определим сначала

логарифмический декремент затухания δ – натуральный логарифм отношения амплитуд затухающего колебания в моменты времени, разделенные промежутком в один период T [2]

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}, \quad (69)$$

$$\delta = nT, \quad (70)$$

где A – амплитуда колебаний пластины. Величина логарифмического декремента затухания имеет значение $\delta = 0,265$. С помощью декремента затухания колебания определим коэффициент демпфирования ξ следующим соотношением [2]

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}. \quad (71)$$

Величина коэффициента демпфирования имеет значение $\xi = 0,0422$.

Учтем в численной модели гармонического анализа инерциальное демпфирование (вязкое трение), то есть, пренебрегая величиной коэффициента β , определим значение коэффициента α в виде

$$\alpha = 2\omega_k \xi. \quad (72)$$

В нашем случае исследуется первая мода колебаний пластины, поэтому для определения коэффициента α воспользуемся первой частотой колебаний пластины в воде, имеющей значение $\omega_0 = 24,237 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. В результате вычислений коэффициент α принимает значение $\alpha = 2,046$. Используя полученные параметры демпфирования в численной модели гармонического анализа с учетом присоединенной массы воды, получим АЧХ колебаний и сравним это с АЧХ, полученной решением серии задач FSI для вынужденных колебаний пластины в воде. Результаты гармонического анализа приведены на Рис. 83.

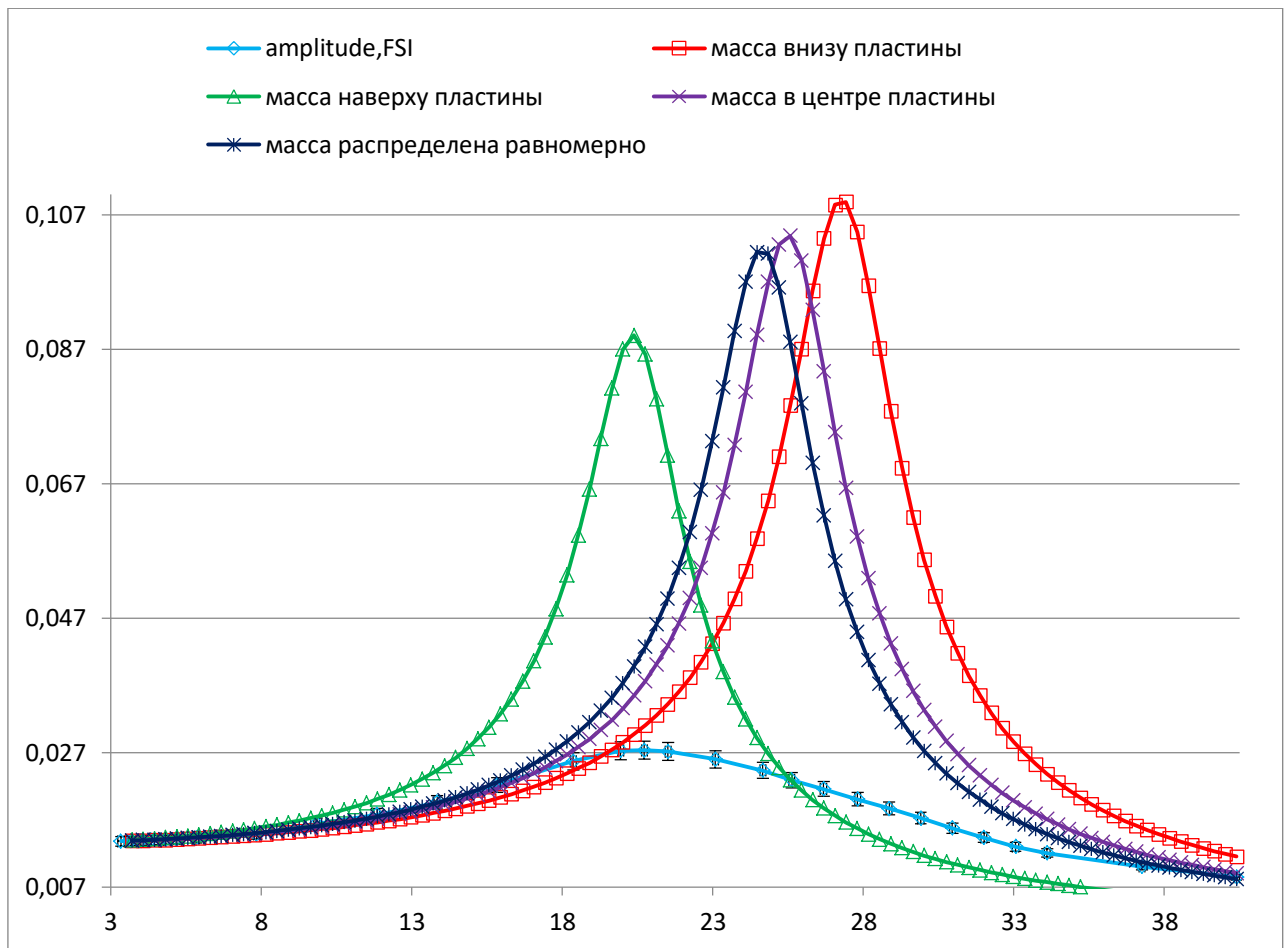


Рис. 83. Сравнение АЧХ, полученной с помощью серии задач FSI и АЧХ, полученных с помощью гармонического анализа для различных вариантов распределения присоединенной массы воды

Помимо равномерного распределения присоединенной массы воды вокруг пластины были рассмотрены случаи, когда присоединенная масса помещается наверх, вниз и в центр пластины.

Очевидно, что в реальности при колебаниях пластины в воде большой объем присоединенной массы будет скапливаться наверху пластины. Из графика на Рис. 83 видно, АЧХ при распределении присоединенной массы воды сверху пластины имеет резонансную частоту $\omega_{p1} = 19,89 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ близкую к резонансной частоте для АЧХ, построенной методом решения серии задач FSI, $\omega_p = 20,23 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Таким образом, для гармонического анализа предполагается использовать данное распределение присоединенных масс воды. Также можем сделать вывод о том, метод гармонического анализа с добавлением присоединенной массы воды можно использовать на низких

собственных частотах колебаний до резонанса (в промежутке от 3 до $13 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$). На всех остальных собственных частотах колебаний использовать метод гармонического анализа с учетом присоединенной массы воды не рекомендуется. Несовпадение АЧХ наблюдается из-за того, что в реальности вода не распределена по пластине равномерно, а находится в постоянном движении вокруг пластины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части работы мы познакомились с моделированием взаимодействия жидкости и колеблющегося в ней тела с помощью метода FSI. Решение задач методом FSI является довольно ресурсоемким процессом, поэтому при решении задачи о колебаниях пластины в жидкости было проведено исследование четырех численных моделей и выбрана одна оптимальная. Выбранная модель является оптимальной с точки зрения точности результатов и требований к вычислительным ресурсам. Таким образом, данная модель обеспечивает выполнение двух основных критериев: точность результатов и затраченное на расчет время.

Во второй части работы были исследованы колебания стальной пластины в воде под действием двух видов нагрузок: импульсной и периодической. С помощью колебаний пластины под действием импульсной нагрузки была получена оценка первой собственной частоты свободных колебаний пластины в воде. Определена первая собственная частота колебаний пластины в воздухе. Далее была решена серия задач FSI для пластины под действием периодической нагрузки, построена АЧХ колебаний, по которой определена оценка резонансной частоты. С помощью первой частоты колебаний пластины в воздухе и воде была получена оценка присоединенной массы воды при колебаниях пластины. Также была произведена попытка уйти от решения серии задач FSI для колебаний пластины в воде к решению задачи гармонического анализа колебаний пластины, с учетом наличия распределенных по пластине присоединенных масс воды. Для гармонического анализа колебаний пластины была построена свои АЧХ, которые сравнивались с АЧХ, полученной путем решения серии задач FSI. Из сравнения полученных АЧХ делается вывод о возможности использования гармонического анализа для исследования напряженно-деформированного состояния пластины при её колебаниях. Метод гармонического анализа с добавлением присоединенной массы воды можно

использовать на низких собственных частотах колебаний до резонанса (в промежутке от 3 до $13 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$). На всех остальных собственных частотах колебаний использовать метод гармонического анализа с учетом присоединенной массы воды не рекомендуется.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) В.В. Алексеев, Д.А. Индейцев, Ю.А. Мочалова. Колебания упругой пластины контактирующей со свободной поверхностью тяжелой жидкости // Журнал технической физики. – 2002. – № 5. – С. 16-19.
- 2) Берендеев Н.Н. Исследование влияния уровня внутреннего трения и способа возбуждения на вынужденные колебания системы – Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2012. – 85 с.
- 3) Бирбраер А. Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость – Санкт-Петербург: Наука, 1998. – 255 с.
- 4) Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 томах / под редакцией Я.Г. Поновко. – Москва: Машиностроение, 1968. – 2 т.
- 5) Болотин В.В. Колебания линейных систем: справочник: в 6 томах – Москва: Машиностроение, 1978. – 1 т.
- 6) Короткин А.И. Присоединенные массы судна: Справочник – Ленинград: Судостроение, 1986. – 312 с.
- 7) Кустова Е. В. Уравнения теории пограничного слоя – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет, 2013. – 85 с.
- 8) Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа – Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 676 с.
- 9) В.А. Постнов, В.С. Калинин, Д.М. Ростовцев. Вибрация корабля – Ленинград: Судостроение, 1983. – 248 с.
- 10) Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций / под общей редакцией В.И. Першина. – Ленинград: Государственное союзное издательство судостроительной промышленности, 1963. – 444 с.

- 11) Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / под редакцией Л.Г. Лойцянского. – Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. – 712 с.
- 12) A. Zilian, H. Irschik, A.K. Belyaev (eds). Modeling of fluid-structure interaction – effects of added mass, damping and stiffness // Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass. CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol 557. Springer, Vienna, 2014.