МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра математического моделирования

Сдано на кафедру
«16» июня 2020 г.
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
____________ Кащенко И. С.

Выпускная квалификационная работа

Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием и периодическими коэффициентами

направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Научный руководитель
заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент
____________ Кащенко И. С.
«16» июня 2020 г.

Студент группы ПМИ-41БО
____________ Татанова Е. М.
«16» июня 2020 г.

Ярославль 2020 г.

Реферат

Объем 24 с., 2 гл., 4 рис., 5 источников.

В работе исследуются дифференциальные уравнения с запаздыванием в критическом случае, когда надкритичность не является константой. С помощью асимптотических методов строятся квазинормальные формы. В ходе исследования делается вывод, что в случае с фиксированным запаздыванием нормальная форма является двумерной, а в случае с большим запаздыванием становится неавтономной.

Ключевые слова: **асимптотические методы, метод квазинормальных форм, уравнения с запаздыванием, состояние равновесия.**

Содержание

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием возникают во многих прикладных задачах: в нейродинамике, лазерной физике, в задачах математической экологии, в описании работы ядерного реактора, в радиофизике и во многих других областях знаний [1–3].

В работе будет рассмотрено уравнение

$$\dot{x} + x = ax(t - T) + f(x).$$

Динамические свойства его решений в критическом случае определяются укороченным нормализованным уравнением

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1 \xi + d|\xi|^2 \xi,$$

где коэффициенты λ_1 и d – комплексные числа [1]. Это верно для случая, когда значение параметра a близко к критическому и определяется уравнением

$$a = a_0 + \varepsilon a_1.$$

В данном случае надкритичность a_1 - константа. Цель работы – исследовать локальную (в окрестности нулевого состояния равновесия) динамику дифференциального уравнения с запаздыванием в случае, когда надкритичность не является константой.

В случаях, близким к критическим, для исследования будет применена теория нормальных форм Пуанкаре. Приведение к нормальным формам осуществляется при помощи рядов по степеням отклонения от равновесия или периодического решения [4].

Особое внимание будет уделено случаю, когда параметр T, характеризующий запаздывание, является достаточно большим, т.е.

$$T \gg 1.$$

В случае, когда состояние равновесия теряет устойчивость, при условии постоянной надкритичности, аналог нормальной формы имеет вид нелинейного параболического уравнения [1]. Так, при a близком к 1, соответствующая краевая задача имеет вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dr^2} + a_1 u - f_2 u^2, \qquad u(\tau, r+1) = u(\tau, r).$$

В настоящей работы мы исследуем локальную (в окрестности нулевого состояния равновесия) динамику дифференциального уравнения с запаздыванием в случае, когда надкритичность непостоянная, т.е.

$$a = \pm(1 + \varepsilon^2 a_1(t)).$$

В работе мы с помощью асимптотических методов построим в критических случаях аналоги нормальных – квазинормальные – формы.

1 Уравнение с фиксированным запаздыванием

Рассмотрим сначала случай, когда запаздывание T фиксированно.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x} + x = ax(t-T) + f(x), \tag{1}$$

где a - произвольный параметр, $T > 0$ - фиксированное время запаздывания,

$f(x)$ - функция, имеющая в нуле порядок выше певого.

1.1 Характеристический квазиполином уравнения

Как для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения (1) имеет место теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [4].

Рассмотрим линеаризованное на нулевом состоянии равновесия уравнение (1):

$$\dot{x} + x = ax(t - T). \tag{2}$$

Асимптотическое поведение решений однородного дифференциально-разностного уравнения определяется решениями характеристического уравнения [2].

Характеристический квазиполином уравнения (2):

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T} \tag{3}$$

Корни с положительной вещественной частью дают экспоненциально растущие по модулю решения, поэтому будем исследовать поведение решений уравнения (1) в малой окрестности состояния равновесия, когда квазиполином (3) имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет с положительной. В этом случае решения (2) асимптотически устойчивы.

1.2 Точка бифуркации

Уравнение (3) имеет бесконечное число корней. В силу их непрерывной зависимости от параметра a, найдутся такие $a_+(T) > 0$ и $a_-(T) < 0$, что при $a_-(T) < a < a_+(T)$ все корни квазиполинома имеют отрицательные вещественные части, а при $a = a_+(T)$ и при $a = a_-(T)$ квазиполином (3) имеет чисто мнимый корень $\lambda_0 = i\omega$ [1]. А, значит, есть и ему комплексно-сопряженный. Итак, квазиполином имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\omega$, где $\omega > 0$. Также есть нулевое решение, тогда $a = 1$.

Рассмотрим случай $a < 0$. Положим в (3) $a = a_-(T) = a_0$ и $\lambda = i\omega$. Получим

$$i\omega = -1 + a_0 e^{-i\omega T}.$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$-1 = a_0 \cos\omega T,$$

$$\omega = -a_0 \sin\omega T.$$

Отсюда

$$a_0^2 = 1 + \omega^2, \tag{4}$$

$$\tan\omega T = -\omega. \tag{5}$$

Пусть ω_* - наименьший положительный корень уравнения (5). Тогда $a_0 = -\sqrt{1+\omega_*^2}$.

При всех $a_0 < a < 0$ все корни уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, а при $a < a_0$ существует корень (3) с положительной вещественной частью [1]. При $a = a_0$ через мнимую ось вправо переходят два корня. Таким образом, a_0 является точкой бифуркации.

1.3 Бифуркация состояния равновесия

Изучим динамику уравнения (1), в случае, когда значение параметра a близко к критическому, т.е.

$$a = a_0 + \varepsilon a_1(t).$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ - малый параметр, $a_1(t)$ - функция, зависящая от времени t.

Характеристический квазиполином (3) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\omega_0$, а все остальные имеют отрицательные вещественные части. Значит, линеаризованное уравнение имеет периодическое решение $x = e^{\pm i\omega_0 t}$.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля. Получим

$$\dot{x} + x = (a_0 + \varepsilon a_1(t))x(t-T) + f_2 x^2 + f_3 x^3 + o(x^3). \tag{6}$$

Выполним подстановку следующего вида:

$$x(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}[\xi(\tau)e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\omega_0 t}] + \varepsilon x_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}x_3(t,\tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{7}$$

где $\tau = \varepsilon t$, а x_2 и x_3 являются $2\pi/\omega_0$-периодичными по быстрой переменной t.

Подставим формулу (2) в уравнение (6). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

На первом шаге получаем

$$\begin{aligned} i\omega_0 + 1 &= a_0 e^{-i\omega_0 T}, \\ -i\omega_0 + 1 &= a_0 e^{i\omega_0 T}, \end{aligned}$$

а в силу определения величин a_0 и ω_0 это верные тождества.

На втором шаге придем к дифференциальному уравнению относительно x_2:

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 = a_0 x_2(t-T,\tau) + f_2[\xi^2(\tau)e^{2i\omega_0 t} + 2|\xi(\tau)|^2 + \bar{\xi}^2(\tau)e^{-2i\omega_0 t}].$$

Частное решение имеет вид:

$$x_2(t,\tau) = x_{20}(\tau) + x_{21}(\tau)e^{2i\omega_0 t} + \bar{x}_{21}(\tau)e^{-2i\omega_0 t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение на $x_2(t,\tau)$, находим, что

$$x_{20}(\tau) = -\frac{2f_2}{-1+a_0}|\xi(\tau)|^2,$$

$$x_{21}(\tau) = \frac{f_2}{2i\omega_0 + 1 - a_0 e^{-2i\omega_0 T}} \xi^2(\tau).$$

Собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим выражение

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} + x_3 - a_0 x_3(t-T,\tau) =$$
$$= -\left((1 + a_0 T e^{-i\omega_0 T}) \frac{d\xi}{d\tau} e^{i\omega_0 t} + (1 + a_0 T e^{i\omega_0 T}) \frac{d\bar{\xi}}{d\tau} e^{-i\omega_0 t}\right) + a_1(t)(\xi(\tau) e^{i\omega_0 (t-T)} +$$
$$+ \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 (t-T)}) + 2 f_2 x_2(t-T,\tau)(\xi(\tau) e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 t}) +$$
$$+ f_3(\xi(\tau) e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 t})^3.$$

Необходимое и достаточное условие существования $2\pi/\omega_0$-периодических решений этого уравнения состоит в том, что неоднородная часть уравнения должна быть ортогональна решению задачи, сопряженной исходной. Ее решением является $x = e^{i\omega_0 t}$ и $x = e^{-i\omega_0 t}$. Таким образом, получаем систему двух уравнений:

$$-(1 + a_0 T e^{-i\omega_0 T}) \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{d\xi}{d\tau} + \bar{\xi}(\tau) e^{i\omega_0 T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a_1(t) e^{-2i\omega_0 t} dt +$$
$$+ \xi(\tau) e^{-i\omega_0 T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a_1(t) dt + \frac{2 f_2^2}{2i\omega_0 + 1 - a_0 e^{-2i\omega_0 T}} \frac{2\pi}{\omega_0} \xi(\tau) |\xi(\tau)|^2 -$$
$$- \frac{4 f_2^2}{-1 + a_0} \frac{2\pi}{\omega_0} \xi(\tau) |\xi(\tau)|^2 + 3 f_3 \frac{2\pi}{\omega_0} \xi(\tau) |\xi(\tau)|^2 = 0,$$
$$-(1 + a_0 T e^{i\omega_0 T}) \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{d\bar{\xi}}{d\tau} + \xi(\tau) e^{-i\omega_0 T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a_1(t) e^{2i\omega_0 t} dt + \bar{\xi}(\tau) e^{i\omega_0 T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a_1(t) dt +$$
$$+ \frac{2 f_2^2}{-2i\omega_0 + 1 - a_0 e^{2i\omega_0 T}} \frac{2\pi}{\omega_0} \bar{\xi}(\tau) |\xi(\tau)|^2 - \frac{4 f_2^2}{-1 + a_0} \frac{2\pi}{\omega_0} \bar{\xi}(\tau) |\xi(\tau)|^2$$
$$+ 3 f_3 \frac{2\pi}{\omega_0} \bar{\xi}(\tau) |\xi(\tau)|^2 = 0.$$

Получили укороченную нормализованную систему уравнений, которую можно представить как

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1\xi + \lambda_2\bar{\xi} + d\xi|\xi|^2, \tag{8}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\omega_0 e^{-i\omega_0 T}}{2\pi(1 + a_0 T e^{-i\omega_0 T})}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a_1(t)dt,$$
$$\lambda_2 = \frac{\omega_0 e^{i\omega_0 T}}{2\pi(1 + a_0 T e^{-i\omega_0 T})}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} a_1(t)e^{-2i\omega_0 t}dt,$$
$$d = \frac{1}{1 + a_0 T e^{-i\omega_0 T}}\Big(-\frac{4f_2^2}{-1 + a_0} + \frac{2f_2^2}{2i\omega_0 + 1 - a_0 e^{-2i\omega_0 T} + 3f_3}\Big).$$

Теорема 1. Пусть у уравнения (8) есть грубое состояние равновесия ξ_*. Тогда при достаточно малых значениях ε уравнение (6) имеет грубое периодическое решение вида

$$x(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}[\xi_* e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}_* e^{-i\omega_0 t}] + O(\varepsilon).$$

Теорема 2. Пусть у уравнения (8) есть грубый цикл ξ_*. Тогда при достаточно малых значениях ε уравнение (6) имеет грубый тор.

$$x(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}[\xi_*(\varepsilon t) e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}_*(\varepsilon t) e^{-i\omega_0 t}] + O(\varepsilon).$$

Представим $\xi(\tau)$ в показательной форме:

$$\xi(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}. \tag{9}$$

Подставим (9) в уравнение (8). Получим систему уравнений для амплитуды $\rho(\tau)$ и для фазы $\varphi(\tau)$:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = (\mathrm{Re}\,\lambda_1)\rho + (\mathrm{Re}\,\lambda_2)\cos 2\varphi\cdot\rho + (\mathrm{Im}\,\lambda_2)\sin 2\varphi\cdot\rho + (\mathrm{Re}\,d)\rho^3, \tag{10}$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mathrm{Im}\,\lambda_1 - (\mathrm{Re}\,\lambda_2)\sin 2\varphi + (\mathrm{Im}\,\lambda_2)\cos 2\varphi + (\mathrm{Im}\,d)\rho^2. \tag{11}$$

Отметим, что в отличие от случая $a_1 \equiv const$ ни (10), ни (11) не отщепляются от системы, и нормальная форма является двумерной сисемой. У этой нормальной формы устойчивыми могут быть только состояния равновесия и периодические решения.

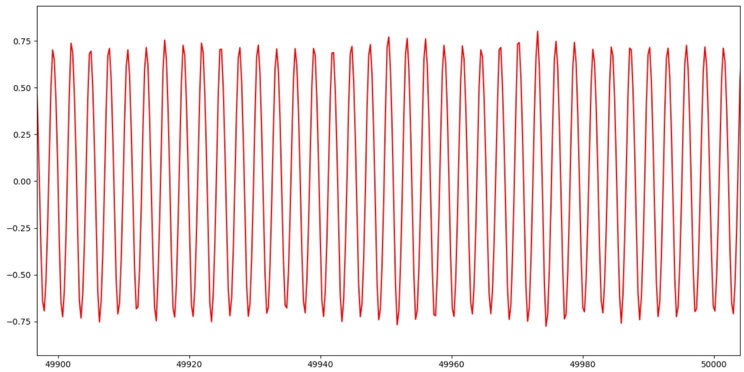

Рис. 1: График решения уравнения (1). Значения параметров: $a_0 = -2.261826, T = 1, \varepsilon = 0.01, a_1(t) = cos(2t), f(x) = -x^3$.

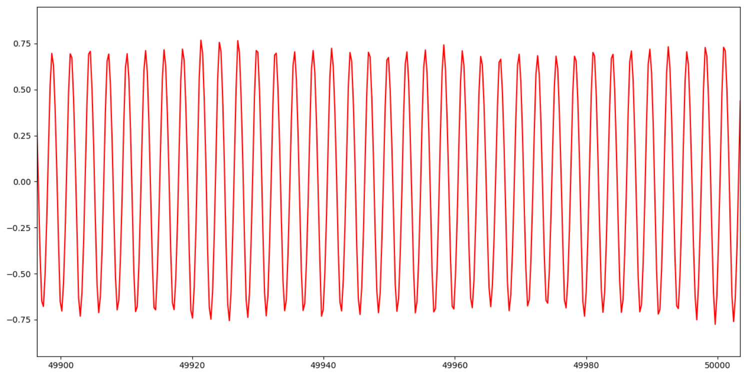

Рис. 2: График решения уравнения (1). Значения параметров: $a_0 = -2.261826, T = 1, \varepsilon = 0.01, a_1(t) = cos(\omega_0 t), f(x) = -x^3$.

1.4 Уравнение Хатчинсона

В качестве примера рассмотрим широко использующееся в популяционной динамике уравнение Хатчинсона [5]:

$$\dot{x} = \lambda(1 - x(t-1)) \cdot x, \tag{12}$$

где λ - положительный параметр. Заметим, что это уравнение имеет состояние равновесия $x = 1$. Оно теряет устойчивость при $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим уравнение (12) в случае, когда значение параметра близко к критическому, т.е.

$$\lambda = \frac{\pi}{2} + \varepsilon \cdot a(t).$$

Произведём замену

$$x = 1 + y.$$

Тогда уравнение (12) принимает следующий вид:

$$\dot{y} = -\lambda y(t-1) \cdot (1 + y), \tag{13}$$

здесь соответствующее состояние равновесия $y = 0$.

Выполним следующую подстановку:

$$y(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}[\xi(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}] + \varepsilon y_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}y_3(t,\tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{14}$$

где $\tau = \varepsilon t$, а y_2 и y_3 являются 4-периодичными по быстрой переменной t.

Подставим формулу (14) в уравнение (13). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

На первом шаге получаем верные тождества.

На втором шаге придем к дифференциальному уравнению относительно y_2:

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = -\lambda \cdot y_2(t-1,\tau) - \lambda[\xi(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)}] \cdot [\xi(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}]$$

Частное решение имеет вид:

$$y_2(t,\tau) = y_{20}(\tau) + y_{21}(\tau)e^{2i\frac{\pi}{2}t} + \bar{y}_{21}(\tau)e^{-2i\frac{\pi}{2}t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение на $y_2(t,\tau)$, находим, что

$$y_{20}(\tau) = 0, \qquad y_{21}(\tau) = \frac{2-i}{5}\xi^2(\tau).$$

Собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим выражение

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_3}{\partial t} = -\frac{\pi}{2}&[y(t-1,\tau) - \xi(\tau)e^{i\frac{3\pi}{2}t}\cdot\frac{2-i}{5}\xi^2(\tau) - \xi(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{2+i}{5}\bar{\xi}^2(\tau) - \\
&- \bar{\xi}(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t}\frac{2-i}{5}\xi^2(\tau) - \bar{\xi}(\tau)e^{-i\frac{3\pi}{2}t}\frac{2+i}{5}\bar{\xi}^2(\tau) + \\
&+ \frac{2i+1}{5}\xi^3(\tau)e^{i\frac{3\pi}{2}t} + \frac{2i-1}{5}\xi(\tau)\bar{\xi}^2(\tau)e^{i-\frac{\pi}{2}t} - \\
&- \frac{2i+1}{5}\xi^2(\tau)\bar{\xi}(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} - \frac{2i-1}{5}\bar{\xi}^3(\tau)e^{-i\frac{3\pi}{2}t}] + \\
&+ a(t)\cdot[\xi(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)}] - \\
&- \frac{\pi}{2}\cdot[-\xi'(\tau)\cdot e^{i\frac{\pi}{2}(t-1)} - \bar{\xi}'(\tau)\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}(t-1)}]
\end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие существования 4-периодических решений этого уравнения состоит в том, что неоднородная часть уравнения должна быть ортогональна решению задачи, сопряженной исходной. Ее решением является $x = e^{i\frac{\pi}{2}t}$ и $x = e^{-i\frac{\pi}{2}t}$.

Таким образом, получаем укороченную нормализованное уравнение, которую можно представить как

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \bar{\xi} + d\xi|\xi|^2, \tag{15}$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{2i}{2+\pi i}\int_0^4 a(t)dt,$$
$$\lambda_2 = \frac{2i}{2+\pi i}\int_0^4 a(t)e^{-i\pi t}dt,$$
$$d = \frac{\pi(1-3i)}{5(2+\pi i)}.$$

Уравнение (15) является нормальной формой для (12) при λ близком к $\frac{\pi}{2}$. Справедлива следующая теорема, аналогичная теоремам 1 и 2.

Теорема 3. Пусть у уравнения (15) есть грубое состояние равновесия или грубый цикл. Тогда при достаточно малых значениях ε уравнение (13) имеет грубое периодическое решение или грубый тор соответственно той же устойчивости вида (14):

$$y(t,\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}[\xi(\tau)e^{i\frac{\pi}{2}t} + \bar{\xi}(\tau)e^{-i\frac{\pi}{2}t}] + O(\varepsilon).$$

Далее представлены графики решений уравнения (13), и мы можем заметить, что либо решения сходятся к нулю, либо к 4-периодическим функциям.

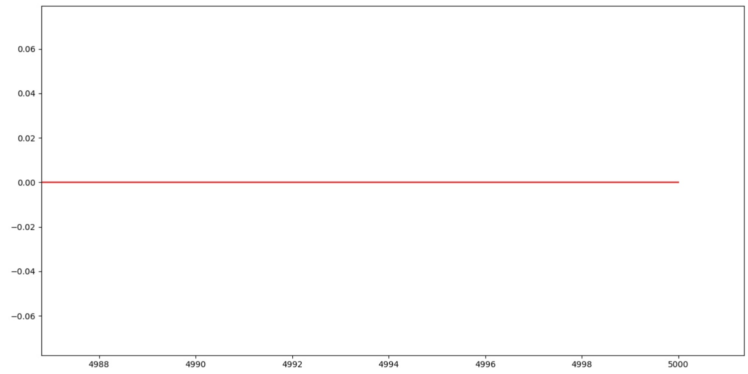

Рис. 3: График решения уравнения (2). Значения параметров: $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = 0.01, a(t) = -cos(t) - 2$.

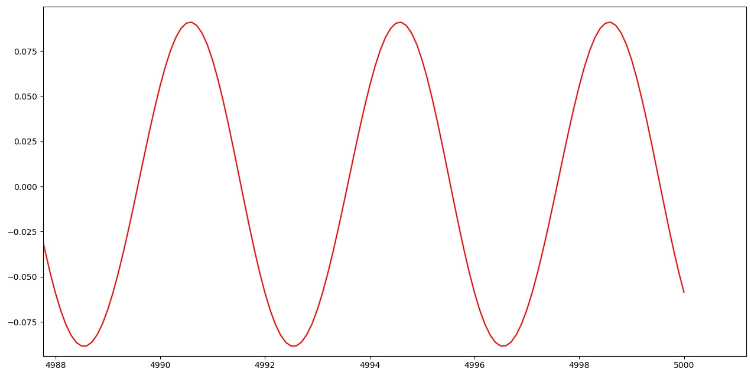

Рис. 4: График решения уравнения (2). Значения параметров: $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = 0.01, a(t) = cos^2(\pi t)$.

2 Уравнение с большим запаздыванием

Будем исследовать теперь уравнение с большим запаздыванием

$$\dot{x} + x = ax(t - T) + f(x), \tag{16}$$

где a - произвольный параметр, $f(x)$ - функция, имеющая в нуле порядок выше певого, а параметр T, характеризующий запаздывание, является достатоно большим, т.е.

$$T \gg 1.$$

Через ε обозначим малый параметр $\varepsilon = T^{-1}$. Тогда

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Чтобы избавиться от большого запаздывания, в уравнении (16) произведём замену времени $t \to Tt$. Переобозначим $x(Tt) \to x(t)$. Тогда $x(t-T) \to x(t-1)$, т.е. получили из большого запаздывания фиксированное. В итоге приходим к эвивалентному уравнению

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-1) + f(x). \tag{17}$$

Как для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения (16) имеет место теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [4]. Рассмотрим линеаризованное на нулевом состоянии равновесия уравнение (16):

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-1).$$

Асимптотическое поведение решений однородного дифференциально-разностн уравнения определяется решениями характеристического уравнения [4]. Характеристический квазиполином линеаризованного в нуле уравнения (17) имеет вид:

$$\varepsilon\lambda + 1 = ae^{-\lambda T}. \tag{18}$$

Если все корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части, то состояние равновесия (17) устройчиво. Это происходит при $|a| < 1$. Если есть корни с положительной вещественной частью, то будет неустойчивое состояние равновесия. Это выполняется при $|a| > 1$. Поэтому мы будем исследовать случай, когда существуют корни (18) с нулевой вещественной частью и нет с положительной. Это происходит при $a = \pm 1$.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля. Получим

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-1) + f_2x^2 + f_3x^3 + o(x^3). \tag{19}$$

Изучим случаи a близкого к 1 и -1.

2.1 Случай a близкого к 1

Изучим динамику уравнения (19) в случае, когда значение параметра a близко к критическому, т.е.

$$a = 1 + \varepsilon^2 \cdot a_1(t).$$

Будем рассматривать a_1 как ограниченную функцию, представим её в виде тригонометрического полинома:

$$a_1(t) = a_{11}e^{i\omega_1 t} + \ldots + a_{1n}e^{i\omega_n t} = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}e^{i\omega_j t}).$$

Положим

$$x = \varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)e^{2\pi ikr} + \varepsilon^4 x_1(\tau, r) + \ldots, \tag{20}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t$, а функция $x_1(\tau, r)$ предполагается почти периодической по второму аргументу.

Подставим выражение (20) для x в уравнение (19) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге при ε^2 и втором шаге при ε^3 получим верные тождества. На третьем шаге (при ε^4) придём к уравнению относительно x_1:

$$x_1(\tau, r) = x_1(\tau, r-1) + a_1(r) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi ikr} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi^2 k^2 \xi_k(\tau) e^{2\pi ikr} -$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_k}{d\tau} e^{2\pi ikr} + f_2 \cdot (\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi ikr})^2.$$

Пусть $\varphi_k(\xi)$ - коэффициент при $e^{2\pi ikr}$ в разложении

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\xi_k(\tau) e^{2\pi ikr})^2$$

в ряд Фурье.

Таким образом, уравнение принимает вид

$$x_1(\tau, r) - x_1(\tau, r-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} e^{i\omega_j r + 2\pi ikr} \cdot \xi_k(\tau) - 2\pi^2 k^2 \xi_k(\tau) e^{2\pi ikr} -$$
$$- \frac{d\xi_k}{d\tau} e^{2\pi ikr} + f_2 \cdot \varphi_k(\xi) e^{2\pi ikr} \Big).$$

Функция x_1 раскладывается в ряд Фурье по тем же функциям, что и правая часть:

$$x_1(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{11k}(\tau) \cdot e^{2\pi ikr} + \sum_{j=1}^{n} x_{12kj}(\tau) \cdot e^{2\pi ikr + i\omega_j r}).$$

Приравняем коэффициенты при $e^{2\pi ikr + i\omega_j r}$ при $\omega_j \neq 2\pi l$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{12k}(\tau) \cdot (e^{i\omega_k r} - e^{i\omega_k (r-1)}) \cdot e^{2\pi ikr} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \xi_k(\tau) \cdot e^{2\pi ikr + i\omega_j r}.$$

Отсюда явно находятся $x_{12k}(\tau)$.

Пусть $a_{1*}(r)$ – функция, содержащая в себе те слагаемые $a_1(r)$, частоты которых кратны 2π. Приравняем коэффициенты при $e^{i\omega_j r}$ при $\omega_j = 2\pi l$:

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(a_{1*}(r) \cdot \xi_k e^{2\pi ikr} - 2\pi^2 k^2 \xi_k(\tau) e^{2\pi ikr} - \frac{d\xi_k}{d\tau} e^{2\pi ikr} + f_2 \cdot \varphi_k(\xi) e^{2\pi ikr} \Big). \quad (21)$$

Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{dr^2} + a_{1*}(r) \cdot u(\tau, r) + f_2 u^2, \quad (22)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \quad (23)$$

Если разложить решение задачи (22), (23) в ряд Фурье

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \cdot e^{2\pi ikr},$$

то для определения амплитуд $\xi_k(\tau)$ получим в точности систему (21).

Решения задачи (22) через формулу (20) определяют решения уравнения (8). Поэтому будем говорить, что задача (22), (23) является квазинормальной формой для исходного уравнения (16).

Теорема 4. Пусть $u(\tau, r)$ - ограниченное при $\tau \to \infty$ решение задачи (22), (23), тогда исходное уравнение (19) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon^4)$ равномерно по $t \geq 0$ решение вида (20).

2.2 Случай a близкого к -1

Изучим динамику уравнения (19) в случае, когда значение параметра a

близко к критическому, т.е.

$$a = -1 + \varepsilon^2 \cdot a_1(t)$$

Будем аналогично рассматривать a_1 как ограниченную функцию в виде тригинометрических полиномов. Представим функцию $a_1(r)$ в виде тригонометрического полинома:

$$a_1(t) = a_{11}e^{i\omega_1 t} + \ldots + a_{1n}e^{i\omega_n t} = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}e^{i\omega_j t}).$$

Положим

$$x = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau)e^{2\pi i(2k+1)r} + \varepsilon^2 x_2(\tau, r) + \varepsilon^3 x_3(\tau, r) + \ldots, \qquad (24)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2)t$, а функции $x_2(\tau, r)$ и $x_3(\tau, r)$ предполагаются почти периодическими по второму аргументу.

Пусть

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \cdot e^{\pi i(2k+1)r}.$$

Подставим выражение (24) для x в уравнение (19) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге при ε^1 получим верное тождество.

На втором шаге при ε^2 получим:

$$0 = -x_2 - x_2(\tau, r-1) + f_2 u^2,$$

откуда можно выразить x_2:

$$x_2 = \frac{f_2}{2}u^2.$$

На третьем шаге при ε^3 придём к уравнению относительно x_3:

$$x_3(\tau, r) + x_3(\tau, r-1) + 2f_2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -a_1(r) \cdot u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} - 2f_2 x_2 u - f_3 u^3.$$

Подставим найденное значение x_2, получаем:

$$x_3(\tau, r) + x_3(\tau, r-1) + 2f_2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -a_1(r) \cdot u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + (f_2^2 - f_3)u^3.$$

Пусть $\varphi_k(\xi)$ - коэффициент при $e^{2\pi ikr}$ в разложении

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\xi_k(\tau) e^{2\pi ikr})^3$$

в ряд Фурье.

Таким образом, уравнение принимает вид

$$x_3(\tau, r) + x_3(\tau, r-1) + 2f_2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -\sum_{j=1}^{n} (a_{1j} e^{i\omega_j r}) \cdot u +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + (f_2^2 - f_3)u^3.$$

Функция x_3 раскладывается в ряд Фурье по тем же функциям, что и правая часть:

$$x_3(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_{31k} \cdot e^{\pi i(2k+1)r} + \sum_{j=1}^{n} x_{32kj} \cdot e^{\pi i(2k+1)r + i\omega_j r}).$$

Приравняем коэффициенты при $e^{\pi i(2k+1)r + i\omega_j r}$ при $\omega_j \neq 2\pi l$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{32k}(\tau) \cdot (e^{i\omega_k r} + e^{i\omega_k (r-1)}) \cdot e^{\pi i(2k+1)r} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \xi_k(\tau) \cdot e^{\pi i(2k+1)r + i\omega_j r}.$$

Из этого уравнения явно находятся $x_{32k}(\tau)$.

Пусть $a_{1*}(r)$ – функция, содержащая в себе те слагаемые $a_1(r)$, частоты которых кратны 2π. Приравняем коэффициенты при $e^{i\omega_j r}$ при $\omega_j = \pi(2l+1)$:

$$x_3(\tau, r) + x_3(\tau, r-1) + 2f_2 u \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = -a_{1*}(r) \cdot u + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + (f_2^2 - f_3)u^3.$$

В левой части уравнения периодическая по r функция, а справа – тоже зависит от r, но антипериодическая, значит, правая часть равна нулю. Следовательно, справедливо равенство:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - a_{1*}(r) \cdot u(\tau, r) + (f_2^2 - f_3)u^3 \tag{25}$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r+1). \tag{26}$$

Краевая задача (25), (26) является квазинормальной формой для исходного уравнения (19) при a, близком к -1.

Теорема 5. Пусть $u(\tau, r)$ - ограниченное при $\tau \to \infty$ решение задачи (25), (26) тогда исходное уравнение (19) имеет асимптотичское по невязке с точностью до $o(\varepsilon^3)$ равномерно по $t \geq 0$ решение вида (24).

Заключение

Мы исследовали дифференциальные уравнения с запаздыванием в критическом случае, когда надкритичность не является константой, построены нормальные формы. В случае с фиксированным запаздыванием нормальная форма является двумерной. В случае с большим запаздыванием нормальная форма становится неавтономной.

Список литературы

[1] Кащенко И. С. Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием. Ярославль, 2012. С. 5-23.

[2] *Erneux T.* Applied delay differential equations. Berlin : Springer, 2009.

[3] *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Модели волновой памяти. М. : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.

[4] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[5] G. E. Hutchinson, Circular causal in ecology, Ann. N.Y. Acad. Sci. 50 (1948) 221–246.