Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет
Кафедра квантовой теории поля (КТП)

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Руководитель ООП
профессор
____________ О.Н. Чайковская
«_04_»_июня_____2019 г.

Абакумова Виктория Александровна

УСТОЙЧИВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИЕЙ ЧЕРНА-САЙМОНСА С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ЗАРЯЖЕННЫМ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание степени магистра физики
по направлению подготовки
03.04.02 – Физика

Руководители ВКР
профессор, д-р. физ.-мат. наук
____________С.Л. Ляхович
подпись
с.н.с., канд. физ.-мат. наук,
____________Д.С. Капарулин
подпись
«_04_»_июня_____2019 г.

Автор работы
студент группы №_0534_
____________В.А. Абакумова
подпись

Томск-2019

Содержание

Введение

Для полевых теорий с высшими производными известную проблему представляет неустойчивость на взаимодействующем уровне, а также в квантовой теории [1–4]. Наиболее обсуждаемыми полевыми теориями с высшими производными являются модифицированные теории гравитации, для которых также рассматривался вопрос устойчивости [5–7]. Среди данных моделей, теории $f(R)$-гравитации [8,9] представляют собой наиболее известный пример устойчивой нелинейной полевой теории с высшими производными. Некоторые модели с похожими свойствами описывались в [10–12]. Устойчивость в данном классе теорий с высшими производными связана с тем, что их каноническая энергия ограничена благодаря наличию в системе сильных связей второго рода. Устойчивость различных нелинейных механических моделей с высшими производными обсуждалась в [13–17].

В настоящей работе рассматривается класс моделей с высшими производными, называемый теориями производного типа. Полевые уравнения для свободных теорий производного типа определяются волновым оператором M, являющимся полиномом от другого дифференциального оператора W первого или второго порядка. В работе будет показано, что при выполнении определённых условий данный класс теорий допускает включение устойчивых взаимодействий, причём устойчивость сохраняется и на квантовом уровне.

Многие хорошо известные модели с высшими производными попадают в класс теорий производного типа. Например, заряженное скалярное поле с высшими производными типа Пайса-Уленбека является производной системой, где в качестве W выступает оператор Д'Аламбера. Электродинамика Подольского [18] представляет собой производную теорию с полиномом второго порядка от оператора Максвелла в качестве волнового оператора. Расширенная теория Черна-Саймонса [19] является производной теорией векторного поля на трёхмерном пространстве Минковского с волновым оператором, представляющим собой полином третьего порядка от оператора Черна-Саймонса $*d$, где $*$ – оператор Ходжа, d – дифференциал де Рама. Электродинамика Подольского и теория Черна-Саймонса хорошо изучены с различных точек зрения [20–22]. Теории конформной гравитации в измерениях 4 и 6 также представляют собой теории производного типа. В работах [23–25] было показано, что при специальном выборе граничных условий данные теории могут рассматриваться как устойчивые. В настоящей работе используется другой подход к проблеме устойчивости, не связанный с наложением специальных граничных условий.

Простейшему случаю полевых уравнений производного типа, изучаемому в [26], соответствует волновой оператор, представляющий собой полином второго порядка от некоторого другого оператора. Было выяснено, что на свободном уровне существуют две различные сохраняющиеся величины, связанные с трансляцией по времени. Одна их этих величин является канонической энергией, в то время как вторая представляет собой другой независимый интеграл движения. Если эта вторая величина ограничена, теория будет устойчивой на классическом уровне, кроме того устойчивость может быть перенесена на квантовый уровень [26]. В работе [27] изучался более общий вид теорий производного типа, волновой оператор которых представляет собой полином произвольного конечного порядка n от другого оператора (соотношение (1.6) настоящей работы). Если первичный оператор W допускает некоторую симметрию, она может быть связана с n сохраняющимися тензорами производной системы. В частности, если одна из симметрий W – однородность времени, то имеется n независимых сохраняющихся величин, включая каноническую энергию. В настоящей работе разработан ещё более общий подход для того, чтобы смягчить ограничения на включение устойчивых взаимодействий, состоящий в том, что поля разделяются на различные поднаборы, в каждом из которых волновой оператор представляет собой полином от некоторого другого оператора. В отличие от случая, рассмотренного в [27], первичные операторы могут быть различными для различных поднаборов полей, кроме того волновые операторы для различных полей определяются различными полиномами. Данный более общий подход на уровне свободных теорий обеспечивает большую гибкость при включении взаимодействий.

Устойчивость взаимодействий в различных конкретных теориях с высшими производными производного типа изучалась ранее в работах [26–28]. В [29] был предложен метод собственной деформации для систематического включения устойчивых взаимодействий в теориях производного типа, устойчивых на свободном уровне. Важнейшим ингредиентом данного метода является лагражев якорь, впервые введеный в [30] для БРСТ-квантования не обязательно лагранжевой динамики. Как было показано в [31], лагранжев якорь связывает сохраняющиеся величины и симметрии, вне зависимости от того, являются уравнения теории лагранжевыми или нет. Для лагранжевых систем в качестве лагранжева якоря выступает единичный оператор, который обеспечивает однозначное соответствие между симметриями и сохраняющимися токами. В принципе, лагранжев якорь может быть не единственным для заданной системы полевых уравнений. Если полевые уравнения допускают несколько лагранжевых якорей, одна и та же симметрия может быть связана с различными сохраняющимися величинами. Как было отмечено в [26], даже простейшая теория производного типа с волновым оператором M, представляющим собой полином второго порядка от другого дифференциального оператора W, допускает два различных лагранжевых якоря. Это означает существование ещё одной сохраняющейся величины, помимо канонической энергии, связанной с независимостью от времени. Если имеется лагранжев якорь, то общий метод, изложенный в [29], позволяет согласованно включать взаимодействия в полевые уравнения движения, деформируя сохраняющиеся величины, связанные с симметриями якоря. Если лагранжев якорь связывает симметрию с ограниченной сохраняющейся величиной, система остаётся устойчивой при включении взаимодействий с использованием метода собственной деформации [29].

В настоящей работе предлагается более простая схема включения взаимодействия для широкого класса теорий производного типа, не обращающаяся явным образом к концепции лагражева якоря. Основная идея состоит в том, что имеется два поднабора полей, таких что волновой оператор в каждом поднаборе представляет собой полином от некоторого первичного оператора, один из которых калибровочно-инвариантен. Также предполагается, что первичные теории допускают ковариантные вершины взаимодействия, согласованные с калибровочной симметрией. Чтобы построить устойчивые взаимодействия между двумя теориями производного типа, нужно определить семейство сохраняющихся тензоров свободной теории, каждый представитель которого связан с пространственно-временной симметрией. Некоторые из этих тензоров могут иметь ограниченную ноль-ноль-компоненту, другие же снизу не ограничены. Далее находятся взаимодействия для рассматриваемых теорий производного типа, обобщающие взаимодействия между первичными моделями и оставляющие соответствующую сохраняющуюся величину ограниченной на взаимодействующем уровне. Если теория допускает ограниченную сохраняющую величину, устойчивость будет сохраняться на взаимодействующем уровне по построению. Предложенная конструкция воспроизводит все ранее известные примеры устойчивых взаимодействий в теориях с высшими производными производного типа [26, 27].

В качестве иллюстрации описываемого в работе общего метода, производится построение согласованных и устойчивых взаимодействий между расширением теории Черна-Саймонса порядка N и комплексным скалярным полем с высшими производными типа Пайса-Уленбека порядка $2n$. На свободном уровне эти теории обсуждались ранее в [26–28] для некоторых конкретных порядков n и N. В настоящей работе для рассматриваемых свободных теорий построено $(N+n)$-параметрическое семейство сохраняющихся тензоров второго ранга, связанных с трансляционной инвариантностью, кроме того n-параметрическое семейство сохраняющихся токов связано с $U(1)$-симметрией скалярного поля. Будет показано, что среди данных сохраняющихся величин содержатся ограниченные снизу, которые обеспечивают устойчивость теории на классическом уровне, в то время как каноническая энергия снизу не ограничена. Также неминимальным образом определены калибровочно-инвариантные взаимодействия, сохраняющие устойчивость теории на взаимодействующем уровне. Показано, что устойчивые вершины взаимодействия с необходимостью нелагранжевы, что тем не менее не препятствует квантованию. Причина состоит в том, что нелагранжевы полевые уравнения могут допускать лагранжев якорь, позволяющий проквантовать нелагранжеву полевую теорию. Примеры некоторых специальных взаимодействий между теорией производного типа с квадратичным характеристическим полиномом и теорией без высших производных приведены в [26]. С другой стороны, существование лагранжева якоря означает, что теория должна допускать гамильтонов формализм, даже если уравнения с высшими производными нелагранжевы.

Вопросы построения гамильтонова формализма в теориях с высшими производными исследуются на протяжении многих лет, начиная с работы Остроградского [32]. Для вырожденных теорий с высшими производными процедура построения гамильтонова формализма со связями была впервые предложена в работе [33]. На основе этой процедуры и ее различных модификаций изучались различные калибровочные теории, в том числе модели гравитации [34,35]. Основной трудностью гамильтоновой теории, которая строится методом Остроградского и его обобщениями для вырожденных теорий, является неограниченность гамильтониана снизу, что приводит к неустойчивости динамики и проблемам с построением квантовой теории.

Альтернативные процедуры перехода в гамильтонов формализм, не опирающиеся на конструкцию Остроградского, были впервые рассмотрены в теории Пайса-Уленбека [36, 37]. В работе было [26] показано, что каждая свободная теория с высшими производными допускает семейство канонически неэквивалентных гамильтонианов и скобок Пуассона, включающее канонического представителя. Явное построение семейства неканонических гамильтоновых формулировок в калибровочной полевой теории было проведено в [28] для расширенной теории Черна-Саймонса [19] третьего порядка.

В настоящей работе рассматривается гамильтонова формулировка для расширенной теории Черна-Саймонса произвольного конечного порядка N. Показывается, что свободная расширенная теория Черна-Саймонса допускает $(N-1)$-параметрическое семейство гамильтоновых формулировок, причем в качестве гамильтониана может быть взята ноль-ноль-компонента произвольного представителя семейства сохраняющихся тензоров [27]. Также демонстрируется, что построенные нелагранжевы вершины взаимодействия расширенной теории Черна-Саймонса с заряженным скалярным полем сохраняют выбранный представитель в семействе гамильтонианов.

Работа организована следующим образом. Глава 1 посвящена изучению теорий производного типа. В разделе 1.1 даётся определение свободной теории производного типа и рассматриваются семейства симметрий и сохраняющихся величин, связанных с каждой симметрией первичного волнового оператора W. В разделе 1.2 рассматриваются калибровочно-инвариантные взаимодействия, обеспечивающие сохранение любого фиксированного представителя из семейства сохраняющихся величин свободной теории производного типа. В главе 2 производится построение устойчивых взаимодействий между расширенной теорий Черна-Саймонса и заряженным скалярным полем с высшими производными. В разделе 2.1 приводятся некоторые предварительные сведения о расширенной теории Черна-Саймонса, в том числе выписывается явный вид уравнений движения и сохраняющихся тензоров. В разделе 2.2, следуя общему методу, изложенному в предыдущей главе, для взаимодействующих расширенной теории Черна-Саймонса и заряженного скалярного поля с высшими производными, явно строятся сохраняющиеся величины и исследуется устойчивость, связанная с использованием ограниченных интегралов движения. Глава 3 посвящена взаимодействиям между рассматриваемыми теориями на гамильтоновом уровне. В разделе 3.1 строится гамильтонова формулировка расширенной теории Черна-Саймонса, вычисления здесь в значительной степени используют техники работы с матрицами Ганкеля и Безу, которые могут быть найдены, например, в [38]. В разделе 3.2 рассматривается гамильтонова формулировка при наличии взаимодействий с заряженным скалярным полем. Заключение содержит изложение основных результатов работы.

1 Теории производного типа

Рассмотрим набор полей ϕ^a на d-мерном пространстве Минковского с локальными координатами x^μ , $\mu = 0\,, \ldots\,, d-1$. В работе систематически используются конденсированные обозначения Девитта [39]. Поля обозначены конденсированными индексами $a\,, b\,, \ldots$. Каждый конденсированный индекс содержит в себе все векторные, тензорные, спинорные и другие индексы, а также пространственно-временные координаты. Суммирование по конденсированным индексам включает интегрирование по x^μ. В данных обозначениях линейные дифференциальные операторы представляют собой матрицы с конденсированными индексами. Предполагается, что теория допускает постоянную метрику, которая используется для поднятия и опускания мультииндексов. В этом случае каждый линейный дифференциальный оператор обладает квадратичной формой, соответствующей локальному билинейному по полям функционалу. Также подразумевается, что поля обращаются в ноль на бесконечности. Таким образом, если квадратичная форма равна нулю, в конденсированных обозначениях это означает, что соответствующий локальный функционал представляет собой интеграл от полной дивергенции.

В конденсированных обозначениях, любая система линейных полевых уравнений имеет вид

$$M_{ab}\phi^b = 0\,, \tag{1.1}$$

где M_{ab} – интегральное ядро матричного дифференциального оператора. Из соображений удобства, мы предполагаем, что M_{ab} – квадратная матрица, так что число уравнений в каждой точке пространства-времени совпадает с числом полей. В данном классе теорий M_{ab} обычно называют *волновым оператором.* Сопряжение волнового оператора определяется следующим образом:

$${M^\dagger}_{ab} = M_{ba}\,. \tag{1.2}$$

Полевые уравнения являются вариационными, когда $M^\dagger = M$, в этом случае имеется функционал действия

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\langle\, \phi\,, M\phi\,\rangle\,, \tag{1.3}$$

где скобки $\langle\;,\;\rangle$ обозначают естественное спаривание между полями,

$$\langle\, \phi\,, M\phi\,\rangle \equiv \phi^a (M\phi)_a\,, \qquad (M\phi)_a \equiv M_{ab}\phi^b\,, \tag{1.4}$$

и суммирование по повторяющимся на разных уровнях мультииндексам подразумевается. Если ${M_*}^\dagger = -M_*$ для некоторого произвольного оператора M_* , его диагональные элементы представляют собой полные дивергенции,

$$\int d^d x \, \partial_\mu j^\mu(\phi) = \langle \, \phi \, , M_* \phi \, \rangle \, , \qquad \forall \, \phi \, . \tag{1.5}$$

Если выражение $M_*\phi$ исчезает на массовой оболочке (1.1), данная формула устанавливает соответствие между сохраняющимися токами и анти-самосопряжёнными операторами.

Вариационная теория (1.1) называется *теорией производного типа*, если её волновой оператор представляет собой полином конечного порядка от другого самосопряжённого оператора $W^a{}_b$, то есть

$$M(\alpha \, , W) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p W^p \, , \quad (W^p)^a{}_b = W^a{}_{c_1} W^{c_1}{}_{c_2} \ldots W^{c_{p-1}}{}_b \, , \quad p = 2 \, , \ldots \, , n \, , \quad W^\dagger = W \, , \tag{1.6}$$

где все мультииндексы поднимаются и опускаются с помощью метрики, и $\alpha_p \, , p = 0 \, , \ldots \, , n \, ,$ – некоторые вещественные постоянные. Предполагается, что коэффициент при наибольшей степени W отличен от нуля: $\alpha_n \neq 0$. Таким образом, каждая теория производного типа определяется самосопряжённым оператором $W^a{}_b$ и полиномом конечного порядка

$$M(\alpha \, ; z) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p z^p \, , \tag{1.7}$$

где z – формальная комплекснозначная переменная. Полином $M(\alpha \, ; z)$ называется *характеристическим полиномом*, а $W^a{}_b$ – *первичным волновым оператором*. В свою очередь, первичный оператор определяет *первичную теорию*,

$$W_{ab} \phi^b = 0 \, . \tag{1.8}$$

Так как W_{ab} – самосопряжённый оператор, определяемая им первичная теория является вариационной. В настоящей работе в основном рассматриваются первичные волновые операторы, не вовлекающие высших производных. В этом случае теории производного типа (1.1), (1.6) могут рассматриваться как происходящие из первичной теории (1.8) более низкого порядка.

1.1 Симметрии и законы сохранения

Будем рассматривать линейный оператор $X^a{}_b$ как симметрию линейных уравнений (1.1), если он перестановочен с волновым оператором теории в следующем смысле:

$$[\,X\,,M\,]^a{}_b = Y^a{}_c M^c{}_b\,,\qquad [\,X\,,M\,]^a{}_b = X^a{}_c M^c{}_b - M^a{}_c X^c{}_b\,,\tag{1.9}$$

где $Y^a{}_c$ – некоторый другой оператор. Если соотношение (1.9) выполнено, оператор $X^a{}_b$ определяет линейное преобразование полей, оставляющее их на массовой оболочке,

$$\delta_\xi(M\phi)^a = \xi(X+Y)^a{}_b(M\phi)^b \approx 0\,,\qquad \delta_\xi\phi^a = \xi X^a{}_b\phi^b\,,\tag{1.10}$$

где ξ – некоторая постоянная, играющая роль параметра преобразования. Знак «$\approx$» означает равенство с учётом уравнений (1.1). Кроме того, каждая теория допускает тривиальные симметрии

$$X^a{}_b = \widetilde{X}^a{}_c M^c{}_b\,,\qquad Y^a{}_b = [\,\widetilde{X}\,,M\,]^a{}_b\,,\tag{1.11}$$

где $\widetilde{X}^a{}_b$ – произвольный оператор. Соответствующие преобразования полей исчезают на массовой оболочке и не содержат какой-либо значимой информации о динамике рассматриваемой теории. В работе тривиальные симметрии игнорируются, то есть все симметрии рассматриваются с точностью до тривиальных.

Как известно, нетривиальные симметрии системы линейных уравнений образуют ассоциативную алгебру, где в качестве операции умножения выступает произведение операторов. Последний факт проверяется тем, что для каждой пары симметрий $(X_1)^a{}_b\,,(X_2)^a{}_b$ имеем

$$\begin{gathered}[\,X_1X_2\,,M\,]^a{}_b = (X_1)^a{}_c[\,X_2\,,M\,]^c{}_b + [\,X_1\,,M\,]^a{}_c(X_2)^c{}_b = \\ = \big((Y_1)^a{}_d(X_2)^d{}_c + (X_1)^a{}_d(Y_2)^d{}_c + (Y_2)^a{}_c\big)M^c{}_b\,.\end{gathered}\tag{1.12}$$

Элементы ассоциативной алгебры, коммутирующие с волновым оператором, образуют подалгебру, которая связана с сохраняющимися величинами теории и в основном рассматривается в настоящей работе.

Рассмотрим уравнения теории производного типа (1.1), (1.6). Предположим, что первичная модель (1.8) обладает симметрией $X^a{}_b$, коммутирующей с первичным волновым оператором,

$$[\,X\,,W\,] = 0\,.\tag{1.13}$$

Таким образом, даже в том случае, когда первичная теория допускает единственную симметрию, ассоциативная алгебра симметрий теории производного типа имеет два естественных генератора, X и W, которые коммутируют друг с другом,

$$[\,X\,,M\,] = [\,W\,,M\,] = 0\,.\tag{1.14}$$

Беря произведение первичной симметрии X со степенями первичного волнового оператора W, получаем семейство симметрий уравнений теории производного типа (1.1), (1.6):

$$[\, X_p \,, M \,] = 0 \,, \qquad (X_p)^a{}_b = X^a{}_c (W^p)^c{}_b \,, \qquad p = 0 \,, \ldots \,, n-1 \,. \tag{1.15}$$

Имеет смысл учитывать только члены с $p = 0 \,, \ldots \,, n-1$, так как высшие степени первичного оператора могут быть поглощены волновым оператором (1.6). В этом случае на массовой оболочке симметрия для $p \geq n$ приводится к симметрии с $p < n$. Генераторы X_p могут быть объединены в n-параметрическое семейство *производных симметрий* производной теории,

$$X^a{}_b(\beta) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p (X_p)^a{}_b \,, \tag{1.16}$$

где β_p, $p = 0 \,, \ldots \,, n-1$, – вещественные числа. Как можно видеть, все представители данного семейства происходят из одной и той же симметрии X первичной модели.

Симметрия (1.9) сохраняет функционал действия (1.3), если её оператор антисамосопряжённый и коммутирует с волновым оператором:

$$[\, X \,, M \,] = 0 \,, \qquad X^\dagger = -X \,. \tag{1.17}$$

Соответствующий квадратичный по полям сохраняющийся ток определяется из условия

$$\int d^d x \partial_\mu j^\mu(\phi) = \langle\, \phi \,, X M \phi \,\rangle \,. \tag{1.18}$$

Эта формула представляет собой тождество Нётер между симметриями и законами сохранения. В классе теорий производного типа единственная симметрия (1.13) определяет семейство производных симметрий (1.16). Связанное n-параметрическое семейство сохраняющихся величин имеет вид

$$j^\mu(\beta) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p j_p{}^\mu(\phi) \,, \qquad \int d^d x \partial_\mu j_p{}^\mu(\phi) = \langle\, \phi \,, X_p M \phi \,\rangle \,, \tag{1.19}$$

где величины $j_p{}^\mu$, $p = 0 \,, \ldots \,, n-1$, происходят из симметрий (1.15). В частности, $j_0{}^\mu$ представляет собой нётеровский сохраняющийся ток для симметрии (1.13) первичной модели, в то время как $j_p{}^\mu$, $p = 1 \,, \ldots \,, n-1$, представляют собой другие независимые сохраняющиеся величины.

Простейшей возможной симметрией свободной полевой теории является трансляционная инвариантность. Генераторы трансляции ∂_μ автоматически являются антисамосопряжёнными и коммутируют с первичным волновым оператором (1.8),

$$[\, \partial^\mu \,, W \,] = 0 \,. \tag{1.20}$$

Как только первичный волновой оператор является трансляционно-инвариантным, производная теория обладает n-параметрическим семейством (1.16) производных симметрий, порождаемых этой инвариантностью:

$$X^{\mu a}{}_b = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p (X_p)^{\mu a}{}_b \,, \qquad (X_p)^{\mu a}{}_b = (\partial^\mu W^p)^a{}_b \,. \tag{1.21}$$

Каждая из этих симметрий сохраняет действие (1.3) теории производного типа (1.1), (1.6). Соответствующие сохраняющиеся токи (1.19) образуют семейство тензоров второго ранга

$$\Theta^{\mu\nu}(\beta) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p T_p{}^{\mu\nu}(\phi) \,, \qquad \partial_\nu T_p{}^{\mu\nu}(\phi) = \langle\, \phi \,, \partial^\mu W^p M \phi \,\rangle \,. \tag{1.22}$$

Данное семейство включает канонический тензор энергии-импульса $T_0{}^{\mu\nu}$, в то время как $T_p{}^{\mu\nu}$, $p = 1 \,, \ldots \,, n-1$, представляют собой другие независимые сохраняющиеся тензоры, связанные с пространственно-временной трансляционной инвариантностью модели. В этом случае трансляционная инвариантность полевой теории производного типа приводит к семейству сохраняющихся тензоров энергии-импульса.

С точки зрения устойчивости моделей с высшими производными, представляет интерес ноль-ноль-компонента сохраняющегося тензора, которая имеет вид:

$$\Theta^{00}(\beta) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p T_p{}^{00}(\phi) \,. \tag{1.23}$$

Это выражение представляет собой сумму канонической энергии $T_0{}^{00}$ и остальных вкладов $T_p{}^{00}$, $p = 1 \,, \ldots \,, n-1$. Даже если каноническая энергия не ограничена из-за наличия высших производных, величина (1.23) может определять ограниченную сохраняющуюся величина. Если такая величина существует, она обеспечивает устойчивость классической динамики теории производного типа (1.1), (1.6) на свободном уровне.

Представители семейства сохраняющихся токов (1.19) (или сохраняющихся тензоров (1.22)) в общем случае независимы. Это утверждение не является теоремой, но подтверждается следующими наблюдениями: (a) величины $j_p{}^\mu$ представляют собой билинейные формы по полям ϕ^a и их пространственно-временным производным; (b) суммарное количество производных, входящих в $j_p{}^\mu$ увеличивается с ростом p . Так как симметрия X и первичный оператор W представляют собой матричные дифференциальные операторы порядков n_X и n_W соответственно, сохраняющийся ток $j_p{}^\mu$ содержит не более чем

$$(p+n)n_W + n_X - 1 \tag{1.24}$$

производных по полям. Член с наибольшим количеством производных даёт вклад в сохраняющуюся величину и является нетривиальным на массовой оболочке по крайней мере в случае, когда отсутствует калибровочная симметрия и связи. Применяя данные рассуждения к ${j_{n-1}}^{\mu}$, мы приходим к заключению, что член наиболее высокого порядка не может быть линейной комбинацией других токов с меньшим числом производных, поэтому ${j_{n-1}}^{\mu}$ – независимая сохраняющая величина. Исходя из того же аргумента для ${j_{n-2}}^{\mu}\,, {j_{n-3}}^{\mu}\,,\,\ldots\,, {j_0}^{\mu}$, мы получаем, что все эти величины не являются функциями друг друга. Максимальное число независимых представителей в семействе сохраняющихся токов (1.19) равно порядку n характеристического полинома (1.7). В модели скалярного поля с высшими производными максимальное число независимых сохраняющихся величин связано с пространственно-временной трансляционной инвариантностью [26]. В калибровочных теориях некоторые генераторы из семейства (1.19) могут быть тривиальными на массовой оболочке. Например, расширенная теория Черна-Саймонса порядка n допускает $n-1$ независимый сохраняющийся тензор (1.22) [27]. Всё изложенное выше относится к случаю свободных теорий. На нелинейном уровне процедура включения взаимодействий чувствительна к выбору представителя из семейства сохраняющихся величин (1.19), который сохраняется на взаимодействующем уровне, что мотивирует нас работать с полным семейством сохраняющихся величин, даже если некоторые из генераторов зависимы.

Перейдём к рассмотрению калибровочных симметрий. Если волновой оператор обладает нуль-вектором

$$M^a{}_b R^b{}_\alpha = 0\,, \tag{1.25}$$

теория производного типа (1.1), (1.6) допускает калибровочное преобразование, сохраняющее массовую оболочку,

$$\delta_\varepsilon\left(M_{ab}\phi^b\right) = 0\,, \qquad \delta_\varepsilon\phi^a = R^a{}_\alpha\varepsilon^\alpha\,, \tag{1.26}$$

где ε^α – калибровочные параметры, представляющие собой произвольные функции пространственно-временных координат. Оператор $R^a{}_\alpha$ является генератором калибровочной симметрии. В настоящей работе рассматривается класс теорий производного типа, для которых калибровочные симметрии происходят из нуль-векторов первичной модели, то есть

$$M^a{}_b R^b{}_\alpha = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad W^a{}_b R^b{}_\alpha = 0\,. \tag{1.27}$$

Отметим, что данное не выполняется автоматически для любой теории производного типа. Оно выполнено, например, для расширенной теории Черна-Саймонса и электродинамики Подольского.

1.2 Включение согласованных взаимодействий

В данном разделе строятся согласованные взаимодействия между двумя Пуанкаре-инвариантными теориями производного типа, одна из которых является калибровочно-инвариантной. На свободном уровне эти теории допускают семейства сохраняющихся тензоров энергии-импульса. Мы строим взаимодействия, обеспечивающие сохранение деформации некоторого представителя из этого семейства. При этом допускаются не обязательно лагранжевы вершины. Основные проблемы включения согласованных взаимодействий между двумя не обязательно лагранжевыми теориями рассматриваются в [40]. В настоящей работе решение проблемы построения взаимодействий исходит из предположения, что две первичные теории допускают согласованную вершину взаимодействия. Затем находится способ перенести данную вершину на уровень производных теорий, не нарушающий их устойчивость.

1.2.1 Взаимодействие на уровне первичных теорий

Рассматривается два поднабора полей $\phi^a\,,\, \varPhi^i$ на d-мерном пространстве Минковского, где $a\,,i$ – мультииндексы, помечающие поля. Первичные операторы обозначены как W_{ab} и $\mathcal{W}_{ij}$ соответственно, первичные уравнения имеют вид

$$W_{ab}\phi^b = 0\,, \qquad \mathcal{W}_{ij}\varPhi^j = 0\,. \tag{1.28}$$

Данные уравнения являются вариационными с функционалом действия, представляющим собой сумму действий вида (1.3) для полей ϕ^a и Φ^i. Первичные операторы предполагаются инвариантными относительно пространственно-временных трансляций:

$$[\,\partial^\mu\,, W\,] = [\,\partial^\mu\,, \mathcal{W}\,] = 0\,. \tag{1.29}$$

Симметрия относительно группы Пуанкаре означает также существование сохраняющегося тензора энергии-импульса

$$\varTheta^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi) = T^{\mu\nu}(\phi) + T^{\mu\nu}(\varPhi)\,, \tag{1.30}$$

где $T^{\mu\nu}(\phi)$ и $T^{\mu\nu}(\varPhi)$ обозначают вклады свободных полей ϕ и $\varPhi$ соответственно. Величина $\varTheta^{\mu\nu}$ определяется формулой

$$\int d^dx\,\partial_\nu\,\varTheta^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi) = \langle\,\phi\,, \partial^\mu\,W\phi\,\rangle + \langle\,\varPhi\,, \partial^\mu\,\mathcal{W}\varPhi\,\rangle\,. \tag{1.31}$$

Теория, описывающая поля $\varPhi^i$, предполагается калибровочно-инвариантной. Генератор калибровочной симметрии $R^i{}_\alpha$ представляет собой нуль-вектор первичного оператора $\mathcal{W}_{ij}$,

$$\mathcal{W}_{ij}R^j{}_\alpha = 0\,. \tag{1.32}$$

Соответствующие калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta_\varepsilon \Phi^i = R^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha \,, \qquad \delta_\varepsilon \phi^a = 0 \,, \tag{1.33}$$

где ε^α – калибровочные параметры. Поля ϕ^a не обладают калибровочными степенями свободы.

Предполагается, что существует вариационная вершина взаимодействия между двумя первичными моделями, такая что (a) калибровочное преобразование (1.33) сохраняется на взаимодействующем уровне; (b) функционал действия не более чем квадратичен по ϕ. Наиболее общий функционал действия, удовлетворяющий этим требованиям, имеет вид

$$S[\phi\,,\Phi] = \frac{1}{2}\big(W_{ab} + \Gamma_{ab}(\beta\Phi)\big)\phi^a\phi^b + \frac{1}{2}\mathcal{W}_{ij}\,\Phi^i\Phi^j \,, \tag{1.34}$$

где $\Gamma_{ab}(\beta\Phi)$ – оператор вершины, представляющий собой функцию от величины Φ, β – постоянная взаимодействия, которая может быть произвольным вещественным числом. Предполагаем, что $\Gamma_{ab}(\beta\Phi)$ – полином конечного порядка по Φ, то есть

$$\Gamma_{ab}(\beta\Phi) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \beta^k \Gamma^{(k)}{}_{ab}(\Phi) \,, \qquad k_{max} < +\infty \,, \tag{1.35}$$

где $\Gamma^{(1)}{}_{ab}\,, \Gamma^{(2)}{}_{ab}\,, \ldots$ – линейны, квадратичны и т. д. по Φ. Величина β^k означает k-ю степень β. Наличие такого разложения гарантирует, что уравнения движения модели являются полиномами конечного порядка по постоянной взаимодействия β. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала действия (1.34) имеют вид

$$\partial_a S \equiv W_{ab}(\beta\Phi)\phi^b = 0 \,, \qquad \partial_i S \equiv \mathcal{W}_{ij}\,\Phi^j + \beta J_i(\phi\,,\beta\Phi) = 0 \,, \tag{1.36}$$

где

$$W_{ab}(\beta\Phi) = W_{ab} + \Gamma_{ab}(\beta\Phi) \,, \qquad J_i(\phi\,,\beta\Phi) = \partial_i \Gamma_{ab}(\beta\Phi)\phi^a\phi^b \,, \tag{1.37}$$

$\partial_a\,, \partial_i$ понимаются как вариационные производные по $\phi^a\,, \Phi^i$. Таким образом, в модели со взаимодействием оператор вершины $\Gamma(\beta\Phi)$ добавляется к свободным уравнениям движения для изначально некалибровочных полей ϕ^a, в то время как полевые уравнения для калибровочной теории содержат токоподобный вклад $J_i(\phi\,,\beta\Phi)$. Такая структура нелинейной теории характерна для полей низших спинов. Например, она включает в себя описание минимальных взаимодействий между электромагнитным полем и заряженной материи.

Инфинитезимальные калибровочные преобразования для функционала действия (1.34) записываются в виде

$$\delta_\varepsilon \phi^a = \beta R^a{}_{b\alpha}\phi^b\varepsilon^\alpha \,, \qquad \delta_\varepsilon \Phi^i = R^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha \,, \tag{1.38}$$

где $R^i{}_\alpha$ – нуль-вектор первичного оператора $\mathcal{W}_{ij}$ (1.32), а $R^a{}_{b\alpha}$ – некоторая не зависящая от полей структурная функция, анти-симметричная по индексам ab,

$$R_{ab\alpha} = -R_{ba\alpha}\,. \tag{1.39}$$

Инвариантность действия (1.34) по отношению к калибровочным преобразованиям (1.38) эквивалентна выполнению условия

$$\big(W + \varGamma(\beta\varPhi)\big)^a{}_c R^c{}_{b\alpha} - R^a{}_{c\alpha}\big(W + \varGamma(\beta\varPhi)\big)^c{}_b + R^i{}_\alpha \partial_i \varGamma^a{}_b(\beta\varPhi) = 0\,. \tag{1.40}$$

Так как калибровочные симметрии и калибровочные преобразования лагранжевых теорий связаны теоремой Нётер, условия (1.39), (1.40) определяют правило отбора структурных функций $\varGamma^a{}_b\,, R^a{}_{b\alpha}$. Эти условия означают, что волновой оператор $W_{ab}(\beta\varPhi)$ (1.37) является калибровочно-инвариантным в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
&[\,W(\beta\varPhi)\,, R_\alpha\,]_{ab} + R^i{}_\alpha \partial_i \varGamma_{ab}(\beta\varPhi) = 0\,,\\
&[\,W(\beta\varPhi)\,, R_\alpha\,]_{ab} = W_{ac}(\beta\varPhi) R^c{}_{b\alpha} - R_{ac\alpha} W^c{}_b(\beta\varPhi)\,, \qquad \forall\beta\,.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Данное соотношение обеспечивает калибровочную инвариантность уравнений движения для поля ϕ^a.

Трансляционная инвариантность взаимодействующей теории (1.34) понимается в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
&[\,W(\beta\varPhi)\,, \partial^\mu\,]_{ab} + \beta\partial^\mu \varPhi^i \partial_i \varGamma_{ab}(\beta\varPhi) = 0\,,\\
&[\,W(\beta\varPhi)\,, \partial^\mu\,]_{ab} = W_{ab}(\beta\varPhi)\partial^\mu - \partial^\mu W_{ab}(\beta\varPhi)\,, \qquad \forall\beta\,.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Как только данное условие выполнено, функционал действия (1.34) сохраняется при пространственно-временных трансляциях. Тензор энергии-импульса нелинейной теории имеет следующую структуру:

$$\boldsymbol{\varTheta}^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi) = T^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi) + T^{\mu\nu}(\varPhi)\,. \tag{1.43}$$

Здесь $T^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi)$ представляет собой калибровочно-инвариантное расширение тензора $T^{\mu\nu}(\phi)$ (1.30) свободной теории, в то время как $T^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi)$ – тензор энергии-импульса свободной калибровочной теории. Сохраняющегося тензор (1.43) определяется из условия

$$\int d^dx\, \partial_\nu \boldsymbol{\varTheta}^{\mu\nu}(\phi\,, \varPhi) = \langle\, \phi\,, \partial^\mu\, W(\beta\varPhi)\,\phi\,\rangle + \langle\, \varPhi\,, \partial^\mu\, \mathcal{W}\,\varPhi\,\rangle\,. \tag{1.44}$$

Правая часть данного выражения представляет собой полную дивергенцию, так как $\partial^\mu W(\beta\varPhi)\,, \partial^\mu \mathcal{W}$ являются анти-самосопряжёнными операторами.

Поясним значение условий (1.39), (1.40) и их влияние на структуру взаимодействий. Предположим, что калибровочное преобразование калибровочного поля Φ^i имеет нулевую моду $\varepsilon = \overline{\varepsilon}(x)$, такую что

$$R^i{}_\alpha \overline{\varepsilon}^\alpha = 0 \,. \tag{1.45}$$

В этом случае функционал действия (1.34) сохраняется при следующих преобразованиях:

$$\delta_{\overline{\varepsilon}} \phi^a = \xi R^a{}_{b\alpha} \overline{\varepsilon}^\alpha \,, \qquad \delta_{\overline{\varepsilon}} \Phi^i = 0 \,, \tag{1.46}$$

где ξ – постоянный параметр. В свободном пределе эти преобразования соответствуют некоторой внутренней симметрии свободной теории поля ϕ^a. Данная симметрия не следует из релятивистской инвариантности уравнений (1.28) , то есть на свободном уровне имеется дополнительное необходимое условие на построение взаимодействий. Таким образом, мы имеем дело с внутренней симметрией, которая даёт ограничения на мультиплет полей ϕ^a, вовлекаемых во взаимодействие.

Токоподобный член J_i (1.37) происходит из внутренней симметрии (1.46). Вследствие соотношений (1.39), (1.40), он калибровочно-инвариантнен и удовлетворяет калибровочному тождеству,

$$\delta_\varepsilon J_i = 0 \,, \qquad R^i{}_\alpha J_i + R^a{}_{b\alpha} \, \partial_a S \, \phi^b = 0 \,. \tag{1.47}$$

Если внутренняя симметрия представляет собой стандартное $U(1)$-преобразование, а генератор калибровочной симметрии $R^i{}_\alpha$ – градиент, то токоподобный член в точности соответствует току $U(1)$-заряда,

$$J_i = J_\mu(x) \,, \tag{1.48}$$

удовлетворяющему условию (1.47) . Нелинейная теория остаётся калибровочно-инвариантной при добавлении токоподобного члена J_i к уравнениям движения для калибровочного поля и замене первичного оператора W на его калибровочно-инвариантное расширение $W(\beta\Phi)$. Это означает, что взаимодействия (1.36) имитируют взаимодействие типа электромагнитного между калибровочным полем и материей.

1.2.2 Взаимодействие между теориями производного типа

Перейдём к рассмотрению процедуры включения взаимодействий между теориями производного типа. Наиболее общий анзац для двух теорий производного типа с первичными операторами W и $\mathcal{W}$ имеет вид

$$M_{ab}(\alpha\,; W)\phi^b = 0 \,, \qquad \mathcal{M}_{ij}(A\,; \mathcal{W})\Phi^j = 0 \,. \tag{1.49}$$

Характеристические полиномы производных моделей (1.49) представляют собой полиномы наиболее общего вида порядка n и N соответственно,

$$M(\alpha\,;z) = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p z^p\,, \qquad \mathcal{M}(A\,;z) = \sum_{q=1}^{N} A_q z^q\,, \tag{1.50}$$

где z – формальная комплекснозначная переменная. Вещественные числа $\alpha_p\,,\, p = 0\,,\dots\,,n-1\,$, и $A_q\,,\, q = 1\,,\dots\,,N\,$, представляют собой параметры моделей.

Теории производного типа (1.49) обладают теми же самыми пространственно-временными и калибровочными симметриями, что и соответствующие им первичные модели. В частности, модели (1.49), (1.50) инвариантны относительно калибровочных преобразований (1.33). Что касается пространственно-временных трансляций, единственная симметрия первичной теории порождает $(n+N)$-параметрическое семейство производных симметрий, такое что

$$X^{\mu a}{}_b(\beta) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p (\partial^\mu W^p)^a{}_b\,, \qquad X^{\mu i}{}_j(B) = \sum_{q=0}^{N-1} B_q (\partial^\mu \mathcal{W}^q)^i{}_j\,, \tag{1.51}$$

где параметры $\beta_p\,, B_q$ – вещественные числа, а ξ – постоянный вектор. Соответствующий набор сохраняющихся величин представлен семейством тензоров энергии-импульса

$$\varTheta^{\mu\nu}(\beta\,,B) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p {T_p}^{\mu\nu}(\phi) + \sum_{q=0}^{N-1} B_q {T_q}^{\mu\nu}(\varPhi)\,, \tag{1.52}$$

где величины ${T_p}^{\mu\nu}(\phi)\,,{T_q}^{\mu\nu}(\varPhi)$ определяются из условия

$$\int d^dx\, \partial_\nu\, \varTheta^{\mu\nu}(\beta\,,B) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \langle\, \phi\,, \partial^\mu\, W^p M \phi\,\rangle + \sum_{q=0}^{N-1} B_q \langle\, \varPhi\,, \partial^\mu\, \mathcal{W}^q \mathcal{M} \varPhi\,\rangle\,. \tag{1.53}$$

По построению, канонический тензор энергии-импульса рассматриваемой модели включён в семейство как

$$\varTheta^{\mu\nu}_{\mathrm{can}}(\phi\,,\varPhi) = {T_0}^{\mu\nu}(\phi) + {T_0}^{\mu\nu}(\varPhi)\,. \tag{1.54}$$

Несмотря на то, что канонический тензор энергии-импульса всегда не ограничен снизу из-за наличия в системе высших производных, в семействе сохраняющихся тензоров могут содержаться ограниченные величины, обеспечивающие устойчивость свободной теории.

Под взаимодействием между теориями (1.49) подразумевается формальная деформация свободной теории с постоянной взаимодействия β и нелинейными уравнениями движения вида

$$E_a(\beta) \equiv M_{ab}\phi^b + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \varGamma^{(k)}{}_a(\phi\,,\varPhi) = 0\,, \qquad \mathcal{E}_i \equiv \mathcal{M}_{ij}\varPhi^j + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \varGamma^{(k)}{}_i(\phi\,,\varPhi) = 0\,. \tag{1.55}$$

Предполагается, что структурные функции $\Gamma^{(k)}$ имеют степень неоднородности $k+1$ по переменным ϕ^a , Φ^i, то есть $\Gamma^{(1)}$ квадратична по полям, $\Gamma^{(2)}$ – кубична, и т. д. Для взаимодействующей теории принцип наименьшего действия не требуется, поэтому нелинейные уравнения (1.55) могут быть нелагранжевыми. Полагаем, что взаимодействия (1.55) согласованны, если количество калибровочных симметрий и калибровочных тождеств сохраняется при включении взаимодействий, а также по крайней мере один представитель из семейства тензоров энергии-импульса (1.52) свободной теории продолжает сохраняться на нелинейном уровне.

Для свободной теории (1.49) $(n+N)$-параметрическое семейство вершин взаимодействия может быть представлено в следующей форме:

$$E_a \equiv \overline{M}_{ab}(\beta\,,B)\phi^b = 0\,, \qquad \mathcal{E}_i \equiv \mathcal{M}_{ij}\,\Phi^j + \sum_{p=0}^{n-1}\beta_p(\overline{J}_p)_i(\beta\,,B) = 0\,, \tag{1.56}$$

где используются обозначения:

$$\overline{M}_{ab}(\beta\,,B) = \sum_{p_0}^{n-1}\alpha_p\overline{W}^p(\beta\,,B)\,, \qquad (\overline{J}_p)_i(\beta\,,B) = \frac{1}{2}\partial_i\langle\,\phi\,,\overline{W}^p(\beta\,,B)\overline{M}(\beta\,,B)\phi\,\rangle\,, \tag{1.57}$$

черта сверху означает, что калибровочное поле Φ^i заменяется на более общее выражение:

$$\overline{W}(\beta,B) = W(\beta\,\Phi)\big|_{\beta\,\Phi=\overline{\Phi}(\beta\,,B)}\,, \overline{\Phi}^i(\beta\,,B) = \beta\,\Phi^i + \sum_{q=1}^{N-1}B_q(\mathcal{W}^q\,\Phi)^i\,. \tag{1.58}$$

Постоянные взаимодействия $\beta\,,\beta_p\,,B_q$, $p=0\,,\dots\,,n-1$, $q=1\,,\dots\,,N-1$, представляют собой вещественные числа. Взаимодействия (1.56) представляют собой обобщение взаимодействий (1.36) между первичными моделями, а именно: свободный волновой оператор M для полей ϕ^a заменяется на его калибровочно-инвариантное расширение $\overline{M}(\beta\,,B)$, семейство токоподобных членов $(\overline{J}_p)_i$ добавляется к свободным уравнениям движения калибровочной теории.

Следующие факты обеспечивают согласованность взаимодействий: (a) уравнения движения не изменяются при калибровочных преобразованиях (1.38), в то время как закон преобразования для уравнений движения имеет вид

$$\delta_\varepsilon E^a = \beta R^a{}_{b\alpha}E^b\varepsilon^\alpha\,, \qquad \delta_\varepsilon\mathcal{E}^i = 0\,; \tag{1.59}$$

(b) существуют калибровочные тождества между уравнениями движения,

$$R^i{}_\alpha\mathcal{E}_i + \sum_{p=0}^{n-1}\beta_pR_{ab\alpha}(\overline{W}^p)^b{}_cE^a\phi^c \equiv 0\,; \tag{1.60}$$

(c) сохраняющийся тензор второго ранга $\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}$ определяется из условия

$$\int d^d x\, \partial_\nu \boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}(\beta\,, B) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p \langle\, \phi\,, \partial^\mu \overline{W}^p E\,\rangle + \sum_{q=0}^{N-1} B_q \langle\, \varPhi\,, \partial^\mu \mathcal{W}^q \mathcal{E}\,\rangle\,, \qquad B_0 \equiv \beta\,. \tag{1.61}$$

Доказательство соотношений (1.59), (1.60) использует тождества

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \delta_\varepsilon(\overline{W}^p\phi)^a = \beta R^a{}_{b\alpha}(\overline{W}^p\phi)^b\varepsilon^\alpha\,; \\ &\text{(b)} \quad R^i{}_\alpha(\overline{J}_p)_i + R_{ab\alpha}(\overline{W}^p)^b{}_c E^a\phi^c \equiv 0\,; \\ &\text{(c)} \quad \delta_\varepsilon(\overline{J}_p)_i = 0\,, \end{aligned} \tag{1.62}$$

которые выполнены для $p = 0\,, \ldots\,, n-1$. Доказательства этих соотношений содержатся в приложении A. Сохраняющийся тензор $\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}$ (1.61) представляет собой деформацию выбранного представителя семейства тензоров энергии-импульса (1.53) свободной теории, параметры которого определяются постоянными взаимодействия. В приложении B доказывается, что правая часть (1.61) представляет собой полную дивергенцию, а также устанавливается структура данной сохраняющейся величины.

Прокомментируем происхождение взаимодействий (1.56). Модель (1.49) допускает n-параметрическое семейство калибровочно-инвариантных токоподобных членов

$$J_i(\beta) = \sum_{p=0}^{n-1} \beta_p (J_p)_i(\beta)\,, \qquad (J_p)_i(\beta) = \frac{1}{2}\partial_i \langle\, \phi\,, W^p(\beta\varPhi) M(\beta\varPhi)\phi)\,\rangle\,. \tag{1.63}$$

Если первичный волновой оператор W заменяется его калибровочно-инвариантным расширением $W(\beta\varPhi)$, то включение таких токоподобных членов сохраняет калибровочную инвариантность. Это значит, то теория (1.56) с калибровочно-инвариантным первичным оператором (1.37) и токоподобным членом (1.63) является согласованной. На этом этапе устанавливается существование $(n+1)$-параметрического семейства взаимодействий с постоянными взаимодействия $\beta\,, \beta_0\,, \ldots\,, \beta_{n-1}$. Для того, чтобы ввести в рассмотрение постоянные B_q, производится сдвиг калибровочно-инвариантного поля $\beta\varPhi \mapsto \overline{\varPhi}(\beta\,, B)$ (1.58). На данном шаге сохраняется согласованность взаимодействий и в полевые уравнения добавляется $N-1$ дополнительная постоянная взаимодействия $B_1\,, \ldots\,, B_{N-1}$.

Нелинейная теория (1.56) является устойчивой, если ограниченный представитель в семействе тензоров энергии-импульса (1.52) сохраняется и на взаимодействующем уровне. Это требование может быть интерпретировано как правило отбора для допустимых взаимодействий. Теории производного типа, характеристический полином (1.7) которых имеет некратные вещественные корни, обычно устойчивы на свободном уровне. Отметим, что известно несколько примеров [26, 27, 41, 43], подтверждающих данное наблюдение, но в настоящее время оно не является теоремой. Таким образом, существование устойчивых взаимодействий между такими моделями возможно. Теории с кратными вещественными и/или комплексными корнями обычно обладают степенями свободы, динамика которых не ограничена сохраняющимися величинами. Устойчивость таких моделей в настоящей работе не рассматривается.

Общий представитель в классе взаимодействующих теорий (1.56) является нелагранжевым, так как уравнения движения не представимы в виде вариационной производной от некоторого функционала. Полевые уравнения лагранжевы, если

$$\beta_0 = \beta \,, \tag{1.64}$$

а все остальные постоянные обращаются в ноль. Функционал действия в данном случае имеет вид:

$$S[\phi\,,\varPhi] = \frac{1}{2}\big(\langle\,\phi\,, M(\beta\varPhi)\phi\,\rangle + \langle\,\varPhi\,, \mathcal{M}\varPhi\,\rangle\big)\,, \tag{1.65}$$

а соответствующая сохраняющаяся величина представляет собой канонический тензор энергии-импульса теории. В классе теорий производного типа с высшими производными, вариационные вершины взаимодействия обычно страдают от неустойчивости Остроградского. В отличие от лагранжевых взаимодействий, нелагранжевы сохраняют ограниченный представитель в семействе сохраняющихся тензоров (1.52) свободной теории и определяют устойчивую нелинейную теорию.

Приведём основные результаты данного раздела. Соотношения (1.56) – (1.58) представляют собой общий рецепт построения семейства калибровочно-инвариантных вершин взаимодействия между двумя теориями производного типа, если известны калибровочно-инвариантные взаимодействия для соответствующих первичных моделей. Структура вершины взаимодействия напоминает взаимодействия между электромагнитным полем и заряженной материей: волновой оператор для изначально не калибровочно-инвариантного поля заменяется его калибровочно-инвариантным расширением, в то время как к уравнениям движения для калибровочно-инвариантного поля добавляется токоподобный член. Если характеристические полиномы имеют порядки n и N, то имеется $n+N$ постоянных взаимодействия. Выбор определённых значений постоянных взаимодействия выделяет некоторого представителя в семействе тензоров энергии-импульса свободной теории, который всё ещё сохраняется на взаимодействующем уровне. Если свободная теория допускает ограниченные сохраняющиеся величины, то она допускает включение устойчивых взаимодействий, которые при этом нелагранжевы.

2 Устойчивые взаимодействия между расширенной теорией Черна-Саймонса и заряженным скалярным полем

2.1 Свободная расширенная теория Черна-Саймонса порядка N

Расширенной теорией Черна-Саймонса порядка n называется класс моделей векторного поля $\Phi = \Phi_\mu(x)dx^\mu$, $\mu = 0\,,1\,,2$, на трёхмерном пространстве Минковского с функционалом действия:

$$S[\Phi(x)] = \frac{1}{2}\int *\Phi \wedge \Big(\sum_{q=1}^{N} A_q m^{2-q}(*d)^q \Phi\Big)\,, \qquad *d\Phi = \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\mu \Phi^\nu dx^\rho\,, \qquad \varepsilon_{012} = 1\,, \tag{2.1}$$

где m – константа с размерностью массы; вещественные числа $A_1\,,\,\ldots\,,A_N$ – параметры модели, такие, что A_N отлично от нуля; символы $*$ и d обозначают оператор Ходжа и дифференциал де Рама, $\wedge$ – внешнее произведение. Сигнатура метрики Минковского принимается в основном отрицательной. Уравнения Лагранжа, вытекающие из функционала действия (2.1), имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = \Big(\sum_{q=1}^{N} A_q m^{2-q}(*d)^q\Big)\Phi = 0\,. \tag{2.2}$$

Действие (2.1) и уравнения движения (2.2) инвариантны относительно стандартного градиентного калибровочного преобразования для поля Φ.

Семейство сохраняющихся тензоров второго ранга в теории (2.1) было построено в работе [27]. Наиболее общий представитель данного семейства записывается в следующем виде:

$$T_{\mu\nu}(A\,,B) = \frac{m^2}{2}\sum_{r,s=1}^{N-1} C_{r,s}(A\,,B)({\Phi^{(r)}}_\mu {\Phi^{(s)}}_\nu + {\Phi^{(r)}}_\nu {\Phi^{(s)}}_\mu - \eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}{\Phi^{(r)}}_\rho {\Phi^{(s)}}_\sigma)\,, \tag{2.3}$$

где числа $A = (A_1\,,\,\ldots\,,A_N)$ – параметры в лагранжиане, величины $B = (B_0\,,\,\ldots\,,B_{N-1})$ – параметры семейства, и использовано обозначение

$$\Phi^{(r)} = \big(m^{-1} * d\big)^r\,\Phi\,, \qquad r = 1\,,\,\ldots\,,N-1\,, \tag{2.4}$$

при этом ${\Phi^{(0)}}_\mu \equiv \Phi_\mu$. Квадратная матрица $C_{r,s}(A\,,B)\,,\; r\,,s = 1\,,\ldots\,,N\,,$ определяется производящим соотношением

$$\sum_{r,s=1}^{N-1} C_{r,s}(A\,,B)z^{r-1}u^{s-1} = \frac{M(z)N(u) - M(u)N(z)}{z-u}\,, \tag{2.5}$$

где многочлены одной переменной $M(z), N(z)$ степени $N-1$ имеют вид

$$M(z) = \sum_{r=0}^{N-1} A_{r+1} z^r \,, \qquad N(z) = \sum_{r=0}^{N-1} B_r z^r \,. \tag{2.6}$$

Величина $C_{r,s}(A\,,B)$ (2.5) известна как матрица Безу полиномов $M(z), N(u)$ [38]. Характеристический многочлен теории (2.1),

$$M'(z) \equiv zM(z) = \sum_{r=1}^{N} A_r z^r \,, \tag{2.7}$$

получается формальной подстановкой переменной z вместо оператора Черна-Саймонса $*d$ в уравнениях Лагранжа (2.2) [27].

Сохраняющиеся тензоры в модели (2.1) определяются как коэффициенты при параметрах $B_0\,, \ldots\,, B_{N-1}$ в семействе (2.3):

$$T^{(r)}{}_{\mu\nu}(A) = \frac{\partial T_{\mu\nu}(A\,,B)}{\partial B_{r-1}}, \qquad r = 1\,, \ldots\,, N\,. \tag{2.8}$$

По построению, $T^{(1)}{}_{\mu\nu}(A)$ совпадает с каноническим тензором энергии-импульса теории (2.1), в то время как $T^{(r)}{}_{\mu\nu}(A)\,,\ r = 2\,, \ldots\,, N-1\,,$ – новые независимые сохраняющие величины. Величина $T^{(N)}{}_{\mu\nu}(A)$ (2.8) представляет собой линейную комбинацию других сохраняющихся тензоров в силу тождества

$$\sum_{r=1}^{N} A_r T^{(r)}{}_{\mu\nu}(A) = 0\,. \tag{2.9}$$

Мы сохраняем $T^{(N)}{}_{\mu\nu}(A)$ для удобства включения взаимодействия. Разложение произвольного представителя серии (2.3) по базису независимых генераторов $T^{(r)}{}_{\mu\nu}(A)\,,\ r = 1\,, \ldots\,, N-1\,,$ (2.8) имеет вид

$$T_{\mu\nu}(A\,,B) = \frac{1}{A_N}\sum_{r=1}^{N-1}(B_{r-1}A_N - B_{N-1}A_r)T^{(r)}{}_{\mu\nu}(A)\,. \tag{2.10}$$

Канонический тензор энергии-импульса всегда включен в семейство (2.3), и он соответствует значениям параметров

$$B_0 = 1\,, \qquad B_1 = B_2 = \ldots = B_{N-1} = 0\,, \tag{2.11}$$

в то время как другие значения параметров $B_0\,, \ldots\,, B_{N-1}$ в семействе (2.3) определяют неканоническую сохраняющуюся величину.

В дальнейшем нам потребуется ноль-ноль-компонента сохраняющегося тензора (2.3), записывающаяся в виде

$$T_{00}(A\,,B) = \sum_{r,s=1}^{N-1} C_{r,s}(A\,,B)(\varPhi^{(r)}{}_i\varPhi^{(s)}{}_i + \varPhi^{(r)}{}_0\varPhi^{(s)}{}_0)\,, \tag{2.12}$$

где $i = 1\,,2$, суммирование по повторяющемуся индексу подразумевается. Данная величина представляет собой квадратичную форму переменных (2.4) и является положительно определённой, если матрица $C_{r,s}(A\,,B)$ (2.5) положительно определена. Возможность существования ограниченного представителя в семействе (2.12) определяется структурой корней характеристического многочлена (2.7): ограниченный сохраняющийся тензор существует, если все ненулевые корни характеристического многочлена вещественны и различны, а нулевой корень имеет кратность один или два [27]. В терминах полинома $M(z)$ (2.6) достаточно потребовать, чтобы все его корни были вещественны и различны. Каноническая энергия теории (2.1) включена в серию (2.12) при значениях параметров (2.11), и она всегда является неограниченной величиной, если $N > 2$.

2.2 Устойчивые заимодействия с заряженным скалярным полем

Следуя алгоритму, изложенному в разделе 1.2, рассмотрим взаимодействия между калибровочным векторным полем и заряженным скалярным полем. В этом случае имеется два поднабора полей на трёхмерном пространстве Минковского,

$$\phi^a = (\mathrm{Re}\,\phi)(x) + i(\mathrm{Im}\,\phi)(x)\,, \qquad \varPhi^i = \varPhi^\mu(x)\,. \tag{2.13}$$

Соответствующие первичные операторы имеют вид

$$W = m^{-2}\partial_\mu\partial^\mu\,, \qquad \mathcal{W}_{\mu\nu} = m^{-1}\varepsilon_{\mu\rho\nu}\partial^\rho\,, \tag{2.14}$$

то есть в качестве первичного оператора для скалярного поля выступает оператор Д'Аламбера, для векторного поля – оператор Черна-Саймонса. Для того, чтобы первичные операторы были безразмерными, вводится константа $m > 0$, обладающая размерностью массы. Первичные уравнения движения

$$m^{-2}\partial_\mu\partial^\mu\phi = 0\,, \qquad m^{-1}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\,\partial^\nu\varPhi^\rho = 0 \tag{2.15}$$

обладают калибровочной симметрией (1.33) с градиентным генератором калибровочной симметрии для векторного поля: $R^i{}_\alpha \equiv \partial^\mu$.

Первичная модель (2.15) допускает очевидную вариационную вершину взаимодействия,

$$S[\phi, \varPhi] = \frac{1}{2}\int \big[\phi^* D_\mu D^\mu\phi + m\varepsilon_{\mu\nu\rho}\varPhi^\mu\partial^\nu\varPhi^\rho\big]\,d^3x\,, \tag{2.16}$$

где D_μ – ковариантная производная,

$$D_\mu(\beta)\phi = \big(\partial_\mu - i\beta\varPhi_\mu\big)\phi\,. \tag{2.17}$$

Для комплексно сопряжённого поля ϕ^* ковариантная производная даётся комплексным сопряжением (2.17). Функционал действия (2.16) имеет форму (1.34) с оператором вершины,

$$\varGamma \equiv D_\mu D^\mu - \partial_\mu\partial^\mu = \big(\partial_\mu - i\beta\varPhi_\mu\big)\big(\partial^\mu - i\beta\varPhi^\mu\big) - \partial_\mu\partial^\mu\,, \tag{2.18}$$

являющимся полиномом второго порядка по постоянной взаимодействия β. Уравнения Лагранжа для функционала действия (2.16) принимает вид

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} \equiv \frac{1}{2}D_\mu D^\mu\phi^* = 0\,, \qquad \frac{\delta S}{\delta\varPhi^\mu} \equiv m\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu\varPhi^\rho + i\beta\big(\phi^* D_\mu\phi - \phi D_\mu\phi^*\big) = 0\,. \tag{2.19}$$

Эти уравнения имеют форму (1.36), где

$$W(\beta\varPhi) = D_\mu D^\mu\,, \qquad J_i \equiv J_\mu(\phi\,, \beta\varPhi) = i\big(\phi^* D_\mu\phi - \phi D_\mu\phi^*\big)\,. \tag{2.20}$$

Так как калибровочное поле – вектор, токоподобный член обладает мировым индексом. Величина $J_\mu(\phi\,,\beta\varPhi)$, очевидно, представляет собой заряженный ток для комплексного скалярного поля. Инфинитезимальное калибровочное преобразование (1.38) функционала действия (2.16) записывается в виде

$$\delta\phi = i\beta\phi^*\varepsilon\,, \qquad \delta\varPhi^\mu = \partial^\mu\varepsilon\,. \tag{2.21}$$

Канонический тензор энергии-импульса (1.43) для функционала действия (2.16) имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta}_{\mu\nu} = F_\mu F_\nu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}F_\lambda F^\lambda + D_\mu\phi^* D_\nu\phi + D_\nu\phi^* D_\mu\phi - \eta_{\mu\nu}D_\lambda\phi^* D^\lambda\phi\,, \qquad F_\mu \equiv m\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu\varPhi^\rho\,. \tag{2.22}$$

Очевидно, что его ноль-ноль-компонента ограничена. Таким образом, на уровне первичных теорий взаимодействия между теорией Черна-Саймонса и заряженным скалярным полем являются устойчивыми.

Перейдём к рассмотрению взаимодействий между двумя теориями производного типа с первичными операторами (2.14). Свободные уравнения движения (1.49) записываются в виде

$$\begin{aligned} M(\alpha\,;W)\,\phi &\equiv m^2\prod_{p=0}^{n-1}\big(m^{-2}\partial_\mu\partial^\mu + \alpha_p^2\big)\phi = 0\,,\\ \mathcal{M}_{\mu\nu}(A\,;\mathcal{W})\,\varPhi^\nu &\equiv \frac{m^2}{2}\sum_{q=1}^{N}A_q(\mathcal{W}^q)_{\mu\nu}\varPhi^\nu = 0\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Здесь мы предполагаем, что корни характеристического полинома (1.7) для скалярного поля различные и положительные. Мы игнорируем все остальные возможности, так как они не приводят к устойчивой на взаимодействующем уровне теории. Расширенная ковариантная производная $\overline{D}_\mu$ определяется следующим образом:

$$\overline{D}_\mu(\beta\,,B)\phi = \Big(\partial_\mu - i\sum_{q=0}^{N-1}B_q(\mathcal{W}^q)_{\mu\nu}\varPhi^\nu\Big)\phi\,, \qquad B_0 \equiv \beta\,. \tag{2.24}$$

Калибровочно инвариантное расширение свободного волнового оператора $M(\alpha\,;W)$ (2.23) имеет вид

$$\overline{M}(\alpha\,;\overline{W}(\beta\varPhi))\,\phi \equiv m^2\prod_{p=0}^{n-1}\Big(m^{-2}\overline{D}_\mu\overline{D}^\mu + \alpha_p^2\Big)\phi = 0\,. \tag{2.25}$$

Семейство токоподобных членов (1.63) может быть представлено в форме

$$(J_p)_\mu = i\big(\phi^{*(p)}\overline{D}_\mu\phi^{(p)} - \phi^{(p)}\overline{D}_\mu\phi^{*(p)}\big)\,, \qquad p = 0\,,\,\ldots\,,n-1\,, \tag{2.26}$$

где использовано обозначение:

$$\phi^{(p)} = \prod_{\substack{p'=0\\ p'\neq p}}^{n-1}\frac{m^{-2}\overline{D}_\mu\overline{D}^\mu + \alpha_{p'}^2}{\alpha_p^2 - \alpha_{p'}^2}\phi\,, \qquad p = 0\,,\,\ldots\,,n-1\,. \tag{2.27}$$

Заметим, что $(J_p)_\mu$ представляют собой линейные комбинации $(J_p)_i$ из (1.63). Объекты $(J_p)_\mu$ были введены из соображений удобства. Поля $\phi^{(p)}$ описывают неприводимые компоненты приводимого представления группы Пуанкаре, описывающего теорию скалярного поля с высшими производными. Векторы $(J_p)_\mu\,,\ p=0\,,\,\ldots\,,n-1\,,$ представляют собой заряженные токи неприводимых компонент, в то время как постоянные взаимодействия $\beta_p\,,\ p=0\,,\,\ldots\,,n-1\,,$ могут быть интерпретированы как заряды компонент.

Для свободных уравнений (2.23) $(n+N)$-параметрическое семейство вершин взаимодействий (1.56) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&E \equiv m^2\prod_{p=0}^{n-1}\big(m^{-2}\overline{D}_\mu(\beta\,,B)\overline{D}^\mu(\beta\,,B)+\alpha_p^2\big)\phi=0\,,\\
&\mathcal{E}_\mu \equiv \frac{m^2}{2}\sum_{q=1}^{N}A_q(\mathcal{W}^q)_{\mu\nu}\varPhi^\nu+i\sum_{p=0}^{n-1}\beta_p\big(\phi^{*(p)}\overline{D}_\mu(\beta\,,B)\phi^{(p)}-\phi^{(p)}\overline{D}_\mu(\beta\,,B)\phi^{*(p)}\big)=0\,,
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

где $\overline{D}_\mu(\beta\,,B)$ – ковариантная производная (2.24), $\phi^{(p)}$ заданы в (2.27), а $\beta\,,\ \beta_p\,,\ B_q\,,\ p=0\,,\,\ldots\,,n-1\,,\ q=1\,,\,\ldots\,,N-1\,,$ представляют собой параметры взаимодействия.

Уравнения (2.28), очевидно, являются калибровочно-инвариантными по отношению к калибровочной симметрии (2.21). Калибровочное тождество между уравнениями (2.28) записывается в виде

$$
\partial^\mu\mathcal{E}_\mu-i\sum_{p=0}^{n-1}\prod_{\substack{p'=0\\p'\neq p}}^{n-1}\frac{\beta_p}{\alpha_p^2-\alpha_{p'}^2}\big(\phi^{*(p)}E-\phi^{(p)}E^*\big)=0\,. \tag{2.29}
$$

Семейство (1.52) для нелинейной теории (2.28) обладает структурой

$$
\boldsymbol{\varTheta}_{\mu\nu}(\phi\,,\varPhi)=\sum_{p=0}^{n-1}\beta_p(T_p)_{\mu\nu}(\phi\,,\varPhi)+\sum_{q=0}^{N-1}B_q(T_q)_{\mu\nu}(\varPhi)\,, \tag{2.30}
$$

где величины $(T_p)_{\mu\nu}\,,\ p=0\,,\,\ldots\,,n-1\,,$ и $(T_q)_{\mu\nu}\,,\ q=0\,,\,\ldots\,,N-1\,,$ имеют вид

$$
(T_p)_{\mu\nu}(\phi\,,\varPhi)=\overline{D}_\mu\phi^{*(p)}\overline{D}_\nu\phi^{(p)}+\overline{D}_\nu\phi^{*(p)}\overline{D}_\mu\phi^{(p)}-\eta_{\mu\nu}\overline{D}_\lambda\phi^{*(p)}\overline{D}^\lambda\phi^{(p)}+m^2\alpha_p^2\eta_{\mu\nu}\phi^{*(p)}\phi^{(p)}\,, \tag{2.31}
$$

$$
(T_q)_{\mu\nu}(\varPhi)=\sum_{r,s=1}^{N-1}\sum_{q'=1}^{N}C^{q,q'}_{r,s}A_{q'}\big(\varPhi^{(r)}{}_\mu\varPhi^{(s)}{}_\nu+\varPhi^{(r)}{}_\nu\varPhi^{(s)}{}_\mu-\eta_{\mu\nu}\varPhi^{(r)}{}_\lambda\varPhi^{(s)\lambda}\big)\,, \tag{2.32}
$$

где $\varPhi^{(q)}{}_\mu\equiv(\mathcal{W}^q)_{\mu\nu}\varPhi^\nu$; постоянные $C^{q,q'}_{r,s}$ определены следующим образом:

$$
C^{q,q'}_{r,s}=\begin{cases}-1, & q>q'\,,\qquad q>r,s\,,\qquad q+q'=r+s+1\,;\\ \ \ 1, & q<q'\,,\qquad q\le r,s\,,\qquad q+q'=r+s+1\,;\\ \ \ 0, & \text{в остальных случаях}\,.\end{cases} \tag{2.33}
$$

Как следует из (2.30), величина $\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}$ задаётся деформацией выбранного представителя из семейства тензоров энергии-импульса для свободного скалярного поля и теории Черна-Саймонса,

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{free}}_{\mu\nu}(\phi\,,\Phi)=\sum_{p=0}^{n-1}\beta_p\big(\partial_\mu\phi^{*(p)}\partial_\nu\phi^{(p)}+\partial_\nu\phi^{*(p)}\partial_\mu\phi^{(p)}-\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi^{*(p)}\partial^\lambda\phi^{(p)}+\\ +m^2\alpha_p^2\eta_{\mu\nu}\phi^{*(p)}\phi^{(p)}\big)+\sum_{q=0}^{N-1}B_q(T_q)_{\mu\nu}(\Phi)\,.\end{gathered}\tag{2.34}$$

В данной формуле все параметры, входящие в выражение для сохраняющейся величины, фиксированы взаимодействием, поэтому только один представитель из семейства свободных сохраняющихся величин выживает на взаимодействующем уровне.

Обсудим теперь устойчивость теории (2.28) на взаимодействующем уровне. Ноль-ноль-компонента (2.30) может быть записана в виде

$$\boldsymbol{\Theta}_{00}(\phi\,,\Phi)=\frac{m^2}{2}\sum_{r,s=1}^{N-1}C_{r,s}(A\,,B)\,\Phi^{(r)}{}_\mu\,\Phi^{(s)}{}_\mu+\sum_{p=0}^{n-1}\beta_p\big(\overline{D}_\mu\phi^{*(p)}\overline{D}_\mu\phi^{(p)}+m^2\alpha_p^2\phi^{*(p)}\phi^{(p)}\big)\,,\tag{2.35}$$

где матрица $C_{r,s}(A\,,B)$ определена следующим образом:

$$C_{r,s}(A\,,B)=\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{q'=1}^{N}C^{q,q'}_{r,s}B_qA_{q'}\,.\tag{2.36}$$

Отметим также, что величина $C_{r,s}(A\,,B)$ представляет собой матрицу Безу характеристического полинома (1.7) свободной расширенной теории Черна-Саймонса и характеристического полинома производной симметрии (1.15), (1.16), которая определяется соотношением (2.5). В соотвествии с этим определением, формула (2.33) принимает форму

$$C^{q,q'}_{r,s}=\frac{\partial^2C(A\,,B)}{\partial A_q\partial B_{q'}}\,.$$

Выражение (2.35) представляет собой квадратичную форму переменных $\Phi^{(q)}{}_\mu\,,\phi^{(p)}$. Она ограничена в случае, если матрица $C_{r,s}(A\,,B)$, положительно определена, и $\beta_p>0\,,\ p=0\,,\ \ldots\,,n-1\,,$ – положительные числа.

В общем случае, взаимодействия (2.28) нелагранжевы. Лагранжева вершина взаимодействия отвечает следующим значениям параметров взаимодействия:

$$\beta=\beta_0\,,\qquad B_1=\ldots=B_N=\beta_1=\ldots=\beta_{n-1}=0\,.\tag{2.37}$$

Сохраняющейся величиной в случае вариационных взаимодействий является канонический тензор энергии-импульса. Так как каноническая энергия $(\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{can}})_{00}$ не ограничена снизу, лагранжевы взаимодействия неустойчивы.

3 Гамильтонов формализм

3.1 Гамильтонова формулировка расширенной теории Черна-Саймонса

Покажем что теория (2.2) допускает $(N-1)$-параметрическое семейство канонически неэквивалентных гамильтоновых формулировок, причём в качестве гамильтониана может быть выбран почти любой представитель семейства сохраняющихся величин (2.12). Для достижения заявленного результата мы сначала понизим порядок уравнений (2.2) до первого по производным по времени $t = x^0$, а потом предъявим скобку Пуассона и гамильтониан, приводящие эти уравнения к гамильтоновой форме.

Введём новые переменные, поглощающие производные по времени исходного векторного поля Φ_μ, используя пространственные компоненты один-форм $\Phi^{(r)}{}_i\,, i = 1\,, 2\,, r = 1\,, \ldots\,, N-1$ (2.4). Тогда формулировка первого порядка по времени для теории (2.1) примет вид

$$\partial_0 \Phi^{(0)}{}_i = \partial_i \Phi_0 - m\varepsilon_{ij}\Phi^{(1)}{}_j\,; \tag{3.1}$$

$$\partial_0 \Phi^{(r)}{}_i = \frac{1}{m}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k \Phi^{(r-1)}{}_j - \partial_j \Phi^{(r-1)}{}_k\big) - m\varepsilon_{ij}\Phi^{(r+1)}{}_j\,, \qquad r = 2\,, \ldots\,, N-2\,; \tag{3.2}$$

$$\partial_0 \Phi^{(N-1)}{}_i = \frac{1}{m}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k \Phi^{(N-2)}{}_j - \partial_j \Phi^{(N-2)}{}_k\big) + \frac{1}{A_n} m\varepsilon_{ij}\sum_{r=1}^{N-1} A_r\,\Phi^{(r)}{}_j\,; \tag{3.3}$$

$$\Theta \equiv m\sum_{r=1}^{N} A_r\varepsilon_{ij}\partial_i \Phi^{(r-1)}{}_j = 0\,. \tag{3.4}$$

Эквивалентность уравнений (2.2) и (3.1) – (3.4) прослеживается следующим образом. Формулы (3.1) и (3.2) выражают вспомогательные переменные $\Phi^{(1)}{}_i\,, i = 1\,, 2\,, r = 1\,, \ldots\,, N-1$, в терминах производных Φ. После того как все вспомогательные переменные исключены, (3.3) и (3.4) воспроизводят пространственную и временную часть уравнений движения (2.2). Отметим также, что в формализме первого порядка величина Θ (3.4) не вовлекает производных по времени и может рассматриваться как связь.

Система уравнений первого порядка (3.1) – (3.3) является гамильтоновой, если существуют гамильтониан системы $H(A\,,B)$ и скобка Пуассона $\{\ ,\ \}_{A,B}$, такие что

$$\partial_0 \Phi^{(r)}{}_i \approx \big\{\, \Phi^{(r)}{}_i\,, \int dx\, H(A\,,B)\, \big\}_{A,B}\,, \qquad r = 0\,, \ldots\,, N-1\,. \tag{3.5}$$

Знак «≈» обозначает равенство левой и правой части соотношения по модулю связи Θ (3.4). Введение параметров B учитывает возможность существования нескольких различных гамильтоновых формулировок для одних и тех же уравнений. Мы выбираем гамильтониан теории в виде

$$H(A\,,B) = T_{00}(A\,,B) + \Big(k_0\varPhi_0 + \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{N-1} k_r\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi^{(r-1)}{}_j\Big)\varTheta\,, \tag{3.6}$$

где $T_{00}(A\,,B)$ – ноль-ноль-компонента (2.12) наиболее общего сохраняющегося тензора (2.3), выраженная в терминах фазовых переменных:

$$T_{00}(A\,,B) = \frac{1}{2}m^2\sum_{r,s=1}^{n-1} C_{r,s}(A,B)\big(\varPhi^{(r)}{}_i\varPhi^{(s)}{}_i + \partial_i\varPhi^{(r-1)}{}_j(\partial_i\varPhi^{(s-1)}{}_j - \partial_j\varPhi^{(s-1)}{}_i)\big)\,, \tag{3.7}$$

$\varTheta$ – связь (3.4). Константы $k_0\,,k_1\,,\,\ldots\,,k_{N-1}$ введены в гамильтониан (3.6) из соображений удобства и будут в дальнейшем определены в дальнейшем.

Скобка Пуассона определяется из условия, что уравнения (3.1) – (3.3) имеют вид (3.5) с гамильтонианом (3.6), что равносильно системе уравнений относительно неизвестной скобки Пуассона и параметров $k_0\,,k_1\,,\,\ldots\,,k_{N-1}$:

$$\{\,\varPhi^{(0)}{}_i\,,H(A\,,B)\,\}_{A,B} = \partial_i\varPhi_0 - m\varepsilon_{ij}\varPhi^{(1)}{}_j\,; \tag{3.8}$$

$$\{\,\varPhi^{(r)}{}_i\,,H(A\,,B)\,\}_{A,B} = \frac{1}{m}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k\varPhi^{(r-1)}{}_j - \partial_j\varPhi^{(r-1)}{}_k\big) - m\varepsilon_{ij}\varPhi^{(r+1)}{}_j\,,\ r = 2\,,\,\ldots\,,N-2\,; \tag{3.9}$$

$$\{\,\varPhi^{(N-1)}{}_i\,,H(A\,,B)\,\}_{A,B} = \frac{1}{m}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k\varPhi^{(N-2)}{}_j - \partial_j\varPhi^{(N-2)}{}_k\big) + \frac{1}{A_N}m\varepsilon_{ij}\sum_{r=1}^{N-1}A_r\varPhi^{(r)}{}_j\,. \tag{3.10}$$

Соотношения (3.8) – (3.10) представляют собой систему линейных уравнений на неизвестные элементы матрицы скобок Пуассона фазовых переменных $\varPhi^{(1)}{}_i\,,\,i=1\,,2\,,\,r=0\,,\,\ldots\,,N-1\,.$ В классе независящих от полей пуанкаре-инвариантных скобок Пуассона решение этой системы имеет следующий вид:

$$\{\,\varPhi^{(N-1)}{}_i(\vec{x})\,,\varPhi^{(N-1)}{}_j(\vec{y})\,\}_{AB} = \frac{1}{A_N m\det C(A\,,B)}\Big(\sum_{r=1}^{N-1}A_rM^{r,N-1}(A\,,B)\Big)\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,; \tag{3.11}$$

$$\{\,\varPhi^{(r)}{}_i(\vec{x})\,,\varPhi^{(s)}{}_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = -\frac{M^{r,s+1}(A\,,B)}{m\det C(A\,,B)}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,,\qquad r\,,s+1 = 1\,,\,\ldots\,,N-1\,; \tag{3.12}$$

$$\{\,\varPhi_i(\vec{x})\,,\varPhi_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = -\frac{\gamma}{m\det C(A\,,B)}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{3.13}$$

Параметры $k_0\,,\,k_1\,,\ldots\,,\,k_{N-1}$ определяются из формул

$$\begin{gathered}k_0 = -\frac{\det C(A\,,B)}{A_1\gamma + \sum\limits_{s=2}^{N}A_sM^{s-1,1}(A\,,B)}\,,\\ k_r = \frac{\gamma C_{r,1}(A\,,B) + \sum\limits_{s=2}^{N-1}C_{r,s}(A\,,B)M^{s-1,1}(A\,,B)}{A_1\gamma + \sum\limits_{s=2}^{N}A_sM^{s-1,1}(A\,,B)}\,,\qquad r = 1\,,\,\ldots\,,N-1\,.\end{gathered} \tag{3.14}$$

В (3.11) – (3.13) величина γ – свободный параметр, $M^{r,s}(A\,,B)$ – присоединенная матрице Безу $C_{r,s}(A\,,B)$ (2.5) матрица:

$$\sum_{q=1}^{N-1} C_{r,q}(A\,,B)M^{q,s}(A\,,B) = \det C(A\,,B)\delta_r{}^s\,. \tag{3.15}$$

Решение (3.11) – (3.13) уравнений (3.8) – (3.10) хорошо определено, если

$$\det C(A\,,B) \neq 0\,, \qquad A_1\gamma + \sum_{s=2}^{N} A_s M^{s-1,1}(A\,,B) \neq 0\,. \tag{3.16}$$

Первое из данных соотношений равносильно условию невырожденности квадратичной формы гамильтониана (3.6). Второе соотношение гарантирует, что связь Θ (3.4) генерирует калибровочные симметрии для векторного потенциала Φ.

Проверка решения (3.11) – (3.13) уравнений (3.8) – (3.10) использует соотношения

$$M^{r,s}(A\,,B) - M^{q,q'}(A\,,B) = 0\,, \qquad s + r = q + q'\,; \tag{3.17}$$

$$\sum_{q=1}^{N-1} A_q M^{r,q}(A\,,B) + A_N M^{r+1,N}(A\,,B) = 0\,, \qquad r = 1\,,\,\ldots\,,N-2\,. \tag{3.18}$$

Эти условия выполнены, так как присоединенная к матрице Безу $C_{r,s}(A\,,B)$ (2.5) матрица представляет собой матрицу Ганкеля, построенную по полиномам (2.6) [38].

Формулы (3.5), (3.6), (3.11) – (3.13) определяют семейство гамильтоновых формулировок для расширенной теории Черна-Саймонса (2.1). Произвольный представитель этого семейства определяется $2n+1$ параметрами $A_1\,,\,\ldots\,,A_N\,,\,B_0\,,\,\ldots\,,B_{N-1}\,,\,\gamma$. Величины $A_1\,,\,\ldots\,,A_N$ определяют параметры модели (2.1), числа $B_0\,,\,\ldots\,,\,B_{N-2}$ задают представителя в семействе законов сохранения (2.3), который будет назначен гамильтонианом. Величины B_{N-1}, γ являются вспомогательными: параметр B_{N-1} может быть поглощён переопределением параметров $B_0\,,\,\ldots\,,B_{N-2}$, константа γ определяет конкретного представителя в классе эквивалентности скобок Пуассона (3.11) – (3.13). Скобки Пуассона физических наблюдаемых не зависят от значения γ. Таким образом, общее количество независимых параметров, приводящих к неэквивалентным гамильтоновым формулировкам в модели (2.1), равно $N-1$, то есть расширенная теория Черна-Саймонса допускает $(N-1)$-параметрическое семейство гамильтоновых формулировок.

Для всех допустимых значений параметров в гамильтониане скобка Пуассона представляет собой невырожденный тензор:

$$\det\big\{\,\Phi^{(r)}{}_i(\vec{x})\,,\,\Phi^{(s)}{}_j(\vec{y})\,\big\}_{A,B} = -\frac{1}{A_N\det^2 C(A\,,B)}\big(A_1\gamma + \sum_{r=2}^{N} A_r M^{r-1,1}(A\,,B)\big) \neq 0\,. \tag{3.19}$$

В этом случае уравнения Гамильтона (3.1) – (3.4) следуют из принципа наименьшего действия для функционала

$$S(A\,,B)=\int d^3x\left(m\sum_{r,s=0}^{N-1}\Omega_{r,s}(A\,,B)\varepsilon_{ij}\varPhi^{(r)}{}_i\partial_0\varPhi^{(s)}{}_i-H(A\,,B)\right). \qquad (3.20)$$

Симплектическая форма $\Omega_{r\,,s}(A\,,B)$ определяется производящим соотношением

$$\sum_{r,s=0}^{N-1}\Omega_{r,s}(A\,,B)z^ru^s=-\frac{\det C(A\,,B)}{A_1\gamma+\sum\limits_{s=2}^{N}\alpha_sM^{s-1,1}(A\,,B)}\frac{M'(z)N'(u)-M'(u)N'(z)}{z-u}\,, \qquad (3.21)$$

где $M'(z)$ – характеристический многочлен (2.7) теории (2.1), а $N'(z)$ задаётся формулой

$$N'(z)=B_1+\sum_{r=1}^{N-1}\left(B_{r+1}-\frac{1}{\det C\,(A\,,B)}\left(B_1\gamma+\sum_{q=2}^{N}B_qM^{q-1,1}(A\,,B)\right)C_{1,r}(A\,,B)\right)z^r\,. \quad (3.22)$$

Для получения соотношений (3.21), (3.22) нужно использовать формулу обращения матрицы Ганкеля скобок Пуассона из [38]. Совокупность формул (3.20) – (3.22) позволяет систематически восстанавливать симплектическую структуру при условии, что гамильтониан теории задан.

Каноническая гамильтонова формулировка Остроградского [32] воспроизводится формулами (3.6), (3.20) – (3.21) при следующих значениях параметров в гамильтониане:

$$B_0=1\,,\qquad B_1=B_2=\ldots=B_{N-1}=0\,,\qquad \gamma=0\,. \qquad (3.23)$$

Действие первого порядка при этом имеет вид

$$S(A\,,B)=\int d^3x\Big(m\sum_{r,s=0}^{N-1}\alpha_{s+r+1}\varepsilon_{ij}\varPhi^{(r)}{}_i\partial_0\varPhi^{(s)}{}_i-T^{(0)}{}_{00}(A)-\varPhi_0\varTheta\Big)\,, \qquad (3.24)$$

где $T^{(0)}{}_{00}(A)$ – ноль-ноль-компонента канонического тензора энергии-импульса, и подразумевается, что $A_r=0$ для всех $r>N$. Каноническое гамильтоново действие (3.24), очевидно, не эквивалентно общему представителю семейства (3.20), так как канонический гамильтониан всегда не ограничен снизу, в то время как в общем случае ограниченные представители допустимы.

Таким образом, мы показали что расширенная теория Черна-Саймонса порядка N является мультигамильтоновой и допускает $(N-1)$-параметрическое семейство канонически неэквивалентных гамильтоновых формулировок. Для некоторых параметров модели среди допустимых гамильтонианов содержатся ограниченные, в то время как в других случаях гамильтониан всегда не ограничен. Каноническая гамильтонова формулировка содержится в построенном семействе, её гамильтониан всегда не ограничен.

3.2 Включение взаимодействий в гамильтоновом формализме

В разделе 2.2 были предложены следующие вершины взаимодействия между расширенной теорией Черна-Саймонса (2.1) с заряженным скалярным полем $\phi = \operatorname{Re}\phi(x) + i\operatorname{Im}\phi(x)$ с высшими производными:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{q=1}^{N} A_q m^{2-q}(*d)^q\Big)\mathit{\Phi} - \sum_{p=0}^{n-1} i\beta_p J_p(B\,;\phi\,,\mathit{\Phi}) = 0\,,\\
&m^2\Big(\prod_{p=0}^{n-1}\big(m^{-2}\overline{D}_\mu(B)\overline{D}^\mu(B)+\alpha_p\big)\Big)\phi = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Здесь $B = (B_0\,,\,\ldots\,,B_{N-1})\,,\ \beta_p\,,\ p = 0\,,\,\ldots\,,n-1$ – постоянные взаимодействия, и использованы следующие обозначения:

$$J_p(B\,;\phi\,,\mathit{\Phi}) = i\big(\phi^{(p)}\overline{D}_\mu\phi^{*(p)} - \phi^{*(p)}\overline{D}_\mu\phi^{(p)}\big)\,,\qquad \phi^{(p)} = \prod_{\substack{p'=0\\ p'\neq p}}^{n-1}\frac{m^{-2}\overline{D}_\mu\overline{D}^\mu + \alpha^2_{p'}}{\alpha_p^2 - \alpha^2_{p'}}\phi\,. \tag{3.26}$$

Параметры $\alpha_p\,,\ p = 0\,,\,\ldots\,,N-1\,,$ теории комплексного скалярного поля неотрицательны и попарно различны. Ковариантная производная определена неминимальным образом:

$$\overline{D}_\mu\phi = \Big(\partial_\mu - i\,m\sum_{r=0}^{N-1}B_r\,\mathit{\Phi}^{(r)}{}_\mu\Big)\phi\,. \tag{3.27}$$

Действие ковариантной производной на комплексно-сопряжённое скалярное поле дается комплексным сопряжением этого выражения. Калибровочная симметрия теории (3.25) имеет вид

$$\delta_\xi\,\mathit{\Phi}_\mu(x) = \partial_\mu\xi(x)\,,\qquad \delta_\xi\phi(x) = -iB_0\phi^*(x)\,. \tag{3.28}$$

Сохраняющийся тензор в теории (3.25) определен соотношением

$$\boldsymbol{\Theta}_{\mu\nu}(\phi\,,\mathit{\Phi}) = T_{\mu\nu}(A\,,B) + \sum_{p=0}^{n-1}\beta_p\big(\overline{D}_\mu\phi\overline{D}^\mu\phi^* + \alpha_p m^2\phi\,\phi^*\big)\,, \tag{3.29}$$

где $T_{\mu\nu}(A\,,B)$ обозначает величину (2.3).

Формулировка первого порядка для теории (3.25) имеет следующий вид:

$$\partial_0\,\mathit{\Phi}^{(0)}{}_i = \partial_i\,\mathit{\Phi}_0 - m\varepsilon_{ij}\,\mathit{\Phi}^{(1)}{}_j\,; \tag{3.30}$$

$$\partial_0\,\mathit{\Phi}^{(r)}{}_i = m^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k\,\mathit{\Phi}^{(r-1)}{}_j - \partial_j\,\mathit{\Phi}^{(r-1)}{}_k\big) - m\varepsilon_{ij}\,\mathit{\Phi}^{(r+1)}{}_j\,,\qquad r = 2\,,\,\ldots\,,N-2\,; \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0\,\mathit{\Phi}^{(N-1)}{}_i = m^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k\,\mathit{\Phi}^{(N-2)}{}_j - \partial_j\,\mathit{\Phi}^{(N-2)}{}_k\big) + \frac{1}{A_n}m\varepsilon_{ij}\sum_{r=1}^{N-1}A_r\,\mathit{\Phi}^{(r)}{}_j -\\
-\frac{1}{A_N}m^{-1}\sum_{p=0}^{n-1}i\beta_p(J_p)_i(B\,;\phi\,,\mathit{\Phi})\,;
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\partial_0\phi^{(p)} = \pi^{*(p)} + i\Big(B_0\varPhi_0 + \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{N-1} B_r\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi^{(r-1)}{}_j\Big)\phi^{(p)}\,, \qquad p = 0\,,\ldots,n-1\,,\,+c.c.\,; \tag{3.33}$$

$$\partial_0\pi^{(p)} = (\overline{D}_i\overline{D}_i - \alpha_p m^2)\phi^{(p)} + i\Big(B_0\varPhi_0 + m^{-1}\sum_{r=1}^{N-1} B_r\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi^{(r-1)}{}_j\Big)\pi^{(p)}\,,\ p = 0\,,\ldots,n-1\,,\,+c.c.\,; \tag{3.34}$$

$$\varTheta \equiv m\Big(\sum_{r=1}^{N} A_r\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi^{r-1}{}_j - \sum_{p=0}^{n-1} i\beta_p\big(\phi^{(p)}\pi^{(p)} - \phi^{*(p)}\pi^{*(p)}\big)\Big) = 0\,. \tag{3.35}$$

Здесь величины $\varPhi^{(r)}{}_i\,,\ i = 1\,,2\,,\ r = 1\,,\ldots,N-1$ (2.4), $\phi^{(p)}\,,\ p = 0\,,\ldots,n-1$ (3.26), и $\pi^{(p)}\,,\ p = 0\,,\ldots,n-1$, представляют собой новые вспомогательные переменные, поглощающие производные исходных векторного и скалярного полей. Все вспомогательные переменные исключаются из уравнений (3.30) – (3.35), после чего полученная система совпадает с исходными уравнениями с высшими производными. Отметим также, что в формализме первого порядка величина $\varTheta$ (3.35) не вовлекает производных по времени и может рассматриваться как связь.

Уравнения (3.30) – (3.34) являются гамильтоновыми в смысле (3.5) по отношению к гамильтониану

$$\begin{gathered} H(A\,,B) = T_{00}(A\,,B) + \sum_{p=0}^{n-1}\beta_p(\pi^{(p)}\pi^{*(p)} + \overline{D}_i\phi\overline{D}_i\phi^* + \alpha_p m^2\phi\,\phi^*) + \\ + \Big(B_0\varPhi_0 + m^{-1}\sum_{r=1}^{N-1} B_r\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi^{(r-1)}{}_j\Big)\varTheta\,, \end{gathered} \tag{3.36}$$

где $T_{00}(A\,,B)$ определено в (2.12). Скобка Пуассона фазовых переменных определяется из соотношений

$$\{\,\varPhi^{(N-1)}{}_i(\vec{x})\,,\varPhi^{(N-1)}_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = \frac{1}{A_N\det C(A\,,B)}\Big(\sum_{r=1}^{N-1} A_r M^{r-1,N-1}(A\,,B)\Big)m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,; \tag{3.37}$$

$$\{\,\varPhi^{(r)}_i(\vec{x})\,,\varPhi^{(s)}_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = -\frac{M^{r,s-1}(A\,,B)}{\det C(A\,,B)}m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,, \qquad r\,,\,s-1 = 1\,,\ldots,N-1\,; \tag{3.38}$$

$$\{\,\varPhi_i(\vec{x})\,,\varPhi_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = -\frac{1}{B_0\det C(A\,,B)}\Big(\sum_{r=1}^{N-1} B_r M^{1,r}(A\,,B)\Big)m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,; \tag{3.39}$$

$$\{\,\phi^{(p)}(\vec{x})\,,\pi^{(p')}(\vec{y})\,\}_{A,B} = \frac{1}{\beta_p}\,\delta^{pp'}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{3.40}$$

Выражения (3.37) – (3.40) хорошо определены, если

$$\det C(A\,,B) \neq 0\,, \qquad \beta_p \neq 0\,, \qquad B_0 \neq 0\,. \tag{3.41}$$

Первая пара соотношений гарантирует невырожденность гамильтониана в свободном приближении, в то время как третье условие обеспечивает наличие калибровочного $U(1)$-преобразования для скалярного поля. Возможность $B_0 = 0$ представляется специальной и не рассматривается в дальнейшем. Таким образом, показано, что почти все построенные в [42] взаимодействия допускают гамильтонову формулировку. Данная гамильтонова формулировка не является канонически эквивалентной формулировке Остроградского, так как исходные уравнения нелагранжевы.

Проиллюстрируем общую конструкцию гамильтоновой формулировки на примере расширенной теории Черна-Саймонса порядка 3, взаимодействующей с заряженным безмассовым скалярным полем. В этом случае уравнения движения (3.25) имеют вид

$$\Big(m^{-1}A_3(*d)^3+A_2(*d)^2+mA_1(*d)\Big)\varPhi+i\beta\big(\phi^*\overline{D}_\mu\phi-\phi\overline{D}_\mu\phi^*\big)dx^\mu=0\,,\qquad \overline{D}_\mu\overline{D}^\mu\phi=0\,,\tag{3.42}$$

где $\beta=\beta_0$ – постоянная взаимодействия, ковариантная производная определена следующим образом:

$$\overline{D}_\mu\phi=\big(\partial_\mu-i(B_0\varPhi_\mu+B_1F_\mu+B_2G_\mu)\big)\phi\,,\quad F_\mu\equiv m^{-1}(*d\varPhi)_\mu\,,\quad G_\mu\equiv m^{-2}\big((*d)^2\varPhi\big)_\mu\,.\tag{3.43}$$

Формулировку первого порядка (3.30) – (3.35) для уравнений (3.42) можно записать так:

$$\partial_0\varPhi_i=\partial_i\varPhi_0-m\varepsilon_{ij}F_j\,;\tag{3.44}$$

$$\partial_0F_i=m^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_k\varPhi_j-\partial_j\varPhi_k\big)-m\varepsilon_{ij}G_j\,;\tag{3.45}$$

$$\partial_0G_i=m^{-1}\varepsilon_{ij}\partial_k\big(\partial_kF_j-\partial_jF_k\big)+\frac{1}{A_N}\Big(m\varepsilon_{ij}\big(A_1F_j+A_2G_j\big)+i\beta m^{-1}\big(\phi^*(\overline{D}_i\phi)-\phi(\overline{D}_i\phi)^*\big)\Big)\,;\tag{3.46}$$

$$\partial_0\phi=\pi^*+i\Big(B_0\varPhi_0+m^{-1}\big(B_1\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi_j+B_2\varepsilon_{ij}\partial_iF_j\big)\Big)\phi\,,\qquad +c.c.\,;\tag{3.47}$$

$$\partial_0\pi=\overline{D}_i\overline{D}_i\phi^*-i\Big(B_0\varPhi_0+m^{-1}\big(B_1\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi_j+B_2\varepsilon_{ij}\partial_iF_j\big)\Big)\pi\,,\qquad +c.c.\,;\tag{3.48}$$

$$\varTheta\equiv m\varepsilon_{ij}\big(A_1\partial_i\varPhi_j+A_2\partial_iF_j+A_3\partial_iG_j\big)+i\beta\big(\phi\pi-\phi^*\pi^*\big)=0\,.\tag{3.49}$$

Тогда гамильтониан (3.36) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}H(A\,,B)=\frac{m^2}{2}\Big[(B_2A_3-B_3A_2)\big(G_iG_i+\partial_iF_j(\partial_iF_j-\partial_jF_i)\big)+2(B_1A_3-B_3A_1)\big(G_iF_i+\\+\partial_iF_j(\partial_i\varPhi_j-\partial_j\varPhi_i)\big)+(B_1A_2-B_2A_1)\big(F_iF_i+\partial_i\varPhi_j(\partial_i\varPhi_j-\partial_j\varPhi_i)\big)\Big]+\\+\beta\big(\pi\pi^*+\overline{D}_i\phi(\overline{D}_i\phi)^*\big)+\big(B_0\varPhi_0+m^{-1}(B_1\varepsilon_{ij}\partial_i\varPhi_j+B_2\varepsilon_{ij}\partial_iF_j)\big)\varTheta\,.\end{gathered}\tag{3.50}$$

Скобки Пуассона (3.37) – (3.40) фазовых переменных определяются соотношениями

$$\{\,G_i(\vec{x})\,,G_j(\vec{y})\,\}_{A,B}=\frac{B_3A_1^2-B_2A_2A_1+B_1(A_2^2-A_3A_1)}{\det C(A\,,B)}m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,;\tag{3.51}$$

$$\{\,G_i(\vec{x})\,,F_j(\vec{y})\,\}_{A,B}=\frac{B_1A_2-B_2A_1}{\det C(A\,,B)}m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,;\tag{3.52}$$

$$\{\, F_i(\vec{x})\,,F_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = \{\, G_i(\vec{x})\,,\varPhi_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = \frac{B_1A_3 - B_3A_1}{\det C(A\,,B)} m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,; \tag{3.53}$$

$$\{\, F_i(\vec{x})\,,\varPhi_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = \frac{B_3A_2 - B_2A_3}{\det C(A\,,B)} m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,; \tag{3.54}$$

$$\{\, \varPhi_i(\vec{x})\,,\varPhi_j(\vec{y})\,\}_{A,B} = \frac{B_3^2A_1 - B_3B_2A_2 - B_3B_1A_3 + B_2^2A_3}{B_0\det C(\alpha\,,\beta)} m^{-1}\varepsilon_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{y})\,; \tag{3.55}$$

$$\{\, \phi(\vec{x})\,,\pi(\vec{y})\,\}_{A,B} = \frac{1}{\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\,. \tag{3.56}$$

Здесь использовано обозначение

$$\det C(A\,,B) \equiv B_3^2A_1^2 - B_3B_2A_2A_1 + B_3B_1(2A_2^2 - 2A_3A_1) + B_2^2A_3A_1 - B_2B_1A_3A_1 + B_1^2A_3^2\,. \tag{3.57}$$

Гамильтониан (3.50) и скобки Пуассона (3.51) – (3.56) хорошо определены всякий раз, когда

$$\det C(A\,,B) \neq 0\,, \qquad B_0 \neq 0\,, \qquad \beta \neq 0\,. \tag{3.58}$$

При $\phi = \pi = \beta = 0$ динамика векторного поля отщепляется и формулы (3.44) – (3.46), (3.51) - (3.55) воспроизводят один из допустимых представителей в семействе гамильтоновых формулировок для свободной расширенной теории Черна-Саймонса третьего порядка [41]. Таким образом, устанавливается соответствие с ранее полученными результатами.

Заключение

Настоящая работа посвящена изучению некоторого класса полевых теорий с высшими производными, *теорий производного типа*, с точки зрения включения устойчивых взаимодействий. Волновой оператор теории производного типа произвольного конечного порядка n представляет собой так называемый *характеристический полином* n-го порядка по *первичному* оператору W. Теория, описываемая волновым оператором W, не содержащим высшие производные, является *первичной* по отношению к рассматриваемой производной теории. Каждая симметрия первичной теории порождает семейство симметрий производной теории, которые в свою очередь связаны с семейством независимых сохраняющихся величин. В частности, трансляционная инвариантность первичной модели порождает n-параметрическое семейство сохраняющихся тензоров, которое, в случае когда выполнены определённые условия на корни характеристического полинома, может содержать ограниченные снизу величины. Канонический тензор энергии-импульса, не ограниченный снизу всегда, также содержится в данном семействе. Если на свободном уровне теория производного типа допускает ограниченные сохраняющиеся величины, она считается устойчивой.

Был рассмотрен вопрос включения взаимодействий между двумя различными полевыми теориями производного типа, одна из которых предполагалась калибровочно-инвариантной. Кроме того, первичные теории изучаемых моделей должны были допускать согласованные и устойчивые взаимодействия и обладать калибровочной симметрией, остающейся абелевой на взаимодействующем уровне. В этом случае для соответствующих производных теорий имелось $(n+N)$-параметрическое семейство согласованных взаимодействий, где $n\,, N$ – порядки характеристических полиномов рассматриваемых моделей. На свободном уровне данные теории производного типа допускали $(n+N)$-параметрическое семейство сохраняющихся тензоров. При включении взаимодействий один из тензоров данного семейства, определяемый фиксированным набором постоянных взаимодействия, продолжал сохраняться. В случае лагранжевых взаимодействий такой сохраняющейся величиной является канонический тензор энергии-импульса. Так как каноническая энергия всегда не ограничена, лагранжевы взаимодействия неустойчивы. Таким образом, было показано, что если теория производного типа допускает ограниченные сохраняющиеся величины, они могут сохраняться при включении подходящих согласованных и пуанкаре-инвариантных взаимодействий, так что теория останется устойчивой и на взаимодействующем уровне, но с нелагранжевой вершиной.

Несмотря на то, что в рассматриваемом классе теорий с высшими производными все устойчивые вершины взаимодействия нелагранжевы, они всё ещё допускают квантование, что связано с существованием лагранжевого якоря для нелагранжевой полевой теории, а также возможностью построения для неё гамильтонова формализма.

Описанный в работе общий метод включения согласованных взаимодействий проиллюстрирован на примере расширенной теории Черна-Саймонса порядка N и комплексного скалярного поля с высшими производными типа Пайса-Уленбека порядка $2n$. Было показано, что для рассматриваемых теорий класс нелагранжевых вершин взаимодействия сохраняет уникального представителя семейства симплектических структур, чьи параметры фиксированы значениями констант связи, что позволяет сохранить устойчивость динамики и даёт возможность последовательного квантования теории на взаимодействующем уровне.

Результаты, полученные в ходе выполнения настоящей работы, были опубликованы в [41–45], а также представлены на конференциях:

- Двадцать четвёртая Всероссийская конференция студентов-физиков и молодых учёных (31 марта – 08 апреля 2018, Томск, Россия) (выступление было отмечено дипломом за лучший доклад);
- JOINT FAR/ANSEF-ICTP and RDP-VW School on Theoretical Physics (July 02 – 07, 2018, Yerevan, Armenia);
- Trans-Siberian School on High Energy Physics (April 01 – 05, 2019, Tomsk, Russia) (выступление было отмечено дипломом for the best project presentation);
- The XXIII International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists (April 15 – 19, JINR, Dubna, Russia).

Приложение А. Доказательство соотношений (1.62)

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству соотношений (1.62), напомним, что антикоммутатор $\{\,,\,\}$ самосопряжённого и анти-самосопряжённого оператора является анти-самосопряжённым. Это означает, что диагональные элементы обращают антикоммутатор в ноль,

$$\langle\,\phi\,,\{\,\overline{W}^p\,,R_\alpha\,\}\phi\,\rangle\equiv 0\,,\qquad p=0\,,1\,,2\,,\,\ldots\,. \tag{A1}$$

Следовательно, если подставить в это соотношение пространственно-временную симметрию, описываемую анти-самосопряжённым оператором, диагональные элементы обратятся в ноль. Это значит, что имеется интеграл от полной дивергенции,

$$\langle\,\phi\,,\{\,\overline{W}^p\,,\partial^\mu\phi\,\}\,\rangle=\int d^dx\,\partial_\nu\Sigma_p{}^{\mu\nu}(\phi\,,\Phi)\,,\qquad p=0\,,1\,,2\,,\ldots\,, \tag{A2}$$

где $\Sigma_p{}^{\mu\nu}$ – некоторый тензор второго рода.

Соотношение (1.62.a) доказывается по индукции. Это утверждение, очевидно, справедливо при $p=0$. Предполагая, что (1.62.a) выполнено для некоторого произвольного $p=k$ и используя (1.40), находим

$$\delta_\varepsilon(\overline{W}^{k+1}\phi)^a=\beta\,\varepsilon^\alpha\big(\overline{W}^a{}_cR^c{}_{b\alpha}+R^i{}_\alpha\partial_i\Gamma^a{}_b\big)(\overline{W}^k\phi)^b=\beta\,\varepsilon^\alpha R^a{}_{b\alpha}(\overline{W}^{k+1})^b\,. \tag{A3}$$

Так как k – произвольное положительное число, данное утверждение выполнено для любого неотрицательного $p=0\,,1\,,2\,,\,\ldots$. Таким образом, соотношение (1.62.a) доказано.

Рассмотрим соотношение (1.62.b). Используя правило Лейбница для вычисления вариационных производных, можно представить величину $(\overline{J}_p)_i$ в следующей форме:

$$(\overline{J}_p)_i=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{p+k}\alpha_k\langle\,\phi\,,\overline{W}^{l-1}\overline{\partial_i\Gamma}\,\overline{W}^{p+k-l}\phi\,\rangle\,. \tag{A4}$$

Действуя на данное выражение калибровочным генератором $R^i{}_\alpha$, получаем

$$R^i{}_\alpha(\overline{J}_p)_i=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{p+k}\alpha_k\langle\,\phi\,,\overline{W}^{l-1}R^i{}_\alpha\overline{\partial_i\Gamma}\,\overline{W}^{p+k-l}\phi\,\rangle\,. \tag{A5}$$

С учётом соотношений (A1) и уравнений движения (1.56), имеем

$$R_{ab\alpha}(\overline{W}^p)^b{}_c\phi^cE^a=\langle\,\phi\,,\overline{M}\,\overline{W}R_\alpha\phi\,\rangle=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\langle\,\phi\,,\big[\,\overline{W}^{p+k}\,,R_\alpha\,\big]\phi\,\rangle\,. \tag{A6}$$

Последняя величина может быть представлена как сумма коммутаторов

$$\big[\,R_\alpha\,,\overline{W}^{p+k}\,\big]=\sum_{l=1}^{p+k}\overline{W}^{l-1}\big[\,R_\alpha\,,\overline{W}\,\big]\overline{W}^{p+k-l}\,. \tag{A7}$$

Подставляя данное выражение в (A6), а затем добавляя к полученному результату (A5), получаем

$$R^i{}_\alpha(\overline{J}_p)_i + R_{ab\alpha}(\overline{W}^p)^b{}_c\phi^c E^a = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{p+k}\alpha_k\langle\,\phi\,,\overline{W}^{l-1}\big(\big[\,\overline{W}\,,R_\alpha\,\big]+R^i\partial_i\mathit{\Gamma}\big)\overline{W}^{p+k-l}\phi\,\rangle\,. \qquad \text{(A8)}$$

С учётом тождества (1.41), данное выражение тождественно равно нулю, что доказывает соотношение (1.62.b).

Теперь перейдём к доказательству калибровочной инвариантности токоподобного члена $(\overline{J}_p)_i$. Вычисляя калибровочную вариацию выражения (A5), а также используя (1.62.a), получаем

$$\delta_\varepsilon(\overline{J}_p)_i = \frac{1}{2}\,\beta\,\varepsilon^\alpha\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=1}^{p+k}\alpha_k\langle\,\phi\,,\overline{W}^{l-1}\partial_i\big(\big[\,\overline{W}\,,R_\alpha\,\big]+R^j{}_\alpha\partial_j\mathit{\Gamma}\big)\overline{W}^{p+k-l}\phi\,\rangle\,. \qquad \text{(A9)}$$

Данное выражение также тождественно равно нулю вследствие (1.41), что доказывает соотношение (1.62.c).

Приложение B. Существование и структура сохраняющегося тензора второго ранга $\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}(\beta\,,B)$

В данном приложении мы доказываем, что правая часть в формуле (1.61) представляет собой сохраняющийся тензор. Подставляя уравнения движения (1.56) в данное соотношение и используя определение токоподобного члена (1.57), получаем

$$\int d^dx\,\partial_\nu\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_k\beta_p\langle\,\phi\,,\big(\partial^\mu\overline{W}^{p+k}+\frac{1}{2}\overline{\varPhi}^i\partial_i\partial^\mu\overline{W}^{p+k}\big)\phi\,\rangle+\sum_{q=0}^{N-1}B_q\langle\,\varPhi\,,\partial^\mu\mathcal{M}\varPhi\,\rangle\,. \tag{B1}$$

Второе слагаемое, очевидно, определяет семейство сохраняющихся тензоров энергии-импульса свободной калибровочной теории (1.53),

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}(\varPhi)=\sum_{q=0}^{N-1}B_q\varPhi^i(\partial^\mu\mathcal{M}\varPhi)_i\,,\qquad T^{\mu\nu}(\varPhi)=\sum_{q=0}^{N-1}B_qT_q{}^{\mu\nu}(\varPhi)\,. \tag{B2}$$

Осталось доказать, что первый член в (B1) представляет собой полную дивергенцию от некоторого тензора. Интегрируя по частям, можно разложить его элементы в сумму трёх вкладов:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\big(-\langle\,\phi\,,\big(\big[\,\overline{W}^{p+k}\,,\partial^\mu\,\big]+\partial^\mu\overline{\varPhi}^i\partial_i\overline{W}^{p+k}\big)\phi\,\rangle+\langle\,\phi\,,\big\{\,\overline{W}^{p+k}\,,\partial^\mu\,\big\}\phi\,\rangle+\\+\int d^dx\,\partial^\mu\langle\,\phi\,,\overline{\varPhi}^i\partial_i\overline{W}^{p+k}\phi\,\rangle\big)\,,\end{gathered} \tag{B3}$$

где квадратные $[\ ,\ ]$ и фигурные скобки $\{\ ,\ \}$ обозначают, соответственно, коммутатор и антикоммутатор вложенных в них операторов. Первый вклад тождественно равен нулю вследствие (1.41), второй вклад представляет собой полную дивергенцию (A2), так же как и третий. Таким образом, согласованность формулы (1.61) доказана.

Сохраняющийся тензор $\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}(\beta\,,B)$ имеет следующую структуру:

$$\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}(\beta\,,B)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_k\beta_p\Big(\Sigma_{p+k}{}^{\mu\nu}(\phi\,,\varPhi)+\frac{1}{2}\langle\,\phi\,,\overline{\varPhi}^i\partial_i\overline{W}^{p+k}\phi\,\rangle\Big)+\sum_{q=0}^{N-1}B_qT_q^{\mu\nu}(\varPhi)\,, \tag{B4}$$

где $T_q{}^{\mu\nu}(\varPhi)$ – тензор энергии-импульса свободного калибровочно-инвариантного поля, а $\Sigma_{p+k}{}^{\mu\nu}(\phi\,,\varPhi)$ определено в (A2). Так как в свободном пределе

$$T_p{}^{\mu\nu}(\phi)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\Sigma_{p+k}{}^{\mu\nu}\,,\qquad\langle\,\phi\,,\overline{\varPhi}^i\partial_i\overline{W}^{p+k}\phi\,\rangle\,, \tag{B5}$$

величина $\boldsymbol{\Theta}^{\mu\nu}(\beta\,,B)$ представляет собой деформацию выбранного представителя в семействе тензоров энергии импульса (1.53).

Список литературы

[1] Pais A., Uhlenbeck G. E. On field theories with non-localized action // Phys. Rev. – 1950. – V. 79. – P. 145-165.

[2] Pavsic M. Pais-Uhlenbeck oscillator and negative energies // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. – 2016. – V. 13. – P. 1630015.

[3] Woodard R. P. The Theorem of Ostrogradsky // Scholarpedia. – 2015. – V. 10. – P. 32243.

[4] Smilga A. V. Classical and Quantum Dynamics of Higher-Derivative Systems // Int. J. Mod. Phys. A. – 2017. – V. 32. – P. 1730025.

[5] Salvio A. Quadratic Gravity // Front. in Phys. – 2018. – V. 6. – P. 77.

[6] Tomboulis E. T. Renormalization and unitarity in higher derivative and nonlocal gravity theories // Mod. Phys. Lett. A. – 2015. – V. 30. – P. 1540005.

[7] Belenchia A., Letizia M., Liberati S., Di Casola E. Higher-order theories of gravity: diagnosis, extraction and reformulation via non-metric extra degrees of freedom – a review // Rep. Prog. Phys. – 2018. – V. 81. – P. 036001.

[8] Sotiriou T. P., Faraoni V. $f(R)$ theories of gravity // Rev. Mod. Phys. – 2010. – V. 82. – P. 451-497.

[9] De Felice A., Tsujikawa S. $f(R)$ theories // Living Rev. Rel. – 2010. – V. 13. – P. 3.

[10] Smilga A. V. Benign vs. malicious ghosts in higher-derivative theories // Nucl. Phys. B. – 2005. – V. 706. – P. 598-614.

[11] Bergshoeff E. A., Kovacevic M., Rosseel J., Townsend P. K., Yin Y. A spin-4 analog of $3D$ massive gravity // Class. Quant. Grav. – 2011. – V. 28. – P. 245007.

[12] Nitta M., Yokokura R. Topological couplings in higher derivative extensions of supersymmetric three-form gauge theories // arXiv e-print archive. – 2018. – V. 1810. – P. 12678. – URL: http://arxiv.org/abs/1810.12678.

[13] Andrzejewski K., Bolonek K., Gonera J., Maslanka P. Canonical formalism and quantization of perturbative sector of higher-derivative theories // Phys. Rev. A. – 2007. – V. 76. – P. 032110.

[14] Smilga A. V. Comments on the dynamics of the Pais-Uhlenbeck oscillator // SIGMA. – 2009. – V. 5. – P. 017.

[15] Chen T., Fasiello M., Lim E. A., Tolley A. J. // Higher derivative theories with constraints: exorcising Ostrogradski's ghost // JCAP. – 2013. – V. 1302. – P. 042.

[16] Pavsic M. Stable self-Interacting Pais-Uhlenbeck oscillator // Mod. Phys. Lett. A. – 2013. – V. 28. – P. 1350165.

[17] Avendao-Camacho M., Vallejo J. A., Vorobiev Yu. A perturbation theory approach to the stability of the Pais-Uhlenbeck oscillator // J.Math.Phys. – 2017. – V. 58. – P. 093501.

[18] Podolsky B. A generalized electrodynamics. Part I - non-quantum // Phys. Rev. – 1942. – V. 62. – P. 68-71.

[19] Deser S., Jackiw R. Higher derivative Chern-Simons extensions // Phys. Lett. B. – 1999. – V. 451. – P. 73-76.

[20] Bufalo R., Pimentel B. M., Zambrano G. E. R. Renormalizability of generalized quantum electrodynamics // Phys. Rev. D. – 2012. – V. 86. – P. 125023.

[21] Ghasemkhani M., Bufalo R. Higher derivative Chern-Simons extension in the noncommutative QED_3 // Phys. Rev. D. – 2015. – V. 91. – P. 125013.

[22] Nogueira A. A., Palechor C., Ferrari A. F. Reduction of order and Fadeev-Jackiw formalism in generalized electrodynamics // Nucl. Phys. B. – 2019. – V. 939. – P. 372-390.

[23] Lu H., Pang Yi, Pope C. N. Conformal Gravity and Extensions of Critical Gravity // Phys. Rev. D. – 2011. – V. 84. – P. 064001.

[24] Lu H., Pang Yi, Pope C. N. Black holes in six-dimensional conformal gravity // Phys. Rev. D. – 2013. – V. 87. – P. 104013.

[25] Maldacena J. Einstein Gravity from Conformal Gravity // arXiv e-print archive. – 2011. – V. 1105. – P. 5632. – URL: http://arxiv.org/abs/1105.5632.

[26] Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A. Classical and quantum stability of higher-derivative dynamics // Eur. Phys. J. C. – 2014. – V. 74. – P. 3072.

[27] Kaparulin D. S., Karataeva I. Yu., Lyakhovich S. L. Higher derivative extensions of $3d$ Chern-Simons models: conservation laws and stability // Eur. Phys. J. C. – 2015. – V. 75. – P. 552.

[28] Kaparulin D. S., Karataeva I. Yu., Lyakhovich S. L. Third order extensions of $3d$ Chern-Simons interacting to gravity: Hamiltonian formalism and stability // Nucl. Phys. B. – 2018. – V. 934. – P. 634-652.

[29] Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A. Stable interactions via proper deformations // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2016. – V. 49. – P. 155204.

[30] Kazinski P. O., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A. Lagrange structure and quantization // JHEP. – 2005. – V. 0507. – P. 076.

[31] Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A. Rigid symmetries and conservation laws in non-Lagrangian field theory // J. Math. Phys. – 2010. – V. 51. – P. 082902.

[32] Ostrogradski M. V. Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres // Mem. Acad. St. Petersburg. – 1850. – V. 6. – P. 385-517.

[33] Гитман Д. М., Ляхович С. Л., Тютин И. В. Гамильтонова формулировка теорий с высшими призводными // Изв. вузов. Физика. – 1983. – Т. 26. – № 8. – С. 61-66.

[34] Kluson J., Oksanen M., Tureanu A. Hamiltonian analysis of curvature-squared gravity with or without conformal invariance // Phys. Rev. D. – 2014. – V. 89. – P. 064043.

[35] Ohkuma Y., Ezawa Y., Templeton S. On the canonical formalism of $f(R)$-type gravity using Lie derivatives // Eur. Phys. J. Plus. – 2015. – V. 77. – P.130.

[36] Bolonek K., Kosinski P. Hamiltonian structures for Pais-Uhlenbeck oscillator // Acta Phys. Polon. B. – 2005. – V. 36. – P. 2115-2131.

[37] Damaskinsky E. V., Sokolov M. A. Remarks on quantization of Pais–Uhlenbeck oscillators // J. Phys. A. – 2006. – V. 39. – P. 10499.

[38] Ehrhardt T., Rost K. Resultant matrices and inversion of Bezoutians // Linear Algebra and its Applications. – 2013. – V. 439. – P. 621-639.

[39] DeWitt B. Dynamical theory of groups and fields / New York: Gordon and Breach. – 1965. – 248 p.

[40] Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L., Sharapov A. A. Consistent interactions and involution // JHEP. – 2013. – V. 1301. – P. 097.

[41] Abakumova V. A., Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L. Multi-Hamiltonian formulations and stability of higher-derivative extensions of $3d$ Chern-Simons // Eur. Phys. J. C. – 2018. – V. 78. – No. 2. – P. 115.

[42] Abakumova V. A., Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L. Stable interactions in higher derivative field theories of derived type // Phys. Rev. D. – 2019. – V. 99. – P. 045020.

[43] Абакумова В. А., Капарулин Д. С., Ляхович С. Л. Ограниченный гамильтониан в расширенной теории Черна-Саймонса четвёртого порядка // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2017. – Т. 60. – № 12. – С. 40-47.
переводная версия:
Abakumova V. A., Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L. Bounded Hamiltonian in the Fourth-Order Extension of the Chern-Simons Theory // Russ. Phys. J. – 2018. – V. 60. – No. 12. – P. 2095-2104.

[44] Абакумова В. А., Капарулин Д. С., Ляхович С. Л. Устойчивые взаимодействия между расширенной теорией Черна-Саймонса и заряженным скалярным полем с высшими производными: гамильтонов формализм // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2019. – Т. 62. – № 1. – С. 13-21.
переводная версия:
Abakumova V. A., Kaparulin D. S., Lyakhovich S. L. Stable Interactions Between the Extended Chern-Simons Theory and a Charged Scalar Field with Higher Derivatives: Hamiltonian Formalism // Russ. Phys. J. – 2019. – V. 62. – No. 1. – P. 12-22.

[45] Абакумова В. А. Мультигамильтонова формулировка расширенной теории Черна-Саймонса с высшими производными / Сборник тезисов, материалы Двадцать четвёртой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных. – Екатеринбург – Томск: издательство АСФ России. – 2018. – С. 44-45.

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: vi_ct_or_ia@me.com / ID: 2389918
Проверяющий: (vi_ct_or_ia@me.com / ID: 2389918)

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://users.antiplagiat.ru

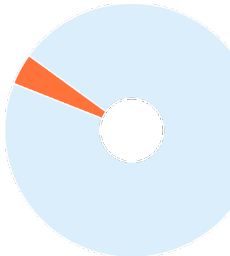
ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 8
Начало загрузки: 23.05.2019 13:24:56
Длительность загрузки: 00:00:01
Имя исходного файла:
Абакумова_Магистерская диссертация
Размер текста: 522 кБ
Символов в тексте: 80806
Слов в тексте: 10341
Число предложений: 673

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 23.05.2019 13:24:58
Длительность проверки: 00:00:03
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска Интернет

ЗАИМСТВОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
4,07%	0%	95,93%



Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему докуме
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.
Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объе документа.
Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.
Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При это система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагмен проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Доля в тексте	Источник	Ссылка	Актуален на	Модуль поиска	Блоков в отчете	Блоков в тексте
[01]	2,87%	3,35%	Multi-Hamiltonian formulatio...	http://arxiv.org	22 Мар 2018	Модуль поиска Интернет	27	33
[02]	0,76%	2,54%	Classical and quantum stabilit...	https://doi.org	02 Сен 2018	Модуль поиска Интернет	6	27
[03]	0,15%	0,61%	Higher-order theories of gravi...	http://arxiv.org	26 Мар 2017	Модуль поиска Интернет	1	6

Еще источников: 6
Еще заимствований: