

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»
Институт точных наук и информационных технологий
Кафедра математического моделирования и кибернетики

НАПОРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Выпускная квалификационная работа по направлению подготовки
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Выполнил
студент 149 группы _____ Н.С. Сизов

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент _____ Н.А. Беляева

Заведующий кафедрой ММиК
к.ф.-м.н., доцент _____ Ю.Н. Беляев

Сыктывкар 2020

Содержание

Введение	3
Основные понятия	4
1. Модель напорного течения жидкости	4
1.1. Уравнение движения напорного течения.	4
2. Безразмерная система стационарного течения жидкости	8
2.1. Решение в явном виде.	8
2.2. Итерационный метод Ньютона на основе метода прогонки.	10
3. Результаты численных экспериментов для стационарной задачи	12
4. Безразмерная система нестационарного течения жидкости	14
4.1. Метод прогонки.	14
5. Результаты численных экспериментов для нестационарной задачи	19
Выводы и сравнение результатов численных экспериментов	21
Проведение численного эксперимента при качественном изменении параметров для нестационарной задачи	21
Сравнение результатов численных экспериментов	21
Заключение	22
Список литературы	23
Приложение 1. Проведение численного эксперимента при варьировании параметров	24
Приложение 1. Сравнение графиков для нестационарного и стационарного течения	28
Приложение 1. Программа построения графика степени структурных превращений и скорости стационарного напорного течения в Visual Studio на языках C++ и C Sharp	30
Приложение 1. Программа построения графика степени структурных превращений и скорости нестационарного напорного течения в Visual Studio на языках C++ и C Sharp	38

Аннотация

Построена математическая модель, описывающая напорное течение структурированной жидкости с переменной вязкостью между двумя плоскостями. Разработан алгоритм и по нему составлена программа численного решения. Численное решение задач стационарного и нестационарного течения получены на основе итерационного метода Ньютона и метода прогонки. Приводятся графики и результаты экспериментов.

Введение

Рассматривается напорное течение структурированной несжимаемой жидкости [1;2]. Система определяющих соотношений, состоит из уравнения движения Навье-Стокса, диффузионно-кинетического и соответствующих начальных и граничных условий.

Цель работы – построение математической модели, описывающей напорное течение структурированной жидкости с переменной вязкостью между двумя плоскостями.

Задачи исследования:

- получить систему дифференциальных уравнений в частных производных для описания течения;
- обезразмерить полученную систему;
- разработать алгоритм численного решения на основе метода прогонки и итерационного метода Ньютона на основе метода прогонки;
- провести численный анализ безразмерной системы стационарного и нестационарного течения жидкости при варьировании параметров;
- проанализировать полученные результаты на основе графиков

Основные понятия

Неньютоновской жидкостью называют жидкость, при течении которой её вязкость зависит от $grad\vec{V}$ (градиента скорости). Обычно такие жидкости сильно неоднородны и состоят из крупных молекул, образующих сложные пространственные структуры.

Вязкость μ определяется, как способность оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. Чем быстрее происходит внешнее воздействие на взвешенные в жидкости макромолекулы (молекула с высокой молекулярной массой) связующего вещества, тем выше вязкость жидкости.

Неньютоновские жидкости образуют широкий класс разнообразных материалов, свойствами которых являются текучесть и отклонение от закона вязкости Ньютона. Глинистые растворы, масляные краски, нефтепродукты, многие промышленные суспензии, плазма крови дают примеры неньютоновских жидкостей. Простейшим наглядным бытовым примером может являться смесь крахмала с небольшим количеством воды. Вязкость таких жидкостей не является величиной зависящей от температуры, а становится зависимой от деформации, движения, времени и других факторов. Эти неньютоновские жидкости образуют структурированные текущие системы.

Структурные превращения в таких системах отвечают за процессы самоорганизации - самопроизвольное появление и развитие некоторой структуры в первоначально однородной среде. К таким структурам относятся автоколебания, автоволны, диссипативные структуры и т.д. Диссипативная структура - это устойчивое состояние, возникающее в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, которая поступает извне.

Неньютоновская жидкость - это жидкость с $\mu \neq const$.

1. Модель напорного течения жидкости

1.1. Уравнение движения напорного течения. Пусть структурированная несжимаемая жидкость заполняет полосу между плоскостями $\eta = h$ и $\eta = -h$. Предполагается, что течение происходит в направлении оси ξ под действием давления. Обозначим через $\vec{V} = (V_\xi, V_\eta, V_\zeta)$ - вектор скорости жидкости в произвольной точке полосы в момент времени t , причем

$$\vec{V} = (V(\eta, t), 0, 0); V_\xi = V(\eta, t) = V; V_\eta = V_\zeta = 0. \quad (1.1)$$

В этом случае уравнение неразрывности выполняется:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \left(\frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\zeta}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Условие несжимаемости жидкости:

$$\rho = \text{const}. \quad (1.4)$$

Уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} \right] = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{V} + 2(\operatorname{grad} \mu, \nabla) \vec{V} + \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \vec{V} + \rho \vec{F}. \quad (1.5)$$

Массовые силы отсутствуют:

$$\vec{F} = 0. \quad (1.6)$$

Выпишем слагаемые уравнения (1.5) в декартовой системе координат при отсутствии внешних сил в рассматриваемом случае движения жидкости:

Проекция скорости запишется как

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}; 0; 0 \right),$$

т.к. течение жидкости происходит в направлении оси ξ , остальные координаты будут равняться нулю.

Тогда скалярное умножение скорости на оператор Гамильтона даст

$$(\vec{V}, \nabla) \vec{V} = \left(V(\eta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} + 0 \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) V(\eta, t) = V(\eta, t) \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \xi} = (0, 0, 0), \quad (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = 0;$$

Распишем градиент вязкости

$$\text{grad } \mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}; \frac{\partial \mu}{\partial \eta}; \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \right) = \left(0; \frac{\partial \mu}{\partial \eta}; 0 \right);$$

$$\mu \Delta \vec{V} = \mu (\Delta V_\xi, \Delta V_\eta, \Delta V_\zeta) = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}; 0; 0 \right);$$

$$\begin{aligned} (\text{grad } \mu, \Delta) V(\eta, t) &= \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) V(\eta, t) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \zeta} \right) = \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta}; \quad 2(\text{grad } \mu, \Delta) \vec{V} = \left(2 \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta}, 0, 0 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ V(\eta, t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} (0 - 0) - \vec{j} \left(0 - \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \zeta} \right) + \vec{k} \left(0 - \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} \right) = \\ &= \left(0; \frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \zeta}; -\frac{\partial V(\eta, t)}{\partial \eta} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \mu \times \text{rot } \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \xi} & \frac{\partial \mu}{\partial \eta} & \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \\ 0 & \frac{\partial V}{\partial \zeta} & -\frac{\partial V}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) - \vec{j} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \eta} - 0 \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \zeta} - 0 \right) = \\ &= \vec{i} \left(-\frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} - 0 \right) - \vec{j} (0 - 0) + \vec{k} (0 - 0) = \left(-\frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta}; 0; 0 \right). \end{aligned}$$

С учетом преобразований описанных выше, получаем уравнение движения в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu(a) \frac{\partial \vec{V}}{\partial \eta} \right) - \text{grad } p. \quad (1.8)$$

Здесь ρ - плотность жидкости, p - давление, $\mu = \mu(a)$ - вязкость жидкости, определяемая уравнением

$$\mu^{-1}(a) = \mu_1^{-1} a + \mu_2^{-1} (1 - a)$$

и зависящая от степени структурных превращений $a = a(\eta, t)$.

Перейдем в уравнении (1.8) к проекциям на оси координат:

$$\xi : \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\mu}{\eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad (1.9)$$

$$\eta : 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \Rightarrow p \neq p(\eta) \quad (1.10)$$

$$\zeta : 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Rightarrow p \neq p(\zeta) \quad (1.11)$$

Следовательно, из уравнений (1.10),(1.11) можно сделать вывод, что давление зависит только от координаты ξ , то есть $p = p(\xi)$, и в силу уравнения (1.9)

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} \equiv b = const.$$

Получается, что

$$-\text{grad } p = (b, 0, 0)$$

Тогда проекция уравнения Навье-Стокса на ось ξ с учетом (1.9) имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho} b + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial \eta} \right). \quad (1.12)$$

Запишем соответствующую безразмерную систему для уравнения движения (1.12) и диффузионно-кинетическое уравнение

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } a = D \Delta a + \Phi(a, \gamma). \quad (1.13)$$

Диффузионно-кинетическое уравнение (1.13) в рассматриваемом случае примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} + \Phi(a, \gamma). \quad (1.14)$$

где D - коэффициент диффузии, Φ - суммарная скорость превращения, определяемая соотношением

$$\Phi(a, \gamma) = k_2 \left[1 - a - a \frac{k_0}{k_2} \exp(p_0 \mu(a) + q_0 \gamma^2) \right]. \quad (1.15)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

– скорость деформации, k_0, k_2, p_0, q_0 – параметры жидкости. Получим систему дифференциальных уравнений для определения скорости течения и степени структурных превращений

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu(a) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + b, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} + \Phi(a, \gamma), \end{aligned} \quad (1.16)$$

с начальными:

$$V|_{t=0} = 0; \quad a|_{t=0} = a_0; \quad (1.17)$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial a}{\partial \eta} \right|_{\eta=h} = 0; \quad V \Big|_{\eta=h} = 0; \quad (1.18)$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0. \quad (1.19)$$

Перейдем от системы (1.16) – (1.19) к безразмерной системе уравнений. Для этого сделаем замену:

$$u = \frac{V\mu_2}{bh^2}, \quad \tau = t \frac{\mu_2}{\rho h^2}, \quad x = \frac{\eta}{h}, \quad p_1 = p_0 bh, \quad q_1 = q_0 \frac{b^2 h^2}{\mu_2^2}, \quad \beta = \frac{D\rho}{\mu_2}, \quad \kappa = \frac{k_2 \rho h^2}{\mu_2}, \quad \chi = \frac{k_0}{k_2}. \quad (1.20)$$

Здесь x – безразмерная пространственная координата, τ – безразмерное время. Обозначим

$$\nu(a) = \frac{\mu(a)}{\mu_2} = \frac{1}{1 + \lambda a}. \quad (1.21)$$

Получим систему безразмерных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\lambda \nu(a)^2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu(a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} &= \beta \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \kappa \left[1 - a - a \chi \exp \left(p_1 \nu(a) \frac{\partial u}{\partial x} + q_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (1.22)$$

с начальными

$$u|_{\tau=0} = 0; \quad a|_{\tau=0} = a_0; \quad (1.23)$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. u \right|_{x=1} = 0; \quad (1.24)$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (1.25)$$

2. Безразмерная система стационарного течения жидкости

2.1. Решение в явном виде. Рассмотрим частный случай нестационарного течения. Система (1.22) и соответствующие граничные условия (1.24) – (1.25) для скорости и степени структурных превращений в случае стационарного режима течения запишутся в виде

$$\nu(a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \nu(a)^2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 1 = 0,$$

$$\beta \frac{d^2 a}{dx^2} + \kappa \left[1 - a - a \chi \exp \left(p_1 \nu(a) \frac{du}{dx} + q_1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) \right] = 0, \quad (2.1)$$

$$u(1) = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (2.2)$$

Решим первое уравнение системы (2.1). Для этого перенесем единицу в правую сторону и разделим все уравнение на $\nu(a)$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda \nu(a)^2 \frac{da}{dx} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\nu(a)}$$

Обозначим

$$\lambda \nu(a)^2 \frac{da}{dx} = p(x),$$

тогда

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - p(x) \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\nu(a)}$$

Произведем замену

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = y,$$

получаем

$$y' - p(x)y = -\frac{1}{\nu(a)} \quad (2.3)$$

а) Решим соответствующее однородное уравнение

$$y' - p(x)y = 0$$

$$\int_0^x \frac{dy}{y} = \int_0^x p(x) dx$$

$$\ln|y| = \int_0^x p(x) dx + c$$

Получаем

$$y_0 = c e^{\int_0^x p(x) dx}$$

б) Применим метод вариации постоянной $c = c(x)$ для решения уравнения (2.3), где $\nu(a)$ в соответствии с обозначением (1.21)

$$y = c(x) e^{\int_0^x p(s) ds} \quad (2.4)$$

$$y' = c(x)' e^{\int_0^x p(s) ds} + c(x) e^{\int_0^x p(s) ds} p(x) \quad (2.5)$$

Подставим (2.4), (2.5) в уравнение (2.3)

$$c(x)' e^{\int_0^x p(s) ds} + c(x) p(x) e^{\int_0^x p(s) ds} - c(x) p(x) e^{\int_0^x p(s) ds} = -\frac{1}{\nu(a)}$$

$$c(x)' e^{\int_0^x p(s) ds} = -\frac{1}{\nu(a)}$$

Разделяем переменные и находим $c(x)$

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dx} &= -\frac{1}{\nu(a)} e^{-\int_0^x p(s) ds} \\ dc &= -(1 + \lambda a) e^{-\int_0^x p(s) ds} dx \\ \Rightarrow c(x) &= -\int_0^x (1 + \lambda a) e^{-\int_0^x p(s) ds} dx + c, \end{aligned}$$

где $c = const$.

Найдем константу c

$$\begin{aligned} \int_0^x p(s) ds &= \int_0^x \lambda \nu(a)^2 \frac{da}{ds} ds = \int_0^x \frac{\lambda}{1 + \lambda a} da = \ln|1 + \lambda a| \Big|_0^x = \\ &= \ln|1 + \lambda a(x)| - \ln|1 + \lambda a(0)| = \ln \left| \frac{1 + \lambda a(x)}{1 + \lambda a(0)} \right| \end{aligned}$$

Подставляем вместо интеграла получившееся выражение

$$\begin{aligned} c(x) &= -\int_0^x (1 + \lambda a) \frac{1 + \lambda a(x)}{1 + \lambda a(0)} dx + c \\ \Rightarrow c(x) &= -(1 + \lambda a(0))x + c. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} y &= (c - (1 + \lambda a(0))x) e^{\ln \left| \frac{1 + \lambda a(x)}{1 + \lambda a(0)} \right|} \\ \Rightarrow y &= (c - (1 + \lambda a(0))x) \frac{1 + \lambda a(x)}{1 + \lambda a(0)}. \end{aligned}$$

Вернемся к замене

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= y, \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} &= (c - (1 + \lambda a(0))x) \frac{1 + \lambda a(x)}{1 + \lambda a(0)}, \end{aligned}$$

из условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

следует, что $c=0$;

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -x(1 + \lambda a(x)) \quad (2.6)$$

$$u(x) = -\int_1^x x(1 + \lambda a(x)) dx \Leftrightarrow u(x) = \int_x^1 x(1 + \lambda a(x)) dx$$

Получаем уравнение для скорости

$$u(x) = \int_x^1 s(1 + \lambda a(s)) ds,$$

где $x \in [0..1]$.

Второе уравнение системы (2.1) для вычисления степени структурных превращений с учетом (2.6) запишется как

$$\beta \frac{d^2 a}{dx^2} + \kappa (1 - a - a \chi \exp [p_1 \nu(a) (-x(1 + \lambda a(x))) + q_1 (-x(1 + \lambda a(x)))^2]) = 0. \quad (2.7)$$

Если распределение не известно, то уравнение (2.7) решаем численно итерационным методом Ньютона на основе метода прогонки.

2.2. Итерационный метод Ньютона на основе метода прогонки. Стационарная система с граничными условиями

$$u(x) = \int_x^1 s(1 + \lambda a(s)) ds, \quad (2.8)$$

$$\beta \frac{d^2 a}{dx^2} + \kappa (1 - a - a \chi \exp [p_1 \nu(a)(-x(1 + \lambda a(x))) + q_1(-x(1 + \lambda a(x)))^2]) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=1} &= 0, \\ \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зададим начальное приближение a_0 , удовлетворяющую граничным условиям (2.9). Далее, зная a_0 , находим u_0 . Следующие приближения уточняем с помощью метода прогонки.

Рассмотрим метод прогонки. Во втором уравнении системы (2.8) обозначим

$$\exp [p_1 \nu(a)(-x(1 + \lambda a(x))) + q_1(-x(1 + \lambda a(x)))^2] = \exp \rho$$

и заменим частные производные разностными соотношениями:

$$\frac{d^2 a}{dx^2} = \frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2}; \quad a = a_{i,j} \quad (2.10)$$

Подставляем (2.10) во второе уравнение системы (2.8) и после некоторых преобразований получим:

$$0 = \beta \left(\frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \kappa - \kappa a_{i,j} - \kappa a_{i,j} \chi \exp \rho \quad (2.11)$$

Для нахождения сеточного значения функции a_i используем прогоночную формулу:

$$a_{i+1,j} = E_{i+1} a_{i,j} + F_{i+1,j}, \quad (2.12)$$

где E_{i+1} , $F_{i+1,j}$ – прогоночные коэффициенты. Подставим (2.12) в (2.11)

$$\begin{aligned} 0 &= \beta \left(\frac{E_{i+1} a_{i,j} + F_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \kappa - \kappa a_{i,j} - \kappa a_{i,j} \chi \exp \rho \\ 0 &= \frac{\beta E_{i+1} a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\beta F_{i+1,j}}{\Delta x^2} - \frac{2\beta a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\kappa \Delta x^2}{\Delta x^2} - \frac{\kappa a_{i,j} \Delta x^2}{\Delta x^2} - \frac{\kappa a_{i,j} \chi \exp \rho \Delta x^2}{\Delta x^2} \\ \frac{2\beta a_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\kappa a_{i,j} \Delta x^2}{\Delta x^2} + \frac{\kappa a_{i,j} \chi \exp \rho \Delta x^2}{\Delta x^2} - \frac{\beta E_{i+1} a_{i,j}}{\Delta x^2} &= \frac{\beta F_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\kappa \Delta x^2}{\Delta x^2} \\ a_{i,j} \left(\frac{2\beta + \kappa \Delta x^2 + \kappa \chi \exp \rho \Delta x^2 - \beta E_{i+1}}{\Delta x^2} \right) &= \frac{\beta F_{i+1,j} + \kappa \Delta x^2}{\Delta x^2} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ a_{i,j} &= \frac{\beta F_{i+1,j} + \kappa \Delta x^2}{\Delta x^2 \left(\frac{2\beta + \kappa \Delta x^2 + \kappa \chi \exp \rho \Delta x^2 - \beta E_{i+1}}{\Delta x^2} \right)} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{\Delta x^2 \left(\frac{2\beta + \kappa \Delta x^2 + \kappa \chi \exp \rho \Delta x^2 - \beta E_{i+1}}{\Delta x^2} \right)} \\ a_{i,j} &= \frac{\beta F_{i+1,j} + \kappa \Delta x^2}{2\beta + \kappa \Delta x^2 + \kappa \chi \exp \rho \Delta x^2 - \beta E_{i+1}} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{2\beta + \kappa \Delta x^2 + \kappa \chi \exp \rho \Delta x^2 - \beta E_{i+1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Воспользуемся следствием прогоночной формулы:

$$a_{i,j} = E_i a_{i-1,j} + F_{i,j}, \quad (2.14)$$

и из (2.13) получим выражения для прогоночных коэффициентов E_i , $F_{i,j}$, которые представляют рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\beta}{2\beta + \kappa\Delta x^2 + \kappa\chi\epsilon\chi\rho\Delta x^2 - \beta E_{i+1}}, \\ F_{i,j} &= \frac{\beta F_{i+1,j} + \kappa\Delta x^2}{2\beta + \kappa\Delta x^2 + \kappa\chi\epsilon\chi\rho\Delta x^2 - \beta E_{i+1}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Формулы (2.15) представляют собой рекуррентные соотношения: зная $E_n, F_{n,j}$ и, двигаясь справа налево (от $i = n-1$ к $i = 0$) и (от $j = 1$ к $j = r$, где j - итерация приближения, r -количество итераций), можно определить значения коэффициентов $(E_{n-1}, F_{n-1,j})$, $(E_{n-2}, F_{n-2,j})$, $(E_1, F_{1,j})$.

При этом, для нахождения пары $(E_n, F_{n,j})$ воспользуемся вторым граничным условием

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=1} = 0,$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} a_{n,j} &= a_{n-1,j}, \\ a_{n,j} &= E_n a_{n-1,j} + F_{n,j}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_{n,j} &= 0, \\ E_n &= 1, \end{aligned}$$

и, следуя (2.15), определим прогоночные коэффициенты $(E_{n-1}, F_{n-1,j})$, $(E_{n-2}, F_{n-2,j})$, $(E_1, F_{1,j})$. Для нахождения сеточных значений искомой функции $a_{i,j}$: определим её значение в первой узловой точке, то есть $a_{0,j}$.

Для этого воспользуемся первым из граничных условий

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

и формулой прогонки (2.14). Имеем

$$\begin{aligned} a_{1,j} &= a_{0,j}, \\ a_{1,j} &= E_1 a_{0,j} + F_{1,j}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

откуда,

$$\begin{aligned} F_{1,j} &= 0, \\ E_1 &= 1. \end{aligned}$$

Далее, слева направо, по прогоночной формуле (2.14) вычислим сеточные значения искомой функции $a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ в остальных узлах сетки.

3. Результаты численных экспериментов для стационарной задачи

На графиках представленных ниже можно проследить как кривые степени структурных превращений, скорости течения и вязкости, выходят на стационар.

В первом графике (Рис.1) для степени структурных превращений $a = a(x, r)$ максимальное значение $r = 100$, $n = 10$, где количество точек разбиения 'r' - по итерациям, и 'x' - по координатам. Значения констант λ , $p1$, $q1$, β , κ , χ были выбраны мной таким образом, чтобы график имел более "гладкий" вид.

На графике можно увидеть прямую линию. Это линия первого приближения, т.е. мы самостоятельно задаем первое значение степени структурных превращений $a_0=0.3$. Значения на графиках показывают куда стремятся кривые, чтобы выйти на стационар.

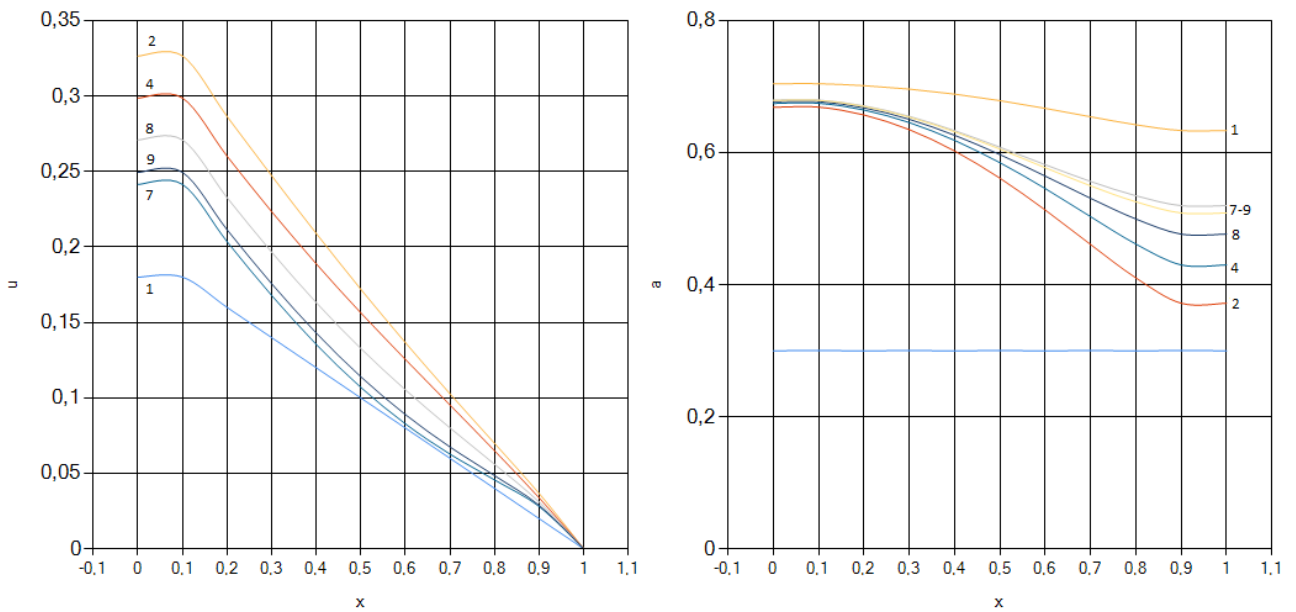


Рис. 1: Стационарная скорость $u=u(x)$ и степень структурных превращений $a=a(x)$: $\lambda = 10$, $a_0=0.3$, $p1=0.04$, $q1=0.04$, $n=10$ (количество точек разбиения по оси x), $\beta = 0.002$, $\kappa = 0.04$, $\chi = 0.4$

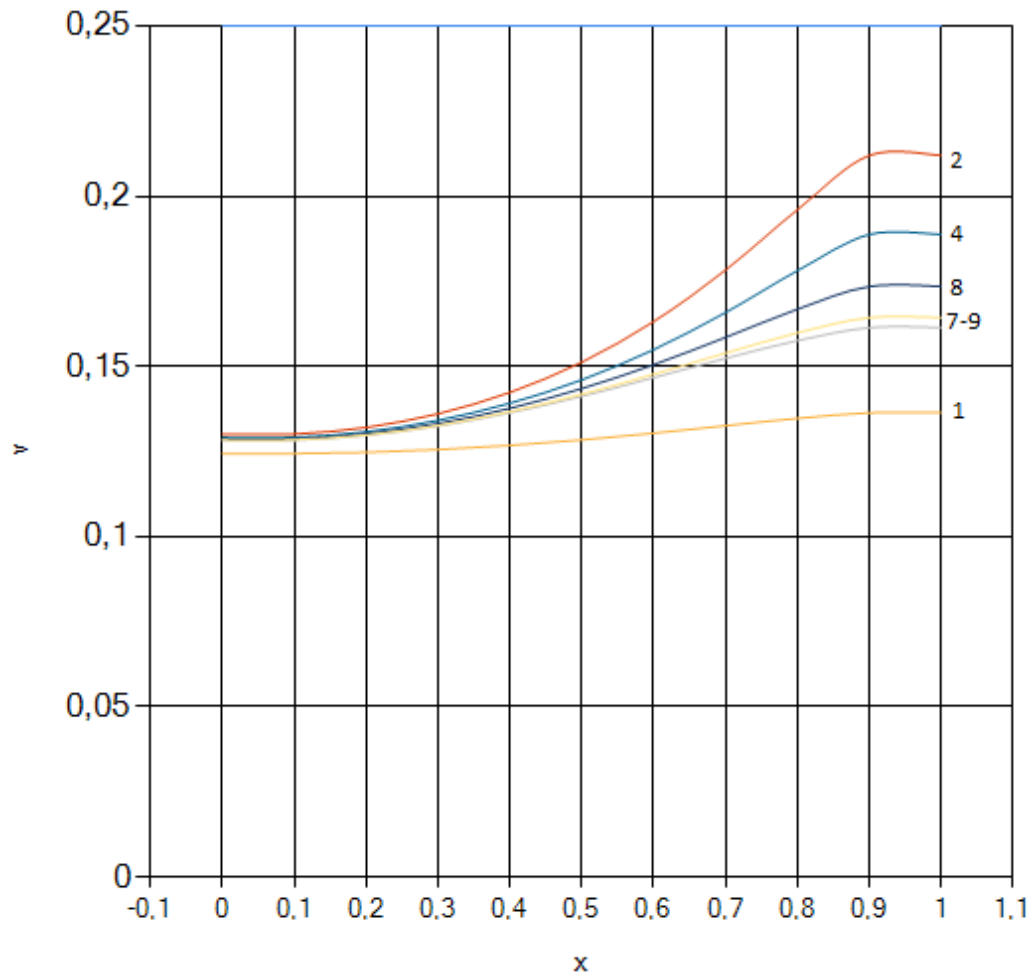


Рис. 2: Безразмерная вязкость $\nu=\nu(a)$: $\lambda = 10$, $a_0=0.3$, $p_1=0.04$, $q_1=0.04$, $n=10$ (количество точек разбиения по оси x), $\beta = 0.002$, $\kappa = 0.04$, $\chi = 0.4$

4. Безразмерная система нестационарного течения жидкости

4.1. Метод прогонки. Рассмотрим метод прогонки для решения задачи (4.1) – (4.4).

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\lambda \nu(a)^2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu(a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} &= \beta \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \kappa \left[1 - a - a \chi \exp \left(p_1 \nu(a) \frac{\partial u}{\partial x} + q_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right],\end{aligned}\quad (4.1)$$

с начальными

$$u|_{\tau=0} = 0; \quad a|_{\tau=0} = a_0; \quad (4.2)$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. u \right|_{x=1} = 0; \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (4.4)$$

Для системы уравнений (4.1) заменим частные производные разностными соотношениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &\approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \tau}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \\ \frac{\partial a}{\partial x} &\approx \frac{a_{i+1,j-1} - a_{i,j-1}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial a}{\partial \tau} \approx \frac{a_{i,j} - a_{i,j-1}}{\Delta \tau}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \approx \frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \\ \nu(a_{i,j-1}) &= \frac{1}{1 + \lambda a_{i,j-1}} \approx \nu_{i,j-1}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Подставим разностные соотношения для первого уравнения системы (4.1)

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \tau} = -\lambda (\nu_{i,j-1})^2 \left(\frac{a_{i+1,j-1} - a_{i,j-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + \nu_{i,j-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + 1$$

Заменим выражения вычисляемые в предыдущем $(j-1)$ слое:

$$A_{i,j-1} = (\nu_{i,j-1})^2 \left(\frac{a_{i+1,j-1} - a_{i,j-1}}{\Delta x} \right), \quad \alpha_{i,j-1} = \nu_{i,j-1}$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta \tau} = -\lambda A_{i,j-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + \alpha_{i,j-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + 1$$

$$\frac{u_{i,j}}{\Delta \tau} - \frac{\lambda A_{i,j-1} u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{2\alpha_{i,j-1} u_{i,j}}{\Delta x^2} = -\frac{\lambda A_{i,j-1} u_{i+1,j}}{\Delta x} + \alpha_{i,j-1} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + 1 + \frac{u_{i,j-1}}{\Delta \tau}$$

перенесем все слагаемые с $u_{i,j}$ в левую сторону и вынесем $u_{i,j}$ за скобку

$$u_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta \tau} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{2\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} \right) = u_{i+1,j} \left(\frac{\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} \right) + \alpha_{i,j-1} \frac{u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + 1 + \frac{u_{i,j-1}}{\Delta \tau}$$

$$B_{i,j-1} = \left(\frac{\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} \right)$$

$$u_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{2\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} \right) = u_{i+1,j} B_{i,j-1} + \alpha_{i,j-1} \frac{u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + 1 + \frac{u_{i,j-1}}{\Delta\tau} \quad (4.6)$$

Для нахождения сеточного значения функции $u_{i,j}$ используем прогоночную формулу

$$u_{i+1,j} = E_{i+1} u_{i,j} + F_{i+1,j}, \quad (4.7)$$

где $E_{i+1}, F_{i+1,j}$ - прогоночные коэффициенты. Подставим (4.7) в (4.6) :

$$\begin{aligned} u_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{2\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} - E_{i+1} B_{i,j-1} \right) &= F_{i+1,j} B_{i,j-1} + \alpha_{i,j-1} \frac{u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + 1 + \frac{u_{i,j-1}}{\Delta\tau} \\ u_{i,j} &= \frac{\Delta x^2 F_{i+1,j} B_{i,j-1} + \Delta x^2 \frac{u_{i,j-1}}{\Delta\tau} + \Delta x^2}{\Delta x^2 \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{2\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} - E_{i+1} B_{i,j-1} \right)} + \\ &+ \frac{\alpha_{i,j-1} u_{i-1,j}}{\Delta x^2 \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{\lambda A_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{2\alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2} - E_{i+1} B_{i,j-1} \right)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Воспользуемся следствием прогоночной формулы

$$u_{i,j} = E_i u_{i-1,j} + F_{i,j} \quad (4.9)$$

и из (4.8) получим выражения для прогоночных коэффициентов $E_i, F_{i,j}$, которые представляют рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\Delta\tau \alpha_{i,j-1}}{\Delta x^2 - \Delta\tau \Delta x \lambda A_{i,j-1} + \Delta\tau 2\alpha_{i,j-1} - \Delta\tau \Delta x^2 E_{i+1} B_{i,j-1}}, \\ F_{i,j} &= \frac{\Delta\tau \Delta x^2 F_{i+1,j} B_{i,j-1} + \Delta x^2 u_{i,j-1} + \Delta\tau \Delta x^2}{\Delta x^2 - \Delta\tau \Delta x \lambda A_{i,j-1} + \Delta\tau 2\alpha_{i,j-1} - \Delta\tau \Delta x^2 E_{i+1} B_{i,j-1}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Формулы (4.10) представляют собой рекуррентные соотношения: зная $E_n, F_{n,j}$ и, двигаясь справа налево (от $i = n - 1$ к $i = 0$) можно определить значения коэффициентов $(E_{n-1}, F_{n-1,j}), (E_{n-2}, F_{n-2,j}), (E_1, F_{1,j})$. При этом, для нахождения пары $(E_n, F_{n,j})$ воспользуемся вторым граничным условием

$$u \Big|_{x=1} = 0,$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} u_{n,j} &= 0, \\ u_{n,j} &= E_n u_{n-1,j} + F_{n,j}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_{n,j} &= 0, \\ E_n &= 0, \end{aligned}$$

и, следуя (4.10), определим прогоночные коэффициенты $(E_{n-1}, F_{n-1,j}), (E_{n-2}, F_{n-2,j}), (E_1, F_{1,j})$. Для нахождения сеточных значений искомой функции $u_{i,j}$: определим её значение в первой узловой точке, то есть $u_{0,j}$. Для этого воспользуемся первым из граничных условий

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

и формулой прогонки (4.9). Имеем

$$\begin{aligned} u_{1,j} &= u_{0,j}, \\ u_{1,j} &= E_1 u_{0,j} + F_{1,j}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} F_{1,j} &= 0, \\ E_1 &= 1. \end{aligned}$$

Откуда:

$$u_{0,j} = \frac{F_{1,j}}{1 - E_1}.$$

Далее, слева направо, по прогоночной формуле (4.9) вычислим сеточные значения искомой функции $u_{2,j}, \dots, u_{n,j}$ в остальных узлах сетки. Из начальных условий (4.2) определяем сеточные значения в нулевом слое:

$$u_{i,0} = 0.$$

Теперь подставим разностные соотношения для второго уравнения системы (4.1) и проведем аналогичные преобразования. Во втором уравнении системы обозначим:

$$\exp \left(p_1 \nu_{i,j-1} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right) + q_1 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \right)^2 \right) = \exp \rho_{i,j}$$

Подставим разностные соотношения (4.5) в наше уравнение

$$\begin{aligned} \frac{a_{i,j} - a_{i,j-1}}{\Delta \tau} &= \beta \left(\frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \kappa [1 - a_{i,j} - a_{i,j} \chi \exp \rho_{i,j}] \\ \frac{a_{i,j}}{\Delta \tau} &= \beta \left(\frac{a_{i+1,j} - 2a_{i,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \kappa - \kappa a_{i,j} - \kappa \chi a_{i,j} \exp \rho_{i,j} + \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau} \end{aligned}$$

перенесем все слагаемые с $a_{i,j}$ в левую сторону и вынесем за скобку

$$\begin{aligned} a_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \exp \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} \right) &= \beta \left(\frac{a_{i+1,j} + a_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \kappa + \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau} \\ a_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \exp \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} \right) &= \frac{\beta}{\Delta x^2} a_{i+1,j} + \frac{\beta}{\Delta x^2} a_{i-1,j} + \kappa + \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для нахождения сеточного значения функции $a_{i,j}$ используем прогоночную формулу

$$a_{i+1,j} = L_{i+1} a_{i,j} + D_{i+1,j} \quad (4.14)$$

где $L_{i+1}, D_{i+1,j}$ - прогоночные коэффициенты. Подставим (4.14) в (4.13) :

$$a_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \exp \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} \right) - \frac{\beta}{\Delta x^2} L_{i+1} a_{i,j} = \frac{\beta}{\Delta x^2} D_{i+1,j} + \frac{\beta}{\Delta x^2} a_{i-1,j} + \kappa + \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau}$$

$$a_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \exp \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} - \frac{\beta}{\Delta x^2} L_{i+1} \right) = \frac{\beta}{\Delta x^2} D_{i+1,j} + \frac{\beta}{\Delta x^2} a_{i-1,j} + \kappa + \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau}$$

$$a_{i,j} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \exp \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} - \frac{\beta}{\Delta x^2} L_{i+1} \right) = \frac{\beta D_{i+1,j} + \Delta x^2 \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau} + \Delta x^2 \kappa}{\Delta x^2} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$a_{i,j} = \frac{\beta D_{i+1,j} + \Delta x^2 \frac{a_{i,j-1}}{\Delta \tau} + \Delta x^2 \kappa}{\Delta x^2 \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \epsilon x \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} - \frac{\beta}{\Delta x^2} L_{i+1} \right)} + \frac{\beta a_{i-1,j}}{\Delta x^2 \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \kappa + \kappa \chi \epsilon x \rho_{i,j} + \frac{2\beta}{\Delta x^2} - \frac{\beta}{\Delta x^2} L_{i+1} \right)} \quad (4.15)$$

Воспользуемся следствием прогоночной формулы

$$a_{i,j} = L_i a_{i-1,j} + D_{i,j} \quad (4.16)$$

и из (4.15) получим выражения для прогоночных коэффициентов $L_i, D_{i,j}$, которые представляют рекуррентные соотношения:

$$L_i = \frac{\Delta \tau \beta}{\Delta x^2 + \Delta \tau \Delta x^2 \kappa + \Delta \tau \Delta x^2 \kappa \chi \epsilon x \rho_{i,j} + \Delta \tau 2\beta - \Delta \tau \beta L_{i+1}}, \quad (4.17)$$

$$D_{i,j} = \frac{\Delta \tau \beta D_{i+1,j} + \Delta x^2 a_{i,j-1} + \Delta x^2 \Delta \tau^2 \kappa}{\Delta x^2 + \Delta \tau \Delta x^2 \kappa + \Delta \tau \Delta x^2 \kappa \chi \epsilon x \rho_{i,j} + \Delta \tau 2\beta - \Delta \tau \beta L_{i+1}}.$$

Формулы (4.17) представляют собой рекуррентные соотношения: зная $L_n, D_{n,j}$ и, двигаясь справа налево (от $i = n - 1$ к $i = 0$) можно определить значения коэффициентов $(L_{n-1}, D_{n-1,j}), (L_{n-2}, D_{n-2,j}), (L_1, D_{1,j})$. При этом, для нахождения пары $(L_n, D_{n,j})$ воспользуемся вторым граничным условием

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=1} = 0,$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} a_{n,j} &= a_{n-1,j}, \\ a_{n,j} &= L_n a_{n-1,j} + D_{n,j}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{n,j} &= 0, \\ L_n &= 1. \end{aligned}$$

Откуда:

$$a_{n-1,j} = \frac{D_{n,j}}{1 - L_n},$$

и, следуя (4.17), определим прогоночные коэффициенты $(L_{n-1}, D_{n-1,j}), (L_{n-2}, D_{n-2,j}), (L_1, D_{1,j})$. Для нахождения сеточных значений искомой функции $a_{i,j}$: определим её значение в первой узловой точке, то есть $a_{0,j}$. Для этого воспользуемся первым из граничных условий

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

и формулой прогонки (4.16). Имеем

$$\begin{aligned} a_{1,j} &= a_{0,j}, \\ a_{1,j} &= L_1 a_{0,j} + D_{1,j}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} D_{1,j} &= 0, \\ L_1 &= 1. \end{aligned}$$

Откуда:

$$a_{0,j} = \frac{D_{1,j}}{1 - L_1}$$

Далее, слева направо, по прогоночной формуле (4.16) вычислим сеточные значения искомой функции $a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ в остальных узлах сетки. Из начальных условий (4.2) определяем сеточные значения в нулевом слое:

$$a_{i,0} = a_0.$$

5. Результаты численных экспериментов для нестационарной задачи

На графиках представленных ниже можно проследить как кривые выходят на стационар, т.е. больше не изменяются, находятся в состоянии покоя.

Значения на графиках показывают куда стремятся кривые, чтобы выйти на стационар.

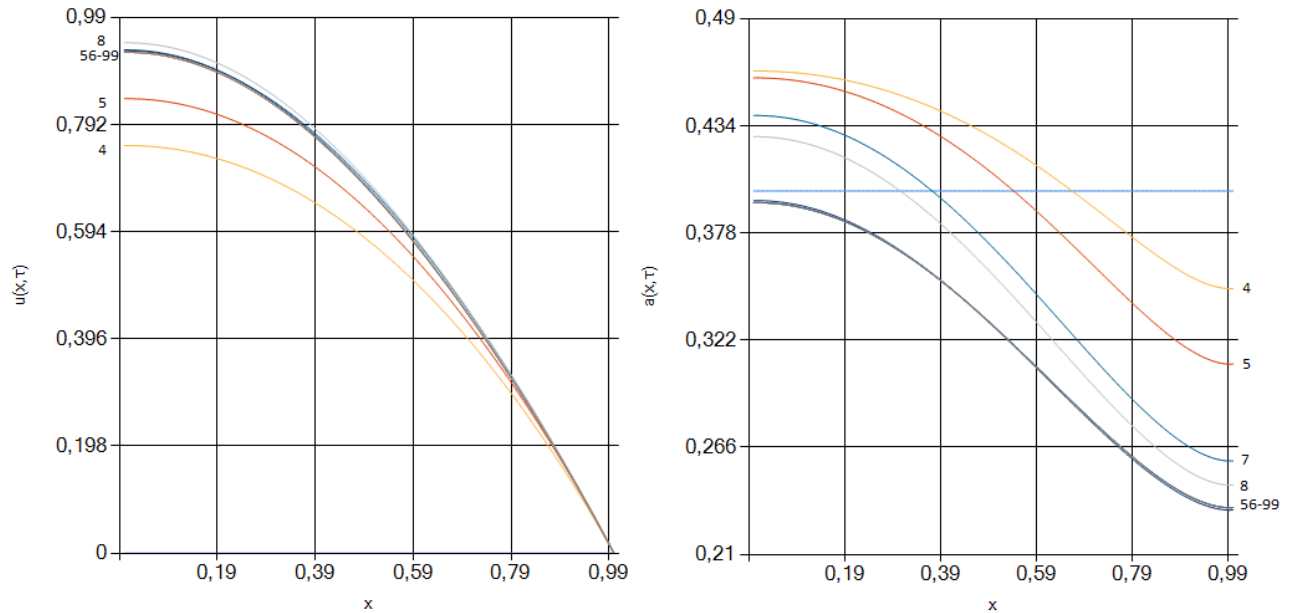


Рис. 3: Пространственно-временное распределение скорости $u=u(x, \tau)$ и степени структурных превращений $a=a(x, \tau)$: 4($\tau=1.2$), 5(1.5), 7(2.1), 8(2.4), 56(16.8); Параметры: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.8$, $m=100$ (количество точек разбиения по оси τ), $n=100$ (количество точек разбиения по оси x), $\beta=0.2$, $\kappa=0.4$, $\chi=0.8$, $T=30$

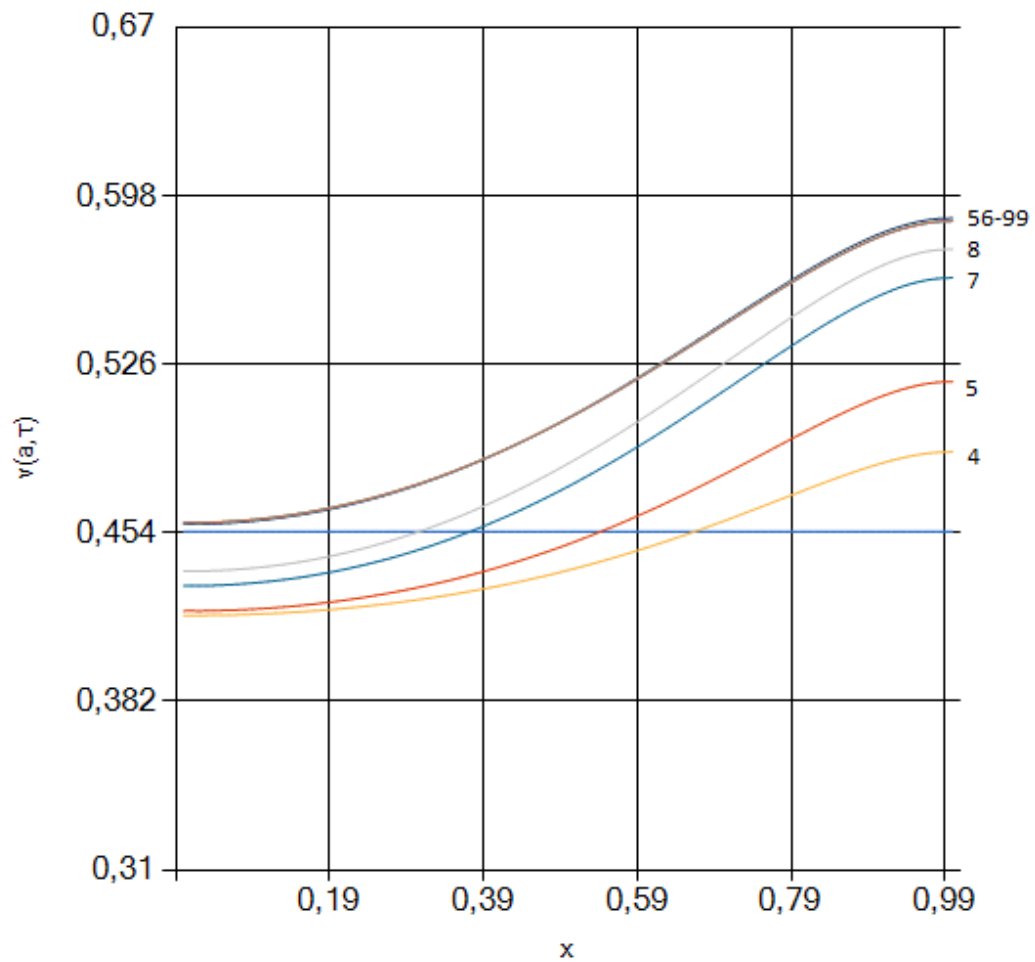


Рис. 4: Пространственно-временное распределение вязкости $\nu=\nu(a, \tau)$: 4($\tau=1.2$), 5(1.5), 7(2.1), 8(2.4), 56(16.8); Параметры: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.8$, $m=100$ (количество точек разбиения по оси τ), $n=100$ (количество точек разбиения по оси x), $\beta=0.2$, $\kappa=0.4$, $\chi=0.8$, $T=30$

Выводы и сравнение результатов численных экспериментов

Проведение численного эксперимента при качественном изменении параметров для нестационарной задачи Для проведения эксперимента изменялись следующие параметры: a_0 , λ , p_1 , q_1 , β , κ , χ , при этом шаг был одинаков, $m=100$, $n=10$. Такие параметры как λ , p_1 , q_1 , κ , χ оказывали большее влияние на течение жидкости, чем a_0 , β .

Результаты указаны в Приложении 1.

Сравнение результатов численных экспериментов Для сравнения были выбраны следующие параметры:

Стационарная задача: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.6$, $\beta=0.2$, $\kappa=0.4$, $\chi=0.8$;

Нестационарная задача: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.8$, $\beta=0.2$, $\kappa=0.4$, $\chi=0.8$;

На графиках можно увидеть как нестационарное решение показывает установление стационарного режима, который совпадает со стационарным решением задачи.

Графики указаны в Приложении 2.

Заключение

Цель анализа нестационарного течения была достигнута. По графикам можно понять, что вязкие жидкости с течением времени выходят на стационар, т.е. в результате некоторых структурных превращений в вязкости жидкости, течение замедлилось и вышло в состояние покоя.

Для построения математической модели напорного нестационарного течения с переменной вязкостью была получена система дифференциальных уравнений в частных производных с начальными и граничными условиями. Была рассмотрена нестационарная система и стационарная, как частный случай нестационарной, изменения скорости и степени структурных превращений. Было произведено решение дифференциального уравнения стационарного течения в частных производных для скорости течения в явном виде. С помощью метода прогонки и итерационного метода Ньютона был проведен численный анализ нестационарной и стационарной систем и поставлены численные эксперименты, построены графики: степени структурных превращений $a = a(x)$, стационарной скорости течения $u = u(x)$, безразмерной вязкости $\nu = \nu(x)$ при различных изменениях параметров.

Результаты работы представлены на Национальной конференции XXVII годичной сессии Ученого совета (Февральские чтения-2020).

Список литературы

- [1] Беляева Н.А. Математическое моделирование: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета, 2014. 116 с.
- [2] Астарита. Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей, М.: Мир, 1978, 312 с.
- [3] Беляева Н.А., Горст Д.Л., Худяев С.И. Неоднородное течение Куэтта структурированной жидкости, Вестник Сыктывкарского университета Сер.1. Вып 5. 2003. с. 43-48
- [4] Беляева Н.А., Кузнецов К.П. Диссипативная структура и область сверханомалии куэттовского течения структурированной жидкости в плоском зазоре, Вестник Сыктывкарского университета Сер.1. Вып 13. 2011. с. 61-74
- [5] Н. А. Беляева, Неоднородное течение структурированной жидкости, Матем. моделирование, 2006. том.18. номер 6. с. 3–14

Приложение 1. Проведение численного эксперимента при варьировании параметров

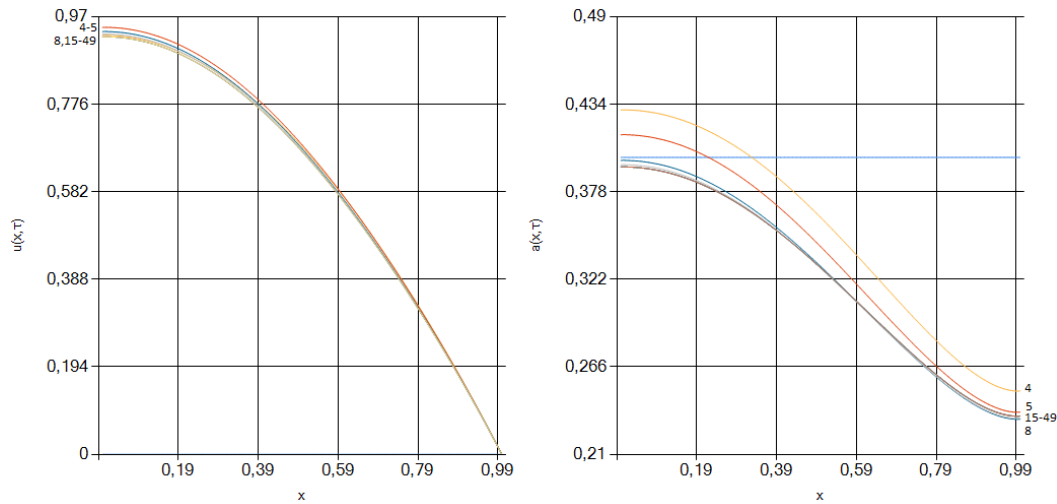


Рис. 5: Пространственно-временное распределение скорости течения $u=u(x, \tau)$, пространственно-временное распределение степени структурных превращений $a=a(x, \tau)$: 4($\tau=1.2$), 5(1.5), 8(2.4), 15(4.5); Параметры: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.8$, $m=50$ (количество точек разбиения по оси τ), $n=100$ (количество точек разбиения по оси x), $\beta=0.2$, $\kappa=0.4$, $\chi=0.8$, $T=30$

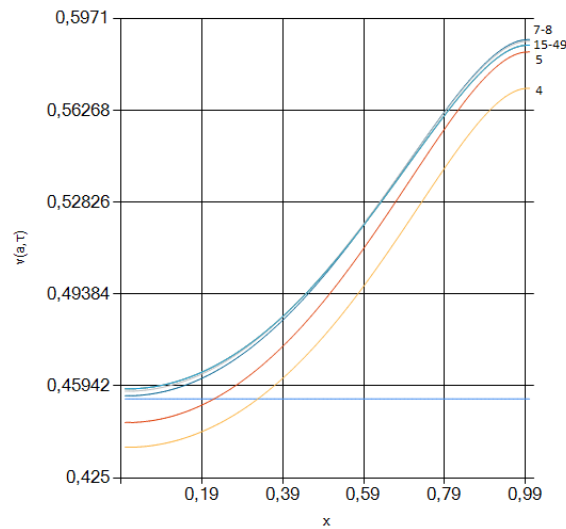


Рис. 6: Пространственно-временное распределение вязкости $\nu=\nu(a, \tau)$: 4($\tau=1.2$), 5(1.5), 8(2.4), 15(4.5); Параметры: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.8$, $m=50$ (количество точек разбиения по оси τ), $n=100$ (количество точек разбиения по оси x), $\beta=0.2$, $\kappa=0.4$, $\chi=0.8$, $T=30$

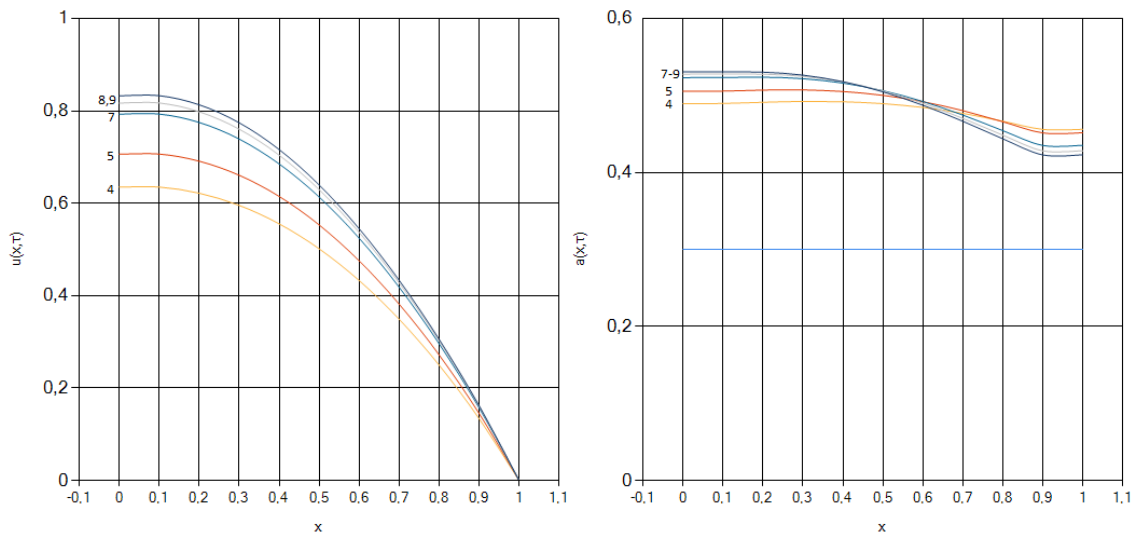


Рис. 7: Пространственно-временное распределение скорости течения $u=u(x, \tau)$, пространственно-временное распределение степени структурных превращений $a=a(x, \tau)$: $\lambda=2$, $a_0=0.3$, $p_1=0.6$, $q_1=0.4$, $\beta=0.20$, $\kappa=0.9$, $\chi=0.9$

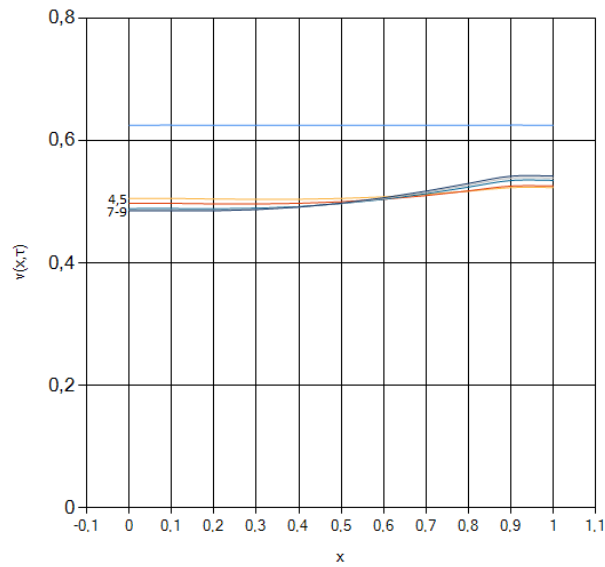


Рис. 8: Пространственно-временное распределение вязкости $\nu=\nu(a, \tau)$: $\lambda=2$, $a_0=0.3$, $p_1=0.6$, $q_1=0.4$, $\beta=0.20$, $\kappa=0.9$, $\chi=0.9$

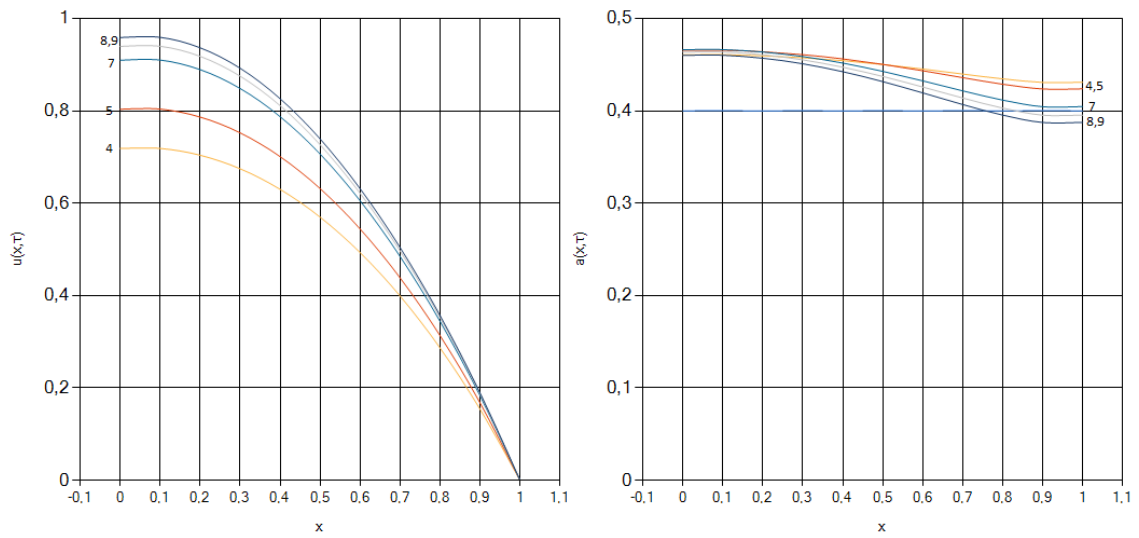


Рис. 9: Пространственно-временное распределение скорости течения $u=u(x, \tau)$, пространственно-временное распределение степени структурных превращений $a=a(x, \tau)$: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.4$, $\beta=0.2$, $\kappa=0.3$, $\chi=0.8$

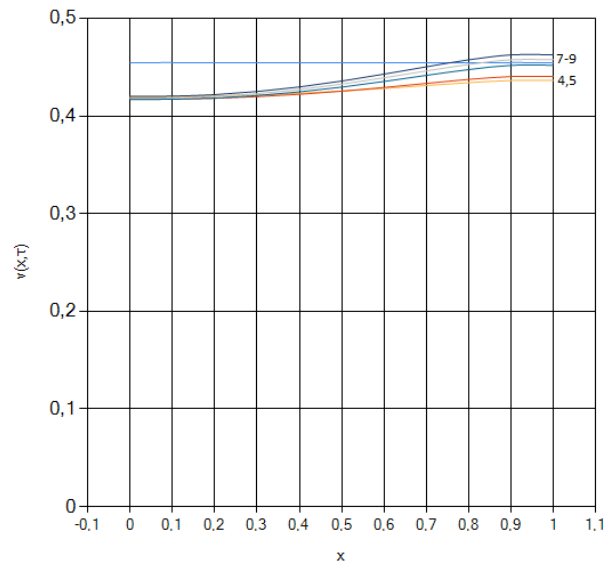


Рис. 10: Пространственно-временное распределение вязкости $\nu=\nu(a, \tau)$: $\lambda=3$, $a_0=0.4$, $p_1=0.06$, $q_1=0.4$, $\beta=0.2$, $\kappa=0.3$, $\chi=0.8$

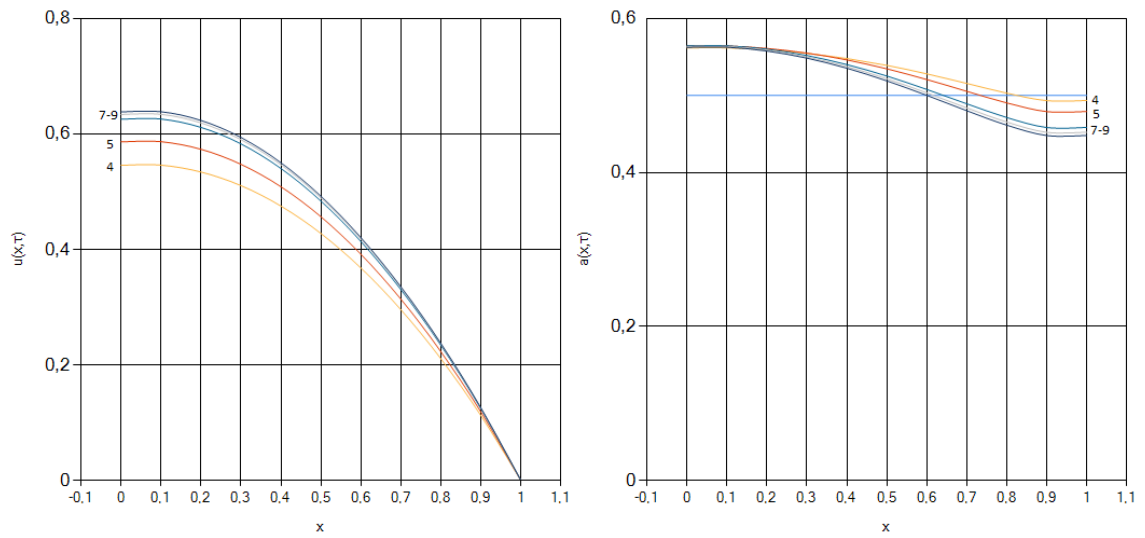


Рис. 11: Пространственно-временное распределение скорости течения $u=u(x, \tau)$, пространственно-временное распределение степени структурных превращений $a=a(x, \tau)$: $\lambda=0.9$, $a_0=0.5$, $p_1=0.003$, $q_1=0.5$, $\beta=0.08$, $\kappa=0.9$, $\chi=0.7$

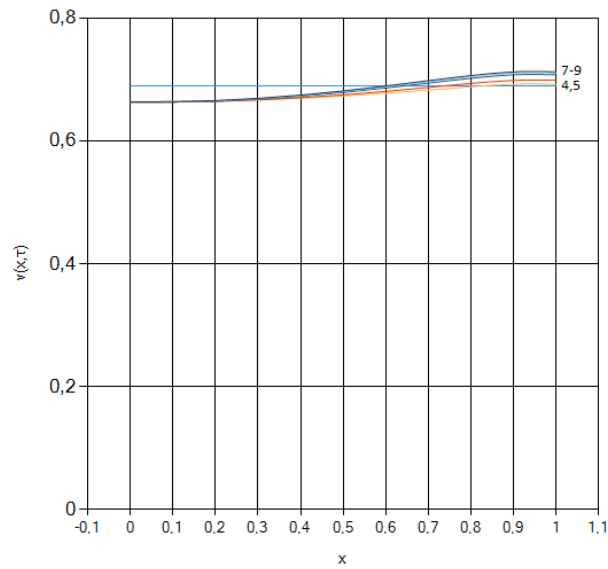


Рис. 12: Пространственно-временное распределение вязкости $\nu=\nu(a, \tau)$: $\lambda=0.9$, $a_0=0.5$, $p_1=0.003$, $q_1=0.5$, $\beta=0.08$, $\kappa=0.9$, $\chi=0.7$

Приложение 2. Сравнение графиков для нестационарного и стационарного течения

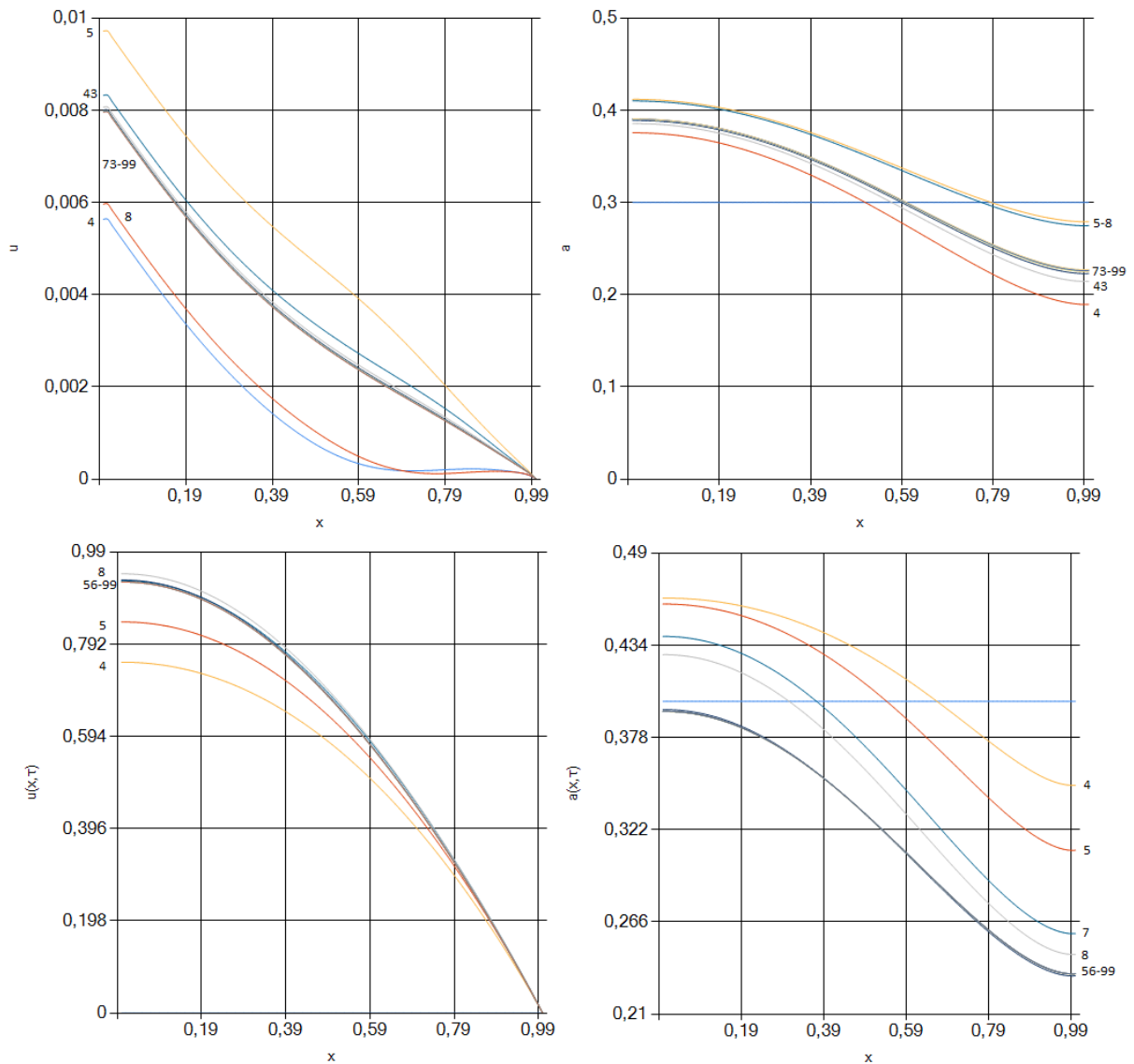


Рис. 13: Изменение скорости течения показывает возрастание скорости с течением времени, на графике видно как кривые достигают максимального значения (рисунок слева снизу, кривые 56-99). При этом стационарная скорость течения (рисунок слева сверху, кривые 73-99) незначительно отличается от установившегося течения жидкости (рисунок слева снизу, кривые 56-99). Устанавливающаяся степень структурных превращений (рисунок справа снизу, кривые 56-99) совпадает со стационарной степенью структурных превращений (рисунок справа сверху, кривые 73-99)

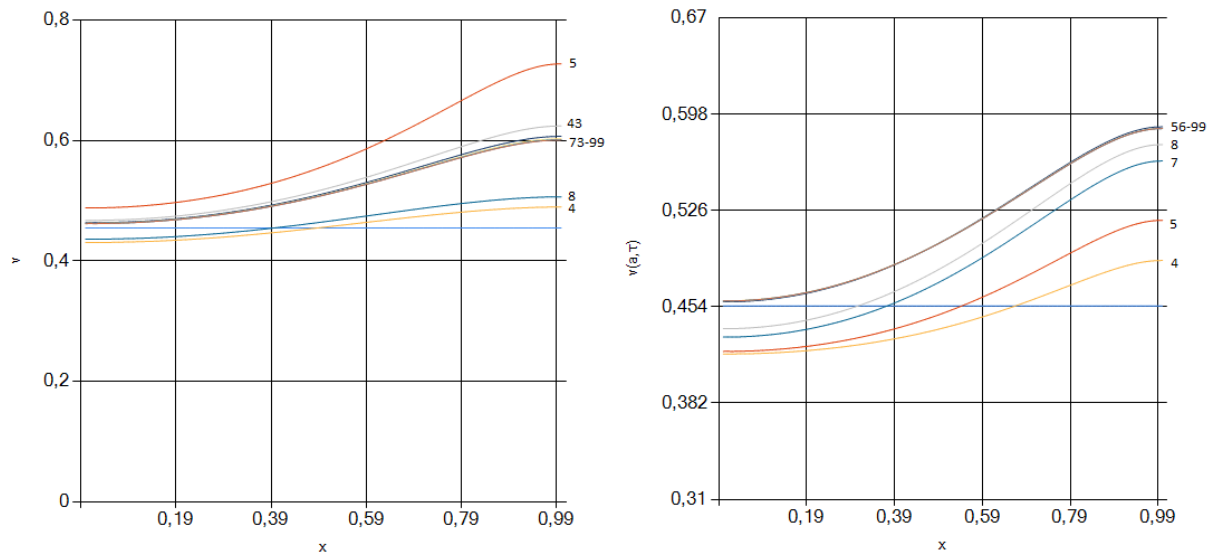


Рис. 14: Устанавливающаяся вязкость жидкости (рисунок справа, кривые 56-99) незначительно отличается от стационарного течения жидкости (рисунок слева, кривые 73-99)

Приложение 3. Программа построения графика степени структурных превращений и скорости стационарного напорного течения в Visual Studio на языках C++ и C Sharp

```

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using System.Windows.Forms;

namespace Напорное_стационарное_течение
{
    public partial class Form1 : Form
    {
        Boolean Линия1; // Линия2, Линия3, Линия4;
        int k = 0; // количество графиков
        public Form1()
        {
            InitializeComponent();
        }
        //*****
        //Действия при загрузке приложения
        //*****
        private void Form1_Load(object sender, EventArgs e)
        {
            //подпись оси x
            chart1.ChartAreas[0].AxisX.Title = "x";
            //подпись оси v
            chart1.ChartAreas[0].AxisY.Title = "?";
        }
        //*****
        //Кнопки
        //*****
        private void Graph_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            if (_beta.Text == "" || kolvo_x.Text == "" || q_1.Text == ""
            || P_1.Text == "" || lyambda.Text == "" || this.a_0.Text == "")
            {
                MessageBox.Show("Есть незаполненные поля");
                if (_beta.Text == "")
                    _beta.BackColor = Color.LightCoral;
                if (kolvo_x.Text == "")
                    kolvo_x.BackColor = Color.LightCoral;
                if (q_1.Text == "")
                    q_1.BackColor = Color.LightCoral;
            }
        }
    }
}

```

```

        if (P_1.Text == "")
            P_1.BackColor = Color.LightCoral;
        if (lyambda.Text == "")
            lyambda.BackColor = Color.LightCoral;
        if (this.a_0.Text == "")
            this.a_0.BackColor = Color.LightCoral;
        return;
    }
//считывание и конвертация введенных значений
int n = Convert.ToInt32(kolvo_x.Text);
float lya = Convert.ToSingle(lyambda.Text);
float q1 = Convert.ToSingle(q_1.Text);
float hi = Convert.ToSingle(_hi.Text);
float beta = Convert.ToSingle(_beta.Text);
float a0 = Convert.ToSingle(a_0.Text);
float lastt = Convert.ToSingle(q_1.Text);
string moment = Convert.ToString(moment_vremeni.Text);
float p1 = Convert.ToSingle(p_1.Text);
float kappa = Convert.ToSingle(_kappa.Text);

//Код Напорное течение между двумя плоскостями.csr

double stepx;
int r=100; // количество вычислений(итераций)
double[,] a = new double[n+1,r];
double[,] nu = new double[n+1, r];
double[,] u = new double[n+1,r];
double[] E = new double[n+1];
double[,] F = new double[n+1, r];
double[] x = new double[n+1];

//a[i,j] i - по x, j - по итерациям
stepx = 1.0F/n; //Шаг длина отрезка на количество точек разбиения,
т.к. значение x[0,1]
stepx = 1.0F / n;
//Шаг длина отрезка на количество точек разбиения,т.к. значение x[0,1]
//Обнуление массивов a, u
for (int i = 0; i < n+1; i++)
{
    for(int j=0; j<r;j++){

        u[i, j] = 0;
        a[i, j] = 0;
    }
}
for (int j = 1; j < r; j++)
{
//граничное условие для u при x=1
u[n, j] = 0.0;

```

```

    }
    //определение x
    for (int i = 0; i < n + 1; i++)
    {
        x[i] = stepx * i;// x[i=last] = stepx*n = (h/n) * n
    }
    //проход заданного значения a0, по всем точкам
    x на промежутке от 0 до количества точек разбиения (приближение)
    for (int i = 0; i < n + 1; i++)
    {
        a[i, 0] = a0;
        u[i, 0] = x[i] * (1 + lya * a[i, 0]);
        nu[i, 0] = 1 / (1 + lya * a[i, 0]);
    }

    for (int j = 0; j < r; j++)
    {
        //граничное условие при x=1
        E[n] = 1;
        F[n, j] = 0.0;
    }

    for (int j = 1; j < r; j++)
    {
        for (int i = n - 1; i > 0; i--) //
        движение по x с конца, вычисление интеграла и прогоночных коэфф
        {
            //задание интеграла
            u[i, j] = u[i + 1, j] + (x[i + 1] - x[i]) *
            (x[i + 1] * (1 + lya * a[i + 1, j - 1]) -
            x[i] * (1 + lya * a[i, j - 1])) / 2;
            u[0, j] = u[1, j]; // использование граничного условия для u
        }
        for (int i = n - 1; i > 0; i--)
        // движение по x с конца, вычисление интеграла и прогоночных коэфф
        {
            // прогоночные коэф
            double expo = Math.Exp(p1 * nu[i, j-1] *
            (-x[i] * (1 + lya * a[i, j - 1]))
            + q1 * (x[i] * (1 + lya * a[i, j - 1])) *
            (x[i] * (1 + lya * a[i, j - 1])));
            E[i] = beta / (2 * beta + kappa * stepx *
            stepx + kappa * hi * stepx *
            stepx * expo - beta * E[i + 1]);
            F[i, j] = (beta * F[i + 1, j] + kappa * stepx * stepx)
            / (2 * beta + kappa
            * stepx * stepx + kappa * hi * stepx * stepx * expo
            - beta * E[i + 1]);
        }
    }
}

```



```

    }
    for (int i = 1; i < n + 1; i++)
// движение по x с начала, вычисление целевой функции
    {
        a[0, j] = F[1, j] / (1 - E[1]);
//значение целевой а(производной)
        a[i, j] = (E[i] * a[i - 1, j]) + F[i, j];
// прогоночные коэф и формула

    }
    for (int i = 0; i < n+1; i++)
    {
        nu[i, j] = 1 / (1 + lya * a[i, j]); //задание ню, зависимость от а
    }
}

char[] M = moment.ToCharArray();
_ = new string[n + 1];
string[] sravnenie = new string[n + 1];
    k = 0;
    for (int i = 0; i < M.Length; i++)
    {
        if (M[i] == ' ')
        {
            continue;
        }

        if (M[i] == ',')
        {
            if(i==M.Length-1)
                continue;

            k++;
            continue;
        }
        sravnenie[k] += M[i];
    }

string[] d = sravnenie.Distinct().ToArray();
k = d.Length - 2; // сглаживание массива
////////////////////////////////////
//Цикл проверки существования выбранных точек t
for (int i=0; i <= k; i++)
{
    if (Convert.ToInt32(d[i]) <= n)
    {
        continue;
    }
    else

```

```

        {
            MessageBox.Show("Выбранный момент времени
выходит за количество точек разбиения");
            return;
        }
    }
    chart1.Series.Clear(); // чистит диаграмму
    for (int i = 0; i <= k; i++)
    {
        string s1 = "V[";
        string s2 = "]"[0];
        string s3 = s1 + d[i] + s2;

        if (chart1.Series.IsUniqueName(s3))
        {
            chart1.Series.Add(s3); // добавление серии
            chart1.Series[i].Name = s3; // Задает имя i-го графика
            chart1.Series[i].Points.Clear();
        }
        //chart1.Series[i].Name = s3; // Задает имя i-го графика
        chart1.Series[i].ChartType =
System.Windows.Forms.DataVisualization.Charting.
SeriesChartType.Spline; //плавные
        chart1.Series[i].Points.Clear();
    }
//*****
//Построение графиков(выбор a, u, nu)
//*****
    for (int i = 0; i < n+1; i++)
    {
        for (int j = 0; j <= k; j++)
        {
            chart1.Series[j].Points.AddXY(x[i], a[i, Convert.ToInt32(d[j])]);
            chart1.Series[j].Points.AddXY(x[i], u[i, Convert.ToInt32(d[j])]);
            chart1.Series[j].Points.AddXY(x[i], nu[i, Convert.ToInt32(d[j])]);
        }
    }
}
//*****
//График
//*****
private void Chart1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Линия1 = !Линия1;
    if (Линия1 == true)
    {
        for (int i = 0; i <= k; i++)
        {
            chart1.Series[i]["DrawingStyle"] = "Line";

```

```
        }
    }
    else
    {
        chart1.Series[0]["DrawingStyle"] = "Default";
    }
}

////////////////////////////////////
//Увеличение рисунка
////////////////////////////////////
//по оси X
chart1.ChartAreas[0].CursorX.IsUserEnabled = true;
chart1.ChartAreas[0].CursorX.IsUserSelectionEnabled = true;
chart1.ChartAreas[0].AxisX.ScaleView.Zoomable = true;
chart1.ChartAreas[0].AxisX.ScrollBar.IsPositionedInside = true;
//по оси Y
chart1.ChartAreas[0].CursorY.IsUserEnabled = true;
chart1.ChartAreas[0].CursorY.IsUserSelectionEnabled = true;
chart1.ChartAreas[0].AxisY.ScaleView.Zoomable = true;
chart1.ChartAreas[0].AxisY.ScrollBar.IsPositionedInside = true;

}

//*****
//Текстовые формы
//*****
private void Text_vyazkost_Click(object sender, EventArgs e)
{

}

private void Text_max_y_Click(object sender, EventArgs e)
{

}

private void Text_max_t_Click(object sender, EventArgs e)
{

}

private void Text_kolvo_y_Click(object sender, EventArgs e)
{

}

private void Text_kolvo_t_Click(object sender, EventArgs e)
{

}

//*****
//Действия по нажанию клавиши
//*****
private void Vvod_drobnogo_chisla(object sender, KeyPressEventArgs e)
{
```

```
        char number = e.KeyChar;
        if ((e.KeyChar <= 47 || e.KeyChar >= 58) &&
number != 8 && number != 44 && number != 127)
        {
            e.Handled = true;
        }

        if (e.KeyChar == ',' && (sender as TextBox).Text.IndexOf(',') > -1)
        {
            e.Handled = true;
        }
    }
    private void Perechisleniya(object sender, KeyPressEventArgs e)
    {
        char number = e.KeyChar;
        if ((e.KeyChar <= 47 || e.KeyChar >= 58) &&
number != 8 && number != 44 && number != 127)
        {
            e.Handled = true;
        }
    }
    private void Vvod_naturalnogo_chisla(object sender, KeyPressEventArgs e)
    {
        char number = e.KeyChar;
        if ((e.KeyChar <= 47 || e.KeyChar >= 58) &&
number != 8 && number != 127)
        {
            e.Handled = true;
        }
    }
    //*****
    //Действия по нажанию на TextBox (TextBox_Enter)
    //*****
    private void Podsvetka_text_polya(object sender, EventArgs e)
    {
        if (_beta.Text != "")
            _beta.BackColor = Color.White;
        if (kolvo_x.Text != "")
            kolvo_x.BackColor = Color.White;
        if (q_1.Text != "")
            q_1.BackColor = Color.White;
        if (P_1.Text != "")
            P_1.BackColor = Color.White;
        if (lyambda.Text != "")
            lyambda.BackColor = Color.White;
        if (a_0.Text != "")
            a_0.BackColor = Color.White;
        if (_hi.Text != "")
```

```
        _hi.BackColor = Color.White;
    if (_kappa.Text != "")
        _kappa.BackColor = Color.White;
    }
}
}
```

Приложение 4. Программа построения графика степени структурных превращений и скорости нестационарного напорного течения в Visual Studio на языках C++ и C Sharp

```
//считывание и конвертация введенных значений
int n = Convert.ToInt32(kolvo_x.Text);
int m = Convert.ToInt32(m_tau.Text);
float lya = Convert.ToSingle(lyambda.Text);
float q1 = Convert.ToSingle(q_1.Text);
float hi = Convert.ToSingle(_hi.Text);
double Tau = Convert.ToDouble(max_Tau.Text);
float beta = Convert.ToSingle(_beta.Text);
float a0 = Convert.ToSingle(a_0.Text);
string moment = Convert.ToString(moment_vremeni.Text);
float p1 = Convert.ToSingle(p_1.Text);
float kappa = Convert.ToSingle(_kappa.Text);

//Код Напорное течение между двумя плоскостями.cpp

double stepx;
double steptau;
double[,] a = new double[n + 1, m + 1];
double[,] nu = new double[n + 1, m + 1];
double[,] u = new double[n + 1, m + 1];
double[] E = new double[n + 1];
double[,] F = new double[n + 1, m + 1];
double[] L = new double[n + 1];
double[,] D = new double[n + 1, m + 1];
double[] x = new double[n + 1];

//a[i,j] i - по x, j - по времени
stepx = 1.0F/n; //Шаг по оси 'x', длина отрезка на количество точек разбиения,
т.к. значение x[0,1]
steptau = Tau / m; //Шаг по оси '?' максимальное значение T
на количество точек разбиения

//Обнуление массивов a, u
for (int i = 0; i < n+1; i++)
{
    for(int j=0; j<r;j++)
{
        u[i, j] = 0;
        a[i, j] = 0;
    }
}

//проход заданного значения a0, по всем точкам x на промежутке от 0
до количества точек разбиения (приближение)

//начальные условия
```

```

    for (int i = 0; i < n + 1; i++)
    {
        u[i, 0] = 0;
        a[i, 0] = a0;
        nu[i, 0] = 1 / (1 + lya * a[i, 0]);
    }
    for (int j = 1; j < m + 1; j++)
    {
//граничное условие для u при x=1
        u[n, j] = 0.0;
    }
//определение x
    for (int i = 0; i < n + 1; i++)
    {
        x[i] = stepx * i;// x[i=last] = stepx*n = (h/n) * n
    }

//из граничных условий следует
    for (int j = 0; j < m + 1; j++) {
        D[n, j] = 0.0;
        L[n] = 1;
    }

    for (int j = 1; j < m + 1; j++)

    {
// движение по x с конца, вычисление интеграла и прогоночных коэфф
        for (int i = n - 1; i > 0; i--)
        {
            double znam_u = (stepx * stepx) / steptau + lya *
Math.Pow(nu[i, j - 1], 2) *
(a[i, j - 1] - a[i+1, j - 1]) + 2 * nu[i, j - 1] - E[i + 1] *
(lya * Math.Pow(nu[i, j - 1], 2)*
(a[i, j - 1] - a[i + 1, j - 1]) + nu[i, j - 1]);
            E[i] = nu[i, j - 1] / znam_u;
            F[i, j] = (F[i + 1, j] * (lya * Math.Pow(nu[i, j - 1], 2) *
(a[i, j - 1] - a[i + 1, j - 1]) + nu[i, j - 1]) + Math.Pow(stepx, 2) *
u[i, j - 1] / (steptau) + Math.Pow(stepx,2)) / znam_u;
        }
        for (int i = 1; i < n + 1; i++)
        {
            u[0, j] = F[1, j] / (1 - E[1]);
            u[1, j] = u[0, j];
            u[i, j] = (E[i] * u[i - 1, j]) + F[i, j];
        }
// движение по x с конца, вычисление интеграла и прогоночных коэфф
        for (int i = n - 1; i >= 1; i--)
        {
            double expo = Math.Exp(p1 * nu[i, j - 1] *

```

```

((u[i + 1, j] - u[i, j]) / stepx) +
q1 * Math.Pow((u[i + 1, j] - u[i, j]) / stepx, 2));
    double znam_a = Math.Pow(stepx, 2) / steptau + 2 * beta +
Math.Pow(stepx, 2) *
kappa + Math.Pow(stepx, 2) * kappa * hi * expo - beta * L[i + 1];
    L[i] = beta / znam_a;
    D[i, j] = (beta * D[i + 1, j] + Math.Pow(stepx, 2) *
kappa + Math.Pow(stepx, 2) *
(a[i, j - 1]) / steptau) / znam_a;
    }

//прогоночные формулы движение слева направо
for (int i = 1; i < n + 1; i++)
{
    a[0, j] = D[1, j] / (1 - L[1]);
    a[1, j] = a[0, j];
    a[i, j] = (L[i] * a[i - 1, j]) + D[i, j];
    a[n, j] = a[n - 1, j];
}
for (int i = 0; i < n + 1; i++)
{
    nu[i, j] = 1 / (1 + lya * a[i, j]);
}
}

```