МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»
Кафедра математического моделирования

Сдано на кафедру
«7» июня 2019 г.
Заведущий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
________Кащенко С.А.

Выпускная квалификационная работа
Локальная динамика модели оптоэлектронного осциллятора
(Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика)

Научный руководитель
доцент
д. ф.-м. н., доцент
_________Кащенко И.С.
«7» июня 2019 г.

Студент группы ПМИ-41БО
_________Маслеников И.Н.
«7» июня 2019 г.

Ярославль, 2019 г.

Реферат

Объем 17 с. 2 гл. 5 источников.

Характеристический квазиполином, асимптотическое представление корней, нормальная форма.

Рассмотрена модель оптоэлектронный осциллятор. Она имеет вид дифференциально-интегрального уравнения с запаздыванием вида:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^{t} x\left(s\right) ds = \beta_1 F\left(x(t-\tau)\right).$$

Поставлена задача изучения локальной динамики в окрестности состояния равновесия уравнения, для этого мы построим характеристическое уравнение и определим положение его корней. В зависимости от значений параметров узнаем поведение решений в окрестности состояния равновесия, устойчиво или неустойчиво оно. Определим критические моменты параметров, когда состояние равновесия меняет свою устойчивость. Сделаем асимптотическое приближение корней характеристического многочлена. Данное разложение показывает поведение решений в окрестности состояния равновесия при критическом параметре. В результате проведенных исследований приводится дифференциальное уравнение, решение которого стремится к решению нашего дифференциально-интегрального уравнения, тогда решение дифференциального уравнения асимптотическое по невязке равномерное по $t \geq 0$.

Содержание

1 Введение

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием [1], которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^{t} x\,(s)\,ds = \beta_1 F\,(x(t-\tau))\,. \tag{1}$$

Здесь β_1 — параметр, τ — параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение исследовалось численными методами, подбирались параметры, начальные условия, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры, при этом рассматривался случай, когда параметры $\varepsilon = 0.005$ и $\delta = 0.016$. В силу этого будем предполагать, что параметры ε и δ малы $(0 < \varepsilon \ll 1,\ 0 < \delta \ll 1)$ и пропорциональны: $\varepsilon = k\delta$, $k > 0$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия. В пункте 2.1 мы построим характеристический многочлен. В 2.2 мы изучим характеристическое уравнение при малом параметре β, покажем устойчивость состояния равновесия. В 2.3 пункте мы построим асимптотическое приближения корней уравнения (1), выделим действительную часть. В последнем параграфе делаем построение квази нормальной формы при параметре $\beta_1 = \pm(1 + \varepsilon^2\beta_1)$.

Отметим, что в статье [2] рассмотрено похожее уравнение оптоэлектронного осциллятора, в котором параметр δ не является малым.

2 Исследование устойчивости состояния равновесия

2.1 Построение характеристического квазиполинома

Сделаем замену $\dot{y}(t) = x(t)$ в уравнении (1), перенесем часть слагаемых в правую часть и перейдем к системе:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \beta_1 F\left(x(t-\tau)\right) - x - \delta y, \\ \varepsilon \dot{y} = \varepsilon x. \end{cases} \tag{2}$$

Сделаем замену времени $t_* = \tau t$, чтобы нормировать запаздывание, после чего переименуем t_* в t, получим систему:

$$\begin{cases} \varepsilon \tau^{-1} \dot{x} = \beta_1 F\left(x(t-1)\right) - x - \delta y, \\ \varepsilon \tau^{-1} \dot{y} = \varepsilon x. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что $x = 0$, $y = 0$ является состоянием равновесия системы (3). Будем исследовать устойчивость состояния равновесия. Выделим линейную часть из $F\left(x(t-1)\right)$.

$$F(z) = \dot{F}(0) z + O(z^2).$$

Введем параметр $\beta = \dot{F}(0) \cdot \beta_1$, $\beta - const$. Для исследования устойчивости линеаризуем (3) на нулевом состоянии равновесия:

$$\begin{cases} \varepsilon \tau^{-1} \dot{x} = -x - \delta y + \beta x(t-1), \\ \varepsilon \tau^{-1} \dot{y} = \varepsilon x. \end{cases} \tag{4}$$

Для построения характеристического уравнения системы (4) воспользуемся методом Эйлера. Будем искать ее решение в виде: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, где $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ нетривиальный вектор.

Сделаем замену $\eta = \varepsilon \tau^{-1}$ и выполним подстановку, после очевидных преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} -1 + \beta e^{-\lambda} - \eta \lambda & -\delta \\ \tau \eta & -\eta \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = 0. \tag{5}$$

Поскольку нас не интересует тривиальный вектор, нам нужно чтобы определитель матрицы (5) был равен нулю:

$$det \begin{vmatrix} -1 + \beta e^{-\lambda} - \eta \lambda & -\delta \\ \tau \eta & -\eta \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Построим характеристический квазиполином. Используя условие $k\delta = \varepsilon$, получим:

$$\eta \lambda^2 + \lambda - \lambda \beta e^{-\lambda} + \frac{\tau^2 \eta}{k} = 0. \tag{6}$$

Переименуем $\dfrac{\tau^2}{k}$ в k:

$$\eta \lambda^2 + \lambda - \lambda \beta e^{-\lambda} + k\eta = 0. \tag{7}$$

Нас интересует расположение корней уравнения (7) относительно мнимой оси [4]. Состояние равновесия будет устойчивым, если все корни будут иметь отрицательную вещественную часть, и неустойчивым, если хотя бы один корень будет иметь положительную вещественную часть.

2.2 Исследование характеристического квазиполинома при малых $|\beta|$

Рассмотрим характеристическое уравнение при $\beta = 0$ и малом $\eta > 0$. Сделаем замену:

$$\lambda = \frac{\mu}{\eta}.$$

Заменим в характеристическом уравнении (7) переменные, до множим на η и перенесем в правую часть экспоненту.

$$\mu^2 + \mu + \eta^2 k = \mu \beta e^{-\frac{\mu}{\eta}}. \tag{8}$$

При $\beta = 0$ уравнение становится квадратным, корни которого равны:

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\eta^2 k}}{2}.$$

Нетрудно увидеть, что $\mathrm{Re}\mu_{1,2} < 0$. При нулевом β состояние равновесия устойчиво, все решения (1) из некоторой окрестности нуля стремятся к состоянию равновесия [5].

Исследуем наше характеристическое уравнение, когда $|\beta|$ мало, но не ноль.

Теорема 1 *При $|\beta| < 1$ и достаточно малом ε, все корни* (8) *имеют отрицательные вещественные части.*

Предположим обратное, что есть корень μ с неотрицательной вещественной частью, т.е. $\mathrm{Re}\mu \geq 0$. Разделим уравнение (8) на μ, это можно сделать, т.к. $\mu = 0$ не является корнем.

$$\mu + 1 + \frac{k\eta^2}{\mu} = \beta e^{-\frac{\mu}{\eta}}. \tag{9}$$

Представим $\mu = \alpha + i\gamma$ и оценим модуль левой части.

$$|\beta e^{-\frac{\alpha+i\gamma}{\eta}}| = |\beta||e^{-\frac{\alpha+i\gamma}{\eta}}| \leq |\beta| e^{-\frac{\alpha+i\gamma}{\eta}} \leq |\beta|.$$

Оценим левую часть:

$$|\mu + 1 + \frac{k\eta^2}{\mu}| = |\alpha + i\gamma + 1 + \frac{k\eta^2}{(\alpha + i\gamma)}| = |\alpha + i\gamma + 1 + \frac{k\eta^2(\alpha - i\gamma)}{(\alpha^2 + \gamma^2)}| =$$

$$= \sqrt{\left(\alpha + 1 + \frac{k\eta^2\alpha}{(\alpha^2 + \gamma^2)}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{k\eta^2\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)}\right)^2}.$$

Рассмотрим второе слагаемое, оно всегда неотрицательно $\left(\gamma - \frac{k\eta^2\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)}\right)^2 \geq 0$, а так как мы рассматриваем случай $\alpha \geq 0$, то первое слагаемое всегда будет не меньше единицы.

$$\left(\alpha + 1 + \frac{k\eta^2\alpha}{(\alpha^2 + \gamma^2)}\right)^2 \geq 1.$$

Отсюда следует, что при $\beta < 1$ ни на мнимой оси, ни в правой комплексной полуплоскости у характеристического уравнения (9) нет корней. Следовательно, теорема доказана.

Таким образом, при $|\beta| < 1$ состояние равновесия устойчиво, и все решения (1) с начальными условиями из его некоторой окрестности стремятся к нулю [5].

2.3 Разложение характеристических корней по малому параметру

В предыдущем пункте мы определили $|\beta| < 1$, теперь рассмотрим $\beta = \pm(1 + \varepsilon^2\beta_1)$, при $\beta_1 > 0$, как это показано в [3]. Переименуем η в ε в уравнении (7), и получим:

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda\beta e^{-\lambda}. \tag{10}$$

Для определенности параметр $\beta = 1 + \varepsilon^2\beta_1$ при $n \neq 0$, $\beta_1 > 0$. Выделим первый член разложения асимптотического ряда:

$$\lambda = \lambda_0 + o(1).$$

Подставим в уравнение (10) и всё, что будет иметь порядок малости больше чем $o(1)$ сгруппируем.

$$\lambda_0 e^{-\lambda_0} = \lambda_0 + o(1).$$

Выделяя главную часть, получаем:

$$\lambda_0(e^{-\lambda_0} - 1) = 0.$$

У этого уравнения корнями являются:

$$\lambda_0 = 0 \;\; \lambda_{n0} = 2\pi ni, \; n \in \mathbb{N} \; .$$

Отметим, что нулевой корень имеет кратность 2. Уточним асимптотику при $\lambda_{n0} \neq 0$, чтобы определить вещественную часть каждого корня. Представим разложение корней уравнения (10) в виде:

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + (\varepsilon^2), \; \lambda_{n0} = 2\pi ni.$$

Подставим разложение корней в уравнение (10), получим:

$$\varepsilon\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1}\right)^2 + \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + k\varepsilon + (\varepsilon^2) =$$
$$= (1 + \varepsilon^2\beta_1)\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}\right) e^{-\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + (\varepsilon^2)\right)},$$

Так как $\varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}$ мало, то разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$\begin{gathered} \varepsilon\left(\lambda_{n0}^2 + \varepsilon\lambda_{n0}\lambda_{n1}\right) + \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + k\varepsilon + (\varepsilon^2) = \\ = (1 + \varepsilon^2\beta_1)\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}\right)\left(1 - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\lambda_{n1}^2 + (\varepsilon^2)\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра.

При ε^0 имеем верное равенство:

$$\lambda_{n0} = \lambda_{n0}, \, \lambda_{n0} = 2\pi ni.$$

При ε^1 получим:

$$\begin{gathered} \lambda_{n0}^2 + \lambda_{n1} + k = \lambda_{n1} - \lambda_{n0}\lambda_{n1}, \;\; n \neq 0, \\ \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}}, \\ \lambda_{n1} = \frac{\left(-4\pi^2 n^2 + k\right) i}{2\pi n}, \;\; n \neq 0. \end{gathered} \tag{12}$$

При ε^2 получим:

$$\lambda_{n0}\lambda_{n1}+\lambda_{n2}=\lambda_{n2}-\lambda_{n1}^2-\lambda_{n0}\left(\lambda_{n2}-\frac{\lambda_{n1}^2}{2}\right)$$

$$\lambda_{n2}=-\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1}+\lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}}+\frac{\lambda_{n1}^2}{2}+\beta_1,$$

$$\lambda_{n2}=\left(4\pi n-\frac{k}{\pi n}-\frac{4\pi^2n^2-2k+\dfrac{k^2}{4\pi^2n^2}}{2\pi n}\right)i-\frac{1}{2}\left(4\pi^2n^2-2k+\frac{k^2}{4\pi^2n^2}\right)+\beta_1,\quad n\neq 0. \tag{13}$$

Из уравнения (13) мы видим, что $Re\lambda_{n2}=\dfrac{\lambda_{n1}^2}{2}+\beta_1$. Теперь при некоторых n $Re\lambda_{n2}$ может быть больше 0, а значит состояние равновесия станет не устойчивым.

Проделаем аналогичные действия при $\beta=1+\varepsilon^2\beta_1$ и $n=0$. Представим разложение корней уравнения (10) в виде:

$$\lambda=\sqrt{\varepsilon}\lambda_1+\varepsilon\lambda_2+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3+o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

По аналогии выполняем те же действия, в результате получаем:

$$\lambda_1=\pm\sqrt{k}i,\quad \lambda_2=\frac{-k}{4}.$$

Нулевой корень устойчив.

Теорема 2 *При $\beta=1+\varepsilon^2\beta_1$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n=\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+o(\varepsilon^2),\quad n\neq 0,\ \text{где}$$

$$\lambda_{n0}=2\pi ni,\ \lambda_{n1}=-\frac{\lambda_{n0}^2+k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2}=-\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1}+\lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}}+\frac{\lambda_{n1}^2}{2}+\beta_1,$$

$$\lambda=\sqrt{\varepsilon}\lambda_1+\varepsilon\lambda_2+\varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3+o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}),\quad \lambda_0=0,\ \text{где}$$

$$\lambda_1=\pm\sqrt{k}i,\quad \lambda_2=\frac{-k}{4}.$$

Аналогичные построения можно провести и при $\beta=-(1+\varepsilon^2\beta_1)$.

Теорема 3 *При $\beta=-(1+\varepsilon^2\beta_1)$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n=\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+o(\varepsilon^2),\ \text{где}$$

$$\lambda_{n0}=\pi(2n+1)i,\ \lambda_{n1}=-\frac{\lambda_{n0}^2+k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2}=-\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1}+\lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}}+\frac{\lambda_{n1}^2}{2}+\beta_1,$$

$$\lambda=\frac{-\varepsilon k}{2}+o(\varepsilon),\quad \lambda_0=0.$$

3 Построение нормальной формы уравнения.

Система (3) допускает запись в виде (14):

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta F(\dot{y}(t-1)). \tag{14}$$

Разложим в уравнении (14) функцию F в ряд Тейлора:

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta_1\dot{y}(t-1) + \beta_2(\dot{y}(t-1))^2 + \beta_3(\dot{y}(t-1))^3 + \ldots \tag{15}$$

Где β_2, β_3 некоторые постоянные.

3.1 Построение нормальной формы при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$.

Рассмотрим задачу построения нормальной формы для уравнения (15), при параметре $\beta = 1 + \varepsilon^2\beta_1$, $\beta_1 > 0$. При таком β характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, таким образом, реализуется критический случай бесконечной размерности. Для исследования поведения решений воспользуемся методом квазинормальных форм [3]. Представим функцию y в виде асимптотического ряда:

$$y = \varepsilon^2 V(t) + \varepsilon^4 U_1(t) + \ldots. \tag{16}$$

Где U_1 периодическая с периодом 1: $U_1(t) \equiv U_1(t+1)$.
Функция $V(t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$V(t) = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+\ldots)t} V_n(\tau), \text{ где } \tau = \varepsilon^2 t.$$

Значения λ_{n0}, λ_{n1}, λ_{n2} определяются из асимптотики корней уравнения (10) (см. теорему 2).

Обозначим $\xi_n(\varepsilon)$:

$$\xi_n(\varepsilon) = i(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \ldots), \text{ где}$$

$$\lambda_{n0} = 2\pi n,\ \lambda_{n1} = Im\left(-\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}}\right),$$

$$\lambda_{n2} = Im\left(-\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + -\lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}}\right).$$

Для удобства выпишем явно первую и вторую производную функции V:

$$\dot{V} = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau)) e^{\xi_n t}, \tag{17}$$

$$\ddot{V} = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} (\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n\varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau)) e^{\xi_n t}. \tag{18}$$

Рассмотрим подробнее $\dot{y}(t-1)$:

$$\dot{y}(t-1)=\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau-\varepsilon^2)+\varepsilon^2 V_n'(\tau-\varepsilon^2))e^{\xi_n(t-1)}+\varepsilon^4\dot{U}_1(t-1)+\ldots=$$
$$=\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau-\varepsilon^2)+\varepsilon^2 V_n'(\tau-\varepsilon^2))e^{\xi_n t}e^{-\xi_n}+\varepsilon^4\dot{U}_1(t-1)+\ldots \tag{19}$$

Разложим в ряды Тейлора выражения $e^{-\xi_n}$ и $V_n(\tau-\varepsilon^2)$, получим:

$$e^{-\xi_n}=e^{-2\pi ni-\varepsilon\lambda_1-\varepsilon^2\lambda_2-\cdots}=\left(1-\varepsilon\lambda_1-\varepsilon^2\lambda_2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_1^2+\ldots\right),$$
$$V_n(\tau-\varepsilon^2)=V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau)+\ldots \tag{20}$$

Подставим (16), (17), (18), (19), (20) в уравнение (15), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$, выпишем результат в явном виде:

$$\varepsilon(\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(\xi_n^2 V_n(\tau)+2\xi_n\varepsilon^2 V_n'(\tau)+\varepsilon^4 V_n''(\tau))e^{\xi_n t}+\varepsilon^4\ddot{U}_1+\varepsilon^6\ddot{U}_2)+$$
$$+\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau)+\varepsilon^2 V_n'(\tau))e^{\xi_n t}+\varepsilon^4\dot{U}_1+\varepsilon^6\dot{U}_2+k\varepsilon(\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}e^{\xi_n t}V_n(\tau)+\varepsilon^4 U_1+\varepsilon^6 U_2)+o(\varepsilon^4)=$$
$$\beta_1(\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}(1-\varepsilon\lambda_1-\varepsilon^2\lambda_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_1^2)+$$
$$+\varepsilon^4\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^6\dot{U}_2(t-1))+\beta_2(\varepsilon^2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+$$
$$+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}(1-\varepsilon\lambda_1-\varepsilon^2\lambda_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_1^2)+\varepsilon^4\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^6\dot{U}_2(t-1))^2. \tag{21}$$

Раскроем скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$.

При $\varepsilon^2 e^{\xi_n t}$ имеем верное тождество:

$$\lambda_{n0}V_n(\tau)=\lambda_{n0}V_n(\tau).$$

При $\varepsilon^3 e^{\xi_n t}$ снова получаем верное тождество:

$$\lambda_{n0}^2 V_n(\tau)+\lambda_{n1}V_n(\tau)+kV_n(\tau)=\lambda_{n1}V_n(\tau)-\lambda_{n1}\lambda_{n0}V_n(\tau).$$

При ε^4 получаем:

$$\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}e^{\xi_n t}(2\lambda_{n0}\lambda_{n1}V_n(\tau)-\lambda_{n2}V_n(\tau)+V_n'(\tau))+\dot{U}_1=$$
$$\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}e^{\xi_n t}((\lambda_{n2}V_n(\tau)-\lambda_{n0}V_n'(\tau)+V_n'(\tau))-\lambda_{n1}^2 V_n(\tau)-\left(\lambda_{n2}-\frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\right)\lambda_{n0}V_n(\tau))+ \tag{22}$$
$$+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\lambda_{n0}\beta V_n(\tau)e^{\xi_n t}+\dot{U}_1(t-1)+\beta_2\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\varphi_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}.$$

где $\varphi_{2n}(V)$ - это соответствующий коэффициент ряда Фурье, для функции:

$$\left(\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\pi 2niV_n(\tau)e^{\xi_n t}\right)^2.$$

Упростив уравнение (22), получаем:

$$V_n'(\tau) = \frac{\lambda_{n1}^2 + 2\beta}{2} V_n(\tau) + \frac{\beta_2}{\lambda_{n0}} \varphi_{2n}(V). \tag{23}$$

Подставим значение λ_{n1} и λ_{n0} в уравнение (23) и получим бесконечную систему уравнений:

$$V_n'(\tau) = -\frac{1}{2}\left(4\pi^2 n^2 - 2k + \frac{k^2}{4\pi^2 n^2}\right) V_n(\tau) + \beta V_n(\tau) + \frac{\beta_2}{2\pi n i} \varphi_{2n}(V). \tag{24}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида с краевыми условиями:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 r} + kV - \frac{k^2}{2} J^2(V) + \beta V + \beta_2 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2\right), \tag{25}$$

$$\begin{gathered} \int\limits_0^1 V(\tau, r) dr = 0, \\ V(\tau, r) \equiv V(\tau, r+1). \end{gathered} \tag{26}$$

Здесь через $J(V)$ обозначена первообразная функции V с нулевым средним:

$$J^2(V) = J(J(V)),\ (J(V))_r' \equiv V.$$

Представим функцию V из уравнения (25) в виде:

$$V = \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{2\pi n i r} V_n(\tau). \tag{27}$$

Подставив формулу (27) в уравнение (25) и приравняв коэффициенты получившихся рядов Фурье, мы получим построчное равенство, что для каждого n справедливо равенство (24).

Таким образом, задача (25), (26) определяет в главном решения уравнения (15).

Теорема 4 *Пусть* V_* *- решение* (25) *с краевыми условиями* (26), *причем* $V_* = \sum\limits_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{2\pi n i r} V_n(\tau)$, *тогда* $y = \varepsilon^2 \sum\limits_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} e^{\xi_n r} V_n(\tau)$ *является асимптотическим по невязке равномерно по* $t \geq 0$ *решением* (15).

Доказательство теоремы следует из построения решений сделанных ранее.

3.2 Построение нормальной формы при $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2 \beta)$.

Проделаем аналогичные действия сделанные ранее. Рассмотрим задачу построения нормальной формы для уравнения (15), при параметре $\beta = -(1 + \varepsilon^2 \beta_1)$, $\beta_1 > 0$. При таком β характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, таким образом, реализуется критический случай бесконечной размерности. Представим функцию y в виде ряда:

$$y = \varepsilon V(t) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1(t) + \varepsilon^3 U_2(t) + \dots \tag{28}$$

Где U_1, U_2 периодические с периодом 1: $U_1(t) \equiv U_1(t+1)$, $U_2(t) \equiv U_2(t+1)$. Функция W такая, что среднее значение $\beta_2 \dot{V}^2 - kW(\tau)$ равняется 0, то есть:

$$W(\tau) = \frac{\beta_2}{k} \int\limits_0^1 \dot{V}^2(t,\tau)dt.$$

Функция $V(t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$V(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+\ldots)t} V_n(\tau), \text{ где } \tau = \varepsilon^2 t.$$

Значения λ_{n0}, λ_{n1}, λ_{n2} определяются из асимптотического приближения корней уравнения (10) (см. Теорему 3).

Обозначим $\xi_n(\varepsilon)$:

$$\xi_n(\varepsilon) = i(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \ldots), \text{ где}$$
$$\lambda_{n0} = \pi(2n+1),\ \lambda_{n1} = Im\left(-\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}}\right),$$
$$\lambda_{n2} = Im\left(-\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + -\lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}}\right).$$

Для удобства выпишем первую и вторую производную функции V, они имеют схожий вид с функциями (17) и (18).

$$\dot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau))e^{\xi_n t}, \tag{29}$$

$$\ddot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n\varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau))e^{\xi_n t}. \tag{30}$$

Рассмотрим подробнее $\dot{y}(t-1)$:

$$\begin{gathered}\dot{y}(t-1) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 V_n'(\tau-\varepsilon^2))e^{\xi_n(t-1)} + \varepsilon^3 \dot{W}(\tau-\varepsilon^2) + \\ +\varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1) + \ldots = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 V_n'(\tau-\varepsilon^2))e^{\xi_n t} e^{-\xi_n} + \\ +\varepsilon^3 \dot{W}(\tau-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1) + \ldots\end{gathered} \tag{31}$$

Разложим в ряды Тейлора функции $e^{-\xi_n}$, $V_n(\tau-\varepsilon^2)$ и $W(\tau-\varepsilon^2)$, получим:

$$\begin{gathered}e^{-\xi_n} = e^{-\pi(2n+1)i - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} - \ldots} = (-1)\left(1 - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2 + \ldots\right), \\ V_n(\tau-\varepsilon^2) = V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \ldots, \\ W(\tau-\varepsilon^2) = W(\tau) - \varepsilon^2 W'(\tau) + \ldots\end{gathered} \tag{32}$$

Подставим (28), (29), (30), (31), (32) в уравнение (15), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$, выпишем результат в явном виде:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n^2 V_n(\tau)+2\xi_n\varepsilon^2 V_n'(\tau)+\varepsilon^4 V_n''(\tau))e^{\xi_n t}+\varepsilon^5 W''(\tau)+\varepsilon^2\ddot{U}_1+\varepsilon^3\ddot{U}_2)+\\
+\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau)+\varepsilon^2 V_n'(\tau))e^{\xi_n t}+\varepsilon^3 W'(\tau)+\varepsilon^2\dot{U}_1+\varepsilon^3\dot{U}_2+\\
+k\varepsilon(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\xi_n t}V_n(\tau)+\varepsilon W(\tau)+\varepsilon^2 U_1+\varepsilon^3 U_2)+o(\varepsilon^4)=\\
-(1+\varepsilon^2\beta)(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}\cdot\\
\cdot(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2 W''(\tau))+\varepsilon^2\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^3\dot{U}_2(t-1))+\\
+\beta_2(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}\cdot\\
\cdot(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2 W''(\tau))+\varepsilon^2\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^3\dot{U}_2(t-1))^2+\\
+\beta_3(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}\cdot\\
\cdot(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2 W''(\tau))+\varepsilon^2\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^3\dot{U}_2(t-1))^3.
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Раскроем скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$.

При ε получаем верное тождество:

$$\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}=\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}.$$

При ε^2 получаем:

$$
\begin{gathered}
\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}^2 V_n(\tau)e^{\xi_n t}+\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n1}V_n(\tau)e^{\xi_n t}+\dot{U}_1+\sum_{-\infty}^{\infty}kV_n(\tau)e^{\xi_n t}+kW(\tau)=\\
\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)(-\lambda_{n1}V_n(\tau)+\lambda_{n1}\lambda_{n0}V_n(\tau))e^{\xi_n t}-\dot{U}_1(t-1)+\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}g_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}.
\end{gathered}
\tag{34}
$$

где $g_{2n}(V)$ - это коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t}\right)^2.$$

После сокращений из уравнения (34) определяется $\dot{U}_1$:

$$\dot{U}_1=\frac{1}{2}(\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}g_{2n}(V(t,\tau))e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}-kW(\tau)),$$

$$\dot{U}_1=\frac{1}{2}(\beta_2\dot{V}^2-kW(\tau)).$$

U_1 находится в виде:

$$U_1=\frac{1}{2}\int_0^r\beta_2\dot{V}^2(s,\tau)-W(\tau)ds.$$

Обратим внимание, что U_1 периодическая, т.к. среднее значение подынтегральной функции равно нулю.

При ε^3 получаем:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} 2\lambda_{n0}\lambda_{n1}V_n(\tau) + \ddot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda_{n2}V_n(\tau) + V_n'(\tau))e^{\xi_n t} + \dot{U}_2 + kU_1 + W'(\tau) =$$
$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)e^{\xi_n t}((-1)(\lambda_{n2}V_n(\tau) - \lambda_{n0}V_n'(\tau) + V_n'(\tau)) + \lambda_{n1}^2 V_n(\tau) + (-\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2)\lambda_{n0}V_n(\tau)) -$$
$$-(\dot{U}_2(t-1) + W'(\tau)) + \sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}\beta V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1(t-1) +$$
$$+\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_{2n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t} + \beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} + \beta_3\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_{3n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t}. \tag{35}$$

где $\varphi_{2n}(V)$ коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-2)\dot{U}_1(t-1)\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t};$$

$\varphi_{3n}(V)$ коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-1)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)\right)^3;$$

$f_{2n}(V)$ а коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-2)\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{m0}\lambda_{m1}V_m(\tau)e^{\xi_m t}.$$

Уравнение (35) упрощается до вида:

$$\ddot{U}_1 + 2\dot{U}_2 + kU_1 + 2W'(\tau) - \beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} =$$
$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-\lambda_{n0}V_n'(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \beta_2\varphi_{2n}(V) + \beta_3\varphi_{3n}(V))e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t}. \tag{36}$$

В уравнении (36) левая часть периодическая, а правая антипериодическая, равенство возможно тогда и только тогда, когда левая и правая часть равна 0.

$\dot{U}_2$ определяется в виде:

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{2}(\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} - \ddot{U}_1 - kU_1 - 2W'(\tau)).$$

Рассмотрим антипериодическую часть уравнения (36) и разложим её на соответствующие степени $e^{\xi_n t}$:

$$\lambda_{n0}V_n'(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \beta_2\varphi_{2n}(V) + \beta_3\varphi_{3n}(V). \tag{37}$$

Подставим значения λ_{n1} и λ_{n0} в уравнение (37) :

$$V_n'(\tau) = -\frac{1}{2}\left(\pi^2(2n+1)^2 - 2k + \frac{k^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right)V_n(\tau) +$$
$$+\beta V_n(\tau) + \frac{\beta_2}{\pi(2n+1)i}\varphi_{2n}(V) + \frac{\beta_3}{\pi(2n+1)i}\varphi_{3n}(V). \tag{38}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида с краевыми условиями:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 r} + kV - \frac{k^2}{2}J^2(V) + \beta V + \beta_2 J\left(U_1 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \beta_3 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^3\right), \tag{39}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 V(\tau, r)dr = 0,\\ V(\tau, r) \equiv -V(\tau, r+1).\end{gathered} \tag{40}$$

Через $J(V)$, как и ранее, обозначена первообразная функции V с нулевым средним:

$$J^2(V) = J(J(V)),\ (J(V))'_r \equiv V.$$

Представим функцию V из уравнения (39) в виде:

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau). \tag{41}$$

Подставив формулу (41) в уравнение (39) и приравняв коэффициенты получившихся рядов Фурье, мы получим построчное равенство, что для каждого n справедливо равенство (37).

Теорема 5 *Пусть* V_* *- решение* (39) *с краевыми условиями* (40), *причем* $V_* = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau)$, *тогда* $y = \varepsilon^2 \sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n r} V_n(\tau)$ *является асимптотическим по невязке равномерно по* $t \geq 0$ *решением* (15).

Доказательство теоремы следует из построений решения сделанных ранее.

4 Заключение

Была рассмотрена модель оптоэлектронного осциллятора, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики уравнения был рассмотрен характеристический квазиполином. Выделены критические значения параметра β, при котором состояние равновесия меняет свою устойчивость. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра β. Интересным оказывается то, что кроме основной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения. Построено асимптотическое представление корней при малом изменении параметра β_1. Главным результатом работы является построение нормальной формы решения уравнения (15) при критических параметрах β_1.

5 Литература

1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskyi B.*. Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems// Physical Review Letters, 2013. Vol. 111. pp. 054103.

2. Григорьева Е.В., Кащенко С.А., Глазков Д.В.. Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осцилятора с запаздыванием.// Моделирование и анализ информационных систем. Т.25, №1, 2018, с. 71-82.

3. *Кащенко И.С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

4. *Кащенко И.С.* Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.