

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет электромеханический
Кафедра теоретической и прикладной механики
Направление подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) образовательной программы – Экспериментальная механика и
компьютерное моделирование в механике

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ Маслов Л. Б.
(подпись)

« ____ » _____ 2019 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к выпускной квалификационной работе
на тему Конечно-элементное моделирование
индивидуального эндопротеза
тазобедренного сустава

Обучающийся: _____ Соловьев Дмитрий Олегович
(подпись)

Руководитель: д.ф.-м.н., доцент _____ Маслов Леонид Борисович
(подпись)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет электромеханический
Кафедра теоретической и прикладной механики
Направление подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) образовательной программы – Экспериментальная механика и
компьютерное моделирование в механике

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ Маслов Л. Б.

(подпись)

« _____ » _____ 2019 г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы

обучающемуся Соловьеву Дмитрию Олеговичу

1. Тема работы: «Конечно-элементное моделирование индивидуального эндопротеза тазобедренного сустава», утвержденная приказом ректора от 4 апреля 2019 г. № 319-3.
2. Исходные данные к работе: Поверхностные геометрические модели в формате STL эндопротеза, винтов и костей таза на основе данных компьютерной томографии пациента, предоставленные РНИИТО им. Р. Р. Вредена (г. Санкт-Петербург).
3. Содержание работы (перечень вопросов, подлежащих разработке):
 - разработка конечно-элементных моделей биомеханической системы
 - расчет эффективных упругих характеристик композиционного материала
 - проведение модального анализа для верификации модели
 - математическая постановка задачи двухопорного стояния
 - проведение статического анализа в контактной постановке
 - анализ результатов расчета
 - заключение
4. Графический материал: цель и задачи работы, исходные данные, технология построения геометрических моделей, разработка конечно-элементных моделей костей таза, конечно-элементные модели костей таза, разработка конечно-элементных моделей эндопротеза, создание сборки, физико-механические свойства материалов, расчет эффективных упругих характеристик пористого титана, математическая постановка задачи, контактные пары, модальный анализ системы, общее распределение напряжений в модели, распределение напряжений в тазовых компонентах эндопротеза, задача 1. распределение напряжений в верхней тазовой кости, задача 1. распределение напряжений в нижней тазовой кости, задача 2. распределение напряжений в верхней тазовой кости, задача 2. распределение напряжений в нижней тазовой кости, максимальные напряжения и коэффициенты запаса прочности.

Руководитель _____
(подпись)

Обучающийся _____
(подпись)

Маслов Леонид Борисович

Соловьев Дмитрий Олегович

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет электромеханический
Кафедра теоретической и прикладной механики
Направление подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) образовательной программы – Экспериментальная механика и компьютерное моделирование в механике

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН
подготовки выпускной квалификационной работы

№ п/п	Наименование этапов работы	Срок выполнения	
		начало	окончание
1.	Разработка конечно-элементных моделей биомеханической системы	5.04.2019	23.04.2019
2.	Расчет эффективных упругих характеристик композиционного материала	24.04.2019	29.04.2019
3.	Проведение модального анализа для верификации модели	30.04.2019	6.05.2019
4.	Математическая постановка задачи двухопорного стояния	7.05.2019	13.05.2019
5.	Проведение статического анализа в контактной постановке	14.05.2019	28.05.2019
6.	Анализ результатов расчета	29.05.2019	7.06.2019
7.	Оформление выпускной квалификационной работы и графического материала, подготовка к процедуре защиты	8.06.2019	25.06.2019

Руководитель _____
(подпись)

Обучающийся _____
(подпись)

Маслов Леонид Борисович

Соловьев Дмитрий Олегович

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И.ЛЕНИНА»

Факультет электромеханический
Кафедра теоретической и прикладной механики
Направление подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование
Направленность (профиль) образовательной программы – Экспериментальная механика и компьютерное моделирование в механике

ОТЗЫВ
руководителя выпускной квалификационной работы
о работе обучающегося в период подготовки выпускной
квалификационной работы

Руководитель: Маслов Леонид Борисович, д.ф.-м.н., доцент

Обучающийся: Соловьев Дмитрий Олегович

Тема: «Конечно-элементное моделирование индивидуального эндопротеза тазобедренного сустава»

Обучающийся подготовил выпускную квалификационную работу (ВКР) по актуальной теме, выбранной в соответствии с заявкой профильной организации ФГБУ "РНИИТО им. Р.Р. Вредена" Минздрава России и соответствующей области поисковых научных исследований, в соответствии с заданием и календарным планом.

Цели и задачи, согласованные с темой ВКР, а также результаты, полученные на основе использованных обучающимся технологий и методов, соответствуют областям и объектам профессиональной деятельности.

К результатам ВКР, самостоятельно полученным обучающимся и обладающим признаками научной новизны и практической значимости, относятся:

- трехмерные геометрические и конечно-элементные модели рассматриваемой области таза пациента;
- оценка эффективных упругих характеристик биокompозитного материала;
- поля напряжений от действия силы затяжки винтов и статической нагрузки в виде веса человека.

В период подготовки ВКР обучающийся продемонстрировал умения и навыки работы с информационными ресурсами, информационными справочными системами, современными профессиональными базами данных, специализированным программным обеспечением.

Апробации и публикации результатов ВКР: Апробированы на XIV Всероссийской (Международной) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия — 2019» и Международной (XX Всероссийской) научно-технической конференции «Состояние и перспективы развития электро и теплотехнологии» (Бенардосовские чтения). Могут быть рекомендованы к опубликованию в рецензируемых специализированных журналах (Российском журнале биомеханики).

Практическое значение и результаты ВКР: Проведена теоретическая оценка прочности индивидуального эндопротеза пациента, проходящего лечение в РНИИТО им. Р.Р. Вредена. Результаты ВКР, представляющие разработку математических моделей и оценку напряженного состояния системы «кость-эндопротез», внедрены в медицинскую практику ФГБУ "РНИИТО им. Р.Р. Вредена" Минздрава России.

Пояснительная записка к ВКР и графический материал соответствуют требованиям к оформлению.

Текст ВКР проверен на объем заимствования и выявление неправомерных заимствований, доля оригинального текста составляет 94.43 %.

Недостатки работы обучающегося в период подготовки ВКР: отсутствуют.

В ходе работы обучающийся продемонстрировал сформированность компетенций, готовность решать профессиональные задачи по видам профессиональной деятельности в соответствии с основной профессиональной образовательной программой высшего образования.

ВКР соответствует предъявляемым требованиям и рекомендуется к защите на заседании государственной экзаменационной комиссии.

Руководитель

_____ (подпись)

Маслов Леонид Борисович

« ____ » _____ 20__ г.

РЕФЕРАТ

Объем 41 с., 1 кн. , 33 рис., 3 табл., 16 источн., 2 прил.

Математическая модель, метод конечных элементов, эндопротезирование тазобедренного сустава, индивидуальный имплантат, напряженно-деформированное состояние, прочность.

Объектом работы является биомеханическая система «скелет - эндопротез тазобедренного сустава».

Цель работы – биомеханическая оценка работоспособности индивидуального эндопротеза тазобедренного сустава.

Методы, используемые в работе: численный метод, основанный на методе конечных элементов, аналитический метод расчета эффективных упругих характеристик композиционного материала.

Результаты работы: напряженно-деформированное состояние системы «скелет - эндопротез тазобедренного сустава», по данным анализа даны практические рекомендации по снижению напряжений в костях и деталях.

Область применения результатов: оценка прочности и надежности установки индивидуальных образцов эндопротеза тазобедренного сустава в клинической медицине (травматология, ортопедия).

Итоги внедрения: разработанный индивидуальный эндопротез тазобедренного сустава установлен пациенту ФГБУ "РНИИТО им. Р.Р. Вредена" Минздрава России.

ABSTRACT

Volume 41 p., 1 b., 33 fig., 3 tabl., 16 sourc., 2 append.

Mathematical model, finite element method, hip joint endoprosthesis, individual implant, stress-strain state, strength.

The object of the work is biomechanical system "skeleton - hip joint endoprosthesis".

The aim of the work is performance evaluation of an individual hip joint endoprosthesis.

Methods: finite element method, analytical method for calculating the effective elastic constants of a composite material.

Results: stress-strain state of the system, according to the analysis, practical recommendations are given to reduce stress in bones and assembly parts.

Application field: assessment of the strength and reliability of the installation of individual samples of the hip joint endoprosthesis in clinical medicine (traumatology, orthopedics).

Results of the implementation: designed individual hip joint endoprosthesis was installed for the patient of Russian Scientific Research Institute of Traumatology and Orthopedics named after R.R. Vreden.

Содержание

Введение	8
1. Разработка конечно-элементных моделей биомеханической системы	10
1.1. Разработка конечно-элементных моделей костей таза	10
1.2. Разработка конечно-элементных моделей эндопротеза	12
1.3. Создание сборки	15
1.4. Физико-механические свойства материалов модели	17
2. Расчет эффективных упругих характеристик композиционного материала	18
3. Проведение модального анализа для верификации модели	20
4. Математическая постановка задачи двухопорного стояния	21
5. Проведение статического расчета в контактной постановке	23
6. Анализ результатов расчета	26
6.1. Анализ напряженно-деформированного состояния винтового соединения	27
6.2. Анализ напряженно-деформированного состояния при двухопорном стоянии	30
Заключение	35
Список использованных источников	36
Приложение А	38
Приложение Б	40

Введение

За последнее время количество пациентов, страдающих деформирующим артрозом тазобедренного и коленного суставов, растет. В мире у 10–40 человек из 1000 имеется такое заболевание [3]. В работе [10] с помощью материалов государственного статистического учета травматизма и ортопедической заболеваемости взрослого населения Санкт-Петербурга и данных квотного регистра МИАЦ установлено, что за период 2009-2014 гг. время ожидания операции пациентами выросло с 1–5 месяцев до 6–12 месяцев. Количество пациентов, которым по разным причинам не производилось эндопротезирование, постоянно увеличивается.

При первичной установке имплантатов конструкция образована стандартным набором компонентов определенного типоразмера и формы. С увеличением количества первичных оперативных вмешательств и сроков наблюдения растет количество ревизионных операций. Доля ревизионных вмешательств достигает 20% от общего числа операций эндопротезирования тазобедренного сустава. Причиной неудовлетворительных результатов эндопротезирования тазобедренного сустава чаще всего является асептическое расшатывание вертлужного компонента.

В случае повторного эндопротезирования возникает необходимость в проектировании индивидуальных имплантатов. При условии своевременной диагностики до 80% ревизий вертлужной впадины могут быть выполнены с применением многодырчатой гемисферической чашки с дополнительной фиксацией винтами. В последние активно разрабатываются и внедряются различные варианты конструкций эндопротезов при значительных дефектах вертлужной впадины, особенно сопровождающихся нарушением целостности тазового кольца. В частности, в [8] оценивается эффективность использования индивидуальных трехфланцевых вертлужных компонентов (СТАС — Custom Triflange Acetabular Component), с применением аддитивных технологий компьютерного моделирования и 3D-печати.

Возникает вопрос о работоспособности конструкции, разработанной специалистами в области ортопедии, о величине напряжений и деформаций, возникающих в костях, суставах и имплантатах. Однако даже самые современные методы прочностного анализа бесполезны, если медицинские специалисты не смогут извлечь клиническую значимость из проделанных расчетов. Инженер должен сделать свои результаты понятными для врача, не знакомого с численным моделированием. С другой стороны, инженеру необходимо рассматривать с точки зрения врача граничные условия, геометрию и материал [13].

В работе представлено компьютерное моделирование системы «кости таза – имплант» в послеоперационный период (2-3 дня после операции) на основе компьютерных моделей имплантата и костей таза, полученных из ФГБУ «РНИИТО им. Р.Р. Вредена» Минздрава России. В качестве имплантата выступает индивидуальный эндопротез тазобедренного сустава, устанавливаемый пациенту в результате проведения операции по замене стандартного эндопротеза.

В связи с вышесказанным, в данной работе поставлена цель – биомеханическая оценка работоспособности индивидуального эндопротеза тазобедренного сустава.

Для достижения цели поставлены три задачи:

- подготовка модели таза на основе данных компьютерной томографии;
- создание конечно-элементных моделей биомеханической конструкции;
- исследование напряженно-деформированного состояния системы «кости таза - имплант» в случае двухопорного стояния и анализ полученных результатов.

В рамках производственной практики (научно-исследовательской работы) выполнена первая задача. В данной работе подробнее остановимся на второй и третьей задаче.

1. Разработка конечно-элементных моделей биомеханической системы

В рамках научно-исследовательской работы в течение семестра обработаны геометрические модели тазовой области пациента в программе Meshmixer (Autodesk, США). Следующий этап после обработки поверхностей – это создание объемной конечно-элементной сетки в пре-процессоре ANSA (Beta CAE Systems, Швейцария).

1.1. Разработка конечно-элементных моделей костей таза

Процесс создания конечно-элементной сетки на примере верхней части тазовой кости показан на рисунке 1.1.1.

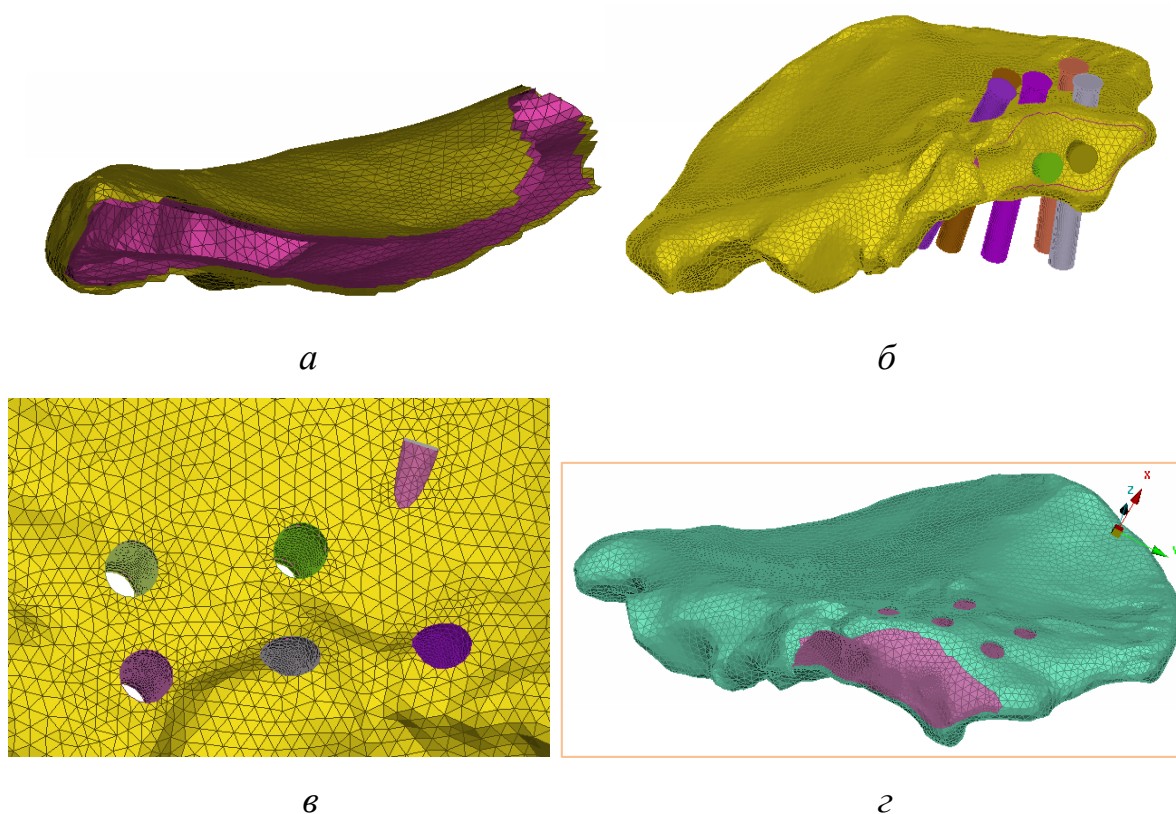


Рисунок 1.1.1 – Процесс создания конечно-элементной сетки костей таза: создание кортикального слоя (а), создание отверстий для винтов (б), сгущение сетки на кромках отверстий (в), объемная конечно-элементная сетка (г)

В модели правой (разрушенной) тазовой кости учитывается, что кость образована наружным слоем компактного вещества постоянной толщины 1

мм (кортикальная кость) и губчатым веществом, заполняющим оставшийся внутренний объем кости (спонгиозная кость). Для этого с помощью операции смещения создается модель кортикального слоя. Посредством булевых операций проделаны отверстия под винты и ножку эндопротеза, затем сетка вокруг получившихся отверстий сгущается. Наконец, проводится операция генерации тетраэдральной объемной сетки по существующей поверхностной. В качестве формы конечных элементов выбраны тетраэдры, так как они хорошо описывают геометрию сложной формы.

Обработанная геометрия таза и его конечно-элементная модель показаны на рисунке 1.1.2.

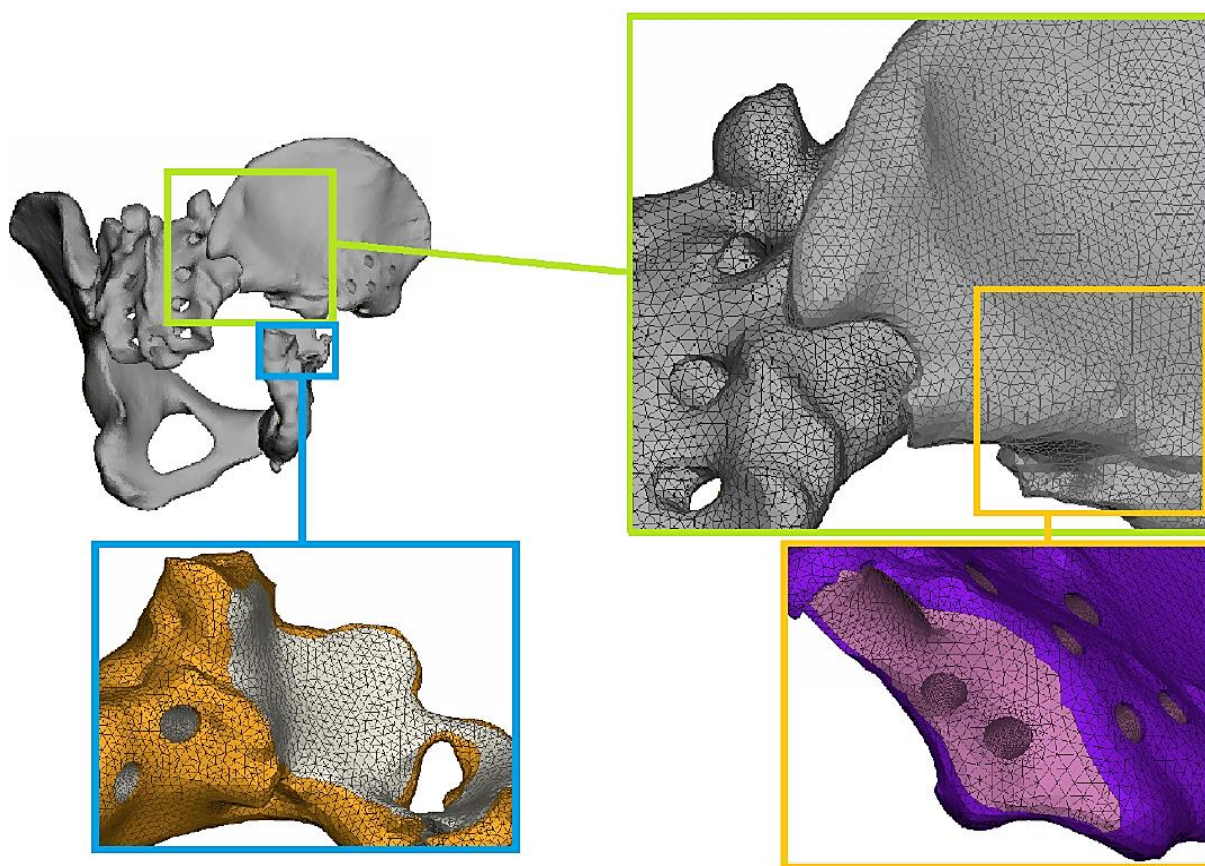


Рисунок 1.1.2 – Модель костей таза после обработки и разбиения на конечные элементы

1.2. Разработка конечно-элементных моделей эндопротеза

Исходная модель имплантата показана на рисунке 1.2.1. Группа тазового компонента эндопротеза состоит из ножки, которая входит непосредственно в тазовую кость, полусферической чашки и опорного фланца на подвздошную кость. Принято, что внешний слой ножки представлен пористой структурой для улучшения остеоинтеграции между эндопротезом и костью.



Рисунок 1.2.1 – Исходная геометрическая модель эндопротеза

Данная модель подвергается доработке. Для упрощения расчета пористая структура чашки заменяется на сплошную. На ножке эндопротеза необходимо нарастить слой, состоящий из пористого титана (на рисунке 1.2.2 изображен фиолетовым цветом). Затем с помощью элементов тетраэдральной формы создается конечно-элементная сетка.

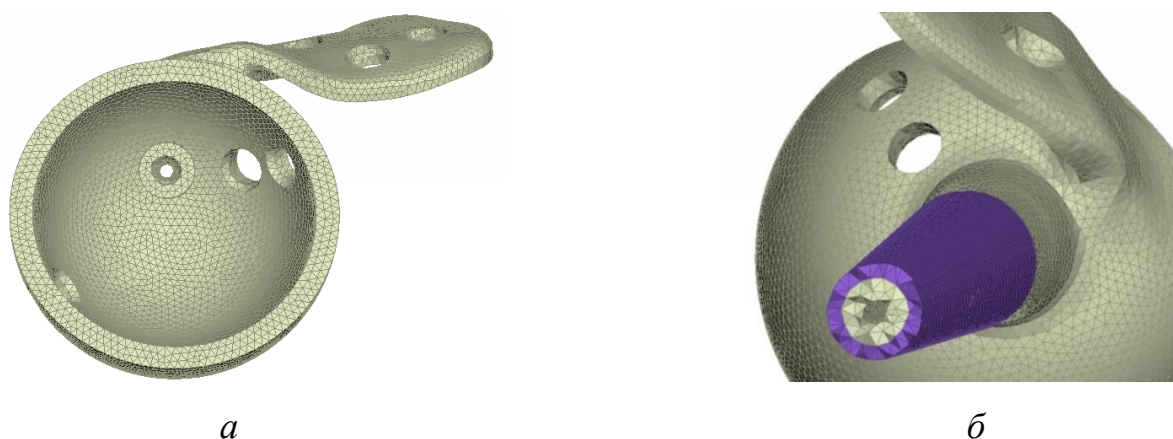


Рисунок 1.2.2 – конечно-элементная модель эндопротеза: внутренняя поверхность чашки (а), ножка в разрезе (б)

Бедренная часть имплантата состоит из полиэтиленового вкладыша чашки эндопротеза (рисунок 1.2.3), который играет роль вертлужной впадины, и ножки (рисунок 1.2.4). Тип конечных элементов в модели вкладыша: линейные тетраэдральные типа C3D10, где C – continuum – твердотельный элемент, 3D – 3dimensional – трехмерный элемент, 10 – количество узлов в элементе.

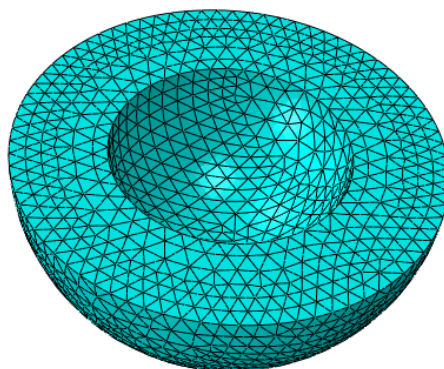


Рисунок 1.2.3 – Модель вкладыша чашки эндопротеза

Ножка состоит из тела, которое входит в канал бедренной кости, шейки и конуса, на который надевается головка. Угол, под которым соединяются шейка и тело, называют шейчно-диафизарным углом. Как правило, он составляет 135° [6]. В данной постановке задачи ножка представлена простой конструкцией, образованной пространственным стержнем и шаровой частью диаметра, соответствующего внутреннему диаметру чашки эндопротеза. Размеры стержня выбраны в соответствии с шаблонами эндопротезов Zimmer и размерами бедренной кости пациента. Тип конечных элементов в модели ножки: линейные двухузловые элементы балочного типа B31, где B – beam – балочный элемент, 3 – трехмерный элемент, 1 – линейный. В модели головки эндопротеза используются элементы STRI65 – треугольные оболочечные параболические элементы.



Рисунок 1.2.4 – Упрощенная модель ножки эндопротеза

Сама же бедренная кость не рассматривается. Левая бедренная кость (неразрушенная) представлена такой же стержневой моделью без шаровой части.

Фиксация эндопротеза осуществляется с помощью стандартных медицинских винтов с крупной резьбой диаметром 6.5 мм, удерживающих конструкцию в тазовой кости. На рисунке 1.2.5 показаны исходные модели винтов.

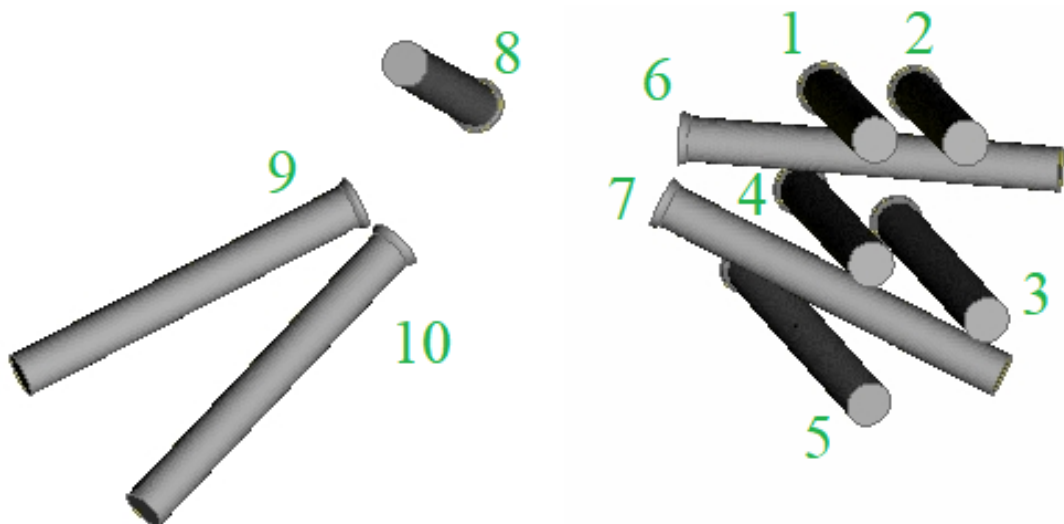


Рисунок 1.2.5 – Исходные геометрические модели винтов

При создании конечно-элементных моделей винтов учитывается их длина в соответствии со стандартным рядом медицинских винтов фирмы Biomet [16], винты не должны выступать из кости больше, чем на 5-10 мм. Также часть конечных элементов необходимо ориентировать таким образом, чтобы одна из их граней была параллельна поверхности головки винта, для удобного задания силы затяга винтов в дальнейшем. Пример полученной конечно-элементной модели винта изображен на рисунке 1.2.6.

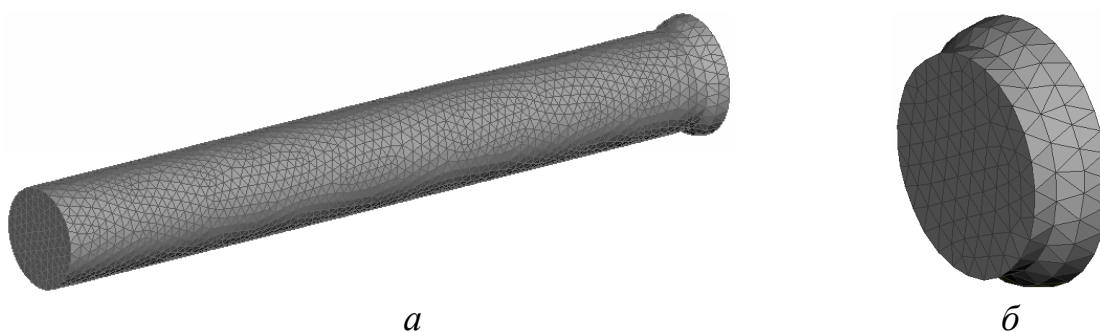


Рисунок 1.2.6 – КЭ-модель винта под номером 8:
винт целиком (а), винт в разрезе (б)

Тип конечных элементов в моделях костей таза, винтов и эндопротеза: линейные тетраэдральные типа C3D4, где C – continuum – твердотельный элемент, 3D – 3dimensional – трехмерный элемент, 4 – количество узлов в элементе.

1.3. Создание сборки

Сборка и дальнейшие расчеты проводятся в программном комплексе ABAQUS CAE (Dassault Systemes, Франция). На начальном этапе все взаимодействия компонентов системы моделируются с помощью команды Tie, при этом происходит жесткое соединение тел без относительного движения между ними. В качестве контактных поверхностей выбираются группы узлов конечных элементов соответствующего тела. Части винтов, входящие в кость, жестко связаны с ней, а головки винтов – с эндопротезом. Также связаны кости таза и крестец, имплантат и правая тазовая кость, чашка

имплантата и вкладыш, верхняя часть головки эндопротеза и вкладыш. Полученная сборка системы изображена на рисунке 1.3.1.

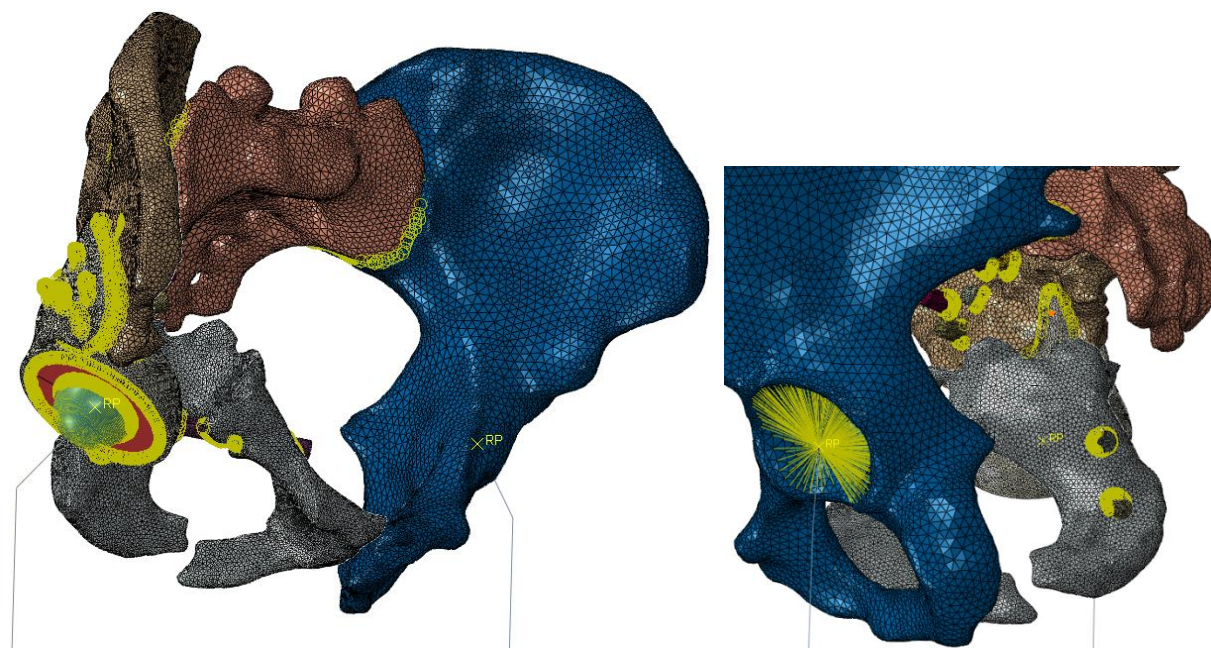


Рисунок 1.3.1 – Конечно-элементная модель системы

С помощью связи Coupling соединена нижняя часть головки и стержневая модель ножки эндопротеза, а также левая бедренная кость и вертлужная впадина левой тазовой кости. Такой тип связи используется для наложения кинематического или распределяющего ограничения между опорным узлом одного тела (в данном случае – пространственного стержня) и группой узлов, расположенных на поверхности другого тела.

В совокупности число конечных элементов всех типов в модели составляет 1181908.

1.4. Физико-механические свойства материалов модели

Необходимые для работы материалы: титановый сплав Ti6Al4V, из которого выполнены эндопротез и винты, кортикальная кость, спонгиозная кость, полиэтилен (вкладыш чашки эндопротеза). В качестве основной модели материала – сплошной однородный линейно-упругий материал. Все материалы рассматривались как сплошные с изотропными свойствами, несмотря на наличие микроструктуры костной ткани и пористой структуры титана. В качестве физико-механических характеристик (таблица 1.4.1) выбраны свойства, наиболее часто встречающиеся в литературе, где рассматривались подобные задачи [2, 9, 12, 14, 15].

Таблица 1.4.1 – Физико-механические свойства материалов

Материал	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона	Плотность, кг/мм ³	Предельное напряжение, МПа
Титановый сплав Ti6Al4V	110000	0.3	$4.41 \cdot 10^{-6}$	800
Кортикальная ткань	10000	0.3	$1.47 \cdot 10^{-6}$	160
Спонгиозная ткань	500	0.3	$0.6 \cdot 10^{-6}$	10
Полиэтилен (СВМПЭ)	1000	0.35	$0.93 \cdot 10^{-6}$	20

Опыт применения данного титанового сплава показал, что при использовании этого материала можно ожидать приемлемый уровень биологического ответа при условии его надлежащего применения. Для изготовления вкладышей для эндопротезов широко используется полиэтилен сверхвысокой молекулярной массы [12, 15].

2. Расчет эффективных упругих характеристик композиционного материала

Внешний слой ножки тазового компонента эндопротеза выполнен в виде пористой структуры для обеспечения лучшего врастания костного вещества в эндопротез. Моделирование такой структуры сильно усложнит модель системы и потребует больших вычислительных мощностей при решении задачи. Во избежание этого представим данный материал в виде изотропной среды, состоящей из изотропной матрицы с пространственно изотропным распределением сферических включений, и рассчитаем её эффективные упругие характеристики [11].

Так как рассматривается послеоперационный период (2-3 дня после операции), моделируется биокomпозитный материал, образовавшийся до полной остеоинтеграции. Материал матрицы – титан с характеристиками из таблицы 1.4.1, материал включений – условный материал с модулем упругости 1 МПа и коэффициентом Пуассона 0.3.

Модель сферических включений описывается системой уравнений:

$$\frac{dk}{d\Omega} = \frac{(k^* - k)(3k + 4\mu)}{(3k^* + 4\mu)(1 - \Omega)}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mu}{d\Omega} = \frac{5(\mu^* - \mu)(3k + 4\mu)\mu}{4\mu(3\mu^* + 2\mu) + 3k(2\mu^* + 3\mu)} \frac{1}{1 - \Omega}. \quad (2)$$

где k – модуль объемного сжатия, μ – модуль сдвига, Ω – величина пористости. Величины со звездочками относятся к включениям. Модуль объемного сжатия и модуль сдвига находятся по известным формулам теории упругости. Величина пористости равна 0.78 согласно данным, предоставленным РНИИТО им. Р. Р. Вредена.

Решение данной системы получим в системе компьютерной алгебры Mathcad (РТС, США) с помощью численного метода Эйлера [7]. Согласно нему приближенное решение определяется по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (3)$$

где величина $h = x_{i+1} - x_i$ – шаг вычисления.

Полный алгоритм расчета в среде Mathcad приведен в приложении А. Численные результаты для модуля объемного сжатия и модуля сдвига представлены на рисунке 2.1.

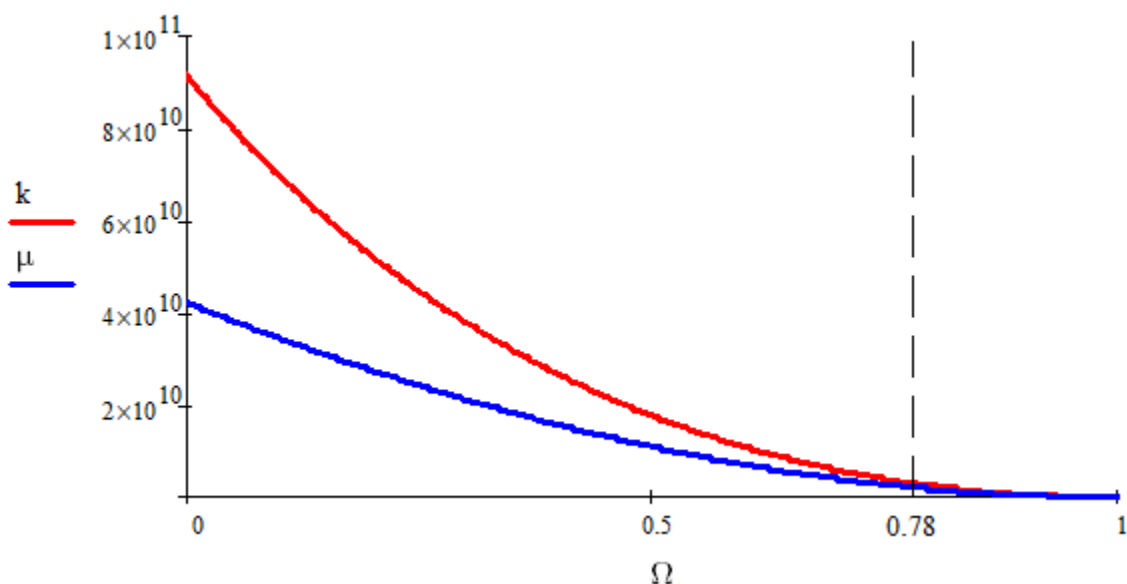


Рисунок 2.1 – Зависимость модуля объемного сжатия и модуля сдвига от концентрации включений

Для каждой кривой значения при нулевой концентрации соответствуют упругим характеристикам матрицы (титан), значения при концентрации, равной единице, соответствуют характеристикам включений (спонгиозная ткань). Получаем значения для требуемой величины пористости

$$k_{\Omega=0.78} = 3.09 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad (4)$$

$$\mu_{\Omega=0.78} = 2.168 \cdot 10^9 \text{ Па}. \quad (5)$$

Затем находим эффективный модуль упругости и коэффициент Пуассона

$$E = \frac{9k\mu}{3k + \mu} = \frac{9 \cdot 3.09 \cdot 10^9 \cdot 2.168 \cdot 10^9}{3 \cdot 3.09 \cdot 10^9 + 2.168 \cdot 10^9} = 5.271 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad (6)$$

$$\nu = \frac{E}{2\mu} - 1 = 0.216. \quad (7)$$

3. Проведение модального анализа для верификации модели

В качестве предварительного расчета проводится модальный анализ сборки в целом и её компонент в отдельности. В данном случае он применяется для верификации модели. На текущем этапе не заданы кинематические граничные условия, поэтому имеют место нулевые собственные частоты. На рисунке 3.1 показаны формы колебаний, соответствующие низшим собственным частотам.

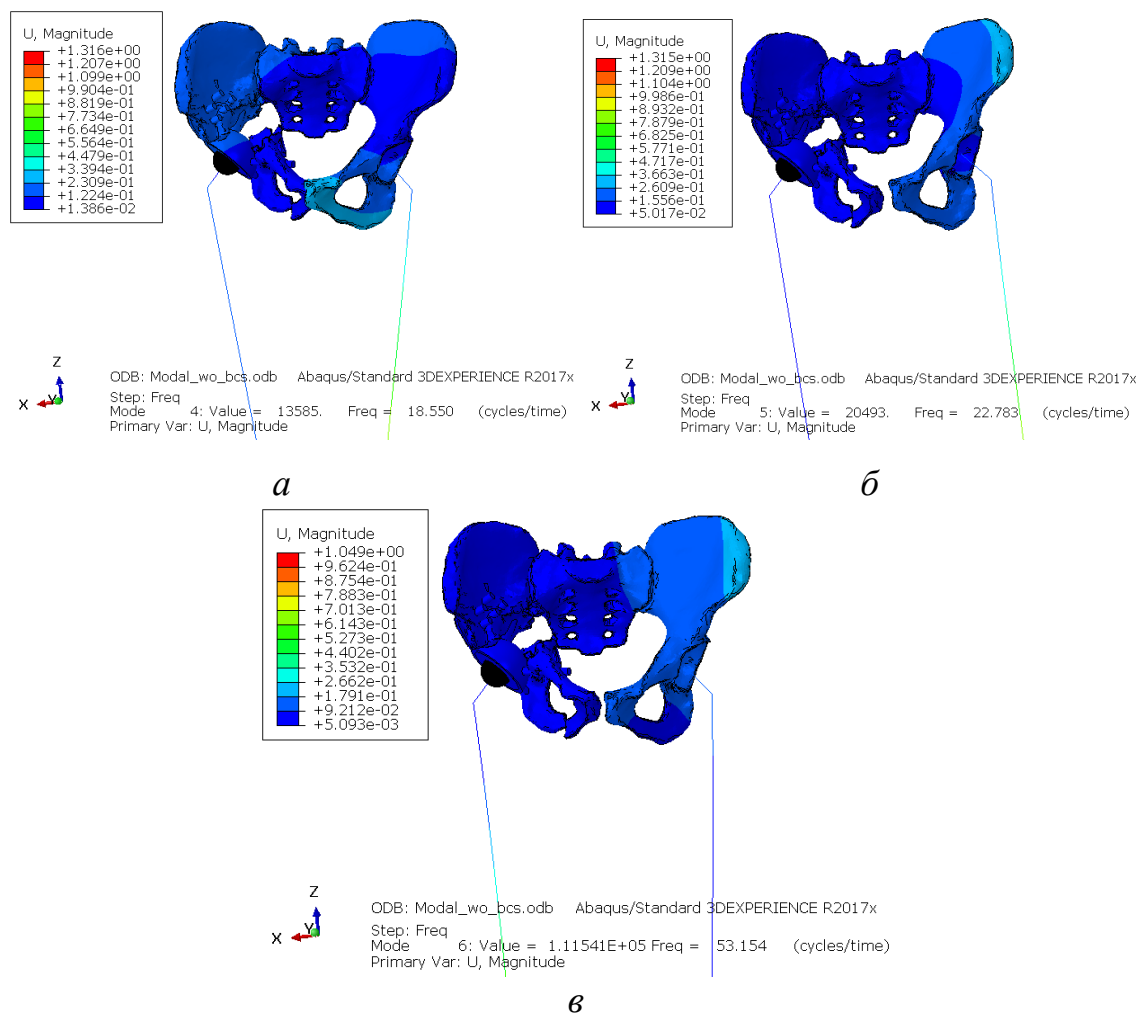


Рисунок 3.1 – Формы колебаний, соответствующие низшим собственным частотам: 18.55 Гц (*a*), 22.78 Гц (*б*), 53.15 Гц (*в*)

Установлено, что разработанная конечно-элементная модель ведет себя корректно как единая конструкция, осуществляя свободные колебания на собственных частотах, лежащих в приемлемых числовых пределах. Отдельных элементов системы, которые оказались не закрепленными, не выявлено.

4. Математическая постановка задачи двухопорного стояния

Рассматривается задача об исследовании напряженно-деформированного состояния системы «скелет-эндопротез» тазобедренного сустава при двухопорном стоянии. Математически она описывается системой уравнений теории упругости [1]:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} + X_j = 0 \quad (j = 1,2,3), \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1,2,3), \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\varepsilon_{kk} \quad (i, j = 1,2,3), \quad (10)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – величина, характеризующая относительное изменение объема при деформации, λ и μ – параметры Ламе – упругие константы изотропного материала:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (11)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (12)$$

δ_{ij} – символ Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Расчеты производятся с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в пространственной упругой постановке. Конечно-элементная модель может предоставить информацию о статических и динамических реакциях при различных нагрузках и граничных условиях, которые было бы трудно или невозможно получить экспериментально.

В МКЭ [4] реализуется физическая дискретизация – вместо реального объекта рассматривается его упругий эквивалент, составленный из конечного числа элементов. Такой подход позволяет перейти к решению системы линейных алгебраических уравнений взамен решения системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (13)$$

где $[K]$ - матрица жесткости системы, $\{U\}$ - вектор узловых перемещений, $\{F\}$ - вектор внешних сил.

Случай двухопорного стояния представляет собой позицию человека, стоящего вертикально на двух ногах. Сила тяжести, равная весу пациента, приложена в центре тяжести, расположенном в плоскости симметрии тела человека. Возникает вопрос, какой способ приложения нагрузки является наиболее правильным. При двухопорном стоянии сила тяжести уравновешивается силами реакции опор, которые можно считать равными половине веса пациента, что следует из уравнений статического равновесия. Наиболее удобным является вариант приложения нагрузки в зоне окончания упрощенной модели бедренной кости, при этом верхняя поверхность крестца считается жестко закрепленной.

Кинематические граничные условия (показаны на рисунке 4.1 синим-оранжевым цветом):

- 1) жесткое закрепление поверхности верхнего крестцового позвонка ($u_x = u_y = u_z = 0$);
- 2) на свободный конец упрощенных моделей ноги накладывается скользящий шарнир (в локальной системе координат разрешаются перемещения только вдоль ноги, все остальные перемещения и углы поворотов запрещены);

В рассматриваемой модели нагрузки (на рисунке 4.1 в виде желтых стрелок) прикладываются в 2 этапа:

- 1) на первом этапе происходит моделирование затяжки винтов, что подразумевает возникновение сил, стягивающих тазовый компонент эндопротеза с тазовой костью;
- 2) на втором этапе к свободному концу моделей ног прикладывается сила 440 Н, эквивалентная весу в 88 кг и направленная вдоль стержневой модели; результаты затяжки винтов сохраняются с предыдущего шага.

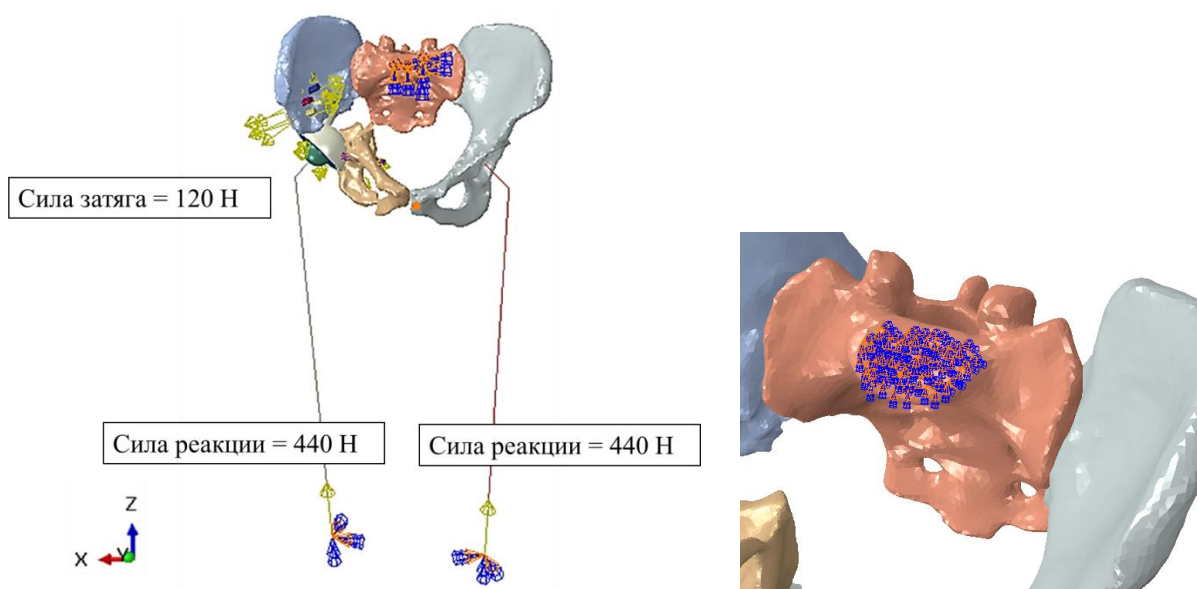


Рисунок 4.1 – Кинематические и силовые граничные условия

5. Проведение статического расчета в контактной постановке

Чтобы добиться максимально приближенного к реальности характера поведения между компонентами модели, при моделировании сложных механических систем необходимы контактные взаимодействия (рисунок 5.1). При добавлении контактов модель становится нелинейной, вследствие чего резко возрастает время расчета. Контакт типа «поверхность-поверхность» минимизирует численные ошибки расчета при использовании несогласованных сеток. В свойствах касательного поведения контакта задается изотропность и коэффициент трения. В свойствах нормального поведения разрешается разделение поверхностей после контакта.

Контактные взаимодействия показаны на рисунке 5.1 желтым цветом. Необходимые коэффициенты трения для пар материалов [2] приведены в таблице 5.1.

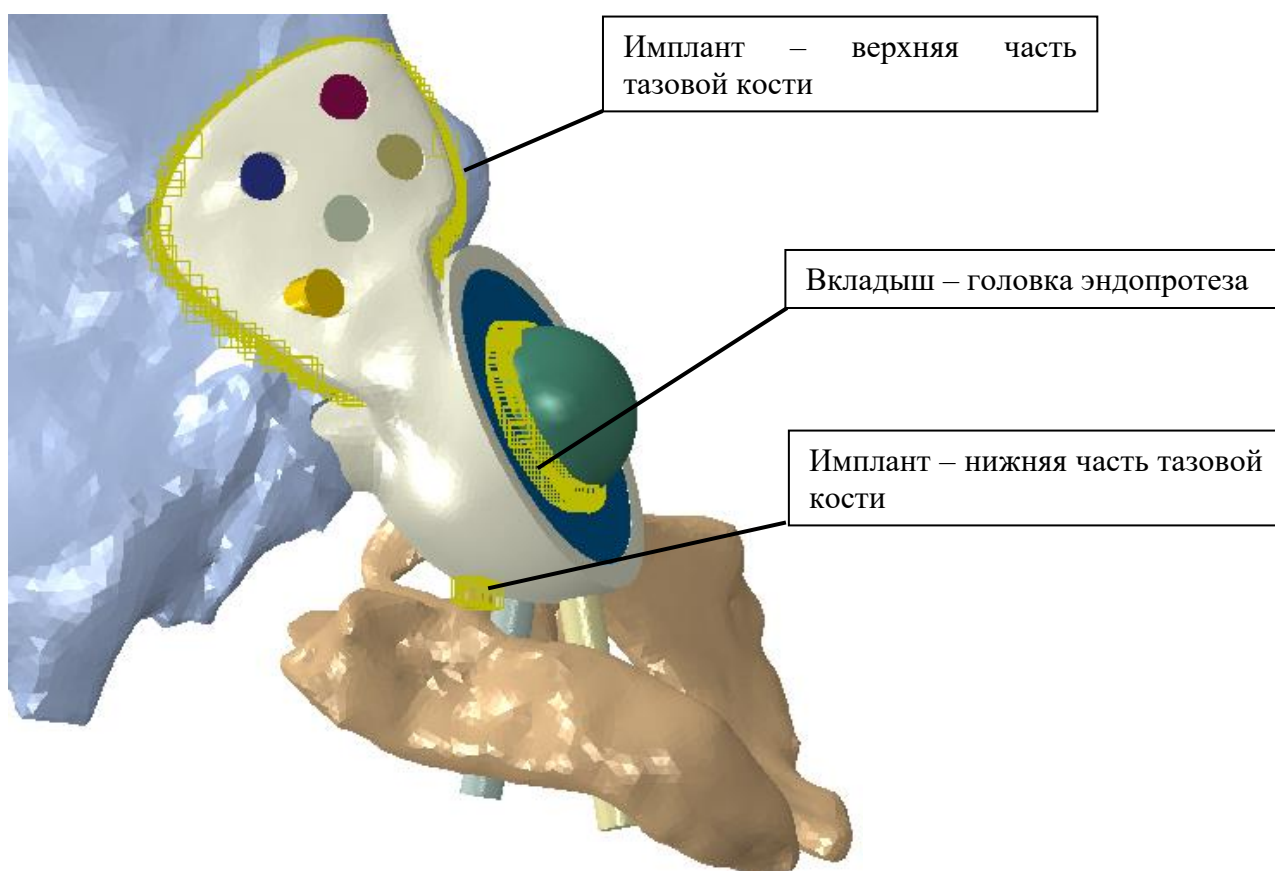


Рисунок 5.1 – Контактные взаимодействия в модели

Таблица 5.1 – Коэффициенты трения для пар материалов

Пара материалов	Коэффициент трения
Титан (Ti6Al4V) – Кортикальная кость	0.2
Титан (Ti6Al4V) – Полиэтилен (СВМПЭ)	0.15

Так как нагрузка прикладывается в 2 этапа, в ABAQUS создается 2 статических шага (рисунок 5.2): Preload и Load. Кинематические граничные условия накладываются на начальном шаге (Initial). На шаге Preload задается винтовая нагрузка, на шаге Load добавляется нагрузка в виде веса пациента.

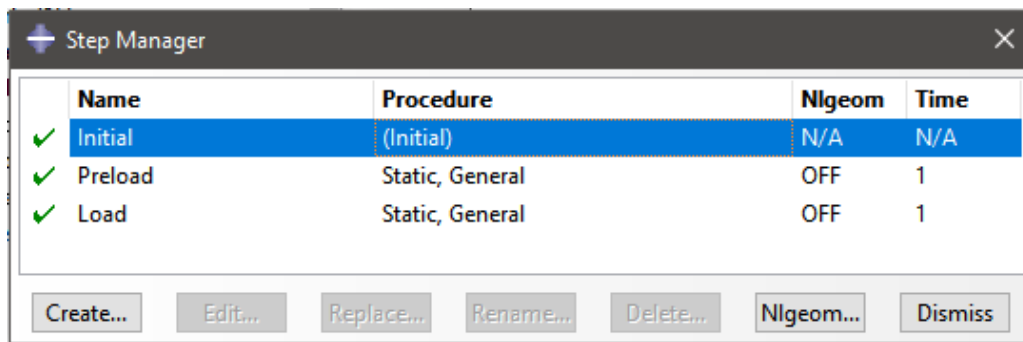


Рисунок 5.2 – менеджер шагов в ABAQUS

Настройки шага Preload: Time period (условное время) – 1, начальное приращение – 0.1, минимальное приращение – 0.01, максимальное – 1. При необходимости программа может автоматически выбирать значение приращения.

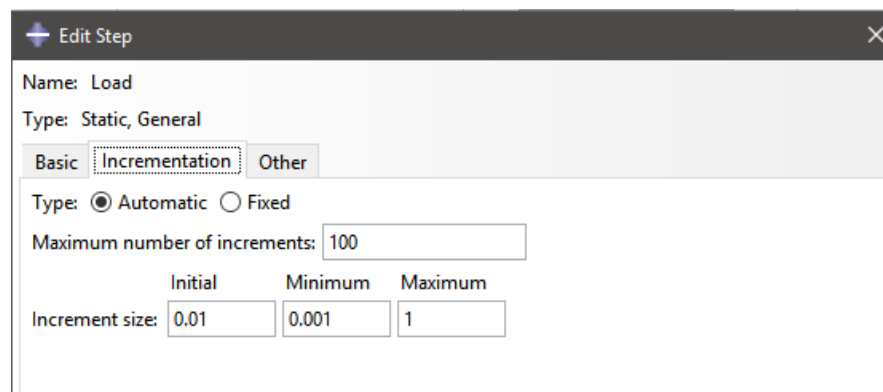


Рисунок 5.3 – Настройки шага Load в ABAQUS

Настройки шага Load (рисунок 5.3): Time period – 1, начальное приращение – 0.01, минимальное приращение – 0.001, максимальное – 1. На данном шаге заданы меньшие значения приращений для обеспечения лучшей сходимости решения.

6. Анализ результатов расчета

На рисунке 6.1 показано общее распределение напряжений в модели при приложении обоих видов нагрузки. Для удобства установим пределы величин отображаемых напряжений. Видно, что достаточно большая часть модели имеет напряжения меньше 1 МПа (черный цвет), что свидетельствует о слабом напряженном состоянии модели. Наибольшие напряжения возникают в винтах в местах взаимодействия с тазовой костью.

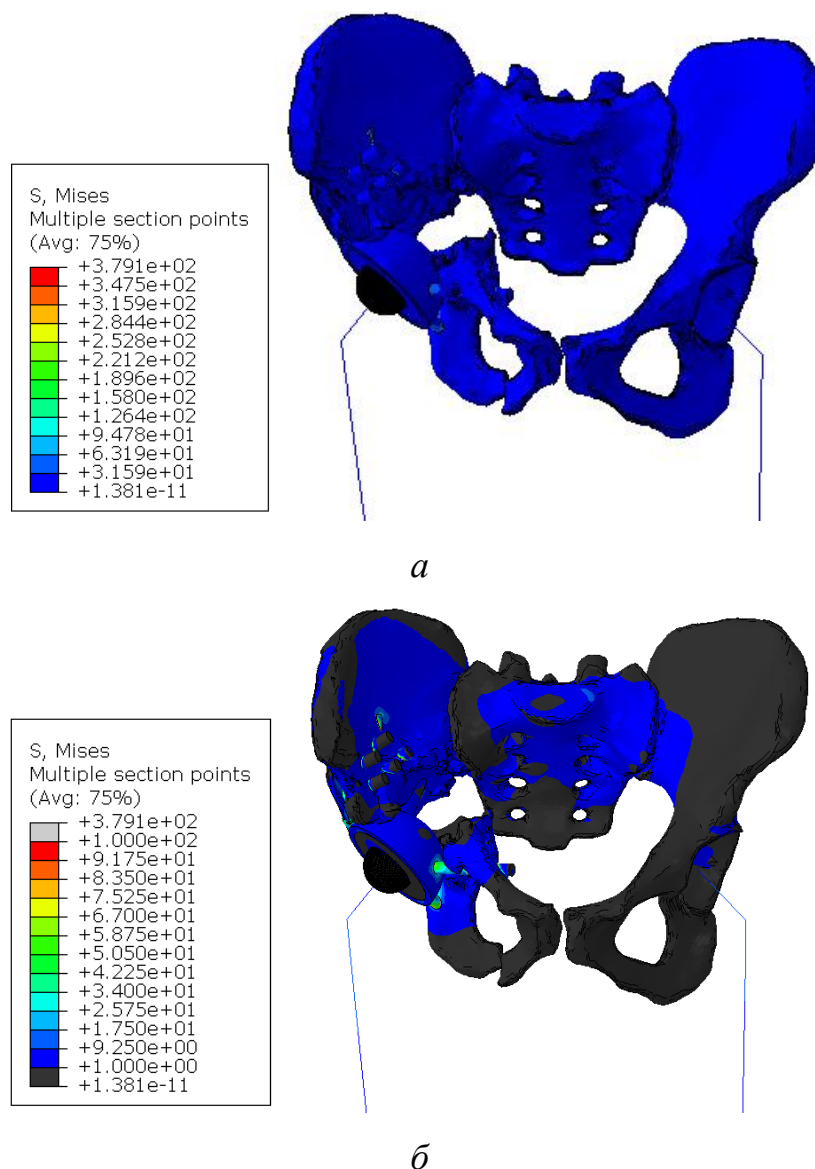


Рисунок 6.1 – Общее распределение напряжений в модели: без ограничения отображаемых напряжений (а), в диапазоне 1 МПа – 100 МПа (б)

6.1. Анализ напряженно-деформированного состояния винтового соединения

В данной главе приведены результаты расчета напряженно-деформированного состояния для компонентов биомеханической системы с учетом только силы затягивания винтов. На рисунке 6.1.1 показано распределение эквивалентных напряжений по Мизесу для винтов. Максимальная величина в 241 МПа значительно ниже предельного значения для данного титанового сплава (800 МПа). Коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{800}{241.4} = 3.31.$$

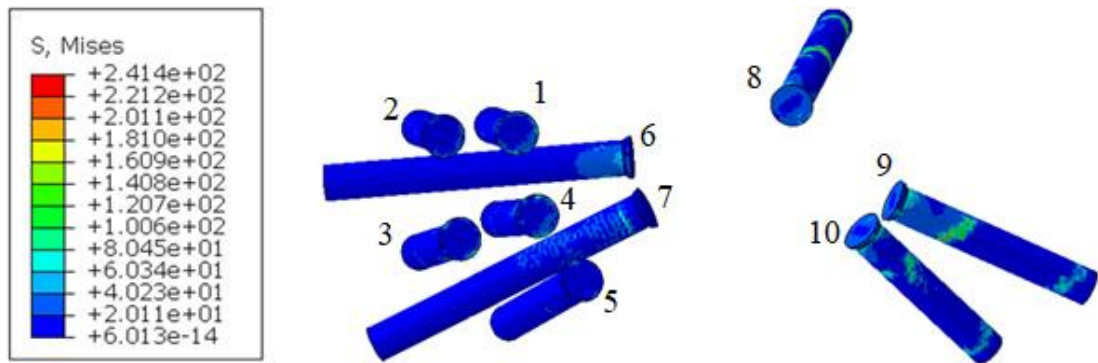


Рисунок 6.1.1 – Интенсивность напряжений для титановых винтов

Аналогичная ситуация и для эндопротеза (рисунок 6.1.2). Основное сосредоточение напряжений наблюдается на кромках отверстий и в месте перехода чашки в опорный фланец (83.8 МПа), как и ожидалось.

Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{800}{83.83} = 9.5$

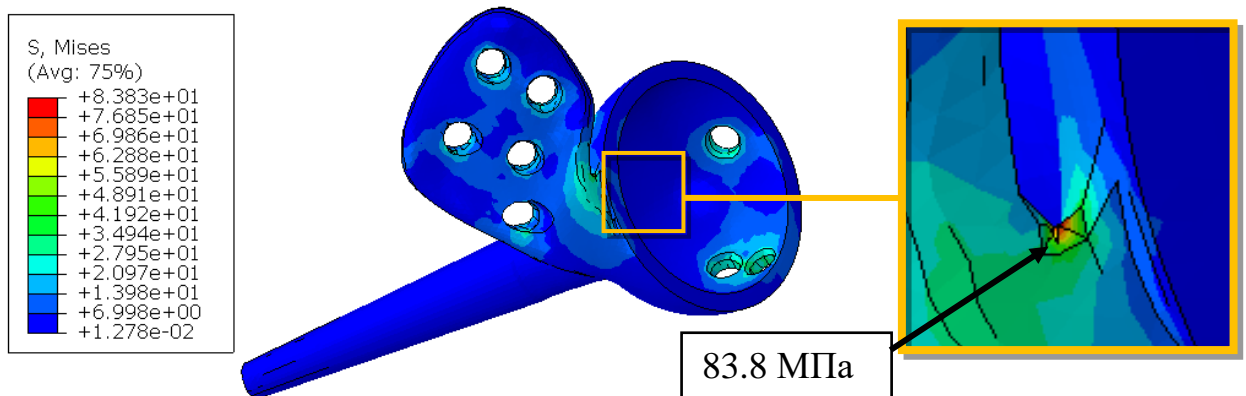


Рисунок 6.1.2 – Интенсивность напряжений для эндопротеза

Большой интерес представляет НДС костей таза. На рисунках 6.1.3 и 6.1.4 представлено распределение напряжений в верхней части разрушенной тазовой кости. Для удобства установим минимальную границу величины отображаемых напряжений. Концентрация напряжений в кортикальном слое наблюдается вблизи отверстий, на острых краях и в месте соединения с крестцом. Максимальные напряжения величиной 18.18 МПа не превышают предельно допустимые значения (160 МПа). Коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{160}{18.18} = 8.8$$

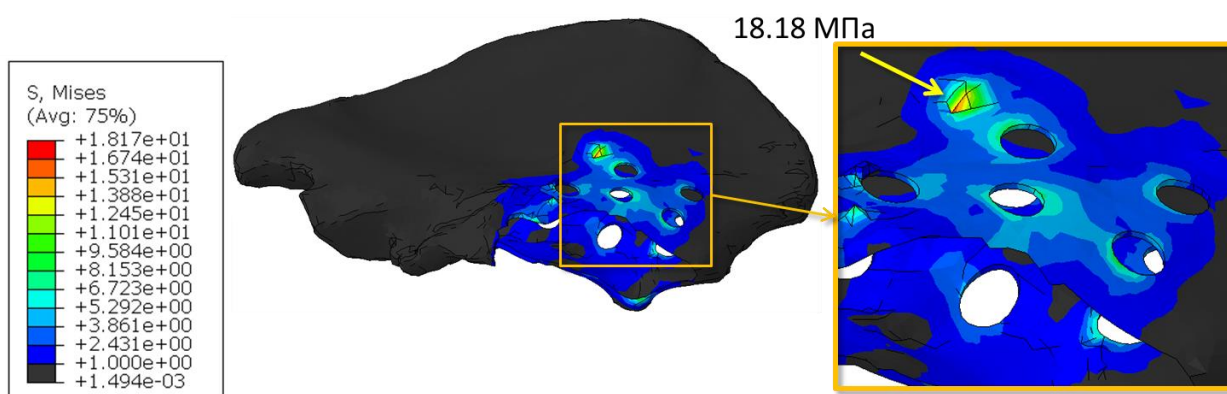


Рисунок 6.1.3 – Интенсивность напряжений для кортикального слоя верхней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 1 МПа

Максимальные напряжения для спонгиозной кости (3.434 МПа) также не превышают предельно допустимые значения (10 МПа). Коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{10}{3.434} = 2.91$$

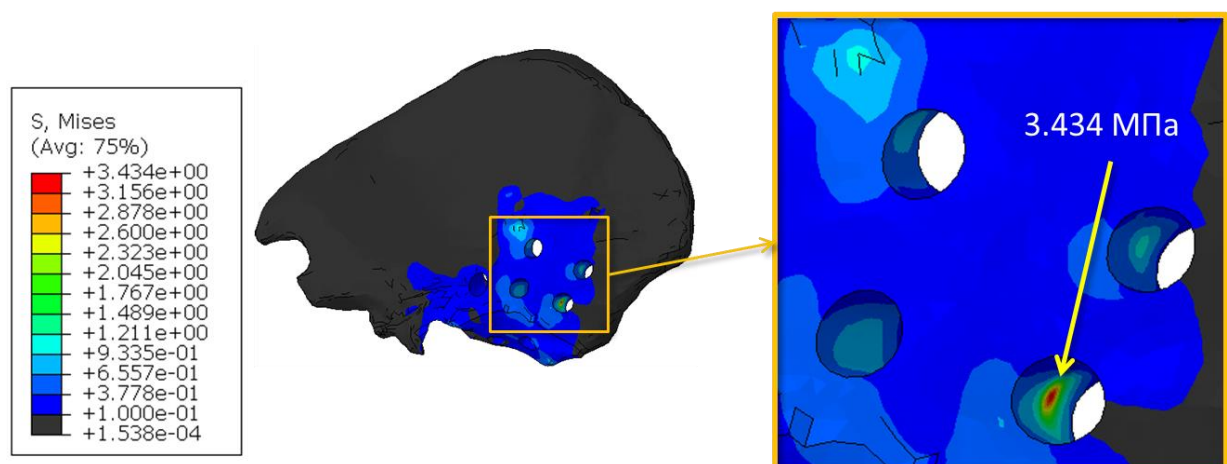


Рисунок 6.1.4 – Интенсивность напряжений для спонгиозного слоя верхней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 0.1 МПа

Максимальные напряжения в кортикальном слое для нижней части разрушенной кости (75.8 МПа) выше, чем для верхней части. Повышенные напряжения в кортикальном слое находятся на краях отверстий и на границе со спонгиозным слоем вблизи зоны резекции. Также отмечены локальные скачки напряжений в узком участке кости (рисунок 6.1.5).

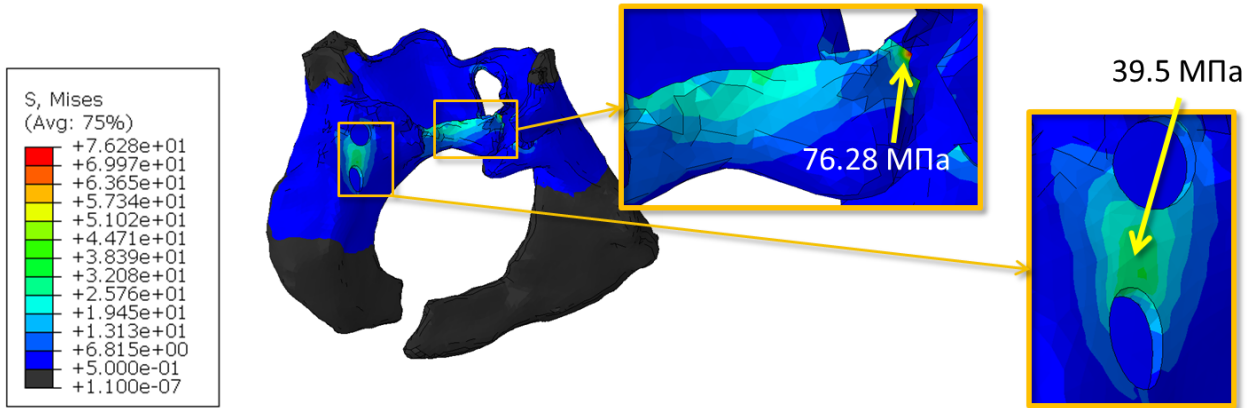


Рисунок 6.1.5 – Интенсивность напряжений для кортикального слоя нижней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 0.5 МПа

В спонгиозной кости также наблюдается концентрация напряжений в узком месте вблизи зоны резекции (рисунок 6.1.6). Максимальная величина (15.78 МПа) превышает предельно допустимые значения в 1.5 раза. Значения могут быть несколько завышенными ввиду не самого лучшего качества конечных элементов в этом месте. Но даже с учетом этого, максимальные значения сравнимы с предельными значениями и поэтому вероятно разрушение костной ткани в этом месте.

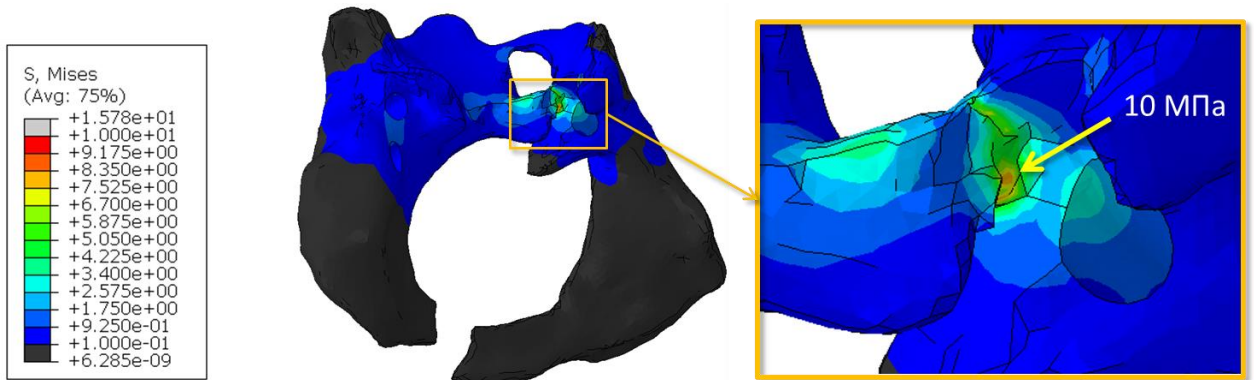


Рисунок 6.1.6 – Интенсивность напряжений для спонгиозного слоя нижней части тазовой кости с установленными минимальным пределом 0.1 МПа и максимальным пределом 10 МПа

6.2. Анализ напряженно-деформированного состояния при двухпорном стоянии

Далее приведены результаты расчета напряженно-деформированного состояния с учетом силы затягивания винтов и веса пациента. На рисунке 6.2.1 показано распределение эквивалентных напряжений по Мизесу для винтов. Максимальная величина в 379 МПа не превышает предельного значения. Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}} = \frac{800}{379} = 2.11$.

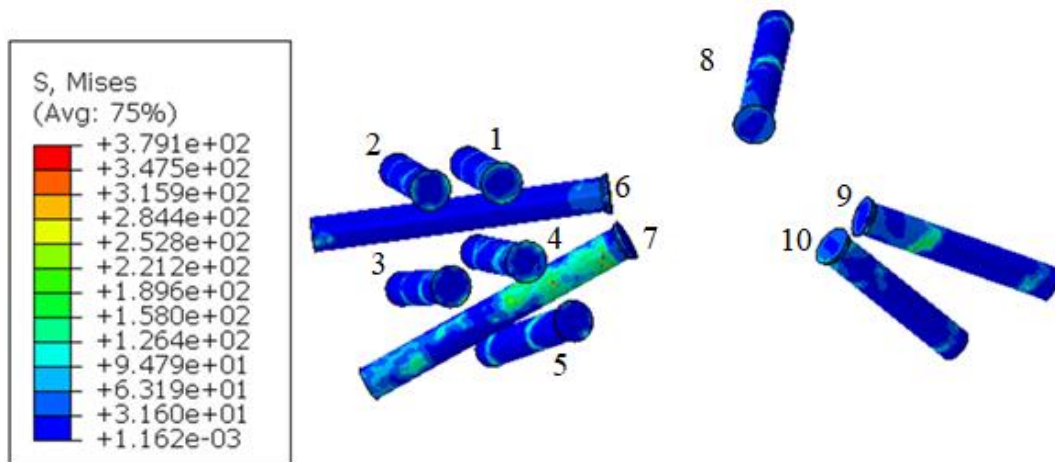


Рисунок 6.2.1 – Интенсивность напряжений для титановых винтов

В эндопротезе основное сосредоточение напряжений (рисунок 6.2.2) также наблюдается на кромках отверстий и в месте перехода чашки в опорный фланец (101 МПа). Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}} = \frac{800}{101} = 7.92$.

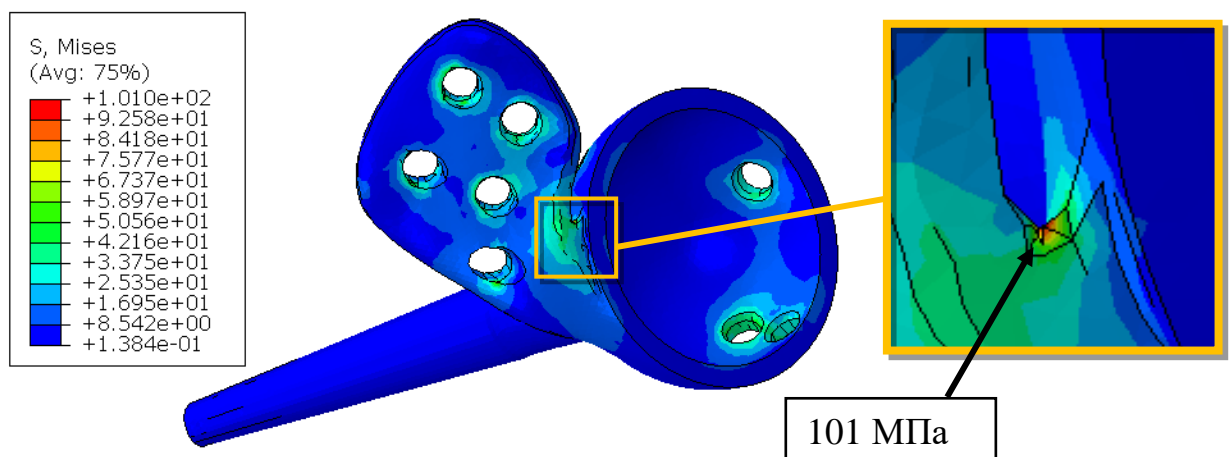


Рисунок 6.2.2 – Интенсивность напряжений для эндопротеза

На рисунке 6.2.3 представлена интенсивность напряжений для полиэтиленового вкладыша. Основное сосредоточение максимальных напряжений наблюдается на кромке в области контактного взаимодействия.

Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}} = \frac{20}{3.88} = 5.15$.

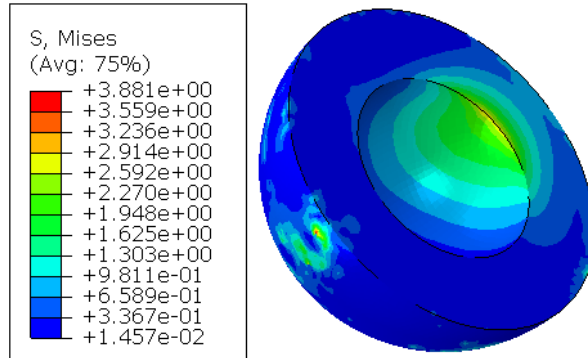


Рисунок 6.2.3 – Интенсивность напряжений для полиэтиленового вкладыша

На рисунке 6.2.4 представлено распределение напряжений в кортикальном слое верхней части разрушенной тазовой кости. Картина распределения на данном шаге схожа с предыдущим шагом. Максимальные напряжения (25.17 МПа) не превышают предельно допустимые значения

(160 МПа). Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}} = \frac{160}{25.17} = 6.36$.

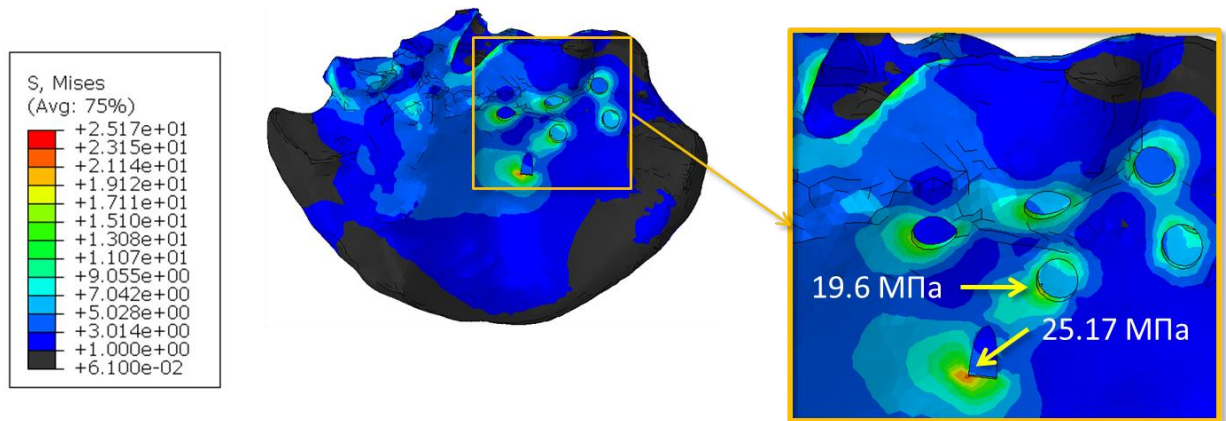


Рисунок 6.2.4 – Интенсивность напряжений для кортикального слоя верхней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 1 МПа

Максимальные напряжения для спонгиозной кости (4.2 МПа) (рисунок 6.2.5) также не превышают предельно допустимые значения (10 МПа).

Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{max}} = \frac{10}{4.2} = 2.38$.

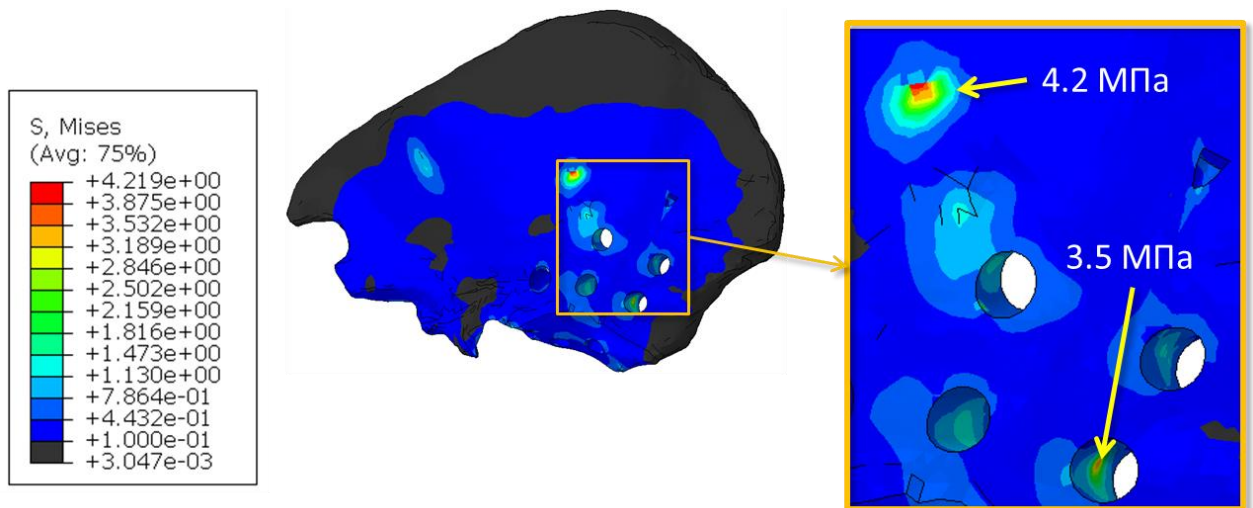


Рисунок 6.2.5 – Интенсивность напряжений для спонгиозного слоя верхней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 1 МПа

Максимальные напряжения в кортикальном слое для нижней части разрушенной кости (95.16 МПа) расположены в узком участке кости. Повышенные напряжения в кортикальном слое также находятся на кромках отверстий и на границе со спонгиозным слоем вблизи зоны резекции

(рисунок 6.2.6). Коэффициент запаса прочности: $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{160}{95.16} = 1.68$.

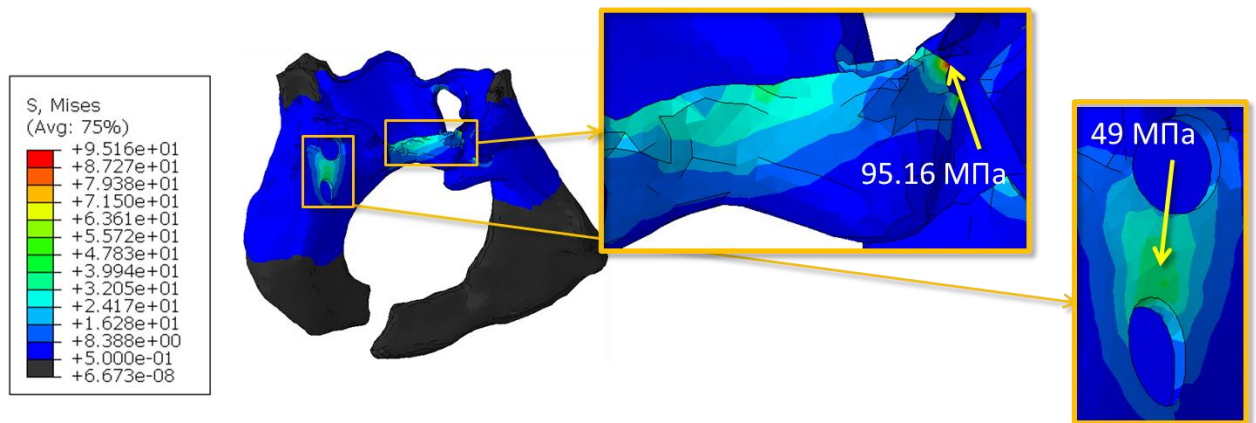


Рисунок 6.2.6 – Интенсивность напряжений для кортикального слоя нижней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 10 МПа

Максимальная величина в спонгиозном слое составляет 19.84 МПа (рисунок 6.2.7). В опасном участке, о котором говорилось выше, во многих элементах эквивалентные напряжения превышают предельно допустимые значения или близки к ним. Условие прочности не выполняется.

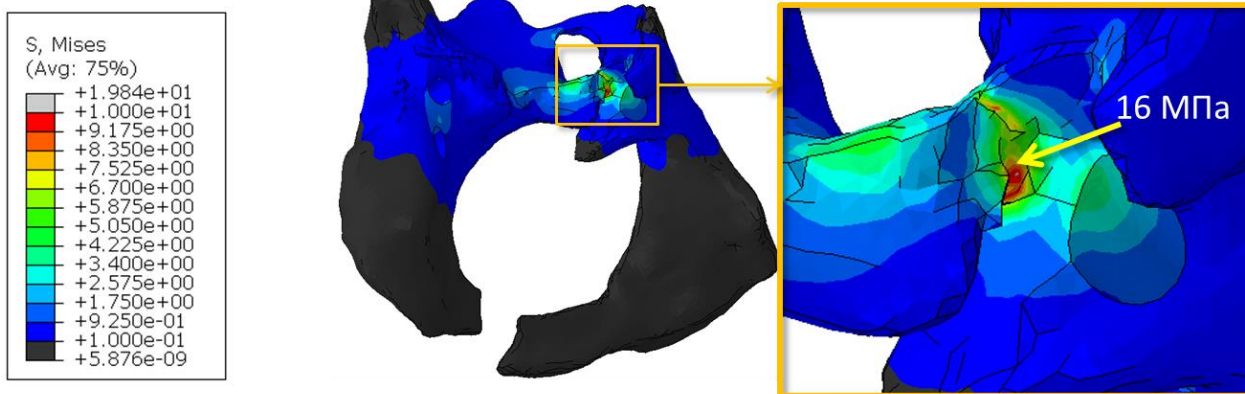


Рисунок 6.2.7 – Интенсивность напряжений для спонгиозного слоя нижней части тазовой кости с установленным минимальным пределом 3 МПа

По результатам анализа составлена таблица 6.2.1 для оценки величин максимальных напряжений на разных этапах расчета. Значения на 2 шаге выросли в среднем на 25%. Наибольший рост (38%) наблюдается в кортикальном слое верхней части тазовой кости. Вероятно, это вызвано острыми кромками в отверстии для 7 винта.

Таблица 6.2.1 – Максимальные напряжения и коэффициенты запаса прочности для компонент модели

Компонент сборки	Шаг	
	1	2
Верхняя часть тазовой кости (кортикальный слой)	$\sigma = 18.18$ МПа $n = 8.8$	$\sigma = 25.17$ МПа $n = 6.36$
Верхняя часть тазовой кости (спонгиозный слой)	$\sigma = 3.434$ МПа $n = 2.91$	$\sigma = 4.2$ МПа $n = 2.38$
Нижняя часть тазовой кости (кортикальный слой)	$\sigma = 76.28$ МПа $n = 2.1$	$\sigma = 95.16$ МПа $n = 1.68$
Нижняя часть тазовой кости (спонгиозный слой)	$\sigma = 15.78$ МПа Условие прочности вероятно не выполняется	$\sigma = 19.84$ МПа Условие прочности не выполняется
Винты	$\sigma = 241.4$ МПа $n = 4.42$	$\sigma = 296.3$ МПа $n = 3.6$
Эндопротез	$\sigma = 83.8$ МПа $n = 12.7$	$\sigma = 102.5$ МПа $n = 10.4$

Таблица 6.2.1 – Максимальные напряжения и коэффициенты запаса прочности для компонент модели

Компонент сборки	Шаг	
	1	2
Вкладыш чашки эндопротеза	$\sigma = 1.88$ МПа $n = 10.6$	$\sigma = 3.88$ МПа $n = 5.2$
Головка эндопротеза	$\sigma = 3.75$ МПа $n = 213.3$	$\sigma = 37.8$ МПа $n = 21.2$

Анализ показал, что для винтов, эндопротеза и верхней части тазовой кости имеется достаточный запас прочности. Установлено, что уже на первом этапе расчета наиболее опасной областью является узкий участок нижней части тазовой кости вблизи 8 винта. Это означает, что при его ввинчивании в кость может начаться разрушение этого участка.

В приложении Б приведены расчетная схема и результаты расчета для другой постановки задачи.

Заключение

Проведена теоретическая оценка прочности индивидуального эндопротеза пациента, проходящего лечение в РНИИТО им. Р.Р. Вредена.

В рамках проекта проведены следующие основные этапы: создание конечно-элементной модели системы «скелет - эндопротез тазобедренного сустава», проверка сборки с помощью модального анализа и исследование напряженно-деформированного состояния в результате статического прочностного расчета при затяжке винтов и в случае двухопорного стояния. В процессе работы разработаны и освоены методы цифрового проектирования с использованием современного программного обеспечения.

Выявлено, что в спонгиозной ткани нижней части тазовой кости уже на этапе затяжки винтов может начаться разрушение узкого участка кости вблизи 8 винта. В качестве рекомендаций для снижения НДС предлагается проведение следующих действий:

- оптимизация расположения и количества используемых винтов с целью создания более равномерного распределения напряжений;
- уменьшение диаметра 8 винта для сохранения объема костной ткани;
- уменьшение силы затяжки 8 винта;
- уменьшение длины 7 винта, так как он выходит за пределы кости и создает концентратор напряжений.

Результаты, представляющие разработку математических моделей и оценку напряженного состояния системы «кость-эндопротез», внедрены в медицинскую практику ФГБУ "РНИИТО им. Р.Р. Вредена" Минздрава России. Работа выполнена в содружестве с Центром НТИ «Новые производственные технологии» на базе Института передовых производственных технологий СПбПУ.

Список использованных источников

1. Барашков В.Н., Смолина И.Ю., Путеева Л.Е., Песцов Д.Н. Основы теории упругости: учебное пособие – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 184 с.
2. Боровков А.И., Маслов Л.Б., Жмайло М.А., Зелинский И.А., Войнов И.Б., Керестень И.А., Мамчиц Д.В., Тихилов Р.М., Коваленко А.Н., Билык С.С., Денисов А.О. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния эндопротеза тазобедренного сустава при двухопорном стоянии // Рос. журн. биомех. – 2018. – Т. 22, № 4. – С. 437–458.
3. Ежов, И.Ю. Государственно-частное партнерство как структура для совершенствования оказания высокотехнологической медицинской помощи / И.Ю. Ежов // Мед. альманах.– 2010. – № 2 (11). – С. 15–17
4. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975 – 542 с.
5. Капанджи А. И. Нижняя конечность. Функциональная анатомия. Том 2; Эксмо - Москва, 2010. - 352 с.
6. Кудяшев А.Л., Шаповалов В.М., Аверкиев В.А., Надулич К.А., Теремшонок А.В., Резванцев М.В., Нагорный Е.Б., Метленко П.А., Кузовинский П.А., Шмелева Е.С. Рентгенологическая оценка сагиттальных позвоночно-тазовых взаимоотношений у больных с деформирующим артрозом тазобедренных суставов // Гений Ортопедии, № 3, 2013. – С. 27-32.
7. Кокорин А. М. Численные методы решения задач строительного профиля в среде MathCad: учебное пособие по курсу «Информатика» / А. М. Кокорин; СПб. гос. архит.-строит. ун-т. – СПб., 2007. – 38 с.
8. Короткин А.А., Захарова Д.В., Новикова Я.С., Горбатов Р.О., Ковалдов К.А., Эль Мудни Ю.М. Опыт применения индивидуальных трехфланцевых вертлужных компонентов при ревизионного эндопротезировании тазобедренного сустава. // Травматология и ортопедия России. 2017; 23(4):101-111.

9. Тихилов Р.М., Шубняков И.И., Мазуренко А.В., Митряйкин В.И., Саченков О.А., Кузин А.К., Денисов А.О., Плиев Д.Г., Бояров А.А., Коваленко А.Н. Экспериментальное обоснование установки ацетабулярного компонента с недопокрытием при эндопротезировании пациентов с тяжелой степенью дисплазии // Травматология и ортопедия России – 2013 – № 4. – С. 42-51.
10. Чёрный А.Ж., Кувакин В.И., Воронцова Т.Н., Вебер Е.В., Курчиков А.Г. Система учёта пациентов, нуждающихся в эндопротезировании тазобедренного и коленного суставов // Вестник Российской Военно-медицинской академии. – 2015. - 4(52). – С. 176-182
11. Устинов, К.Б. Об определении эффективных упругих характеристик двухфазных сред. Случай изолированных неоднородностей в форме эллипсоидов вращения// Успехи механики, вып. № 2, 2002. С. 126–152.
12. Karpiński, Robert & Jaworski, Łukasz & Szabelski, Jakub. The Design And Structural Analysis Of The Endoprosthesis Of The Hip Joint. – 2016. – Applied Computer Science. 12. P. 87-95.
13. Kluess D., Wieding J., Souffrant R., Mittelmeier W., Bader R. Finite Element Analysis in Orthopaedic Biomechanics // Finite Element Analysis. – 2010. – P. 151–170.
14. D. Wirtz, N. Schiffers, T. Pandorf, K. Randermacher, D. Weichert, R. Forst. Critical Evaluation of Known Material Properties to Realize Anisotropic FE-Simulation of the Proximal Femur // Journal of Biomechanics. – 2000. – Vol. 33. – P. 1325–1330.
15. F. Metin, M. Cengil, Short-term creep and recovery behavior of medical grade ultra-high molecular weight polyethylene (UHMWPE), Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering 78/2 (2016) 65-70.
16. Zimmer Biomet 6.5 / 8.0 mm Cannulated Screw System Surgical Technique [Электронный ресурс], – <https://www.zimmerbiomet.com/content/dam/zimmerbiomet/medical-professionals/000-surgical-techniques/foot-and-ankle/biomet-6-5-8-mm-cannulated-screw-system-surgical-technique.pdf>

Приложение А

Алгоритм расчета эффективных упругих характеристик композиционного материала в среде Mathcad

Предварительные расчеты

Свойства матрицы (титановый сплав)

$$E_0 := 110 \cdot 10^9 \quad \text{Па} \quad \nu_0 := 0.3$$

Свойства включений

$$E^* := 1000000 \quad \text{Па} \quad \nu^* := 0.3$$

Расчет упругих констант титанового сплава

$$\mu_0 := \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)} = 4.231 \times 10^{10} \quad \lambda_0 := \frac{\nu_0 \cdot E_0}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)} = 6.346 \times 10^{10}$$

$$k_0 := \lambda_0 + \frac{2}{3} \mu_0 = 9.167 \times 10^{10}$$

Расчет упругих констант титанового сплава

$$\mu^* := \frac{E^*}{2(1 + \nu^*)} = 3.846 \times 10^5 \quad \lambda^* := \frac{\nu^* \cdot E^*}{(1 + \nu^*)(1 - 2\nu^*)} = 5.769 \times 10^5$$

$$k^* := \lambda^* + \frac{2}{3} \mu^* = 8.333 \times 10^5$$

Величина пористости $\Omega := 0.78$

Основные расчеты

Свойства включений

$$k^* := 8.333 \times 10^5 \quad (\text{Па}) \quad \mu^* := 3.846 \times 10^5 \quad (\text{Па})$$

Начальные условия (свойства матрицы)

$$k_0 := 9.167 \times 10^{10} \quad (\text{Па}) \quad \mu_0 := 4.231 \times 10^{10} \quad (\text{Па}) \quad \Omega_0 := 0$$

Параметры шага

$$h := 0.001 \quad a := 0 \quad b := 1 \quad n := \frac{b - a}{h} = 1 \times 10^3$$

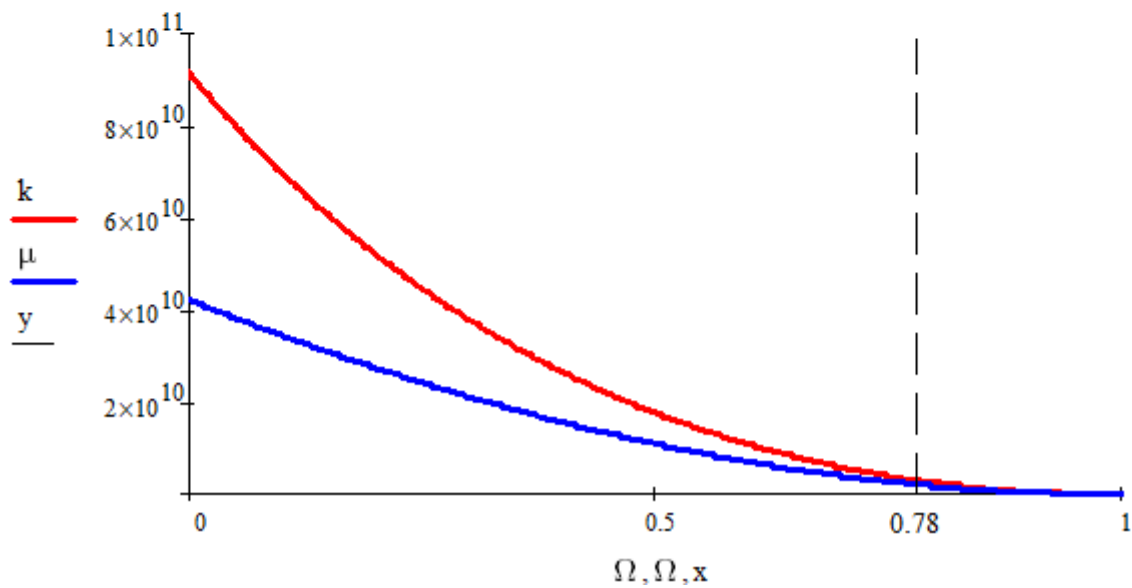
$$i := 0..n - 1$$

Решение

$$f(k, \mu, \Omega) := \frac{(k^* - k)(3k + 4\mu)}{(3 \cdot k^* + 4\mu)(1 - \Omega)}$$

$$g(k, \mu, \Omega) := \frac{5(\mu^* - \mu)(3k + 4\mu)\mu}{4\mu \cdot (3 \cdot \mu^* + 2\mu) + 3k(2 \cdot \mu^* + 3\mu)} \cdot \frac{1}{1 - \Omega}$$

$$\begin{pmatrix} \Omega_{i+1} \\ k_{i+1} \\ \mu_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Omega_i + h \\ h \cdot f(k_i, \mu_i, \Omega_i) + k_i \\ h \cdot g(k_i, \mu_i, \Omega_i) + \mu_i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x := \begin{pmatrix} 0.78 \\ 0.78 \end{pmatrix} \\ y := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \cdot 10^{10} \end{pmatrix} \end{matrix}$$



$$k_{780} = 3.09 \times 10^9 \quad \mu_{780} = 2.168 \times 10^9$$

Требуемые упругие характеристики

$$E := \frac{9 \cdot k_{780} \cdot \mu_{780}}{3 \cdot k_{780} + \mu_{780}} = 5.271 \times 10^9$$

$$\nu := \frac{E}{2 \cdot \mu_{780}} - 1 = 0.216$$

Приложение Б

Результаты расчета в другой постановке задачи

Кинематические граничные условия:

- в коленных суставах (т.е. на свободном конце модели ноги) запрещены все перемещения и углы поворотов, кроме вращения вокруг оси X.
- запрет на перемещения крестца вдоль оси Y.

Силовые граничные условия:

- сила затяжки винтов 120 Н;
- вес пациента 880 Н, приложенный к верхнему крестцовому позвонку и направленный вертикально вниз.

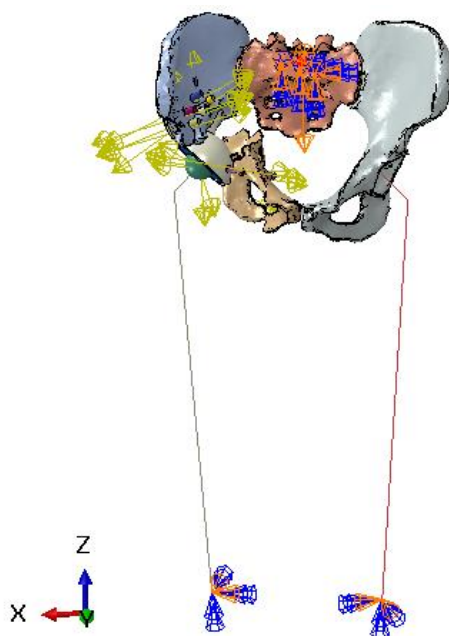


Рисунок 1 – Расчетная схема

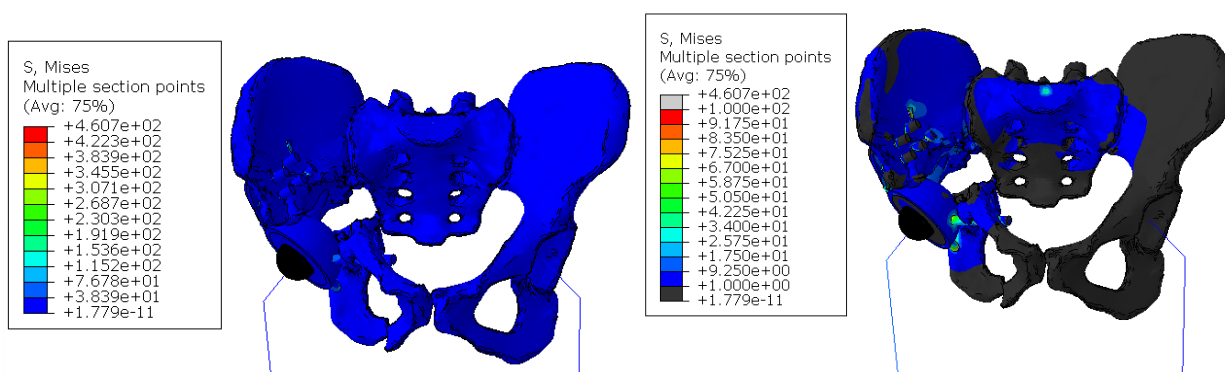


Рисунок 2 – Общее распределение напряжений (МПа)

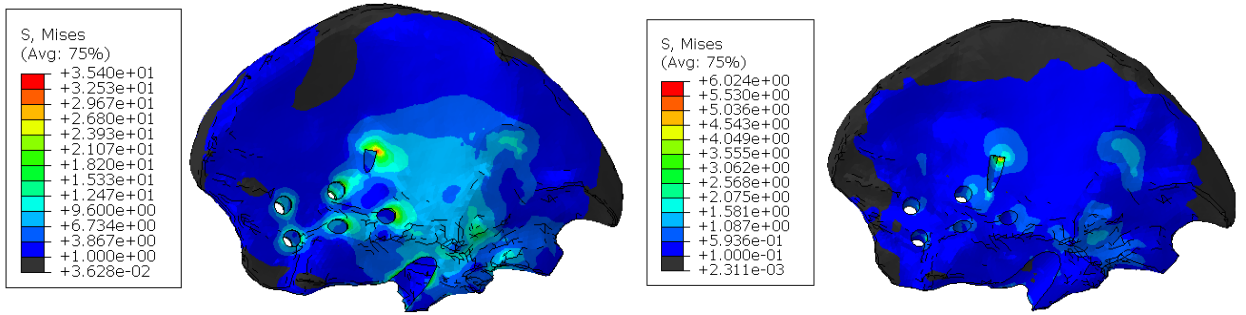


Рисунок 3 – Интенсивность напряжений для кортикального (слева) и спонгиозного (справа) слоев верхней части тазовой кости

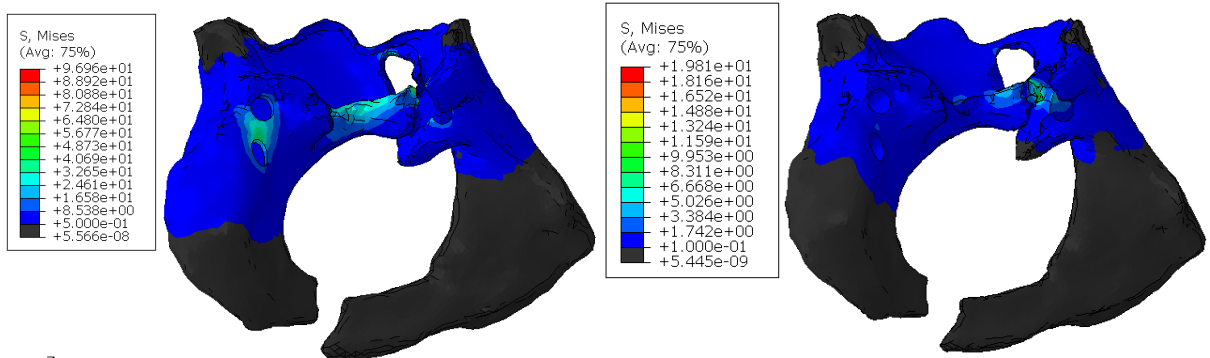


Рисунок 4 – Интенсивность напряжений для кортикального (слева) и спонгиозного (справа) слоев нижней части тазовой кости

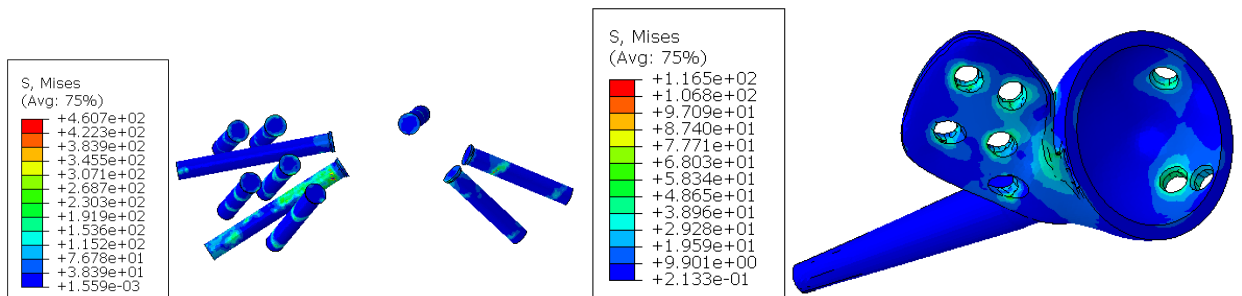


Рисунок 5 – Интенсивность напряжений в винтах и эндопротезе