МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(РИНХ)

Институт магистратуры

Кафедра Фундаментальной и прикладной математики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Зав. кафедрой____________
проф., д.ф.-м.н. М.Б. Стрюков
«____»____________2019__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)
на тему:

«Компьютерное моделирование нелинейных динамических систем анализа и прогнозирования в экономических структурах»

Выполнил
Магистрант гр. ПМИ-821 _________ Кузнецов Максим Валерьевич
Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», Магистерская программа 01.04.02.01 «Математическое и информационное обеспечение финансовой и инвестиционной деятельности

Научный руководитель работы
к.ф.-м.н., доцент _________ Журавлева М.И.

Руководитель магистерской программы
профессор, д.ф.-м.н. __________ Стрюков М.Б.

Ростов-на-Дону, 2019

Содержание

Введение

Интеллектуальные информационные технологии – это технологии, помогающие человеку ускорить анализ политической, экономической, социальной и технической ситуации (состояния) и последующий синтез управленческих решений. Наличие математической модели соответствующего процесса позволяет привлечь для глубокого анализа и синтеза методы современной нелинейной динамики и теории управления[8].

Актуальность темы работы обусловлена необходимостью глубокого понимания законов функционирования современной экономики при принятии скоординированных и эффективных решений.

В окружающем мире, в экономических, биологических, физических системах, постоянно происходят эволюционные процессы, и их можно считать процессами самоорганизации, то есть процессами, идущими за счёт внутренних стимулов и взаимодействий, не требующих вмешательства внешних факторов, не принадлежащих данной системе. Самоорганизация - это целенаправленный процесс, в ходе которого совершенствуется или создается новая форма организации сложной динамической системы.

Основной метод исследования динамических систем это - методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Основы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем были заложены в трудах французского ученого Анри Пуанкаре, который первым понял, что можно не интегрируя дифференциальных уравнений, представить все основные качественные особенности поведения решений.

Большинство «реальных систем» проявляют сложные свойства и являются нелинейными, неравновесными, открытыми, диссипативными, сложноорганизованными. Экономические системы не являются исключением. Построение экономических моделей начиналось с более простых, со временем происходило усложнение моделей. П.А. Самуэльсон в своей работе «основы экономического анализа» определил пять крупных этапов в развитии аналитической экономики. Первый этап - анализ экономического равновесия на статическом уровне (Вальрас). На втором этапе было положено начало основам теории сравнительной статики (Парето). Третий значительный этап связан с максимизацией действия экономического объекта (Джонсон, Слуцкий, Хикс, Аллен). Четвертый этап наступил в связи с открытием принципа соответствия. Пятый этап - экономическая динамика. Из равновесных теорий были получены основные экономические результаты. Понятие равновесия в экономике, подобно другим понятиям и концепциям, позаимствовано из теоретической механики.

Многие экономические системы обладают долговременной памятью, т.е. поведение системы определяется не только набором определяющих ее параметров в данный момент времени, но и динамикой их изменений в предыдущие. Для таких систем необходимо выявлять динамику процессов на экономическом рынке и изучать факторы, оказывающие влияние на формирование показателей этого рынка. Такая задача заключается в нахождении некоторого закона изменения объекта, который позволял бы по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени в конкретной заданной точке пространства определить его будущее в произвольный момент времени в произвольной точке пространства.

Выше рассмотренные положения определяют актуальность и практическую значимость выбранной темы исследования выпускной работы.

Структура и объем работы. Данная работа посвящена исследованию нелинейных динамических систем, определению положений равновесия систем, их характера и типа устойчивости, анализу возможности возникновения бифуркации при изменении параметров системы.

Первая глава посвящена определению основных характеристик состояния и поведения нелинейных экономических систем, базовым понятиям и определениям посреднической деятельности на торговых площадках. Рассмотрены всякие варианты её применения.

Во второй главе приводится определение динамической системы, описаны ее свойства, введены понятия бифуркации и теории хаоса, а также изложен метод анализа экономической динамической нелинейной системы, основанный на линеаризации системы в окрестности положения равновесия и теории устойчивости по Ляпунову. Для соответствующих динамических систем, описанных дифференциальными уравнениями, получены положения равновесия. На основе метода Ляпунова проведен анализ положений равновесия на устойчивость. Рассмотрены также методы синергетической теории управления А.А.Колесникова и спроектирована система управления созданной системы «Посредническая деятельность» по выводу траекторий системы на наперед заданное притягивающие многообразие, то есть наперед заданное соотношение между величиной денежного капитала и величиной товаров или услуг.

В третьей главе дана постановка экономической динамики «Посредническая деятельность» и проведен полный бифуркационный анализ этой нелинейной динамической системы. Спроектированы соответствующие действующие S-модели в пакете Simulink для разных положений равновесия, а именно для: устойчивого фокуса, устойчивого узла, седла и седла-узла. Проведено исследование поведения системы на бесконечности с построением S-моделей в пакете MatLab, Simulink. С помощью полученных S-моделей и программ пакета MatLab, Simulink, а также построенных автором программ с шагом и массивом, удалось провести численные эксперименты для всех ранее перечисленных положений равновесия: фокуса, узла, седла. Численное исследование проведено и для бесконечно удаленной точки. Численные эксперименты подтвердили правильность теоретических результатов, полученных при бифуркационном анализе задачи «Посредническая деятельность» и применении программ пакета MatLab.

Для разных параметров моделей и начальных условий построены фазовые траектории и фазовые портреты средствами MatLAB и Simulink.

Осуществлено сопоставление фазовых траекторий при разных параметрах системы.

Методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов построена система аддитивного управления как денежным, так и товарным потоками для достижения заданного динамического равновесия из произвольного начального состояния. Выделен класс допустимых достижимых состояний. Доказывается устойчивость в целом такого состояния. Данная модель позволяет прогнозировать развитие процесса для любого наперед заданного начального состояния системы, а также управлять параметрами системы для проектирования наперед заданного динамического равновесия.

Объект исследования – посредническая деятельность на любой экономической площадке.

Предмет исследования – результаты посреднической деятельности любых взаимосвязанных процессов.

Цель исследования – состоит в описании экономических объектов и процессов посредством математической теории динамических систем. Эта **цель** предполагает решение таких **задач**:

1) Исследовать особенности информационного моделирования в указанной области.
2) Выяснить возможности применения программных средств MAtLab+Simulink для создания анализа построенных моделей.
3) Применить компьютерное моделирование созданной динамической системы взаимосвязанных объектов.
4) Спроектировать действующую S-модель этой системы в пакете Simulink.
5) Проделать вычислительные эксперименты на построенных S-моделей для подтверждения правильности теоретических результатов.

Теоретико-методологическая основа исследования заключается в следующем: опираясь на экономико-математические и математические методы, на основе программного обеспечения пакетов MatLab, Simulink строятся фазовые портреты в окрестностях положений равновесия при разных исходных параметрах экономической системы «Посредническая деятельность». Данный подход заключается не только в нахождении положений равновесия модели «Посредническая деятельность» при разных исходных данных (параметров системы) с использованием системы дифференциальных уравнений, но и использовать современный метод синергетического управления (метод АКАР) динамической системы, разработанной А.А.Колесниковым[4].

Практическая значимость работы заключается:

1) В методике построения положений равновесия фазовых портретов, поведения взаимосвязанных объектов экономических структур, а также в выявлении факторов, комплексно влияющих на эффективность взаимоотношения экономических процессов посреднической деятельности.
2) В методике создания синергетического управления системой «Посредническая деятельность» величиной денежного капитала и величиной товаров и услуг. Это значит, данная модель позволяет не только прогнозировать развитие процесса для любого наперед заданного начального состояния системы, но и управлять параметрами системы для проектирования наперед заданного динамического равновесия.

Информационной базой исследования послужили труды российских и зарубежных ученых по проблемам динамических систем в экономике и синергетическому управлению ими, в частности, работы ученых Ильи Пригожина, Германа Хакена, В.П.Милованова, Н.Н.Баутина, А.А.Колесникова, А.В.Братищева, а также материалы конференций, статей в отечественных и зарубежных изданиях.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1) Построены фазовые портреты поведения решений для экономической модели «Посредническая деятельность» в пакете MatLab + SimuLink для конкретных параметров, определена их устойчивость в положении равновесия и характер поведения.
2) Методом синергетического конструирования построена система аддитивного управления как денежным, так и товарным потоками для достижения заданного динамического равновесия из произвольного начального состояния.

Данная методика может быть применена при исследовании любого вида посреднической деятельности.

Апробация результатов исследования. Основные положения работы прошли научно-практическую апробацию на Межрегиональной научно-практической конференции «Первостепенное значение цикла «Научное исследование - практическое применение»» (Ростов-на-Дону, РГЭУ (РИНХ), Институт магистратуры, 3 июня 2019 г.).

Публикации.

1. Кузнецов М.В. Анализ неравновесных моделей динамических экономических систем / Г.А. Батищева, М.И. Журавлева, М.В. Кузнецов, Е.А. Трофименко // Вестник РГЭУ (РИНХ). – 2017. - № 4 (60).
2. Кузнецов М.В. Нелинейная межсекторная конкуренция «хищник-жертва» с неограниченным ростом. / Журавлева М.И., Кузнецов М.В. // «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)» Факультет компьютерных технологий и информационной безопасности. XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ, ПРИМЕНЕНИЯ И БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ». 18-19 мая 2017г.
3. Кузнецов М.В. Нелинейная межсекторная конкуренция «хищник-жертва» с ограниченным ростом. / Журавлева М.И., Кузнецов М.В. // ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Ученые записки, выпуск 19, РГЭУ(РИНХ), Факультет КТ и ИБ, Ростов-на-Дону, 2017.

4. Кузнецов М.В. Динамическая модель жесткой конкуренции / Г.А. Батищева, М.И. Журавлева, М.В. Кузнецов // Роль банковского и реального сектора в решении проблем социально-экономического развития: сборник статей Международной научно-технической конференции (15 ноября 2017 г., г. Омск). В 2 ч. Ч.1. – Уфа: Аэтерна, 2017. – с.74-77.
5. Кузнецов М.В. Нелинейная межсекторная модель в экономике сельского хозяйства/ Г.А. Батищева, М.И. Журавлева, Кузнецов М.В. // Научный вектор: сборник научных трудов магистрантов / научный редактор А.У. Альбеков. – Вып. 4. – Ростов н/Д: Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018. − 368 с. (С. 153-158).
6. Кузнецов М.В. Исследование и анализ эффективности управления человеческими ресурсами в торговой организации / Г.А. Батищева, М.В. Кузнецов, М.И. Журавлева// Актуальные вопросы современной экономики, 2018. - № 6, режим доступа http://авсэ.рф/ViewArticle.aspx
7. Кузнецов М.В. Нелинейная динамическая модель равновесия частного и государственного секторов / М.В. Кузнецов, М.И. Журавлева // Международная научно-практическая конференция «Новые направления научной мысли», 13 декабря 2018. Институт магистратуры РГЭУ(РИНХ)
8. Кузнецов М.В. Бифуркационный анализ и компьютерное моделирование нелинейной экономической системы взаимосвязанных экономических процессов / Г.А. Батищева, М.В. Кузнецов, М.И. Журавлева // Актуальные вопросы современной экономики, 2019. - № 3, режим доступа http://авсэ.рф/ViewArticle.aspx.

Глава 1
Основные экономические понятия посреднической деятельности на торговых площадках

1.1. Экономическая система как сеть взаимосвязанных и упорядоченных элементов экономики.

Как известно, в реальности экономическая есть сложный объект, который объединяет множество структур разного уровня и разной значимости. Безусловно, структуры связаны функционально, и их влияние друг на друга зависит от конкретной экономической ситуации и конкретных целей государственного или коммерческого планирования. Если некоторые экономические структуры взаимосвязаны в динамике, то эту взаимосвязь можно описать линейной или нелинейной динамической моделью для данной экономической системы. Эта система отражает взаимосвязь скоростей изменения конкретных экономических показателей. Например, спрос и предложение, валовый выпуск и трудовые ресурсы, посредническая деятельность, конкурентная борьба, хищник и жертва, обмен потребительными стоимостями, государственный и фермерский сектора и т.д.

Практика нам показывает, что экономическая система может в некоторые моменты быть эффективной, а в другие моменты погружаться в состояние хаоса. Безусловно, качество развития экономики зависит от ее типа. Рассмотрим это.

Напомним классификацию экономических систем: плановая, рыночная, традиционная и т.д. Однако в реальности современная экономика есть сплав нескольких экономик, т.е. является смешанной экономикой, в которой задействованы, как рыночные, так и государственные механизмы регулирования и управления экономикой.

Реально в разных странах складываются различные модели смешанной экономики. Они отличаются друг от друга своими "национальными коэффициентами смешения" разных форм собственности, рынка и государственного регулирования, экономической и постэкономической сторон.

При исследовании становится очевидным, что смешение экономики есть естественный процесс. Это зависит от уровня и возможностей материально – технической базы. Не лишне упомянуть и исторические условия, а также географическое положение. При этом не забудем социально – общественное устройство, национальные традиции и культуру каждой страны. В силу вышесказанного мы понимаем смешанную экономику как современную рыночную, в которой действуют и рыночные и государственные инструменты.

В рамках смешанной экономики в зависимости от той роли, которую играют государства в хозяйственной жизни различных стран, можно выделить американскую, японскую, шведскую экономические модели, социальное рыночное хозяйство Германии и т. д. (https://studopedia.su/1_33186_tipi-ekonomicheskih-sistem.html)

Отметим это подробнее (https://studfiles.net/preview/6313254/page:2/): ***Американская модель*** – это либеральная рыночно-капиталистическая модель, предполагающая приоритетную роль частной собственности, конкуренции, капиталистических мотиваций, высокий уровень социальной дифференциации. ***Германская модель*** – *модель* ***социального рыночного хозяйства,*** которая расширение конкурентных начал увязывает с созданием особой социальной инфраструктуры, смягчающей недостатки рынка и капитала, с формированием многослойной институциональной структуры. ***Шведская модель*** – это социальная модель, для которой характерен высокий уровень социальных гарантий, базирующихся на широком перераспределении доходов и распространении многообразных «свободных ассоциаций». ***Японская модель*** – модель регулируемого корпоративного капитализма, в которой благоприятные возможности накопления капитала сопрягаются с активной ролью государственного регулирования в сферах программирования экономического развития, структурной, инвестиционной и внешнеэкономической политики и с особым социальным значением корпоративного начала.

Выделяют три основных направления становления рыночных отношений (https://studopedia.su/1_33186_tipi-ekonomicheskih-sistem.html):

1. Либерализация экономики – это система мер, направленная на создание условий для свободного движения цен, рыночного обращения товаров и услуг, предпринимательства, а также открытости экономики .

2. Структурные преобразования – это изменение структуры экономики с целью преодоления прежней государственной структуры путем, прежде всего, преобразования отношений собственности.

3 . Институциональные преобразования – это создание условий для действия рыночной системы путем преобразования правовых институтов, формирования системы новых организаций и учреждений рыночного типа .

Рынок как экономическая категория – это система экономических отношений между хозяйствующими субъектами по поводу движения товаров и денег, которая базируется на меновых отношениях и платности всех товаров и услуг, на взаимном согласии, эквивалентности и конкуренции. Также **рынок** – это механизм взаимодействия покупателей и продавцов товаров и услуг по поводу установления цены, обеспечивающий обмен продуктами труда.

Рынок – обязательный компонент товарного производства. Без товарного производства нет рынка, без рынка нет товарного производства. Поэтому условия возникновения рынка совпадают с условиями возникновения товарного производства, а именно, общественное разделение труда и экономическая обособленность товаропроизводителей, обусловленная существованием частной собственности.

Понятие «рынок» многообразно, оно развивалось по мере развития экономики. В XIX веке французский экономист-математик О. Курно считал:

рынок характеризуется тем, что отношения покупателей и продавцов свободны, а цены легко и быстро выравниваются.

Рынок:

- это механизм, соединяющий производителя и потребителя на основе спроса и предложения;
- особый тип хозяйственных связей между субъектами хозяйствования, для которого характерны эквивалентность и возможность, свободный выбор партнеров, наличие конкуренции, а также прямые и обратные связи между производителями и потребителями;
- самонастраивающаяся на спрос система;
- результат развития человеческой цивилизации, общемировая ценность.

Сущность рынка отражается в его основных **функциях:**

- **информационная,** представляет информацию о состоянии и тенденциях развития рынка;
- **ценообразующая,** с помощью рыночного механизма ценообразования определяется цена на товар в конкретный промежуток времени;
- **саморегулирования** производства, способствующая согласованию производства и потребления, ведущая к сбалансированию спроса и предложения;
- **стимулирующая** функция, побуждает производителя к созданию новой и более прибыльной продукции с наименьшими издержками, а значит, поощряющая применение научно-технического прогресса;
- **регулирующая** функция, предполагающая обеспечение определенной пропорциональности в производстве и обмене между отраслями и регионами;
- **«санитарная»** функция, основанная на «вымывании» неконкурентоспособных предприятий и устаревших производств в силу их неконкурентоспособности;

- **эквивалентная** функция, благодаря которой рынок сопоставляет индивидуальные затраты товаропроизводителя с общественным «эталоном», выясняющая объективную ценность товара.

Классификация рынков:

- **свободный** (классический) рынок характеризуется большим количеством товаропроизводителей, свободным «входом» на этот рынок; мобильностью всех ресурсов, информированностью всех субъектов рынка обо всех его параметрах; однородностью продукции и невозможностью диктата цены со стороны какого-либо из участников. В реальной же действительности существуют барьеры на рынках, монополизм с его возможностью влияния на цены; разнообразие, а не однородность товаров, государственное регулирование рынка.
- **регулируемый *рынок*** – это результат развития цивилизации, когда государстве стремится смягчить удары рынка по интересам отдельных незащищенных членов общества.
- *местный, региональный, национальный, мировой рынок*.

Рынок – это система взаимосвязанных рынков, то есть это большая система, имеющая свои подсистемы. Среди них выделяется рынок товаров и услуг; рынок ресурсов (труда, земли, капитала), и финансовый рынок (рынок денег, ценных бумаг, валюты). Эти виды рынков связывают домашние хозяйства (население), основной функцией которых является потребление и предоставление экономических ресурсов фирмам и фирмы, основной функцией которых выступает удовлетворение потребностей домашних хозяйств. Взаимосвязь между ними принято изображать в виде экономического кругооборота.

Структура рынка – это совокупность взаимосвязанных качественных и количественных соотношений между отделенными элементами рынка, характеризующая ее устойчивую определенность и обеспечивающая функционирование рынка. Это внутреннее расположение, порядок отдельных элементов рынка, их удельный вес в общем объеме рынка. Рынок базируется на четырех основных элементах: спросе; предложении; цене; конкуренции.

(https://studfiles.net/preview/6313254/page:2/).

Рассмотрим теперь внутренние свойства экономической системы. В наиболее общем виде экономическую систему можно определить как совокупность элементов, необходимым образом связанных между собой и образующих определённую целостность. Другими словами, система – это целостное образование, состоящее из взаимосвязанных, взаимодействующих и взаимозависимых частей (элементов). Определённый класс этих свойств должен найти отражение в модели системы в виде набора соответствующих переменных и связей (отношений) между ними.

Более подробно укажем основные черты экономической системы:

1. Целостность.

- система как целое обладает свойствами, которые не сводимы к сумме свойств её элементов, свойство это называется эмерджентностью

2. Структурность. Функционирование системы как единого целого обеспечивается связями между её элементами.

3. Иерархичность. Система выступает как объединение своих подсистем. При этом она обладает свойством целостности: а именно, появляются новые, так называемые эмерджентные (порожденные) свойства, которых нет у отдельных её элементов и которые возникают в результате взаимодействия этих элементов. Целое не равно сумме входящих элементов.

4. Множественность описания каждой системы. Адекватное познание системы требует построения множества моделей, каждая из которых описывает определённый аспект системы.

5. Взаимозависимость системы и среды.

Экономика – это система общественного производства. Экономические системы, как динамические системы, обладают способностью к воспроизводству, самоорганизации и саморазвитию.

Существуют элементы, без которых невозможно представить существование любых экономических систем. Они фиксируются по средствам таких категорий, как благо, экономическое благо, ресурсы, субъекты экономической деятельности (отношений).

Экономическими благами являются природные ресурсы, т.е. главным образом материалы и сырье, служащие для производства других благ, человеческие ресурсы или способности и умение людей, деньги, предметы потребления и т.п.

Среди экономических благ особое место занимают ресурсы, или блага, используемые для производства других благ. В экономической теории их обычно называю факторами производства: труд, капитал, земля, человеческий ресурс.

В реальной жизни человек никогда не занимается экономической деятельностью в одиночку, производство экономических благ требует взаимодействия между людьми. В современном мире субъекты экономики вступают друг с другом в отношения по поводу производства и обмена продуктами и получения дохода от их реализации, вступают в отношения с государством по поводу не только выплат налогов, но и получения от государства дотаций, субсидий и т.п. Процесс производства, обмена, распределения и потребления благ всегда оказывается организованным определенным образом. В любой экономической системе должны решаться три основные организационные задачи: что, как и для кого производить.

Для того чтобы осуществить свой выбор в мире ограниченных ресурсов и скоординировать свои действия с действиями других субъектов, хозяйствующий субъект должен располагать необходимой информацией о том, что, как и для кого производить. Есть два способа координации экономической деятельности: стихийный порядок и иерархический порядок.

Спонтанный порядок представляет собой такую организацию взаимодействия, систему связей потребителей и производителей благ, при которой информация, необходимая экономическим субъектам для принятия решений путем сопоставления выгод и издержек, формируется и передается в форме ценовых сигналов (системы цен). В рамках данного порядка цены устанавливаются на соответствующих рынках в результате взаимодействия покупателей (спрос) и продавцов (предложение). Именно механизм колебания цен (альтернативных издержек) на ресурсы и производимые с их помощью блага, подсказывает хозяйственным агентам, что, как и для кого производить. Рынок – это и есть спонтанный порядок.

Иерархия представляет собой альтернативный рынку способ координации экономического поведения людей, альтернативный способ получения информации о том, что, как и для кого производить. Это система приказов и поручений, идущая сверху вниз, от некоего центра, принимающего решения относительно направлений использования ресурсов, к непосредственным исполнителям (производителям). Примером иерархического порядка служит первобытная община, командно административная система, фирма. Иерархия основана не на ценовых сигналах, а на власти, персонифицированной в лице руководителя фирмы или центрального управляющего органа. В реальной экономической действительности имеет место сосуществования стихийных порядков и иерархий (https://helpiks.org/4-86484.html).

Окончательно отметим, что экономическим динамическим системам присуще следующие особенности: при изменении некоторых параметров устойчивые состояния могут сменяться неустойчивым (в отличие от равновесных систем); могут быть бифуркационные переходы; могут быть в состоянии хаоса. Для этих систем характерными являются процессы самоорганизации - это целенаправленный процесс, в ходе которого совершенствуется или создается новая форма организации сложной динамической системы.

1.2. Принципы и методы работы в структурах посреднической деятельности.

Посредническая деятельность нацелена на выполнение двух основных *функций* - непосредственно торговой и организационно-коммерческой.

Торговая функция является основной и включает в себя непосредственно торговые операции - закупку товаров у производителей, других посредников или владельцев, транспортировка, хранение, преобразование промышленного ассортимента в торговый, реализация товаров с целью удовлетворения соответствующих потребностей, сокращение сроков товародвижения.

К **организационно-коммерческим функциям** относят изучение рынка, его подготовку, содействие налаживанию хозяйственных связей. Деятельность в части подготовки рынка должна включать организацию системы обслуживания потребителей, формирование каналов товародвижения, заключение хозяйственных договоров на обслуживание, прокат, оказание производственных и информационно-коммерческих услуг, проведение технических и экономических экспертиз, координацию поставок, рекламную деятельность.

Одной из ключевых фигур коммерческой деятельности является посредник. **Посредник** — это юридическое или физическое лицо, находящееся между другими контрагентами коммерческого процесса и выполняющее функции их сведения друг с другом для обмена товарами, услугами, информацией. На долю торговых посредников приходится от половины до двух третей товаров, участвующих в обороте.

Использование торговых посредников создает определенные преимущества для промышленных предприятий:

1) в этом случае фирма-производитель не вкладывает каких-либо значительных средств в организацию сбытовой сети, поскольку торгово-посреднические фирмы имеют свою материально-техническую базу;

2) торгово-посреднические фирмы освобождают производителя от многих забот, связанных с реализацией товара (сортировка и упаковка, подбор по ассортименту, приспособление к требованиям рынка);

3) использование капитала торгово-посреднических фирм для финансирования сделок на основе как краткосрочного, так и среднесрочного кредитования ускоряет оборачиваемость средств промышленной фирмы;

4) создается возможность проникновения на внешние рынки, монополизированные торговыми посредниками, например, брокеры в Англии.

Недостаток заключается в том, что в случае использования торгово-посреднических фирм, производитель лишается непосредственных контактов с рынком сбыта и целиком зависит от добросовестности и активности торгового посредника.

Посредническая деятельность осуществляется на следующих *принципах*:

1. Равноправие сторон. Это означает, что партнерские взаимоотношения суверенного посредника с продавцами и покупателями предполагают равную ответственность за нарушение условий договора.
2. Предприимчивость. Посредник в нужное время должен проявить инициативу, состязательность, хозяйственную сметку и деловитость, заинтересованность в реализации имеющихся резервов, предпринять все необходимые меры для решения конкретных задач, установления хозяйственных связей.
3. Совершенствование средств и форм. Посредник должен быть не пассивным регистратором, а активным участником и организатором хозяйственных связей, то есть рекомендовать рациональные формы связи, экономичные и эффективные виды продукции с учетом конкретных поставщиков и потребителей. Посредник - не просто передаточное и перевалочное звено между производителем и потребителем, но прежде всего организатор комплекса информационно-коммерческих и производственных

услуг, в котором сконцентрированы присущие сфере товарного обращения виды функций и работ.

4. Квалификация и профессионализм - усиление оперативности, мобильности, динамичности и своевременности выполнения посреднических функций. Это срочная и комплексная поставка дефицитной продукции, удовлетворение экстренной потребности. Посредник, специализируясь на сугубо коммерческих функциях, способен обеспечить более высокое качество этой работы с меньшими затратами.

5. Прибыльность. Посредник должен иметь право на возможность самостоятельно размещать и оплачивать заказы на выпуск продукции, выявлять и использовать резервы производственных мощностей, кредитования производителей с целью наращивания производства дефицитных товаров, участвовать в решении вопросов ценообразования, закупать и продавать товары за счет собственных средств. Доходы, полученные от всех видов деятельности - основной источник для функционирования посредника. На рынке не может существовать посредник, не зарабатывающий дополнительную прибыль. Посредник должен продавать полезные услуги, получать за это деньги, а если торгует плохо - расплачиваться за это своей прибылью.

Существует множество типов различных посредников, действующих на рынке, поэтому при их выборе предприятиям рекомендуется учитывать следующие рекомендации:

— убедиться, что выбранный посредник не является одновременно посредником конкурентов;

— отдавать предпочтение специализированному посреднику, так как он имеет больший опыт по продаже именно данного товара;

— предпочесть более известную компанию, имеющую более высокую репутацию на рынке;

— выяснить финансовую устойчивость посредника и его кредитоспособность;

— определить степень оснащенности материально-технической базы посредника (склады, ремонтные мастерские, демонстрационные залы и пр.), уровень квалификации работающего персонала;

— посетить лично компанию посредника, чтобы убедиться в ее солидности и компетентности;

— принимать во внимание месторасположение, количество магазинов, глубину географического проникновения, специализацию и ассортимент продаваемых товаров и услуг, общую маркетинговую концепцию и программу посредника (https://studopedia.ru/14_123633_zadachi-funktsii-printsipi-i-tseli-posrednicheskoy-deyatelnosti.html).

Отметим еще раз, что **Посредническая деятельность** – это тот самый «кит», который является основой мировой организационной инфраструктуры. Направление, которое всегда будет перспективным и прибыльным, ведь благодаря деятельности посредников осуществляются взаимоотношения между всеми отраслями (https://berichnow.ru/idei-biznesa/posrednicheskaya-deyatelnost-otlichnoe-nachalo-svoego-biznesa).

Глава 2. Нелинейные динамические системы.

2.1. Динамические системы и их основные характеристики

Динамическая система - математическая модель некоторого объекта, процесса или явления, изменяющегося во времени, параметры которой зависят от времени, явно или неявно.

Она описывает процесс перехода системы из одного состояния в другое, характеризуется своим начальным состоянием и законом, который описывает изменение начального состояния с течением времени.

Этот закон (закон эволюции) позволяет по начальному состоянию прогнозировать состояние динамической системы в последующие моменты времени [73].

Рассмотрим важнейшие свойства сложных динамических систем [13]:

1. Эмерджентность (целостность) динамических систем – совместное функционирование отдельных частей системы, что и представляет собой процесс функционирования всей системы как единого целого и порождает качественно новые свойства целой системы по сравнению со свойствами ее элементов.

2. Взаимодействие динамической системы с внешней средой: система реагирует на воздействие окружающей среды и эволюционирует под этим воздействием, при этом сохраняя ей присущие свойства.

3. Иерархичность динамической системы. Каждый элемент в декомпозиции системы можно рассматривать как целостную систему, а любую систему - как компонент большей системы.

Математическое описание динамических моделей осуществляется с помощью систем дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), а также систем обыкновенных алгебраических уравнений, теории графов, теории марковских цепей и т.д. [45]

Динамические системы, в отличие от статических систем, «обладают памятью», т.е. прошлое состояние системы влияет на текущее состояние системы. Поэтому для непрерывных моделей в уравнениях динамических систем присутствует производная по времени, связывающая прошлое и настоящее состояния систем. Чем больше состояний из прошлого влияют на настоящее состояние системы, тем более длительной памятью обладает система, и тем выше степень старшей производной в уравнениях модели.

В данной работе рассматриваются динамические системы, моделируемые при помощи автономной системы дифференциальных уравнений. Особые точки такой системы соответствуют положениям равновесия, а периодические решения - фазовым кривым.

На основе динамических моделей решаются задачи планирования и прогнозирования экономических процессов [13].

Начальное состояние экономической системы преобразуется в выходное состояние. Операторы и соответствующие системы могут быть линейными и нелинейными в зависимости от самих экономических объектов и их свойств.

2.2. Понятие хаоса и бифуркаций

При рассмотрении нелинейных динамических экономических систем необходимо упомянуть также теорию **динамического хаоса** [44, 46, 49]. Это математический аппарат, описывающий поведение подобных систем, подверженных при определённых условиях явлению, называемому хаос. Отличительной чертой таких систем является случайное поведение и вероятностный характер.

Примерами систем из окружающего нас мира, для которых возможно возникновение хаоса, являются атмосфера, турбулентные потоки, биологические популяции, общество, его экономические, политические и социальные подсистемы.

После второй мировой войны Германия и Япония, которые были значительно разрушены во время войны, были восстановлены и стали развиваться значительно быстрее, чем страны-победители. Хотя бурный экономический рост наблюдался в послевоенное время и в других странах, и это развитие часто сопровождалось значительными нерегулярными флуктуациями. В различных регионах развитие шло по-разному. Определяющую роль играли время и место [15].

Экономические системы, такие, как кредитно-денежные рынки, рынки труда характеризуются возможностью появления хаоса.

Существуют различные интерпретации определения такого на первый взгляд простого понятия как хаос. У древних греков хаос – это бесструктурная, бесформенная масса, не наделенная никаким порядком, из которого возникла упорядоченная Вселенная. Бытовое понятие хаоса связано с беспорядочным, неуправляемым поведением людей, механизмов и природы.

С точки зрения прикладных исследований финансовых рынков теория хаоса представляет перспективное современное направление математики.

Первые элементы теории хаоса появились еще в XIX веке. Значительный вклад в теорию хаоса внес французский ученый Анри Пуанкаре, он же ввел термин бифуркация . Развитие эта теория получила во второй половине XX века в работах Эдварда Лоренца и Бенуа Б. Мандельброта. А.Н. Колмогоров и В.И. Арнольд и Ю.К. Мозер построили теорию хаоса теорию Колмогорова-Арнольда-Мозера, называемую КАМ.

С математической точки зрения системы с хаотическим поведением являются упорядоченными и детерминированными, они подчиняются некоторому закону.

Математически точного определения хаоса не существует, его определяют как крайнюю непредсказуемость нелинейного и нерегулярного сложного движения в динамической системе. Для хаотической динамической системы свойственно: чувствительность к начальным условиям, нелинейность. Чувствительность к начальным условиям означает, что точки, первоначально очень близкие между собой, в будущем могут иметь значительно отличающиеся траектории. Малое отклонение от текущей траектории может привести к значительному отклонению в следующий момент времени.

Отметим также, что даже простые, детерминированные системы уравнений могут порождать хаотическое поведение, т.е. такое поведение, при котором система никогда не возвращается в стабильное состояние и не проявляется никакой закономерности.

Как мы отметили ранее, термин **бифуркация** ввел французский ученый Анри. Пуанкаре. Такое мгновенное появление новых состояний равновесия и называется бифуркацией. Когда происходит бифуркация, система будто полностью «теряет память».

Примером системы без памяти является развитое турбулентное движение.

Бифуркация характерна для большинства динамических процессов. В момент бифуркации появляется возможность направить процесс эволюции в новом направлении, по совсем другой линии. Система «колеблется» перед выбором дальнейшего пути развития. В этот момент резко возрастает роль незначительных случайных флуктуаций (возмущений), которые могут приводить к возникновению новой макроскопической структуры и резко изменить всё поведение системы. А это – существенная зависимость от начальных условий – как раз является главным признаком хаотической системы.

В этом случае происходит качественная перестройка системы (катастрофический скачок). На выбор новой траектории развития системы в момент бифуркации в некоторой степени влияет предыстория, т.е. то, каким именно путём система попала в точку бифуркации, а также характер нелинейности и диссипативности.

На дальнейшее развитие системы будут влиять случайные факторы. Однако достижение точки бифуркации – это «длительный» процесс. Между моментами бифуркаций развитие системы происходит почти линейно, более или менее предсказуемо. В какой-то момент либо за счёт внутренних сил, либо за счёт внешних сил, достигших некоторого критического значения, либо за счёт их интеграции происходит быстрое изменение параметров системы, стабильность которой значительно снижается, и возникает возможность новых разных других путей развития. После бифуркационного перехода наступает новый «спокойный участок», который снова в какой-то момент может смениться следующей бифуркацией.

В процессах самоорганизации происходит непрерывное разрушение старых и возникновение новых структур, новых форм организации, проявляющих качественно новые свойства.

Точка бифуркации - критический момент неустойчивости, когда сложная система осуществляет выбор дальнейшего пути эволюции. Точка бифуркации выступает в качестве точки максимальной чувствительности системы к внешним и к внутренним импульсам, в том числе к их незначительным флуктуациям.

Флуктуация — любое колебание или любое изменение.

Процессы бифуркации окружают нас повсюду: в развитии живого вещества, в общественной жизни. К бифуркационным процессам относятся революционные процессы. Следует отметить, что характер постреволюционного развития предсказать не удавалось никогда.

Механизм бифуркаций играет важнейшую роль в схеме эволюции. Он является источником роста разнообразия различных все более сложных форм организации.

Теории бифуркаций позволяют предугадать характер дальнейшего развития системы при переходе в новое качественно иное состояние, а также определить область существования системы и оценить ее устойчивость.

2.3. **Понятие открытых и неравновесных систем**

Теперь рассмотрим следующую классификацию систем.

Открытая система в теории систем - система, взаимодействующая со своей средой. Такое взаимодействие может осуществляться на уровне энергии, информации или материальных преобразований на границе. При этом система может быть устойчивой только при сохранении такого взаимодействия.

Неравновесная (диссипативная) система — это открытая система, устойчивое состояние которой наступает в неравновесной среде при условии диссипации (рассеивания) энергии, что происходит благодаря внешним факторам.

В диссипативных системах процессы самоорганизации происходят гораздо быстрее, если в системе присутствуют шумовые эффекты.

Возникновение новой формы организации системы или вещества определяется фундаментальными законами, такими как законы сохранения, причем не может быть описано как результат простого взаимодействия элементов системы. Законы сохранения обычно связаны с симметрией и описывают поведение равновесных систем. Механизмы, которые определяются этими законами, называются «механизмами сборки», в результате действия механизмов сборки возникают качественно новые структуры с новыми свойствами. Не всегда эти свойства явно следуют из свойств составляющих систему элементов или законов. Например, вода обладает аномальной зависимостью плотности от температуры, и это свойство невозможно вывести из известных свойств атомов водорода и кислорода [37,48].

2.4. Метод Ляпунова

Ниже рассмотрены основные формы систем, которые используются для создания экономических моделей.

Сначала дадим несколько определений. Особой точкой векторного поля называется точка, в которой векторное поле равно нулю. Т.е. это положение равновесия динамической системы, определяемой данным векторным полем.

Простейшими примерами особых точек являются особые точки линейных векторных полей на плоскости. С понятием векторного поля на плоскости можно связать линейную систему дифференциальных уравнений вида [35]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \tag{2.1}$$

где (x, y) — **изображающая точка** (точка на фазовой плоскости, которая отражает состояние системы в определенный момент времени);

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов системы.

Фазовая траектория - кривая в фазовом пространстве, составленная из изображающих точек, описывающих состояния динамической системы в последовательные моменты времени.

Фазовая траектория с началом в особой точке состоит в точности из этой особой точки, а соответствующая ей интегральная кривая представляет собой прямую, параллельную оси времени.

Фазовый портрет – совокупность фазовых траекторий, отражающих качественные черты поведения системы во времени.

Очевидно, точка $(0,0)$ в случае невырожденной матрицы A для системы (2.1) является единственной особой точкой такой системы уравнений.

Линейные уравнения не в состоянии описать сложные процессы в экономике, но используются при анализе нелинейных явлений.

Теперь рассмотрим **системy двух дифференциальных нелинейных уравнений**:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(x,y) \end{cases} \tag{2.2}$$

Одним из основных методов исследования нелинейных систем на устойчивость является **метод Ляпунова**. Его еще называют метод исследования устойчивости по линейному приближению или метод линеаризации. В его основе лежит следующая **теорема** [3]:

Пусть нелинейная система

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \ ,$$

где $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, имеет неподвижную точку X^*. Тогда в окрестности этой неподвижной точки фазовые портреты этой системы и её линеаризации качественно эквивалентны, если только неподвижная точка не является центром.

Другими словами, если действительная часть корней характеристического многочлена линеаризованной системы отлична от нуля, то фазовые портреты нелинейной системы и соответствующей ей линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки качественно эквивалентны. Единственная особая точка линеаризованной системы, которая не позволяет судить о типе неподвижной точки нелинейной системы без дополнительных исследований, это центр.

Положениями равновесия являются решения следующей системы:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Для получения линеаризованной системы необходимо разложить в степенной ряд правые части дифференциальных уравнений в окрестности неподвижной точки, удерживая только линейные члены разложения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(x^*, y^*) + \dfrac{\partial F_1(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \dfrac{\partial F_1(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*), \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(x^*, y^*) + \dfrac{\partial F_2(x^*, y^*)}{\partial x}(x - x^*) + \dfrac{\partial F_2(x^*, y^*)}{\partial y}(y - y^*), \end{cases}$$

где $F_1(x^*, y^*) = 0, \quad F_2(x^*, y^*) = 0$.

Такую систему при помощи линейной замены переменных ($x = x - x^*, \quad y = y - y^*$) всегда можно записать в форме (2.1), причем матрица коэффициентов системы принимает вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x^*, y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2(x^*, y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

Запишем характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Введем следующие обозначения:

$\sigma = a + d = tr(A)$,

$\Delta = ad - bc = \det(A)$.

Тогда корни характеристического уравнения записываются в виде:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2 - 4\Delta}{4}} \qquad (2.4)$$

Соответственно решение системы записывается в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
x &= C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{12}e^{\lambda_2 t} \\
y &= C_{21}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

Чтобы получить фазовую кривую $y(x)$, необходимо исключить время из (2.5). В зависимости от значений параметров σ и Δ различают четыре типа невырожденных особых точек линейных систем: узел, седло, фокус, центр [16]. При переходе через «бифуркационные границы» (некоторые определенные сочетания σ и Δ) характер фазового портрета качественно меняется (один тип фазовой траектории сменяется другим).

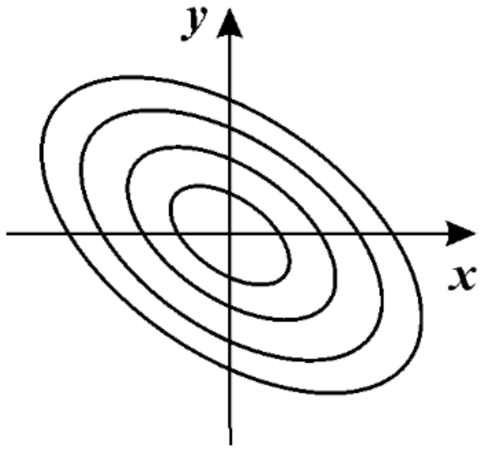
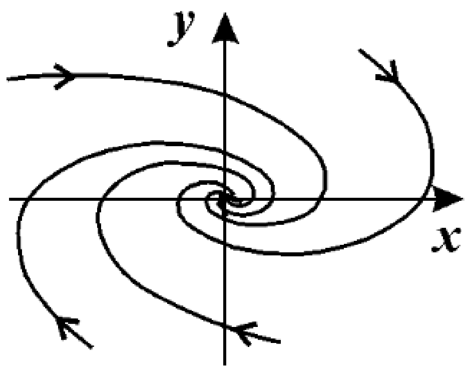
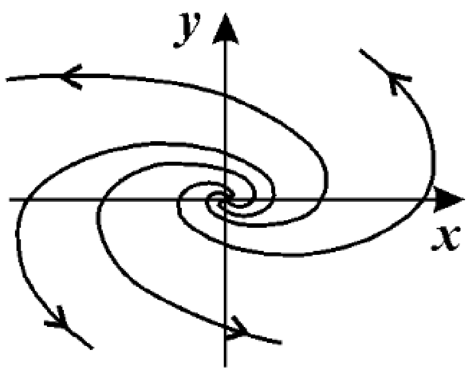
Положения равновесия могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Говоря простыми словами, состояние равновесия является устойчивым, если при малом отклонении изображающая точка не отойдет от стационарного состояния, а неустойчивым – если отойдет [16]. Устойчивая система возвращается в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния.

Теперь сформулируем **условие устойчивости системы** [16].

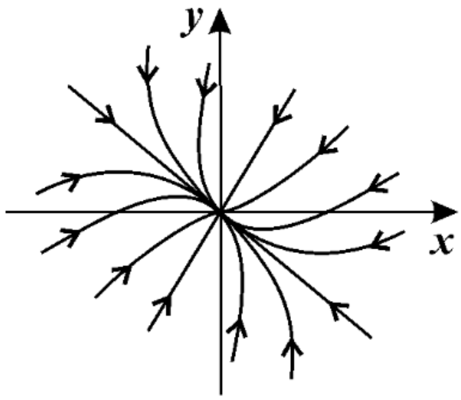
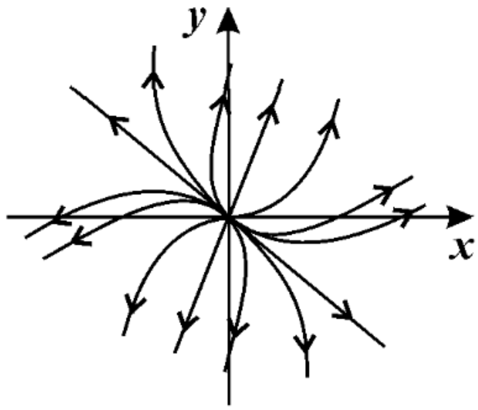
Для затухания колебательного процесса и, следовательно, устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней характеристического уравнения были отрицательными.

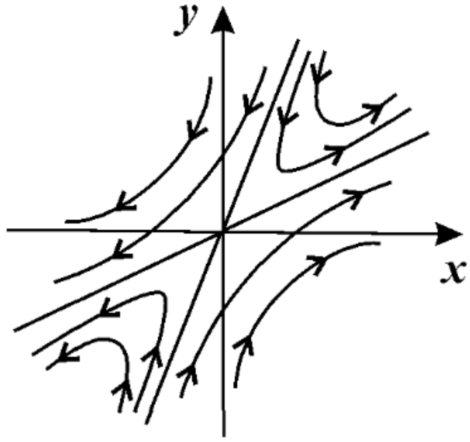
В таблице 2.1 представлена классификация особых точек в зависимости от параметров модели.

Таблица 2.1

Собственные значения	Особая точка	Фазовая траектория	
Чисто мнимые ($\sigma = 0, \Delta > 0$)	Центр	Окружности, эллипсы	
Комплексные с отрицательной действительной частью ($\sigma < 0$, $\sigma^2 < 4\Delta$)	Устойчивый фокус	Логарифмические спирали	
Комплексные с положительной действительной частью ($\sigma > 0$, $\sigma^2 < 4\Delta$)	Неустойчивый фокус	Логарифмические спирали	

продолжение таблицы 2.1

Действительные отрицательные ($\sigma < 0$, $\sigma^2 > 4\Delta$)	Устойчивый узел	Параболы	
Действительные положительные ($\sigma > 0$, $\sigma^2 > 4\Delta$)	Неустойчивый узел	Параболы	
Действительные разных знаков ($\sigma^2 > 4\Delta$)	Седло	Гиперболы	

Бифуркационный анализ помогает в установлении параметрического портрета системы, определяющего, как зависит от параметров расположение бифуркационных границ, на которых происходит качественная перестройка фазового портрета.

Пусть у динамической системы

$$\begin{cases} x_t' = F_1(x, y) \\ y_t' = F_2(x, y) \end{cases},$$

у которой правые части являются аналитическими функциями в некоторой области,

Пусть $S = (x_0, y_0)$ - положение равновесия (особая точка) системы.

Матрица Якоби для правой части системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x}, & \dfrac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x}, & \dfrac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix},$$

а λ_1 *и* λ_2 – ее собственные числа.

Положение равновесия S называется грубым, когда оба собственных числа не равны нулю, если они вещественные, а для случая комплексных собственных чисел должно быть Re $\lambda_i \neq 0$, i = 1,2. [3]

Грубость равносильна тому, что в характеристическом уравнении динамической системы:

$$\det[\lambda E - A] = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta$$

параметры

σ - след матрицы Якоби и

Δ - определитель матрицы Якоби

будут отличными от нуля, т.е. $\sigma\Delta \neq 0$. В противном случае положения равновесия называются или нейтральными

$\Delta \neq 0, \sigma = 0$

или кратными

$\Delta = 0$.

Сформулируем теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению [2, 5].

Теорема:

Если все собственные числа матрицы Якоби A динамической системы имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия $S(x_0, y_0)$ асимптотически устойчиво, в противном случае, если хоть одно собственное число имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия неустойчиво.

Плоскость параметров σ $и$ Δ можно разбить координатными осями и параболой

$$\frac{\sigma^2}{4} = \Delta$$

на области параметров с одинаковым характером положений равновесия (рисунок 2.2.1) [55].

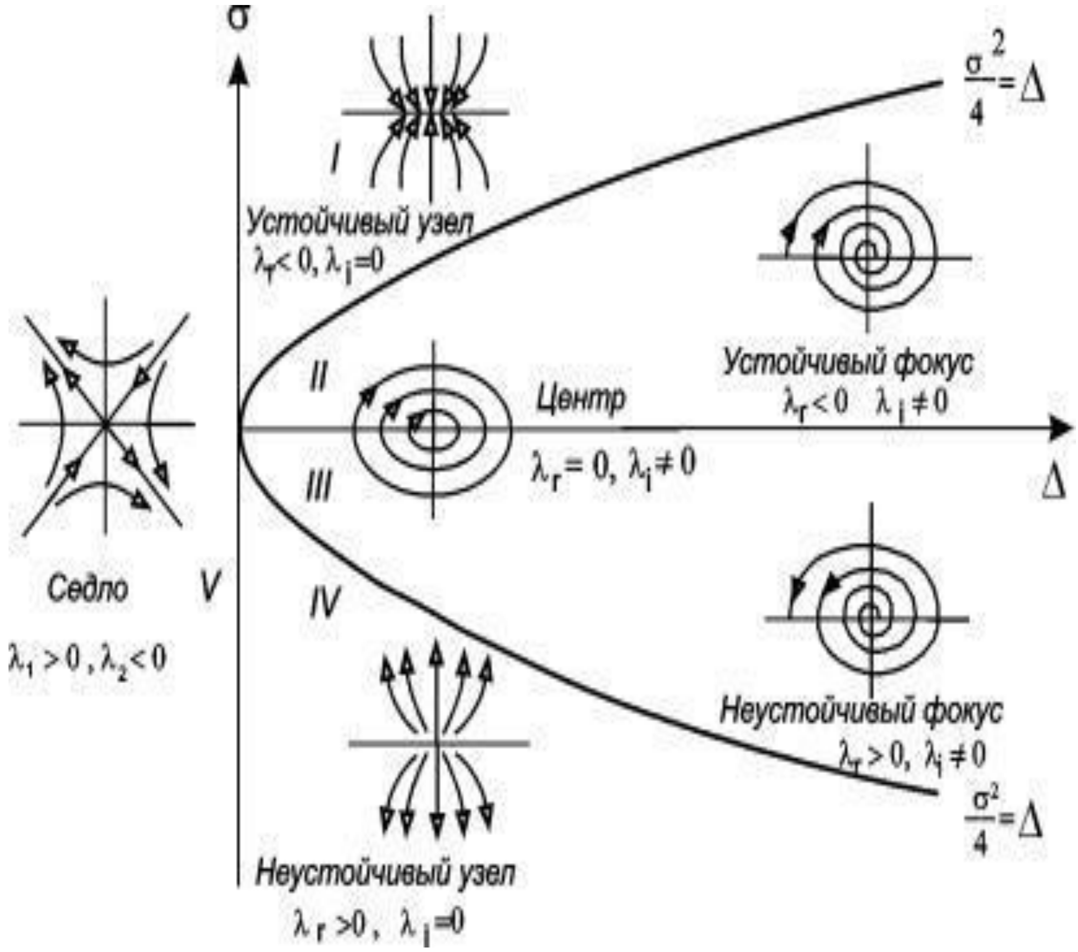


Рис. 2.2.1. Разбиение плоскости Δ, σ на области с одинаковым характером положений равновесия

Еще раз отметим, исследуя нелинейную динамическую систему, мы будем встречать понятия[14, 15, 16]:

- Динамическая система – система из нескольких взаимосвязанных процессов, знание состояния которых в фиксированный момент времени позволяет определить их состояние в любой последующий момент.
- Динамический хаос – система имеет случайное поведение (хаос) и вероятностный характер. При этом отметим, чувствительность к начальным условиям означает, что малое отклонение от текущей траектории может привести к значительному отклонению в следующий момент времени. В теории это известно как «эффект бабочки».
- Аттрактор – компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности

которого стремятся к нему по прошествии некоторого времени. Иначе, аттрактор – состояние, к которому тяготеет система.

- Фазовое пространство – это абстрактное пространство, координатами которого являются степени свободы системы. Рассмотрим маятник. У него 2 степени свободы, независимо от начального положения и скорости с течением времени маятник при наличии силы сопротивления всегда придет в состояние покоя – в точку (аттрактор).
- Бифуркация – мгновенное появление новых состояний равновесия. Это происходит при переходе через критическое состояние отклонений системы от устойчивого состояния равновесия. В области бифуркации поведение системы непредсказуемо. В этом случае происходит качественная перестройка системы (катастрофический скачок). Между моментами бифуркации развитие системы происходит почти линейно, более или менее предсказуемо.
- Точка бифуркации – критический момент неустойчивости: система выбирает дальнейший путь развития. В процессах самоорганизации происходит непрерывные разрушения старых и возникновение новых структур с качественно новыми свойствами.
- Флуктуация – это любое изменение или колебание. Бифуркации аттракторов разделяют на мягкие (внутренние) и жесткие (кризисы). Внутренние бифуркации приводят к топологичеким изменениям самих притягивающихся множеств, не затрагивая их бассейнов притяжения – областей, из которых фазовые траектории сходятся к данному аттрактору. А кризисы – бифуркации аттракторов, которые сопровождаются качественной перестройкой границ областей притяжения (бассейнов) аттракторов.
- Революционные процессы – это бифуркационные процессы, причем характер послереволюционного развития предсказать никому не удавалось. В схеме эволюции играет важнейшую роль механизм теории

бифуркаций, который позволяет предугадывать характер дальнейшего развития системы при переходе ее в новое качество.

При исследовании математической модели динамической системы, задаваемой автономной системой, содержащей параметры, возникают следующие вопросы:

1) Поведение системы при фиксированных значениях параметров.

2) Определение бифуркационных значений параметров.

После бифуркационного анализа получим параметрический портрет динамической системы.

На выбор новой траектории развития системы в момент бифуркации в некоторой степени влияет 1) предыстория, т.е. то, каким именно путём система попала в точку бифуркации, а также 2) характер нелинейности и диссипативности. На дальнейшее развитие системы будут влиять случайные факторы

2.5. Элементы синергетической теории управления

Рассмотрим возможность направленной самоорганизации для автономной системы [3, 4].

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x, y) \\ y_t' = f_2(x, y) \end{cases},$$

где $f_i(x, y)$ - аналитические функции. Методом АКАР создадим следующую систему скалярного управления [4]

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x, y) \\ y_t' = f_2(x, y) + u(x, y) \end{cases},$$

для которой траектории будут стягиваться в точку. Метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) базируется на положении, что в фазовом пространстве для динамических систем могут существовать многообразие, в котором притягиваются фазовые траектории регулятора. Если вернуться к системе (1) «Посредническая деятельность», то управление $\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ влияет на скорость изменения количества товара типа y.

Рассмотрим агрегированную переменную

$$\psi = \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y} + \varphi(\mathrm{x}).$$

Чтобы многообразие было притягивающим, агрегированная переменная должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\mathrm{T} * \psi'(\mathrm{t}) + \psi(\mathrm{t}) = 0,$$

где T>0 определяет переходное время.

Построим управление, стягивающее все траектории к кривой, исходной системы

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x, y) \\ y_t' = f_2(x, y) \end{cases},$$

где $f_k(x, y)$ – аналитические функции. Синтезируем методом АКАР систему скалярного управления

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x, y) \\ y_t' = f_2(x, y) + u(x, y) \end{cases},$$

в которой траектории будут стягиваться к точке. Для этого по агрегированной переменной $\psi = \alpha x + \beta y + \varphi(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$T * \psi(t) = -\psi(t),$$

построим управление, стягивающее все траектории к кривой $\beta y - \alpha x - \varphi(x)$:

$$u(x, y) = -f_2(x, y) + y_t' = -f_2(x, y) - \frac{1}{\beta}\big(\alpha x + \varphi(x) - \psi(x, y)\big)_t'$$

$$= -f_2(x, y) - \frac{1}{\beta}\Big(\alpha + \varphi_x'(x)\Big) f_1(x, y) - \frac{1}{\beta T}\psi(x, y).$$

Тогда система управления примет вид

$$\begin{cases} x_t' = f_1(x, y) \\ y_t' = -\frac{1}{\beta}\Big(\alpha + \varphi_x'(x)\Big) f_1(x, y) - \frac{1}{\beta T}(\alpha x + \beta y + \varphi(x)) \end{cases}.$$

Точечные аттракторы должны быть положениями равновесия этой системы, т.е. удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ \alpha x + \beta y + \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

Вычисление характеристического многочлена матрицы Якоби правой части в положении равновесия (x_c, y_c)этой системы дает

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{T}\right)\left(\lambda - f_{1x}^{'} + \frac{1}{\beta}(\alpha + \varphi_x^{'})f_{1x}^{'}\right) + \frac{1}{\beta}\varphi_{x^2}^{''} f_1 f_{1y}^{'}|_{(x_c,y_c)}$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{T}\right)\left(\lambda - f_{1x}^{'}(x_c, y_c) + \frac{1}{\beta}(\alpha + \varphi_x^{'}(x_c))f_{1x}^{'}(x_c, y_c)\right).$$

Аналогичная формула получается для системы скалярного управления переменной x

$$\begin{cases} x_t^{'} = f_1(x,y) + u(x,y) \\ y_t^{'} = f_2(x,y) \end{cases}$$

с агрегированной переменной $\psi = \alpha x + \beta y + \varphi(x)$

Тогда из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует такая

Теорема. Пусть (x_c, y_c) : $f_1(x_c, y_c) = 0$ есть положение равновесия системы управления. Оно асимптотически устойчиво, если

$$f_{1x}^{'}(x_c, y_c) - \frac{1}{\beta}\left(\alpha + \varphi_x^{'}(x_c)\right) f_{1y}^{'}(x_c, y_c) < 0$$

и неустойчиво, если

$$f_{1x}^{'}(x_c, y_c) - \frac{1}{\beta}\left(\alpha + \varphi_x^{'}(x_c)\right) f_{1y}^{'}(x_c, y_c) > 0$$

Или если

$$f_{1x}^{'} - \frac{\psi_{2y}^{'}(x_0, y_0)}{\psi_{2x}^{'}(x_0, y_0)} f_{1y}^{'} < 0,$$

то устойчиво и если

$$f_{1x}^{'} - \frac{\psi_{2y}^{'}(x_0, y_0)}{\psi_{2x}^{'}(x_0, y_0)} f_{1y}^{'} > 0,$$

то неустойчиво.

Пусть (x_c, y_c) : $f_1(x_c, y_c) = 0$ есть положение равновесия системы управления. Оно асимптотически устойчиво, если

$$f_{2y}'(x_c, y_c) - \frac{1}{\beta}\Big(\alpha + \varphi_x'(x_c)\Big) f_{2x}'(x_c, y_c) < 0$$

и неустойчиво, если

$$f_{2y}'(x_c, y_c) - \frac{1}{\beta}\Big(\alpha + \varphi_x'(x_c)\Big) f_{2x}'(x_c, y_c) > 0$$

Или если

$$f_{2y}' - \frac{\psi_{1y}'(x_0, y_0)}{\psi_{1x}'(x_0, y_0)} f_{2x}' < 0,$$

то устойчиво и если

$$f_{2y}' - \frac{\psi_{1y}'(x_0, y_0)}{\psi_{1x}'(x_0, y_0)} f_{2x}' > 0,$$

то неустойчиво

Подробно этот метод управления АКАР рассмотрим в главе 3 для задачи в сфере посреднической деятельности.

Глава 3.

Математическое и компьютерное моделирование динамической системы «Посредническая деятельность». Синергетическое управление системой.

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим модель взаимосвязанных экономических процессов в сфере посреднической деятельности. Математическую модель экономической системы «Посредническая деятельность» зададим автономной системой дифференциальных уравнений, приведенная в монографии [1]:

$$\begin{cases} x'_t = a_1 - a_2xy + a_3xy^2 \\ y'_t = b_1 - b_2xy \end{cases} \qquad (3.1)$$

В этой системе:

$x(t)$ – количество денег, находящееся в распоряжении предпринимателя;

$y(t)$ – количество товара типа y, обращающегося на рынке;

a_1 – доход предпринимателя, не связанный с реализацией товара типа y; a_3xy^2 – доход, который имеет предприниматель, покупая товар типа y на рынке и организуя снабженческую сеть для его перепродажи; $a_2xy(\text{убыль денег})$, $b_2xy(\text{убыль товара})$ – конкурентные и обменные члены, показывают, сколько денег типа x и товара типа y убывает с рынка в результате купли-продажи;

b_1 - величина постоянного притока товара y на рынок в единицу времени. Все параметры a_i, b_j $(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,2})$ предполагаются постоянными и положительными.

Главным вопросом, интересующим экономистов, является вопрос взаимозависимости величин, описывающих количество товара $y(t)$ и объем денежной массы $x(t)$ с течением времени при всевозможных допустимых значениях параметров системы.

На этот вопрос отвечает полный бифуркационный анализ двумерной автономной системы.

Предполагая, что все коэффициенты могут принимать только положительные значения, необходимо провести:

1) полный бифуркационный анализ двумерной автономной системы, включающий в себя определение и исследование характера положений равновесий системы в целом и исследование характера положений равновесий на бесконечности, а также рассмотреть задачу об отсутствии-наличии циклов.

2) Сконструировать синергетическое управление системой методом АКАР, как для денежной массы $x(t)$, так и для товара $y(t)$. Методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) построим систему аддитивного управления как денежным, так и товарным потоками для достижения заданного динамического равновесия из произвольного начального состояния.

3.2. Бифуркационный анализ задачи о посреднической деятельности.

Бифуркационный анализ помогает в установлении параметрического портрета системы, определяющего, как зависит от параметров расположение бифуркационных границ, на которых происходит качественная перестройка фазового портрета.

В системе «Посредническая деятельность»

$$\begin{cases} x'_t = a_1 - a_2xy + a_3xy^2 \\ y'_t = b_1 - b_2xy \end{cases} \tag{3.1}$$

несложно рассчитать положения равновесия этой системы, приравняв к нулю правые части уравнений системы (3.1):

$$\begin{cases} a_1 - a_2xy + a_3xy^2 = 0 \\ b_1 - b_2xy = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Из решения системы (3.2) найдем положения равновесия (особые точки). Из второго уравнения системы (3.2) следует:

$$y = \frac{b_1}{b_2x}$$

подставив это значение в первое уравнение системы (3.2), получим:

$$a_1 - a_2x\frac{b_1}{b_2} + a_3x\frac{b_1^2}{b_2^2x^2} = 0$$

$$\frac{a_3b_1^2}{b_2^2x} = \frac{b_1a_2}{b_2} - a_1$$

$$a_3b_1^2 = \left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{b_2}\right)b_2^2x$$

$$x = \frac{a_3b_1^2}{b_2(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

тогда

$$y = \frac{b_1}{b_2}\frac{(a_2b_1 - a_1b_2)b_2}{a_3b_1^2} = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1a_3}$$

Окончательно получаем решение системы (3.2)

$$S = \left(\frac{a_3b_1^2}{b_2(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_3b_1}\right)$$, если $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$.

Для более краткой записи введем обозначение:

$$\tau = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_3b_1}. \qquad (3.3)$$

Это решение системы (3.2) называют положением равновесия системы (1)

$$S = \left(\frac{b_1}{b_2\tau}, \tau\right)$$

Если $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$, то конечное состояние равновесия отсутствует, в этом случае траектории, которые начинаются в первой четверти выходят за ее пределы. Отметим, если $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$, то положение равновесия S положительно, а если $a_2b_1 - a_1b_2 < 0$, то S отрицательно.

Вывод: в первом случае S находится в первой четверти координатной плоскости, а во втором – в третьей четверти координатной плоскости.

Составим матрицу Якоби для системы (3.1).

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2y + a_3y^2 & -a_2x + 2a_3xy \\ -b_2y & -b_2x \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен матрицы A находится по формуле:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta,$$

где

E – единичная матрица,

σ – след матрицы Якоби A,

Δ – определитель матрицы Якоби A,

a_{ij} - элементы матрицы A.

Подставим элементы матрицы A в формулу характеристического многочлена:

$$\lambda^2 - (-a_2y + a_3y^2 - b_2x)\lambda + \left((-a_2y + a_3y^2)(-b_2x) - (-b_2x)(a_2x + 2a_3xy)\right)$$

отсюда получаем след и определитель матрицы Якоби

$$\sigma = a_3y^2 - a_2y - b_2x$$

$$\Delta = -(-a_2y + a_3y^2)b_2x + b_2y(-a_2x + 2a_3xy) = a_3b_2y^2x$$

Приравняв характеристический многочлен к нулю

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

и разрешив уравнение относительно λ, получим собственные числа матрицы A. Предварительно вычислим след σ и определитель Δ матрицы Якоби (матрицы линеаризации) для положения равновесия $S = \left(\frac{b_1}{b_2\tau}, \tau\right)$.

$$\sigma = a_3y^2 - a_2y - b_2x|_S = a_3\tau^2 - a_2\tau - \frac{b_1}{\tau},$$

$$\sigma = a_3\tau^2 - a_2\tau - \frac{b_1}{\tau}.$$

Преобразуем след σ. Исходя из обозначения (3.3), имеем

$$a_3 = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{\tau b_1},$$

тогда получаем

$$\sigma = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{\tau b_1}\tau^2 - a_2\tau - \frac{b_1}{\tau} = a_2\tau - \frac{a_1b_2}{b_1}\tau - a_2\tau - \frac{b_1}{\tau} = -\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{b_1}{\tau}\right).$$

итак,

$$\sigma == -\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \frac{b_1}{\tau}\right).$$

Вычислим определитель матрицы Якоби для положения равновесия S:

$$\Delta = a_3b_2y^2x|_S = a_3b_2\tau^2\frac{b_1}{b_2\tau} = a_3b_1\tau,$$
$$\Delta = a_3b_1\tau.$$

Для определения характера положения равновесия S необходимо определить знак σ и Δ в окрестности этого положения равновесия. Знаки σ и Δ зависят от значения

$$\tau = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_3b_1},$$

т.е. от знака $a_2b_1 - a_1b_2$.

Выпишем собственные числа матрицы A

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_1b_2\tau}{b_1} + \frac{b_1}{\tau}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a_1b_2\tau}{b_1} + \frac{b_1}{\tau}\right)^2 - a_3b_1\tau}$$

Исследуем характер состояния равновесия при помощи теоремы Ляпунова [2, 5], а именно:

1) Если $a_2b_1 - a_1b_2 < 0$, то в этом случае след $\sigma > 0$ и собственные числа λ_1 и λ_2 являются действительными и разных знаков. Положение равновесия S находится в 3 четверти фазовой плоскости и является седлом. Конкретный эксперимент подтверждает, что траектории первой четверти уходят на (+∞, 0).
2) Если же $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$, то в этом случае след $\sigma < 0$ и положение равновесия S находятся в первой четверти фазовой плоскости. И тогда, очевидно, возможны два варианта для

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \mp \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}$$

a) Если

$$\frac{\sigma^2}{4} - \Delta = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1b_2\tau}{b_1} + \frac{b_1}{\tau}\right)^2 - a_3b_1\tau \geq 0,$$

то получим, что S – есть устойчивый узел, т.к. $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ - действительные числа.

b) Если

$$\frac{\sigma^2}{4}-\Delta=\frac{1}{4}\left(\frac{a_1b_2\tau}{b_1}+\frac{b_1}{\tau}\right)^2-a_3b_1\tau<0,$$

то получим, что S – есть устойчивый фокус, т.к. λ_1 и λ_2 комплексные числа с Re(λ_i)<0.

Поскольку при $a_2b_1-a_1b_2\neq 0$ мы имеем $\sigma\neq 0, \Delta\neq 0$, то положения равновесия S будет грубым. Если бы $\Delta=0$, то положение S было бы кратным, а в случае $\sigma=0, \Delta\neq 0$ – нейтральным (или седло, или центр).

3.3. Проектирование S – моделей для системы «Посредническая деятельность» в случае узлов.

Используем ранее рассмотренную двухсекторную нелинейную динамическую модель «Посредническая деятельность»:

$$\begin{cases} x_t' = a_1 - a_2xy + a_3xy^2 \\ y_t' = b_1 - b_2xy \end{cases} \tag{3.1}$$

Для численного анализа экономических моделей и построения фазовых портретов и траекторий применяется пакет MatLab с графическим приложением Simulink.

Создадим при помощи графического приложения Simulink несколько структурных схем «Pos» (блок-диаграмм в виде направленного графа): структурная модель «Посредническая деятельность» (рис.1) и Маскированная действующая модель «Посредническая деятельность» для проведения вычислительных экспериментов (рис.2)

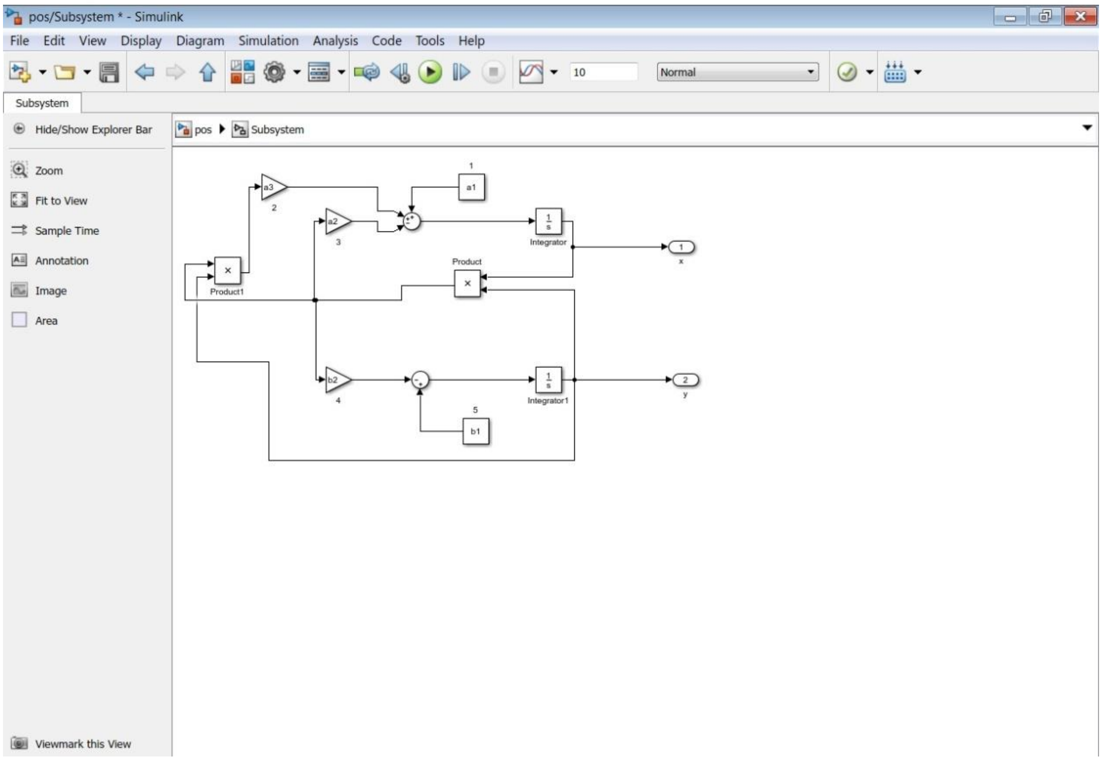


Рис.1. Структурная модель «Посредническая деятельность»

Маскируем эту модель (рис. 2)

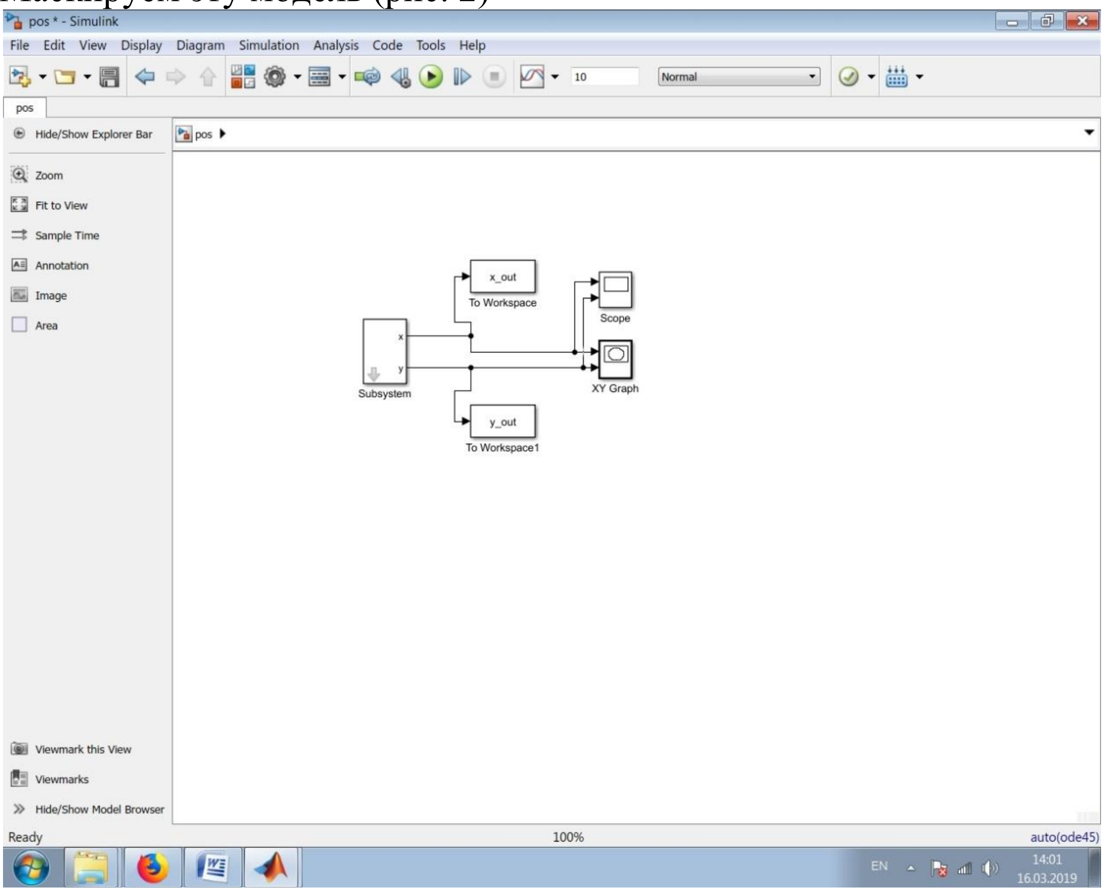


Рис.2. Маскированная действующая модель «Посредническая деятельность» для проведения вычислительных экспериментов

Выберем произвольным образом параметры a1=3, a2=5, a3=3, b1=4, b2=4.

```
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=3
a1 = 3
>> a2=5
a2 = 5
>> a3=3
a3 = 3
>> b1=4
b1 = 4
>> b2=4
b2 = 4
>> subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = 3/2
>> subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = 2/3
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[3/2;2/3])
A =
   -2.2222   -4.0000
   -0.6667   -1.5000
B =
  2×0 empty double matrix
C =
  0×2 empty double matrix
D =
     []
>> eig(A)
ans =
   -3.5336
   -0.1887
```

Положение равновесия имеет вид S=(3/2, 2/3), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -3{,}5336$, $\lambda_2 = -0{,}1887$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является устойчивым узлом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.3 (рис. 3).

```
>> hold on;
for x0=0:0.3:5
for y0=0:0.3:5
opts=simset('InitialState',[x0,y0]); [t,x,y]=sim('pos',10,opts);
plot(x(:,1),x(:,2));
set_param('pos', 'InitInArrayFormatMsg', 'None');
end
end
```

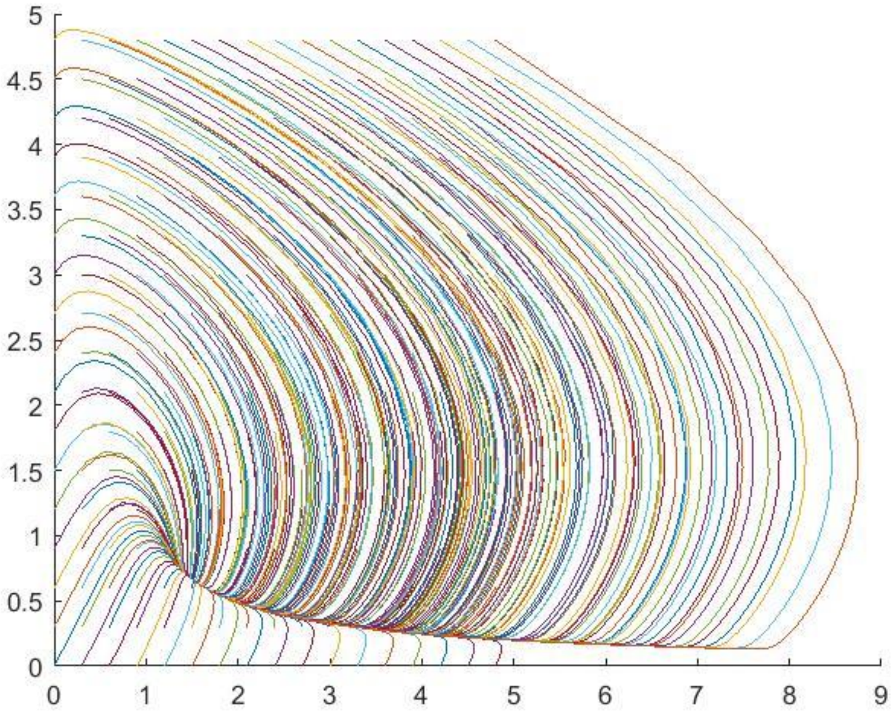


Рис. 3. Фазовый портрет с шагом

Изменим параметр a2 на массив a2 = [6,5.7,5.4,5.1,5,4.8,4.6,4,3.5], a1=3, a3=3, b1=4, b2=4 с начальными условиями x(0)=0, y(0)=0 (рис. 4).

```
>> figure(2);
fig=gcf;
clf(fig,'reset');
hold on;
a2_=[6,5.7,5.4,5.1,5,4.8,4.6,4,3.5];
for val=1:9
x0=0
y0=0
a2=a2_(val);
sim('pos');
```

```
figure(2);
plot(x_out,y_out);
end
```

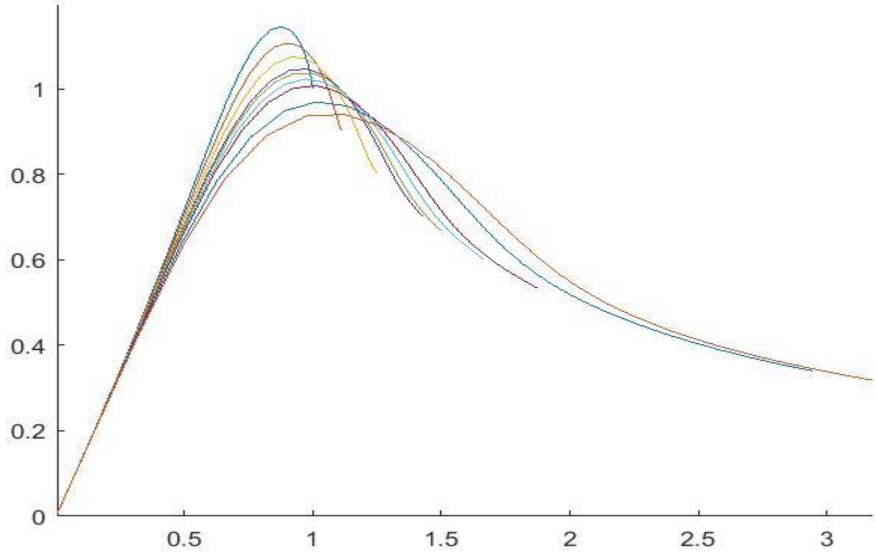


Рис. 4. Фазовый портрет с одним параметром, состоящего из массива

Рассмотрим другой набор параметров a1=2, a2=5, a3=2, b1=2, b2=4.

```
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x =
-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y =
-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=2
a1 = 2
>> a2=5
a2 = 5
>> a3=2
a3 = 2
>> b1=2
b1 = 2
>> b2=4
b2 = 4
>> subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = 1
>> subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = 1/2
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[1;1/2])
```

```
A =
   -2.0000   -3.0000
   -2.0000   -4.0000
B =
  2×0 empty double matrix
C =
  0×2 empty double matrix
D =
     []
>> eig(A)
ans =
   -0.3542
   -5.6458
```

Положение равновесия имеет вид S=(1, 1/2), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -0{,}3542$, $\lambda_2 = -5{,}6458$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является устойчивым узлом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.3 (рис. 5).

```
>> hold on;
for val=0:0.3:5
x0=val
y0=val
sim('pos');
figure(1);
plot(x_out, y_out);
end
```

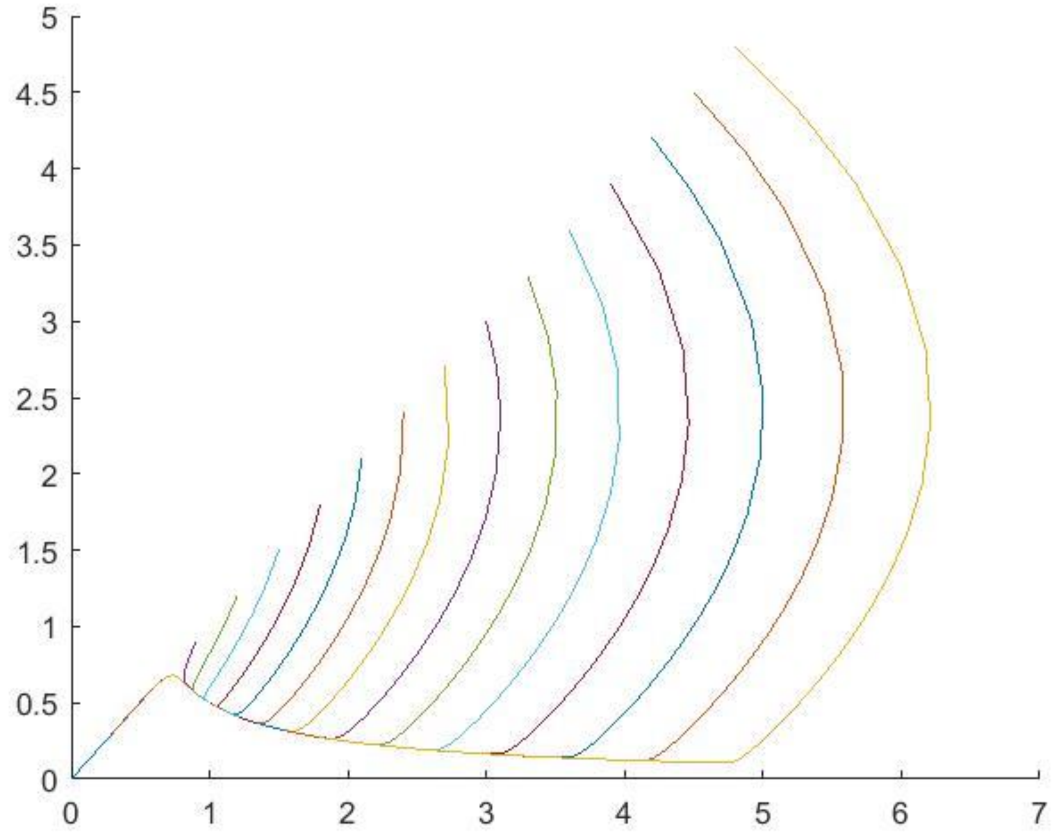


Рис. 5. Фазовый портрет с шагом

Изменим параметр a2 на массив a2 = [4.5,5,5.5,6,6.5], a1=2, a3=2, b1=2, b2=4 с начальными условиями x(0)=0, y(0)=0 (рис. 6).

```
>> figure(2);
fig=gcf;
clf(fig,'reset');
hold on;
a2_=[4.5,5,5.5,6,6.5];
for val=1:5
x0=1
y0=1
a2=a2_(val);
sim('pos');
figure(2);
plot(x_out,y_out);
end
```

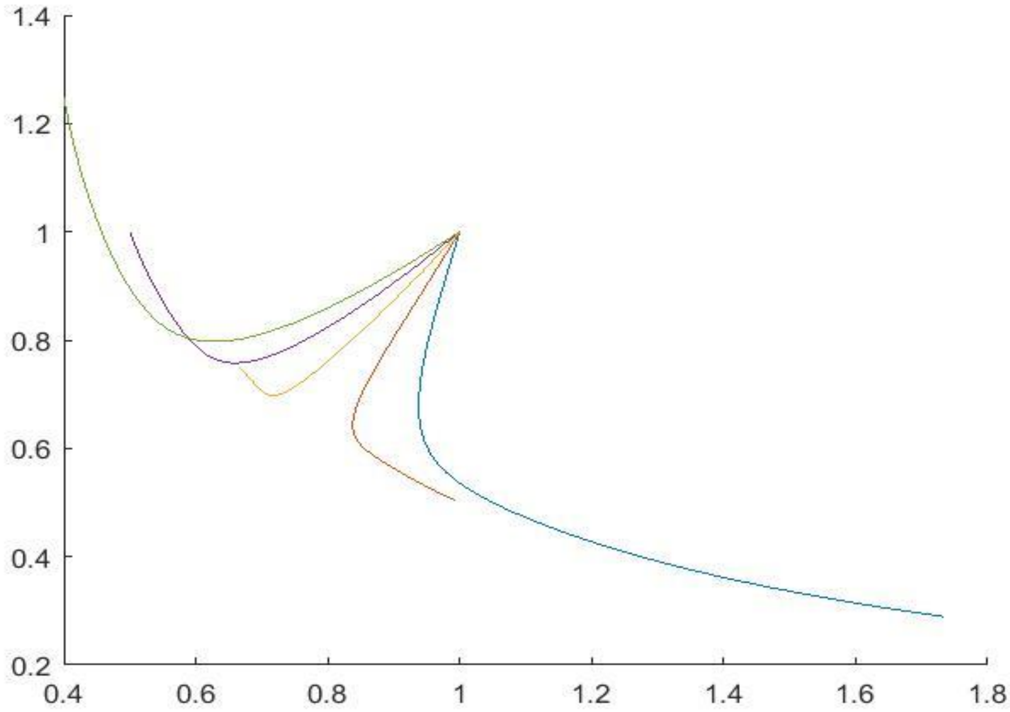


Рис. 6. Фазовый портрет с одним параметром, состоящего из массива

Исходя из бифуркационного анализа, мы заключаем, что случай любого узла имеет экономический смысл, т.к. в этом случае положение равновесия всегда находится в первой четверти.

3.4. Проектирование S – моделей для системы «Посредническая деятельность» в случае фокусов.

Исследуем теперь задачу посреднической деятельности (3.1) для случая фокусов. При построении фазовых портретов задачи используем пакет MatLab с графическим приложением SimuLink и структурные схемы «pos»: блок-диаграмма в виде направленного графа (рис.1) и маскированная блок-диаграмма для проведения вычислительных экспериментов (рис.2).

Выберем произвольным образом параметры a1=1, a2=2, a3=1, b1=2, b2=1.

```
>>syms a1a2a3b1b2
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=1
a1 = 1
```

```
>> a2=2
a2 = 2
>> a3=1
a3 = 1
>> b1=2
b1 = 2
>> b2=1
b2 = 1
>> subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = 4/3
>> subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = 3/2
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[4/3;3/2])
A =
   -0.7500    1.3333
   -1.5000   -1.3333
B =
   Empty matrix: 2-by-0
C =
   Empty matrix: 0-by-2
D =
     []
>>eig(A)
ans =
  -1.0417 + 1.3838i
  -1.0417 - 1.3838i
```

Положение равновесия имеет вид S=(4/3, 3/2), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -1.0417 + 1.3838i$, $\lambda_2 = -1.0417 - 1.3838i$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является устойчивым фокусом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.2 (рис. 7).

```
>> hold on;
for val=0:0.2:5
x0=val
y0=val
sim('pos');
figure(1);
plot(x_out, y_out);
```

```
end
```

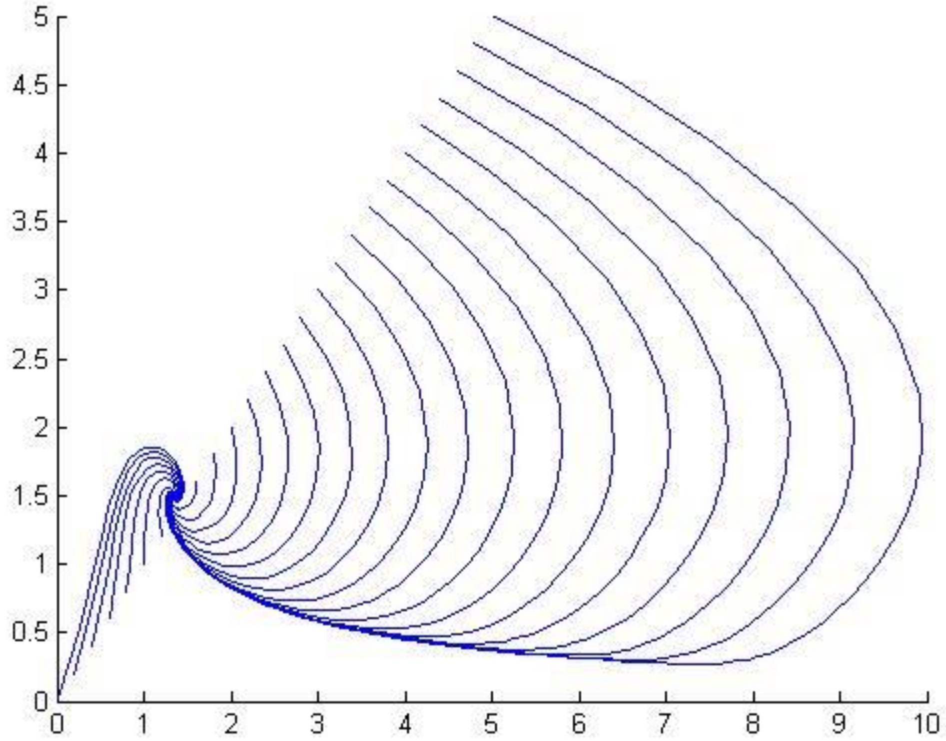


Рис. 7. Фазовый портрет с шагом

Изменим параметр b1 на массив b1_ = [5,4,3,2,1.5], a1=1, a2=2, a3=1, b2=1 с начальными условиями x(0)=2, y(0)=2 (рис. 8).

```
>> figure(2);
fig=gcf;
clf(fig,'reset');
hold on;
b1_=[5,4,3,2,1.5];
for val=1:5
x0=2
y0=2
b1=b1_(val);
sim('pos');
figure(2);
plot(x_out,y_out);
end
```

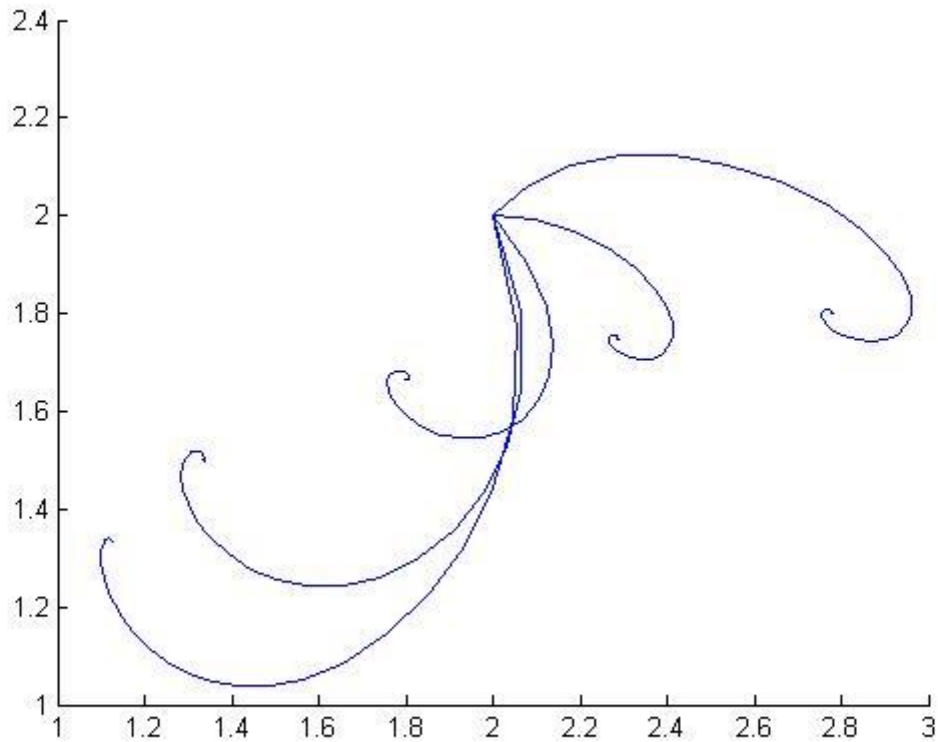


Рис. 8. Фазовый портрет с одним параметром, состоящего из массива

Рассмотрим другой набор параметров a1=3, a2=4, a3=1, b1=5, b2=1.

```
>> syms a1a2a3b1b2
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=3;
>> a2=4;
>> a3=1;
>> b1=5;
>> b2=1;
>> subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = 25/17
 >> subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = 17/5
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[25/17;17/5])
A =
   -2.0400    4.1176
   -3.4000   -1.4706
B =
  2×0 empty double matrix
```

```
C =
  0×2 empty double matrix
D =
     []
>> eig(A)
ans =
  -1.7553 + 3.7308i
  -1.7553 - 3.7308i
```

Положение равновесия имеет вид S=(25/17, 17/5), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -1.7553 + 3.7308i$, $\lambda_2 = -1.7553 - 3.7308i$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является устойчивым фокусом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.3 (рис. 9).

```
hold on;
for val=0:0.3:5
x0=val
y0=val
sim('pos');
figure(1);
plot(x_out, y_out);
end
```

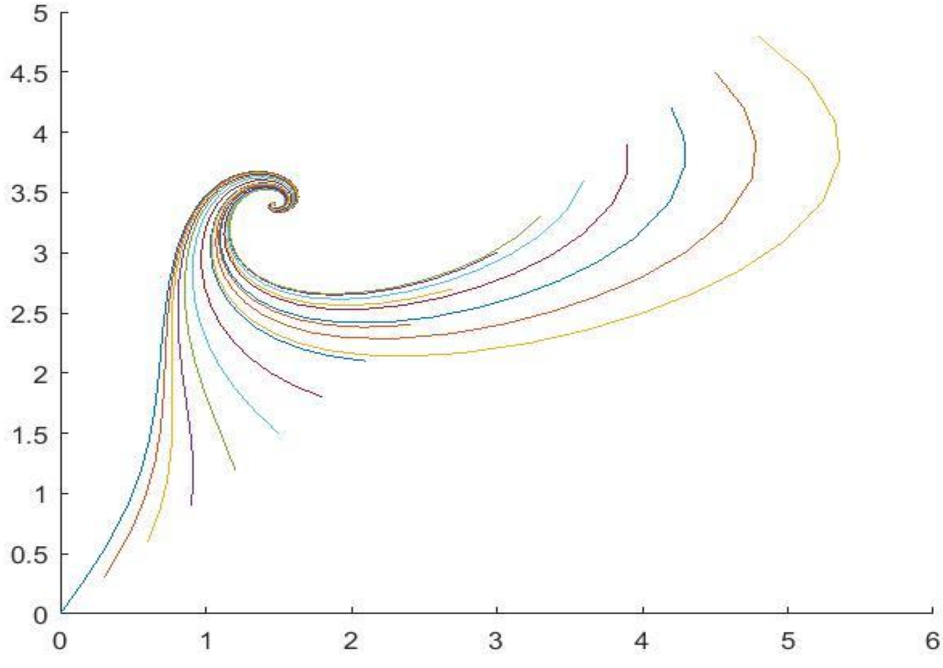


Рис. 9. Фазовый портрет с шагом

Изменим параметр b1 на массив b1_ = [5,4,3,2,1.5], a1=1, a2=2, a3=1, b2=1 с начальными условиями x(0)=2, y(0)=2 (рис. 10).

```
figure(2);
fig=gcf;
clf(fig,'reset');
hold on;
b1_= [5,4,3,2,1.5];
for val=1:5
x0=2
y0=2
b1=b1_(val);
sim('pos');
figure(2);
plot(x_out,y_out);
end
```

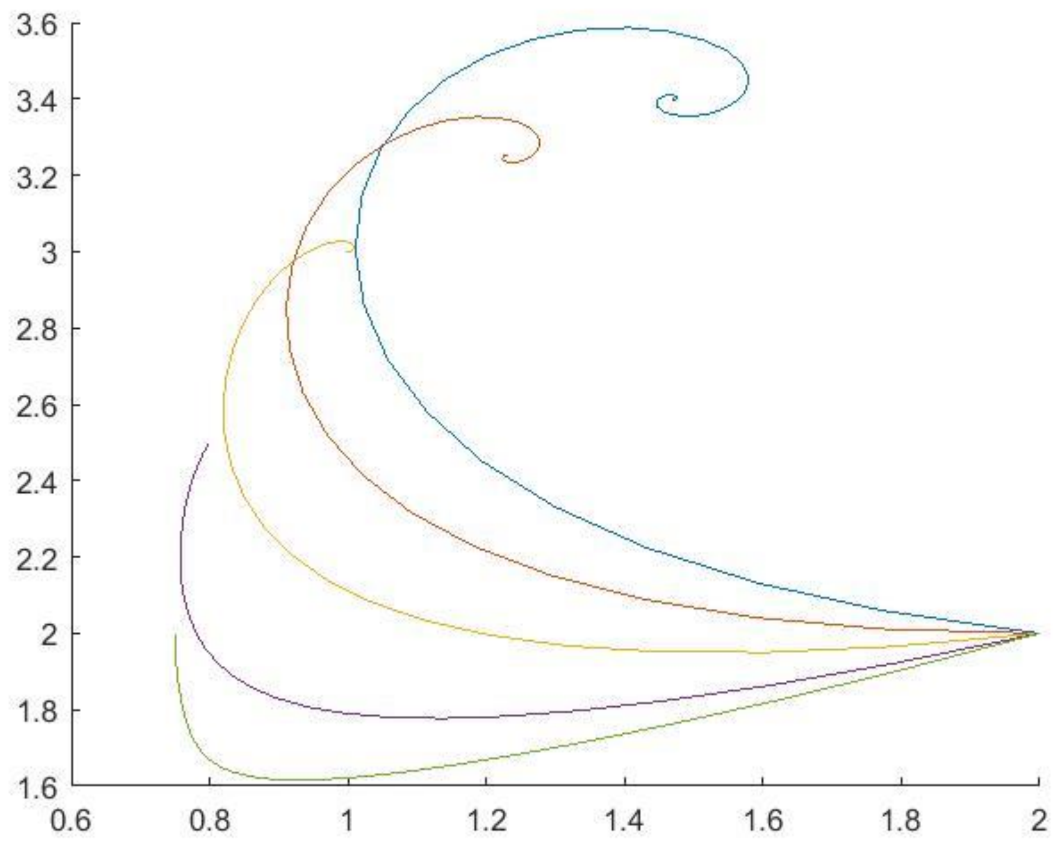


Рис. 10. Фазовый портрет с одним параметром, состоящего из массива

Рассмотрим другой набор параметров a1=2, a2=5, a3=2, b1=4, b2=2.

```
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
```

```
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=2
a1 = 2
>> a2=5
a2 = 5
>> a3=2
a3 = 2
>> b1=4
b1 = 4
>> b2=2
b2 = 2
>> subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = 1
>> subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = 2
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[1;2])
A =
   -2.0000    3.0000
   -4.0000   -2.0000
B =
  2×0 empty double matrix
C =
  0×2 empty double matrix
D =
     []
>> eig(A)
ans =
  -2.0000 + 3.4641i
  -2.0000 - 3.4641i
```

Положение равновесия имеет вид S=(1, 2), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -2.0000 + 3.4641i$, $\lambda_2 = -2.0000 - 3.4641i$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является устойчивым фокусом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.3 (рис. 11).

```
>> hold on;
for val=0:0.3:5
x0=val
y0=val
```

```
sim('pos');
figure(1);
plot(x_out, y_out);
end
```

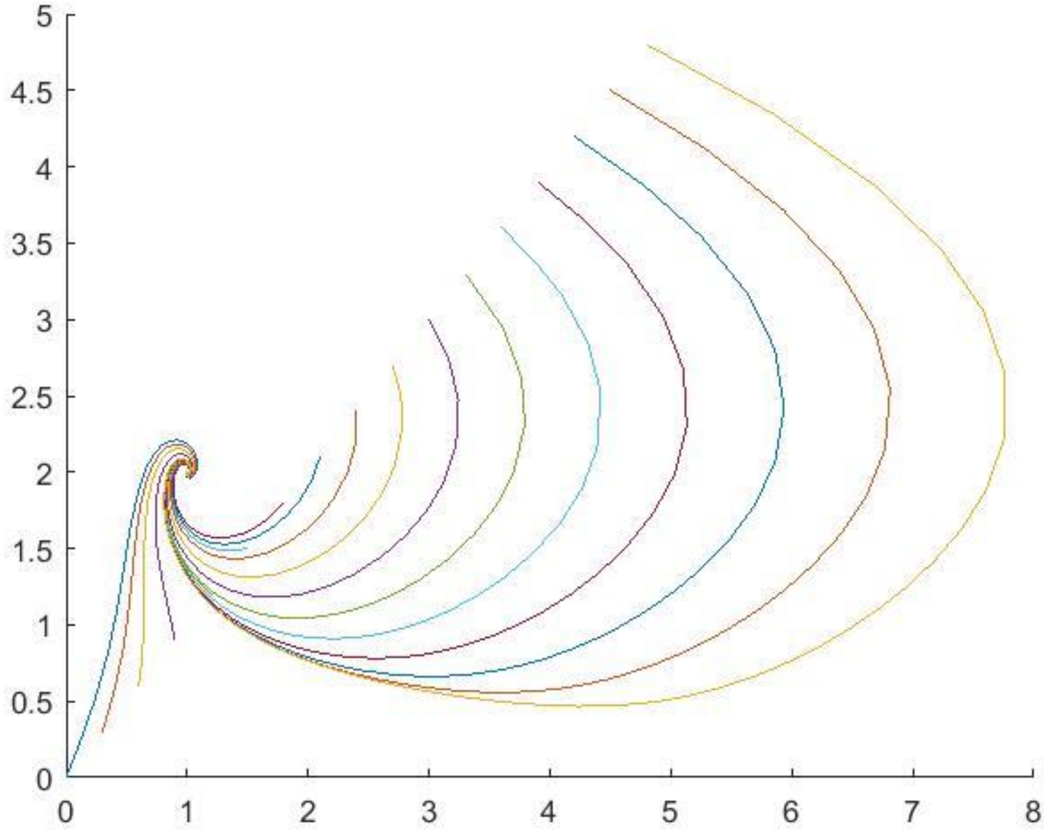


Рис. 11. Фазовый портрет с шагом

Изменим параметр a2 на массив a2_ = [4,4.5,5,5.5,6], a1=1, a3=1, b1=4, b2=1 с начальными условиями x(0)=0, y(0)=0 (рис. 12).

```
>> figure(2);
fig=gcf;
clf(fig,'reset');
hold on;
a2_=[4,4.5,5,5.5,6];
for val=1:5
x0=0
y0=0
a2=a2_(val);
sim('pos');
figure(2);
plot(x_out,y_out);
end
```

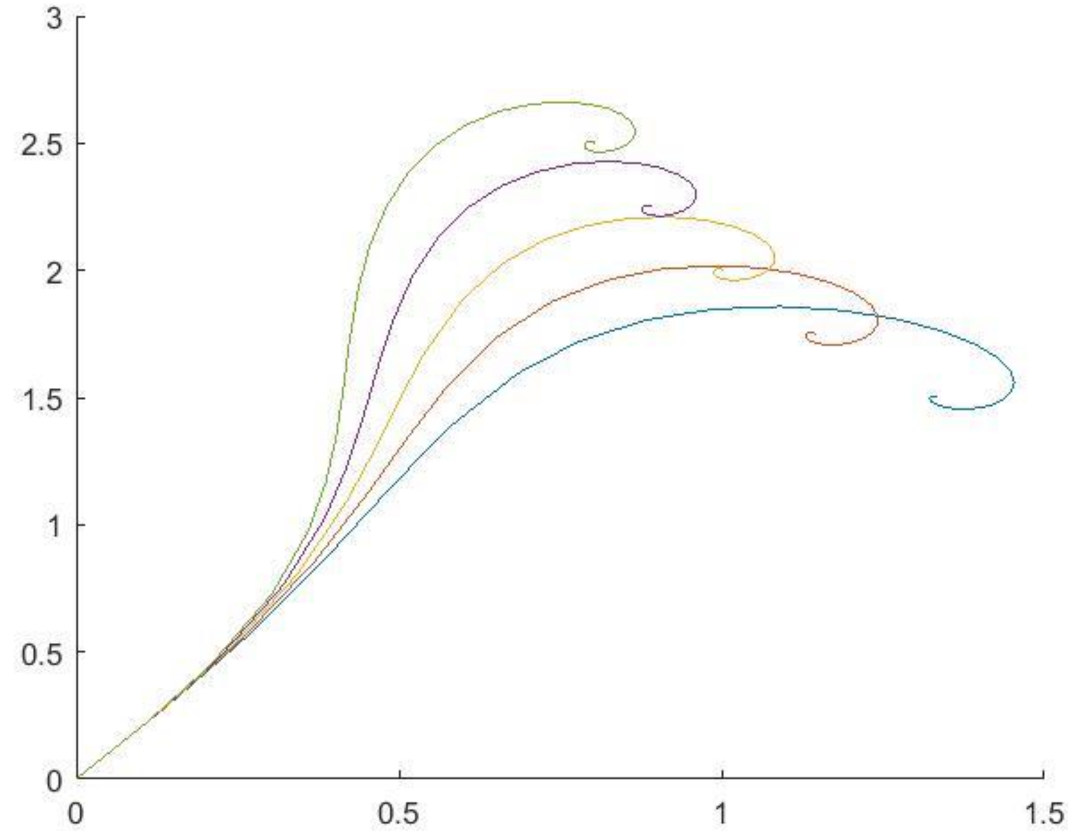


Рис. 12. Фазовый портрет с шагом

В пункте 3.2 проведен бифуркационный анализ задачи (3.1) откуда мы делаем вывод, что случай фокуса имеет экономический смысл, поскольку в этом случае положение равновесия всегда находится в первой четверти.

3.5. Проектирование S – моделей для системы «Посредническая деятельность» в случае седла.

Проведем исследование задачи посреднической деятельности (3.1) для случая седла. Как и ранее, при построении фазовых портретов задачи используем пакет MatLab с графическим приложением SimuLink и структурные схемы «pos»: блок-диаграмма в виде направленного графа (рис.1) и маскированная блок-диаграмма для проведения вычислительных экспериментов (рис.2).

Выберем произвольным образом параметры a1=3, a2=4, a3=2, b1=2, b2=4.

```
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
```

```
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=3
a1 = 3
>> a2=4
a2 = 4
>> a3=2
a3 = 2
>> b1=2
b1 = 2
>> b2=4
b2 = 4
>> subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = -1/2
>> subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = -1
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[-1/2;-1])
A =
    5.0000    3.0000
    1.0000    0.5000
B =
  2×0 empty double matrix
C =
  0×2 empty double matrix
D =
     []
>> eig(A)
ans =
    5.5895
   -0.0895
```

Положение равновесия имеет вид S=(-1/2, -1), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = 5.5895,\ \lambda_2 = -0.0895$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является седлом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями x = от -3 до 3 с шагом 0.3, y = от -4 до 4 с шагом 0.3 (рис. 13).

```
>> hold on;
for x0=-3:0.3:3
for y0=-4:0.3:4
opts=simset('InitialState',[x0,y0]); [t,x,y]=sim('pos',0.07,opts);
```

```
plot(x(:,1),x(:,2));
set_param('pos', 'InitInArrayFormatMsg', 'None');
end
```

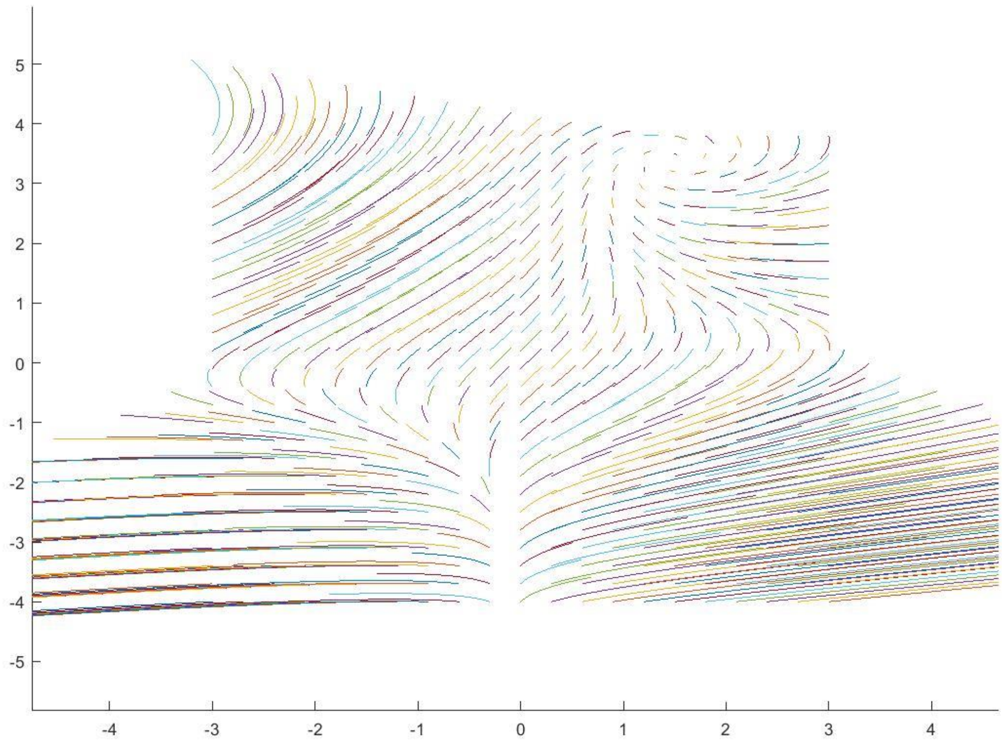


Рис. 13. Фазовый портрет с шагом

Выберем произвольным образом параметры a1=3, a2=2, a3=2, b1=3, b2=1.

```
>>syms a1a2a3b1b2
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=3
a1 = 3
>> a2=2
a2 = 2
>> a3=2
a3 = 2
>> b2=3
b2 = 3
>> b1=1
b1 = 1
>>subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
```

```
ans = -2/21
>>subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = -7/2
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[-2/21;-7/2])
A =
   19.2500    0.8571
    3.5000    0.0952
B =
   Empty matrix: 2-by-0
C =
   Empty matrix: 0-by-2
D =
     []
>>eig(A)
ans =
   19.4054
   -0.0601
```

Положение равновесия имеет вид S=(-2/21, -7/2), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = 19.4054$, $\lambda_2 = -0.0601$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является седлом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от -5 до 3 с шагом 0.5 (рис. 14).

```
>> hold on;
forval=-5:0.5:3
x0=val
y0=val
sim('pos');
figure(1);
plot(x_out, y_out);
end
```

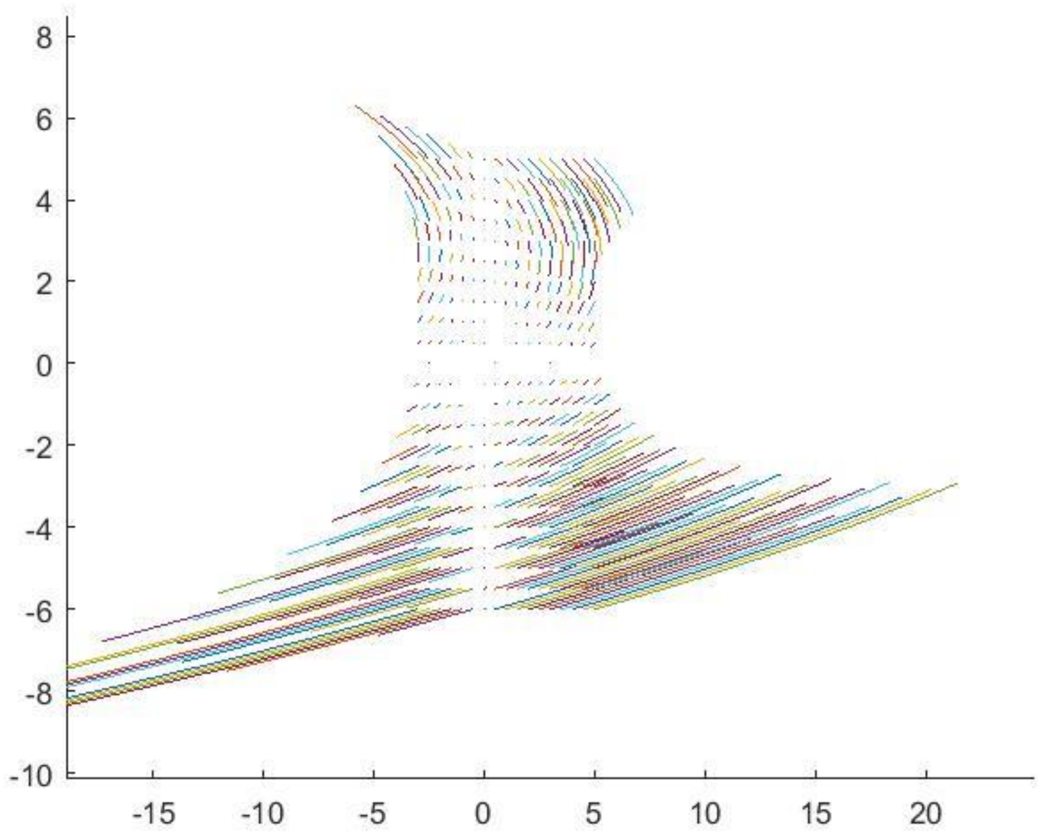


Рис. 14. Фазовый портрет с шагом

Выберем произвольным образом параметры a1=5, a2=8, a3=8, b1=5, b2=10.

```
>>syms a1a2a3b1b2
>> [x y]=solve('a1-a2*x*y+a3*x*y^2','b1-b2*x*y')
x = -(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2)
y = -(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1)
>> a1=5
a1 = 5
>> a2=8
a2 = 8
>> a3=8
a3 = 8
>> b1=5
b1= 5
>> b2=10
b2 = 10
>>subs(-(a3*b1^2)/(a1*b2^2 - a2*b1*b2))
ans = -2
```

```
>>subs(-(a1*b2 - a2*b1)/(a3*b1))
ans = -1/4
>> [A,B,C,D]=linmod2('pos',[-2;-1/4])
A =
   2.5000   24.0000
    2.5000   20.0000
B =
  2×0 empty double matrix
C =
  0×2 empty double matrix
D =
     []>>
eig(A)
ans =
   -0.4360
   22.9360
```

Положение равновесия имеет вид S=(-2, -1/4), а собственные числа матрицы Якоби: $\lambda_1 = -0.4360$, $\lambda_2 = 22.9360$. По теореме Ляпунова это положение равновесия является седлом [3, 5].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от -3 до 10 с шагом 0.15 (рис. 15).

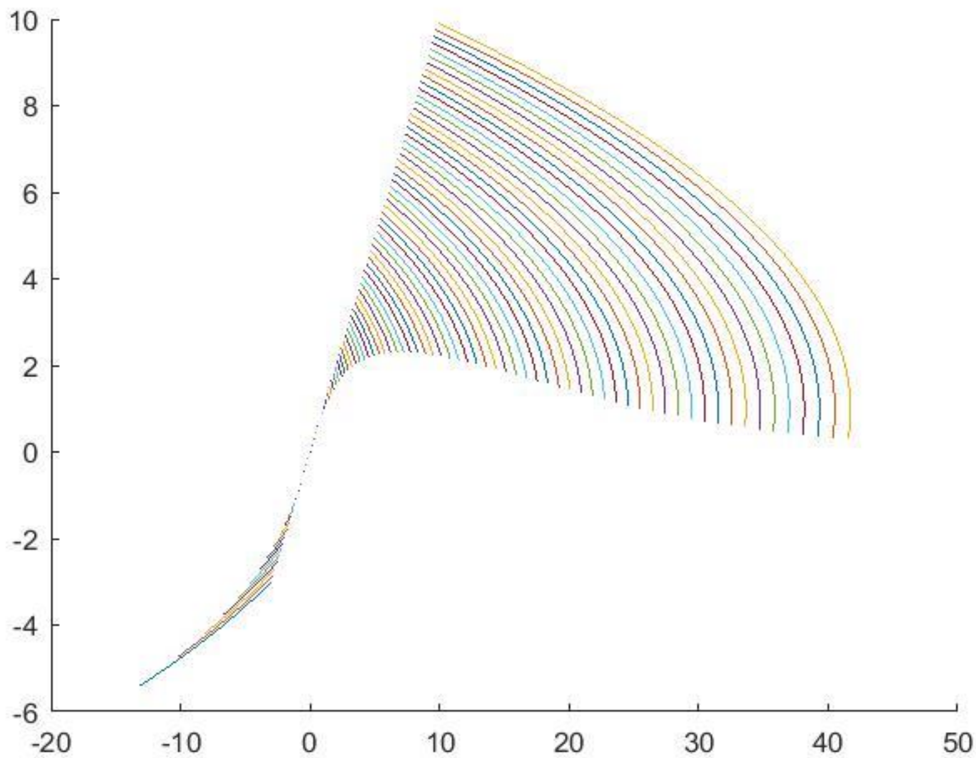


Рис. 15. Фазовый портрет с шагом

Очевидно используя результаты бифуркационного анализа пункта 3.2, можно сказать, что седло не имеет экономического смысла, т.к. всегда в этом случае положение равновесия находится в третьей четверти. Это справедливо только для задачи «Посреднической деятельности» в постановке (3.1). Однако, в случае других задач, заданных нелинейными динамическими системами, или задачи посреднической деятельности в другой постановке, мы можем получить положение равновесия – седло, имеющее экономический смысл.

3.6. Поведение фазовых траекторий на бесконечности.

Во многих случаях чрезвычайно полезными для исследования вопроса о наличии замкнутых траекторий являются сведения о поведении траекторий при удалении в бесконечность, то есть исследование "бесконечно удаленных положений равновесия" системы. В случае, когда правые части автономной системы – многочлены, используется отображение фазовой плоскости на так называемый срез "сферы Пуанкаре".

Для получения полного фазового портрета необходимо исследовать состояние равновесия на бесконечности. Исследование распадается на 2 случая

3.6.1. Исследование в окрестности точек $(\pm\infty, 0)$

Для исследования в окрестности точек $(\pm\infty, 0)$ в системе (3.1) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{u} \\ y = \dfrac{v}{u} \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_t = -\dfrac{1}{u^2} u' \\ y'_t = \dfrac{v'u - vu'}{u^2} \end{cases}$$

подставляем эту замену в систему (3.1)

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{u^2} u' = a_1 - a_2 \dfrac{1}{u} * \dfrac{v}{u} + a_3 \dfrac{1}{u} * \dfrac{v^2}{u^2} \\ \dfrac{v'u - vu'}{u^2} = b_1 - b_2 \dfrac{v}{u^2} \end{cases}$$

После преобразований мы получим систему

$$\begin{cases} u' = -a_1u^2 + a_2\frac{1}{u} * \frac{v}{u}u^2 - a_3\frac{1}{u} * \frac{v^2}{u^2}u^2 \\ v'u - vu' = b_1u^2 - b_2v \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} u' = -a_1u^2 + a_2v - a_3\frac{v^2}{u} \\ v' = \frac{v}{u}\left(-a_1u^2 + a_2v - a_3\frac{v^2}{u}\right) + b_1u - b_2\frac{v}{u} \end{cases}$$

Окончательно, система приобретает вид

$$\begin{cases} u'_t = -a_1u^4 + a_2u^2v - a_3uv^2 \\ v'_t = b_1u^3 - b_2uv - a_1u^3v + a_2uv^2 - a_3v^3 \end{cases} \tag{3.4}$$

Обозначим правые части системы через

$$F_1^*(u,v) \text{ и } F_2^*(u,v)$$

Тогда положения равновесия с u = 0 на бесконечности $S_i^*(0, v_i)$ получаются путем решения системы

$$\begin{cases} F_1^*(u,v) = 0 \\ F_2^*(u,v) = 0 \end{cases},$$

а именно

$$\begin{cases} -a_1u^4 + a_2u^2v - a_3uv^2 = 0 \\ b_1u^3 - b_2uv - a_1u^3v + a_2uv^2 - a_3v^3 = 0 \end{cases}$$

Положение равновесия имеет вид $S_1^*(0,0)$

В этом случае ось u = 0 делит фазовую плоскость на правую полуплоскость с двумя седловыми секторами (рис 18) и левую полуплоскость с двумя устойчивыми узловыми секторами (рис 19). Для исследования поведения траекторий на бесконечности создадим при помощи графического приложения Simulink структурные схемы «Pos1»: блок-диаграмма в виде направленного графа (рис. 16) и маскированную действующую модель» для проведения вычислительных экспериментов (рис. 17).

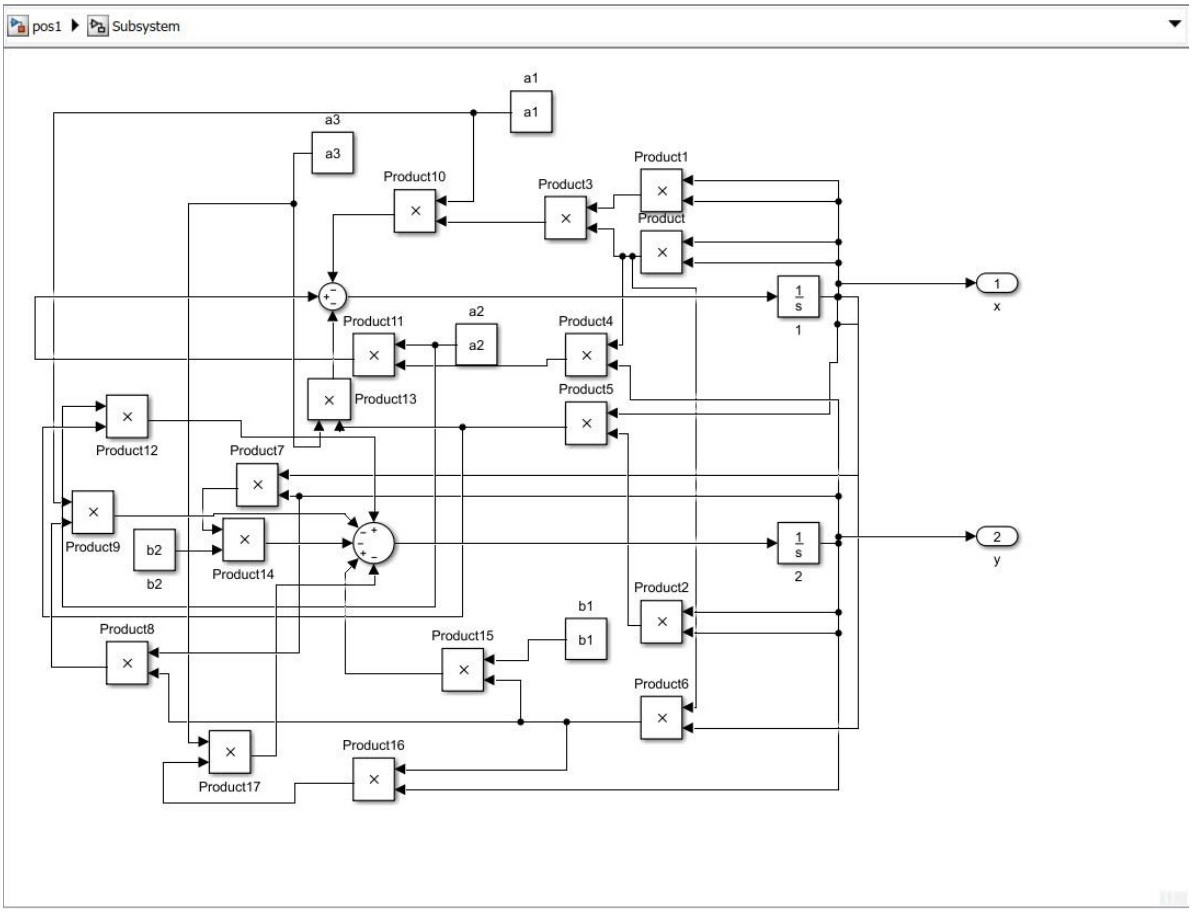


Рис. 16 Структурная модель «Pos1» для исследования на бесконечности

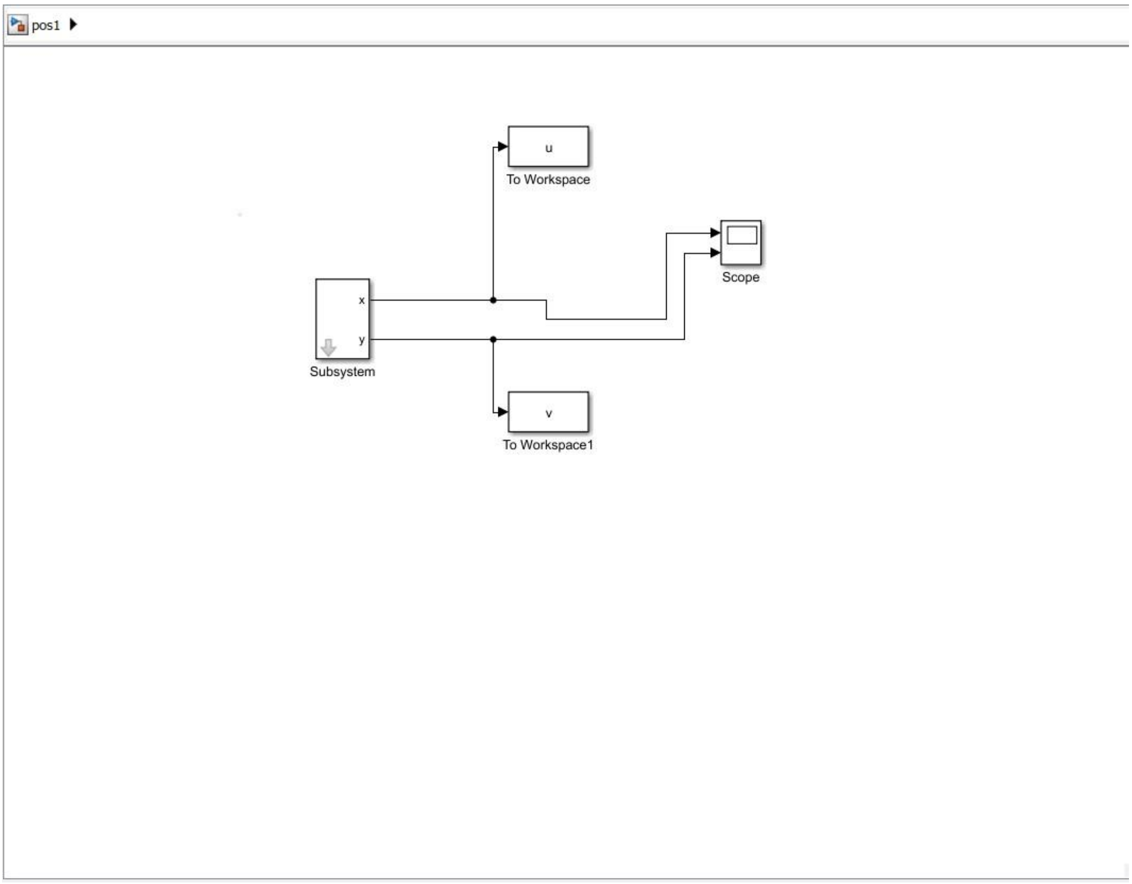


Рис. 17 Маскированная структурная модель «Pos1» для вычислительных экспериментов

Выберем произвольным образом параметры a1=1, a2=1, a3=1, b1=2, b2=1 (случай узла для переменных x и y).

На рисунке 18 изображен фазовый портрет системы (3.4) в правой полуплоскости в окрестности состояния равновесия $S_1 = (0{,}0)$.

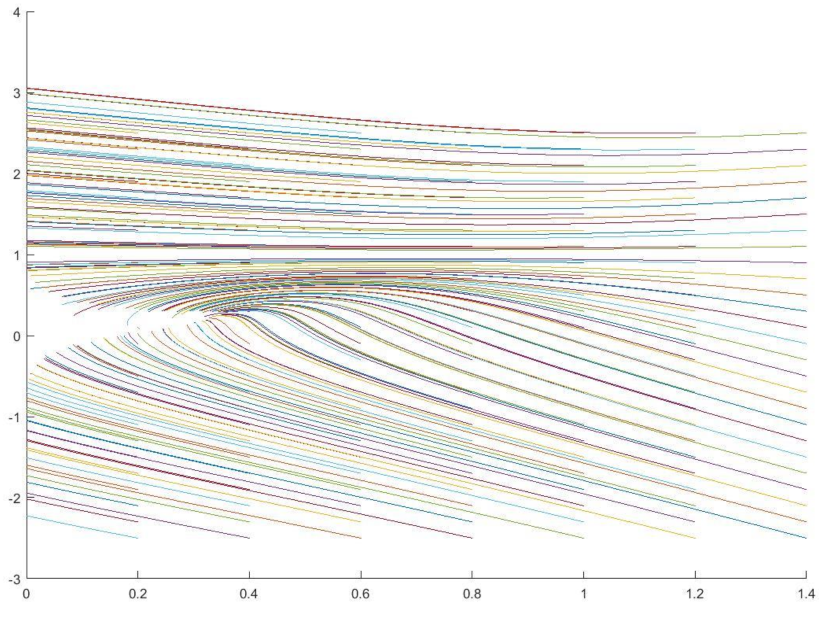


Рис. 18. Фазовый портрет системы (3.4) в правой полуплоскости в случае узла

На рисунке 19 изображен фазовый портрет системы (3.4) в левой полуплоскости в окрестности состояния равновесия $S_1 = (0{,}0)$.

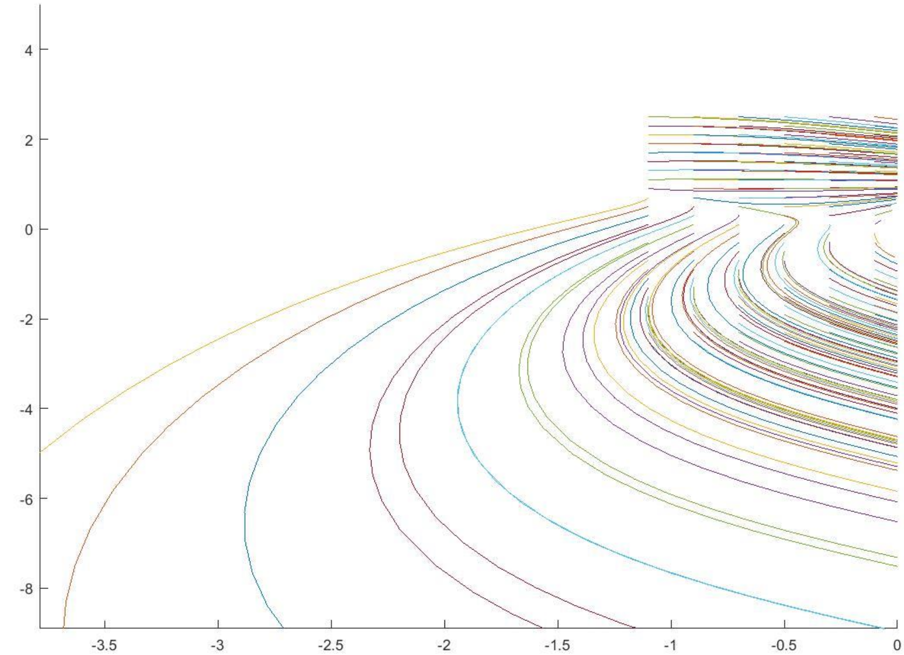


Рис. 19. Фазовый портрет системы (3.4) в левой полуплоскости в случае узла

Фазовый портрет этой системы

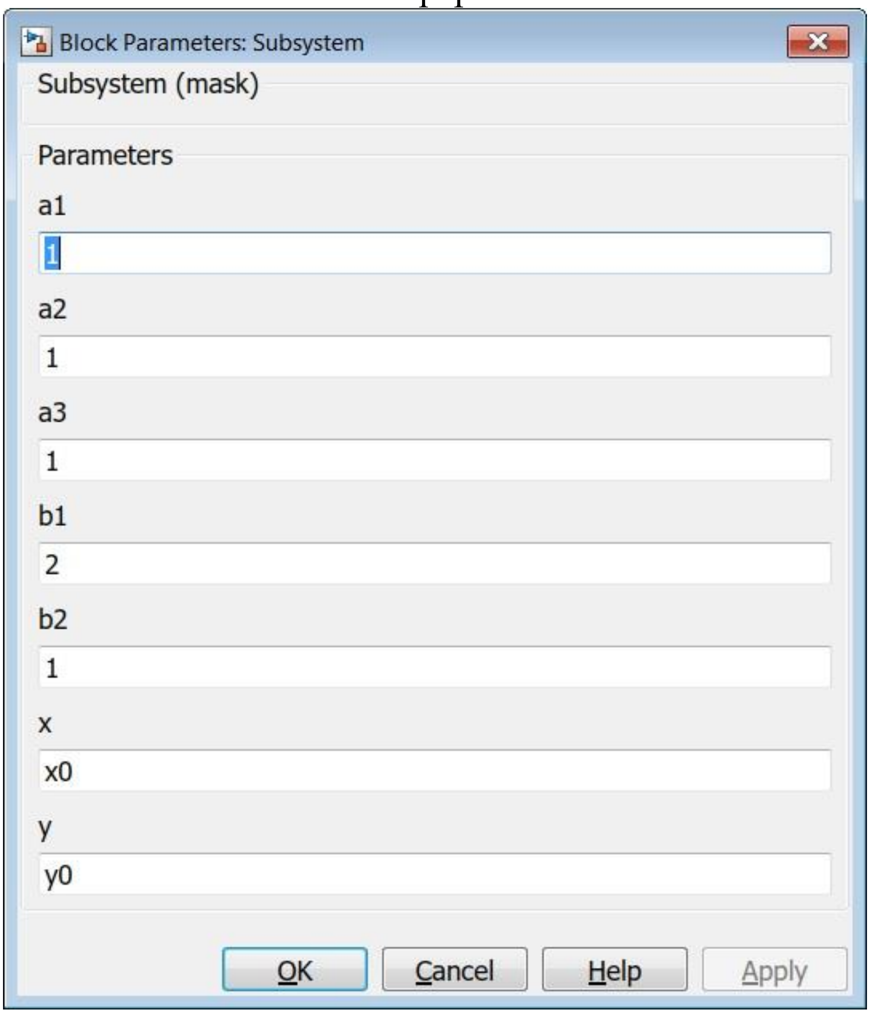


Рис. 20 Маскированный блок с конкретными значениями параметров

(случай узла для переменных x и y) в окрестности состояния равновесия $S_1 = (0,0)$ имеет вид (рис 21).

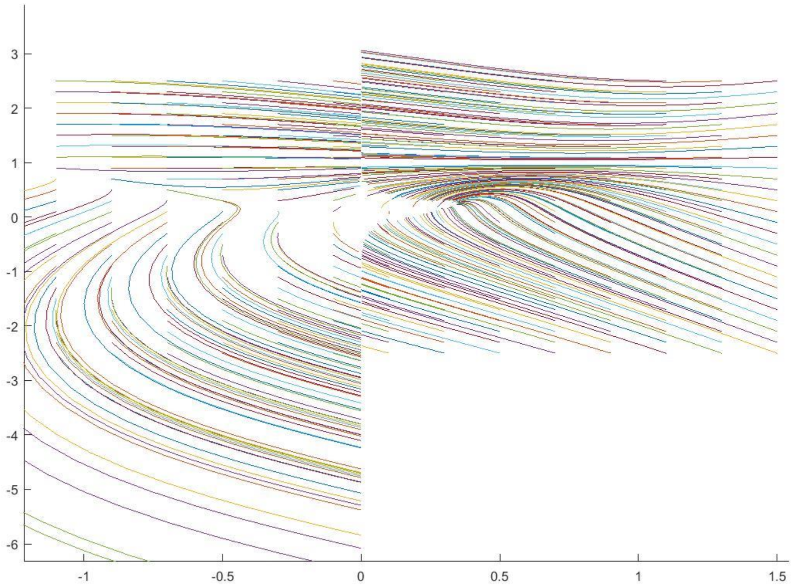


Рис. 21. Фазовый портрет системы (3.4) с u = 0

Фазовый портрет этой системы с параметрами

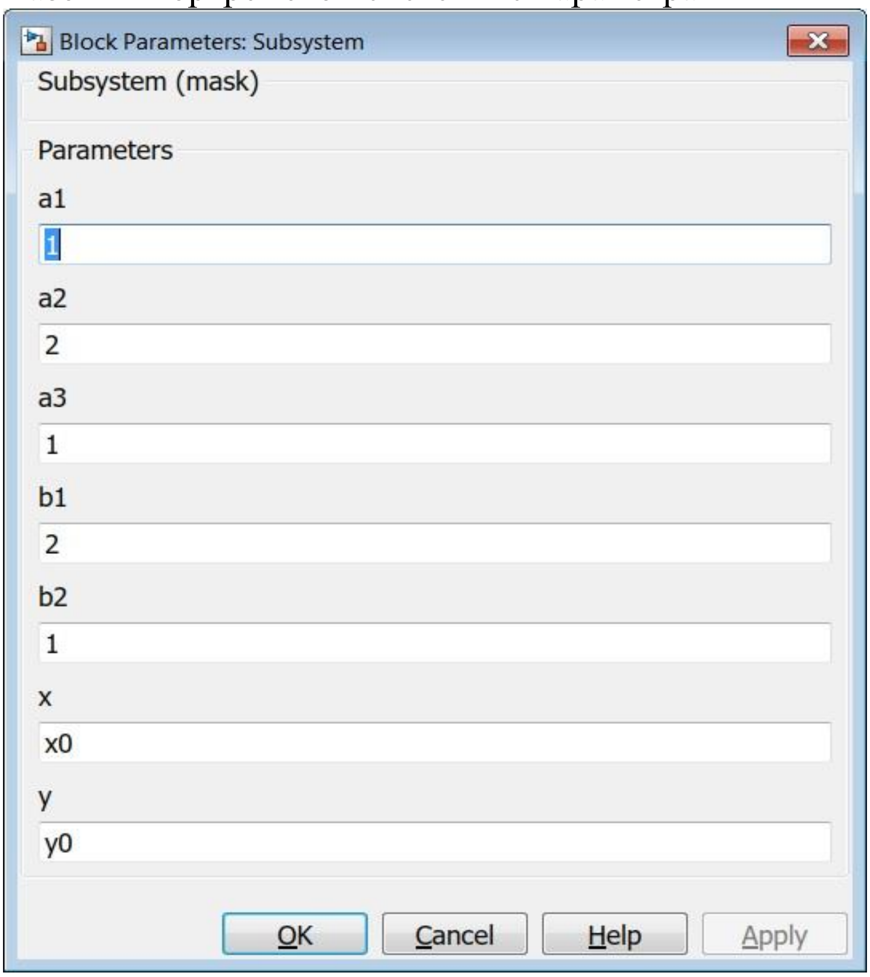


Рис. 22 Маскированный блок с конкретными значениями параметров

(случай фокуса для переменных x и y) в окрестности состояния равновесия $S_1 = (0,0)$ имеет подобный вид (рис. 23).

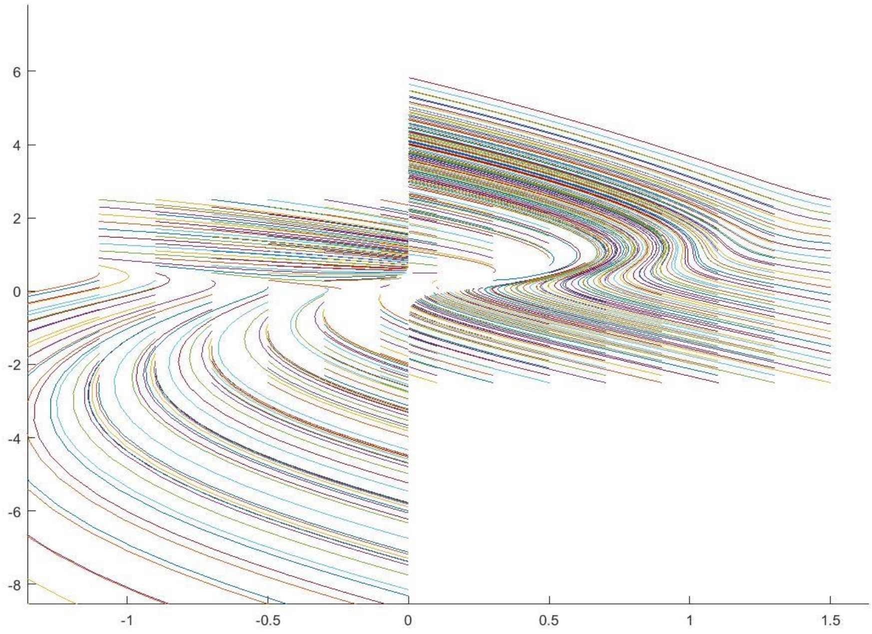


Рис. 23. Фазовый портрет системы (3.4) в случае фокуса

Мы исследовали поведение фазовых траекторий в точках $(\pm\infty, 0)$.

3.6.2. Исследования в окрестности точек $(0, \pm\infty)$

Для исследования в окрестности точек $(0, \pm\infty)$ в системе (3.1) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{v} \\ y = \dfrac{1}{v} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_t' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \\ y_t' = -\dfrac{1}{v^2}v' \end{cases}$$

подставляем эту замену в систему (3.1)

$$\begin{cases} \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = a_1 - a_2\dfrac{u}{v}\dfrac{1}{v} + a_3\dfrac{u}{v}\dfrac{1}{v^2} \\ -\dfrac{1}{v^2}v' = b_1 - b_2\dfrac{u}{v}\dfrac{1}{v} \end{cases}$$

После преобразований мы получим систему

$$\begin{cases} u'v - uv' = a_1 v^2 - a_2 \dfrac{u}{v^2} v^2 + a_3 \dfrac{u}{v} \dfrac{1}{v^2} v^2 \\ v' = -b_1 v^2 + b_2 u \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{v}(-b_1 v^2 + b_2 u) + a_1 v - a_2 \dfrac{u}{v} + a_3 \dfrac{u}{v^2} \\ v' = -b_1 v^2 + b_2 u \end{cases}$$

Окончательно, система приобретает вид

$$\begin{cases} u'_t = a_1 v^3 - a_2 uv + a_3 u - b_1 uv^3 + b_2 u^2 v \\ v'_t = -b_1 v^4 + b_2 uv^2 \end{cases} \tag{3.5}$$

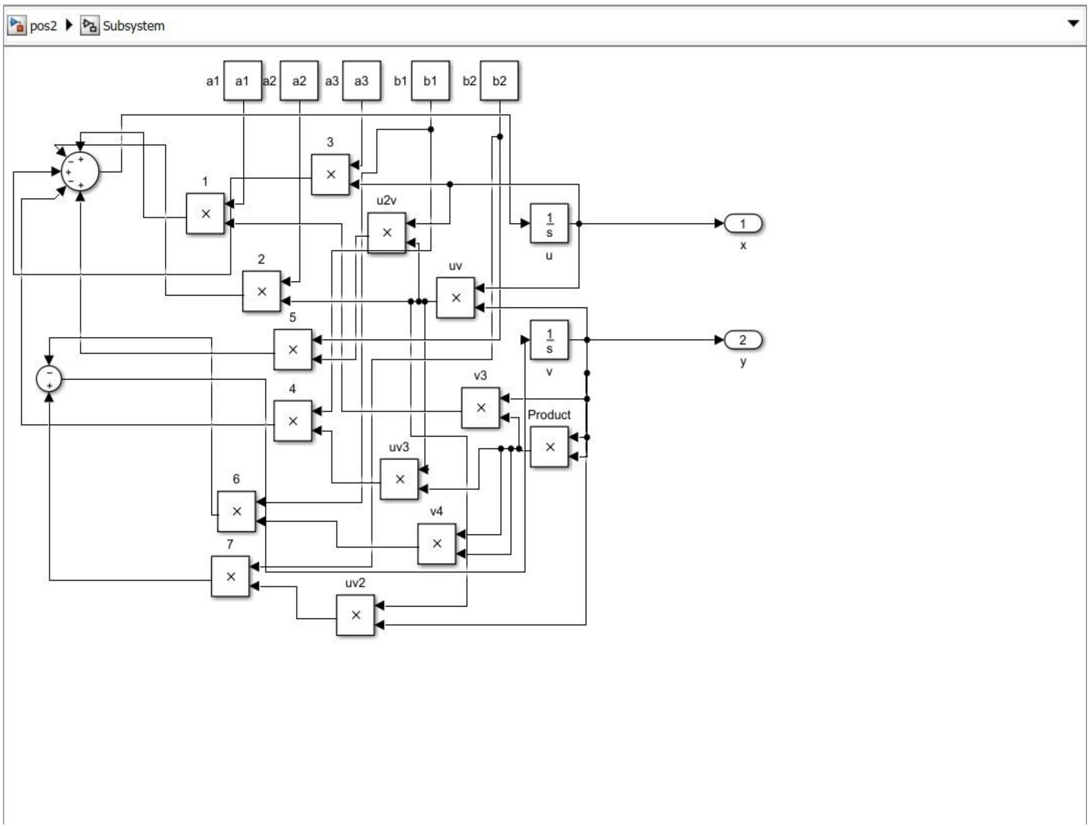


Рис. 24 Структурная модель «Pos2» для исследования на бесконечности

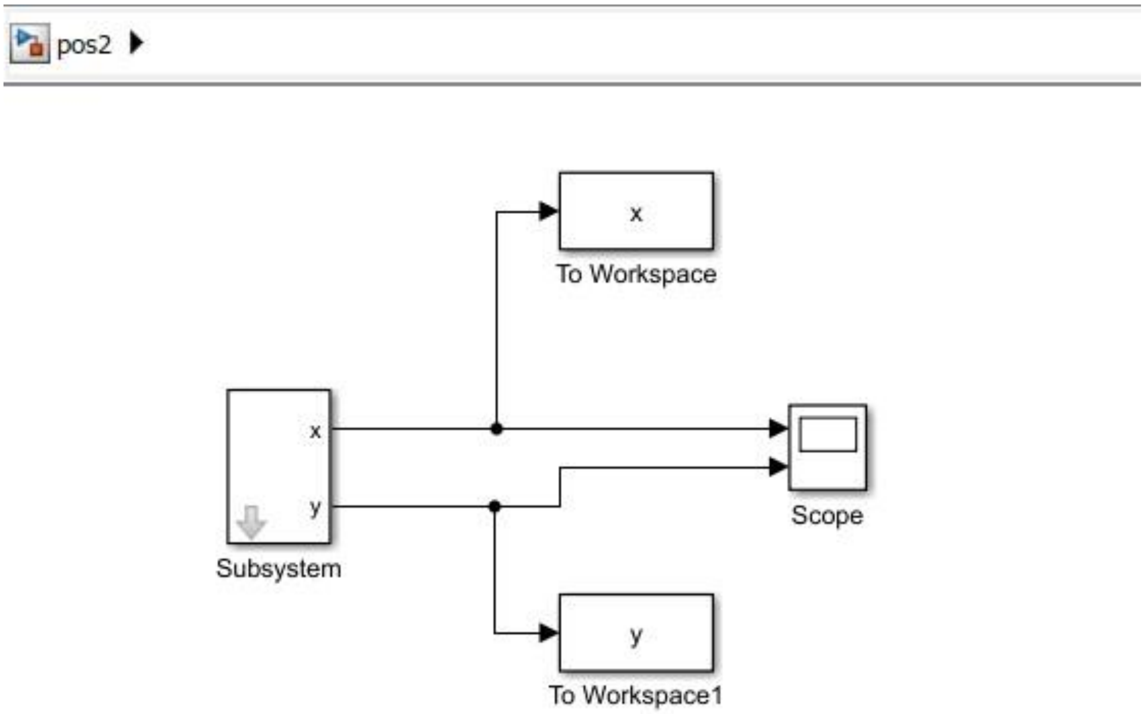


Рис. 25 Маскированная структурная модель «Pos2» для вычислительных экспериментов

В этом случае ось v = 0 делит фазовую плоскость на верхнюю полуплоскость с двумя седловыми секторами (рис 27) и нижнюю полуплоскость с неустойчивым узлом (рис 28). Для исследования поведения траекторий на бесконечности создадим при помощи графического приложения Simulink структурные схемы «Pos2»: блок-диаграмма в виде направленного графа (рис. 24) и маскированную действующую модель» для проведения вычислительных экспериментов (рис. 25).

При выбранных параметрах

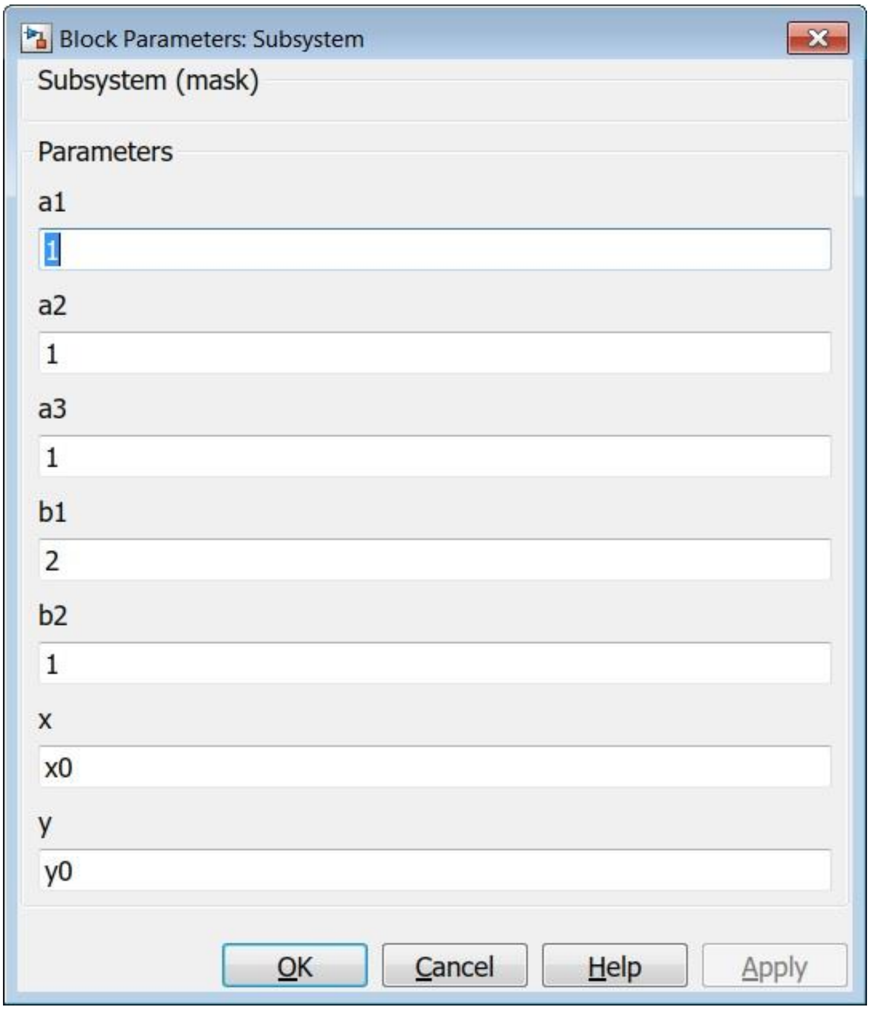


Рис. 26 Маскированный блок с конкретными значениями параметров

в окрестности состояние равновесия $S_1 = (0{,}0)$ на рисунке 27 изображен фазовый портрет системы (3.5) в верхней полуплоскости, а на рисунке 28 изображен фазовый портрет этой системы в нижней полуплоскости.

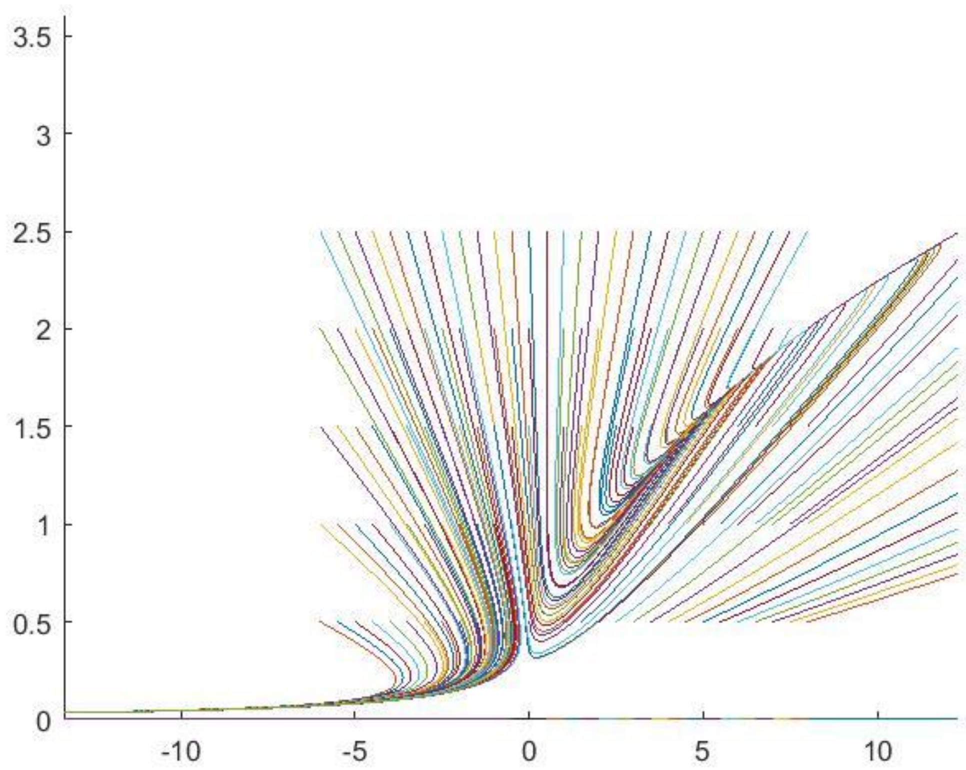


Рис 27 Фазовый портрет системы (3.5) в верхней полуплоскости

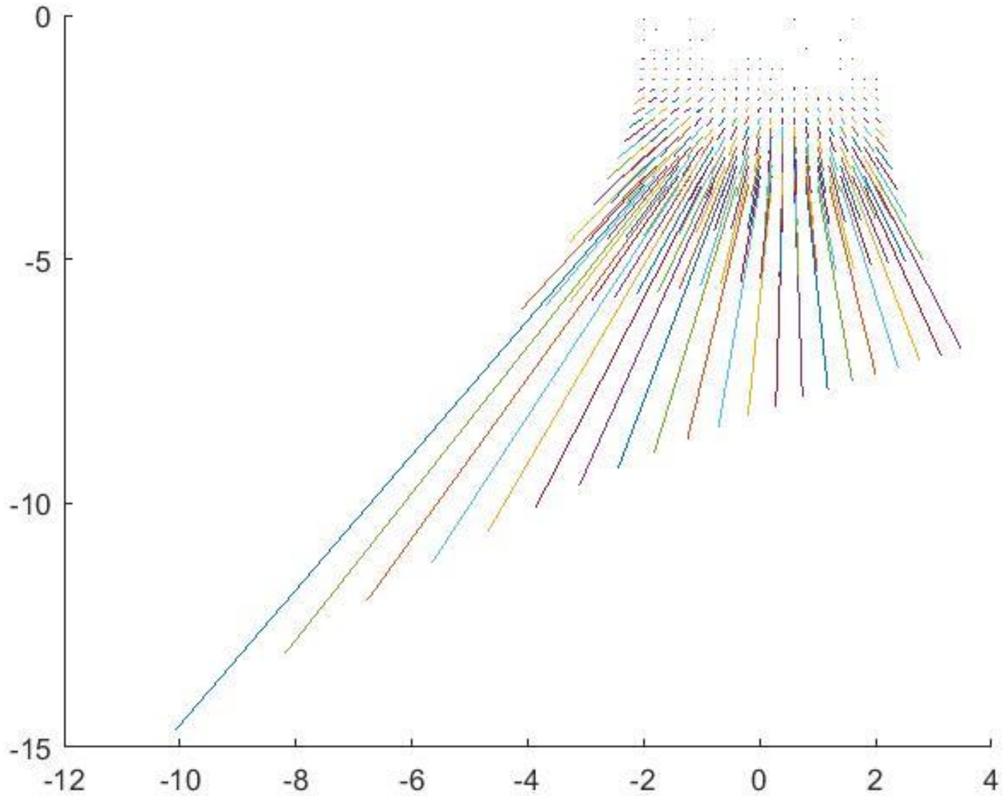


Рис 28 Фазовый портрет системы (3.5) в верхней полуплоскости

Мы провели исследование для точек $(0, \pm\infty)$.

3.7. Синергетическое управление системой «Посредническая деятельность» для денежной и товарной масс.

При управлении динамической системой (3.1) применим метод АКАР – метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов [4]. Возникают вопросы:

1) Можно ли управлять размером наличных денег $x(t)$ у предпринимателя и регулировать при этом потоком товара $y(t)$?
2) Можно ли управлять потоком товара $y(t)$ и регулировать наличные деньги у предпринимателя?

Обозначенное управление будем искать в виде аддитивного слагаемого скорости изменения исследуемой величины. Это управление является функцией текущего состояния системы.

Наша цель и задача: перевести произвольное начальное состояние равновесия системы в наперед заданное состояние (x_0, y_0).

1. Рассмотрим управление деньгами

$$\begin{cases} x'_t = a_1 - a_2x(t)y(t) + a_3x(t)y^2(t) + u(t) \\ y'_t = b_1 - b_2x(t)y(t) \end{cases}, \qquad (3.6)$$

где $u(t)$ - функция управления.

Будем искать функцию $\psi_1(x, y)$, которая называется агрегированной переменной. Эта функция задает притягивающее многообразие

$$\psi_1(x, y) = 0$$

Управляемой динамической системы (УДС). Вдоль этого притягивающего многообразия траектории этой системы будут стягиваться к (x_0, y_0).

Согласно теоретическим и практическим результатам [4], состояние положения равновесия находится из решения функциональной системы

$$\begin{cases} \psi_1(x, y) = 0 \\ b_1 - b_2yx = 0 \end{cases}. \qquad (3.7)$$

Очевидно, положение равновесия лежит на гиперболе

$$y = \frac{b_1}{b_2 x}$$

График гиперболы в первой четверти подсказывает нам такой выбор агрегированной переменной

$$\psi_1 = x - \alpha,$$

С параметром $\alpha > 0$.

Решение системы (3.7) имеет вид (рис 29)

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ y_0 = \dfrac{b_1}{b_2\alpha} \end{cases}$$

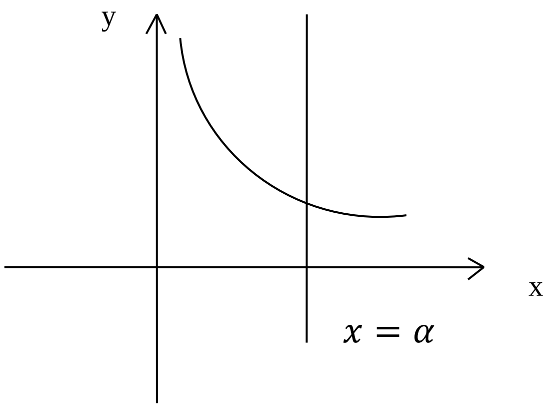


Рис 29 График гиперболы

Из системы (3.1) имеем

$$f_1 = a_1 - a_2 xy + a_3 xy^2$$
$$f_2 = b_1 - b_2 xy$$

Для полученного решения проверим условие асимптотической устойчивости [3]

$f'_{2y} - \frac{\psi'_{1y}}{\psi'_{1x}} f'_{2x} /_{(x_0,y_0)} = -b_2 x - \frac{0}{1}(-b_2 y)/_{(x_0,y_0)} = -b_2 x_0 = -b_2\alpha < 0$, поскольку

$$\psi'_{1x} = 1$$
$$\psi'_{1y} = 0$$
$$f'_{2x} = -b_2 y$$
$$f'_{2y} = -b_2 x$$

Согласно [3], это означает, что (x_0, y_0) - устойчивое положение равновесия. А также из того, что для любой траектории

$$\psi_1\big(x(t), y(t)\big) = x(t) - \alpha \to 0, t \to +\infty,$$

а значит,

$$\lim_{t\to\infty,} x(t) = \alpha.$$

Далее покажем, что

$$\lim_{t\to\infty,} y(t) = y_0 = \frac{b_1}{b_2\alpha}.$$

Следуя [3, 4], основное свойство агрегированной переменной имеет вид

$$\psi_1'\big(x(t), y(t)\big) = -T\psi_1\big(x(t), y(t)\big),$$

откуда вытекает

$$x_t' = -T(x-\alpha)$$

Тогда управляемая динамическая система примет вид

$$\begin{cases} x_t' = -T(x-\alpha) \\ y_t' = b_1 - b_2xy \end{cases} \tag{3.8}$$

а управляемый из (3.6) и (3.8) параметр в любой момент времени равен следующей величине

$$u(t) = a_1 - a_2x(t)y(t) + a_3x(t)y^2(t) - T(x(t)-\alpha)$$

Решим первое уравнение из (3.8)

$$\frac{dx}{x-\alpha} = -Tdt$$

$$\ln|x-\alpha| = -Tt + \ln c$$

Решение принимает вид

$$x(t) = \alpha + ce^{-Tt} \tag{3.9}$$

Подставляя решение (3.9) во второе уравнение системы (3.8), получаем линейное и неоднородное уравнение первого порядка

$$y_t' = b_1 - b_2(\alpha + ce^{-Tt})y$$

Найдем общее решение этого уравнения представив его в виде

$$y_t' + b_2(\alpha + ce^{-Tt})y = b_1 \tag{3.10}$$

Методом замены переменной

$$y = uv, y' = u'v + uv'$$

После подстановки получим

$$v(u' + (\alpha + ce^{-Tt})u) + uv' = b_1$$

И решим 2 уравнения:

1) $u' + (\alpha + ce^{-Tt})u = 0$
2) $uv' = b_1$

Эти 2 уравнения имеют следующее решение

$$\ln u = -b_2\int_0^t (\alpha + ce^{-Tt})dt$$

Или

$$u = exp\left\{-b_2\left(\alpha t + \frac{c}{T}e^{-Tt} + \frac{c}{T}\right)\right\} = (exp\left\{b_2\left(\alpha t + \frac{c}{T}e^{-Tt} + \frac{c}{T}\right)\right\})^{-1}$$

$$dv = \mathrm{b}_1 \exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha t + \frac{c}{T}e^{-Tt} + \frac{c}{T}\right)\right\} dt$$

$$v = \mathrm{b}_1 \int_0^{\mathrm{t}} \exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\tau + \frac{c}{T}e^{-T\tau} + \frac{c}{T}\right)\right\} d\tau + C_0$$

Окончательно, общее решение (3.10) имеет вид:

$$\mathrm{y(t)} = \left(\mathrm{b}_1 \int_0^{\mathrm{t}} \exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\tau + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{T}\tau} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\right)\right\} \mathrm{d}\tau + \mathrm{C}_0\right) *$$
$$* \left(\exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\mathrm{t} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{Tt}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\right)\right\}\right)^{-1}$$

Находим предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\mathrm{t}\to+\infty} \mathrm{y(t)} = \lim_{\mathrm{t}\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{b}_1 \exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\mathrm{t} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{Tt}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\right)\right\} \mathrm{dt} + \mathrm{C}_0\right)'}{\left(\exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\mathrm{t} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{Tt}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\right)\right\}\right)'} =$$
$$= \lim_{\mathrm{t}\to+\infty} \frac{\mathrm{b}_1 \exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\mathrm{t} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{Tt}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\right)\right\}}{\exp\left\{\mathrm{b}_2\left(\alpha\mathrm{t} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{Tt}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\right)\right\} * \mathrm{b}_2\left(\alpha - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{Tt}}(-\mathrm{T})\right)} =$$
$$= \lim_{\mathrm{t}\to+\infty} \frac{\mathrm{b}_1}{\mathrm{b}_2(\alpha + \mathrm{ce}^{-\mathrm{Tt}})} = \frac{\mathrm{b}_1}{\mathrm{b}_2\alpha} = \mathrm{y}_0$$

Мы получили, что любое решение УДС стягивается к состоянию равновесия и является устойчивым.

Сделаем вывод:

1) При фиксированных параметрах задачи (3.1) выбранная агрегированная переменная позволяет управлять размерами наличных денег x(t), которыми располагает предприниматель, по достижению состояний только с координатами
$$\left(\alpha, \frac{\mathrm{b}_1}{\mathrm{b}_2\alpha}\right), \alpha > 0,$$

Которые лежат на ветви гиперболы
$$y = \frac{\mathrm{b}_1}{\mathrm{b}_2\mathrm{x}}$$

2) Если же нам нужна система управления по достижению произвольного наперед заданного состояния $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, $\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0 > 0$, то нужно менять параметры товара b_1 и b_2. Обязательно должны выполняться

$$\frac{b_1}{b_2} = x_0 y_0$$

2. Рассмотрим управление товаром

$$\begin{cases} x_t' = a_1 - a_2 x(t) y(t) + a_3 x(t) y^2(t) \\ y_t' = b_1 - b_2 x(t) y(t) + u(t) \end{cases} \tag{3.11}$$

В этом случае мы будем искать функцию $\psi_2(x, y)$, которая является агрегированной переменной и задает притягивающее многообразие

$$\psi_2(x, y) = 0$$

вдоль которого траектории системы будут стягиваться к заданному положению (x_0, y_0).

Согласно теоретическим и практическим результатам [4], состояние положения равновесия находится из решения системы

$$\begin{cases} a_1 - a_2 xy + a_3 xy^2 = 0 \\ \psi_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Из первого уравнения (3.12) получаем

$$x = \frac{a_1}{a_2 y - a_3 y^2}$$

Или

$$x = \frac{a_1}{a_2} * \frac{a_2}{y(a_2 - a_3 y)} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{1}{y} + \frac{a_3}{a_2 - a_3 y}\right)$$

Состояние равновесия

$$x = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{1}{y} + \frac{a_3}{a_2 - a_3 y}\right)$$

Системы лежит на кубической кривой (см. рис 30)

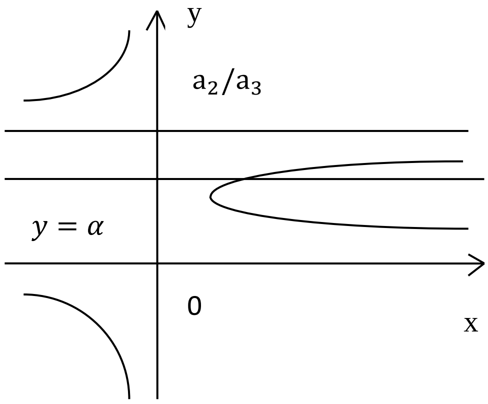


Рис. 30 кубическая кривая

Поскольку $y > 0, a_2 - a_3 y > 0$, то следуя графику, очевидно, что состояние равновесия лежит на ветви кривой, которая расположена в полосе (см. рис 30).

$$0 < y < \frac{a_2}{a_3}$$

График кубической кривой подсказывает нам такой выбор агрегированной переменной

$$\psi_2 = y - \alpha, \quad \alpha \in (0, \frac{a_2}{a_3})$$

Тогда $y_0 = \alpha$, а

$$x_0 = \frac{a_1}{a_2\alpha - a_3\alpha^2}$$

Решение системы (3.12) имеет вид

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a_1}{a_2\alpha - a_3\alpha^2} \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

И лежит в первой четверти при условии

$$\alpha \in (0, \frac{a_2}{a_3})$$

Напомним, из системы (3.1) имеем

$$f_1 = a_1 - a_2 xy + a_3 xy^2$$
$$f_2 = b_1 - b_2 xy$$

Для полученного решения проверим условие асимптотической устойчивости [3] по следующей формуле

$$f'_{2y} - \frac{\psi'_{1y}}{\psi'_{1x}} f'_{2x} /_{(x_0,y_0)} = -a_2 x + a_3 y - \frac{0}{1}(-a_2 x + 2a_3 xy)/_{(x_0,y_0)} =$$
$$= a_2 y_0 - a_3 y_0^2 = -y_0\left(\frac{a_2}{a_3} - \alpha\right) < 0,$$

поскольку

$$\psi'_{2x} = 0$$
$$\psi'_{2y} = 1$$
$$f'_{1x} = -a_2 y + a_3 y^2$$
$$f'_{1y} = -a_2 x + 2a_3 xy$$

Согласно [3], это означает, что (x_0, y_0) - устойчивое положение равновесия. А также из того, что для любой траектории

$$\psi_2\big(x(t), y(t)\big) = y(t) - \alpha \to 0 \qquad t \to +\infty$$

А значит

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \alpha$$

Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 = \frac{a_1}{a_2\alpha - a_3\alpha^2}$$

Следуя [3, 4] основное свойство агрегированной переменной имеет вид

$$\psi'_2\big(x(t), y(t)\big) + T\psi_2\big(x(t), y(t)\big) = 0,$$
$$y'_t = -T(y - \alpha)$$

Тогда управляемая динамическая система имеет вид

$$\begin{cases} x'_t = a_1 - a_2 xy + a_3 xy^2 \\ y'_t = -T(y - \alpha) \end{cases} \tag{3.13}$$

А управляемый параметр из (3.11) и (3.13) равен следующей величине

$$u(t) = b_1 - b_2 xy - T(y - \alpha)$$

Решим второе уравнение из (3.13)

$$\frac{dy}{y - \alpha} = -Tdt$$
$$\ln y - \alpha = -Tt + \ln c$$

Решение принимает вид

$$y_0(t) = \alpha + Ce^{-Tt} \tag{3.14}$$

Подставляя решение (3.14) в первое уравнение системы (3.11), получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка

$$x'_t + x(a_2 y_0 - a_3 y_0^2) = a_1$$

Где $y_0(t) = \alpha + Ce^{-Tt}$

Найдем общее решение этого уравнения методом замены переменных

$x = uv \quad x' = u'v + uv'$

После подстановки получим

$$v\big(u' + u(a_2 y_0 - a_3 y_0^2)\big) + uv' = a_1$$

И решим два уравнения

1) $u' + u(a_2y_0 - a_3y_0^2) = 0$
2) $uv' = a_1$

Эти 2 уравнения имеют следующие решения:

$$\ln u = -\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt$$

Или

$$u = exp\left\{-\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\} = exp\left\{\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\}^{-1}$$

$$dv = a_1\exp\left\{\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\}$$

$$v = a_1\int_0^t exp\left\{\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\}\mathrm{dt} + \mathrm{C}$$

Окончательно, общее решение (3.13) примет вид

$$x(t) = \left(a_1\int_0^t exp\left\{\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\}\mathrm{dt} + \mathrm{C}\right)(exp\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt)^{-1}$$

Находим предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{a_1\exp\left\{\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\}}{a_1\exp\left\{\int_0^t (a_2y_0 - a_3y_0^2)dt\right\}(a_2y_0 - a_3y_0^2)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{a_1}{(a_2y_0 - a_3y_0^2)} = \frac{a_1}{\frac{a_1}{(a_2\alpha - a_3\alpha^2)}}$$

Мы получили, что любое решение управляемой динамической системы обязательно стягивается к положению равновесия и становится в целом устойчивым.

Сделаем вывод.

1) Если параметры a_i, b_j у нас фиксированы, то выбранная агрегированная переменная позволяет организовать управление по достижению состояний только с координатами

$$\left(\frac{a_1}{a_2\alpha - a_3\alpha^2}, \alpha\right), \alpha \in \left(0, \frac{a_2}{a_3}\right),$$

которые лежат на ветви кубической кривой

$$x = \frac{a_1}{a_2 y - a_3 y^2}$$

2) Если же нам нужна система управления по достижению произвольного наперед заданного состояния (x_0, y_0), $x_0, y_0 > 0$, то нужно менять параметры предпринимателя a_1, a_2, a_3. Обязательно должно выполняться условие

$$y_0 = \frac{a_1}{a_2 x_0 - a_3 x_0^2}$$

Заключение

В работе был использован аппарат качественной теории дифференциальных уравнений и теория бифуркации.

Проведен полный бифуркационный анализ динамической системы «Посредническая деятельность», предложенной в монографии В.П. Милованова [1].

В нашем случае эта система посреднической деятельности не может иметь нейтральных положений равновесия, поскольку след матрицы Якоби не равен нулю, а, значит, динамическая система не имеет циклов на фазовой плоскости. На бесконечности система может иметь критическое положение равновесия в виде седло - узловых секторов.

В работе спроектированы действующие структурные модели системы: блок – диаграмма в виде направленного графа и маскированная модель в пакете MatLab с графическим приложением SimuLink. Эти работающие модели позволяют моделировать процесс с любыми начальными данными и любыми параметрами системы. Благодаря этим моделям были проведены численные эксперименты, которые подтвердили правильность теоретических результатов и правильность бифуркационного анализа исходной системы.

Используя методы синергетической теории управления А. А. Колесникова [4] был спроектирован закон управления (метод АКАР) системы «Посредническая деятельность» по выводу траекторий системы на наперед заданное притягивающее многообразие, т.е. наперед заданное соотношение между величиной денежного капитала и товаром некоторого типа. Рассмотрены вопросы: управление размером наличных денег у предпринимателя с регуляцией потока товаров и управление потоком товара для регулирования величины наличных денег у предпринимателя.

Проведенные исследования могут служить хорошей основой для разработки и анализа аналогичных экономических моделей с некоторым числом экономических переменных.

В выпускной квалификационной работе продемонстрированы вычислительные и графические возможности пакета MatLab + SimuLink при анализе динамических систем, а также конструировании действующих моделей этих систем и вычислительном эксперименте на полученных моделях.

Полученные результаты подтверждают целесообразность работы с пакетом моделирования MatLab + SimuLink при проектировании и анализе экономической системы.

Полученные результаты могут представлять интерес для экономистов, изучающих динамику посреднической деятельности при постоянных ценах.

Список литературы

1. Милованов В.П. Синергетика и самоорганизация: Социально-экономические системы. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» 2010, 224 с.
2. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости./ Н.Н. Баутин, Е.А.Леонтович – М.: Наука, 1990, 483 с.
3. Братищев А.В., Математическая теория управляемых динамических систем. Введение в понятия и методы: учеб. пособие / А.В. Братищев. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2015. – 292 с.
4. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. – М. : URSS, 2006. – 219 с.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. Братищев А.В. Руководство к работе с пакетами MATLAB и SIMULINK. Элементы проектирования и анализа: учеб. пособие. Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2012. – 87с.
7. Васильев В.В., Симак Л.А., Рыбникова А.М. Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем в среде MATLAB/SIMULINK. Учебное пособие для студентов и аспирантов. – К. : НАН Украины , 2008. – 91 с.
8. Милованов В.П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация / В.П. Милованов.- М.: УРСС, 2001.- 264 с.
9. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. – Ижевск: Издательство «Удмуртский университет», 2000, 200 с.
10. Братищев А. В., Журавлева М. И. Бифуркационный анализ и синергетическое управление системой « валовой продукт –

трудовой ресурс» // Вестник Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), 2015, Выпуск № 2, (50), Стр. 147-155.

11. Bratishchev Alexander V., Batishcheva Galina A., Zhuravleva Maria I. Bifurcation analysis and synergetic management of the dynamic system “Intermediary activity”/ Advances in Intelligent Systems and Computing. Volume 896, 2019, Pages 659-667. 13th International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2018; Warsaw, Poland; 27-28 August 2018.
12. Братищев А.В., Батищева Г.А., Журавлева М. И.Бифуркационный анализ и синергетическое управление динамической системой «посредническая деятельность» / Интеллектуальные ресурсы – региональному развитию. 2018. Т.4 № 1. – С. 209-2013.
13. Герасимов Б.И., Пучков Н.П., Протасов Д.Н. Дифференциальные динамические модели: учебное пособие. Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ. 2010, 80 с.
14. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: УРСС, 2006, 280 с.
15. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999, 335 с.
16. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Изд.: Ижевск, 2002, 232 с.
17. Баканов, М.И. Теория экономического анализа: Учеьник.-4-е изд., доп. и перераб./М.И. Баканов, А.Д.Шеремет.-М.:Финансы и статистика,2001.-240с.
18. Самуэльсон П. Экономика: Учебник. Перевод с англ. Севастополь: изд. «Ахтиар», 1995, 384 с.
19. Чернов В.А. Экономический анализ. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 396с.

20. Бронштейн И. Н., Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – 7-е. изд., стереотипное – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 608 с.
21. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М. : ГИТТЛ, 1949, 552 с.
22. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементы теории устойчивости и бифуркаций.- М.: Мир,1983, 304 с.
23. Бенькович Е.С., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. – “Практическое моделирование динамических систем” – Спб, БХВ-Петербург, 2002.
24. Ю.Б. Колесов, Ю.Б. Сениченков. – “Имитационное моделирование сложных динамических систем” – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
25. А.В. Ушаков, В.В. Хабалов, Н.А. Дударенко – “ Математические основы теории систем: элементы теории и практикум” – Спб, ИТМО, 2007.
26. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. – “Очерки по математической теории систем” – М.: Мир, 1971, 400 с.
27. Морозов А.Д., Драгунов Т.И.− ”Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем, − Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 304 с.
28. Треногин В.А – “Обыкновенные дифференциальные уравнения” – М., Физмат лит, 2010, 312 с.
29. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1968, 720 с.
30. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения: учебник. – 2-е изд., перераб. / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1965. – 332 с.

31. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен; пер. с англ. Ю.А. Данилова. – М.: Мир, 1985. – 424 с.
32. Абалкин Л.И. Динамика и противоречия экономического роста // Экономист. 2001. № 12. С. 3-17.
33. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990, 312 с.
34. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992, 540 с.
35. Аносов Д.В. Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979.
36. Данилов Ю. А., Кадомцев Б. Б. Что такое синергетика? // В сб. «Нелинейные волны. Самоорганизация». М.: Наука, 1983, с. 30-43.
37. Дягилев Ф.М., Концепции современного естествознания, М.: ИМПЭ, 1998, 192 с.
38. Комаров М.А., Осипов Г.В., Петров В.С. Конкурентная динамика живых систем. Учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2010. 63с.
39. Кузнецов Б.Л., Экономическая синергетика, Сб. научных трудов, ЭОУП N9, ИНЭКА, г.Наб. Челны, 2005.
40. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1985, 529 с.
41. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. 3-е изд. М.: УРСС, 2001, 256 с.
42. Милованов В.Н. Синергетика и проблема «случайности» в точке бифуркации. Камская государственная инженерно-экономическая академия, г. Набережные Челны

43. Милованов В.Н., К вопросу об эволюции материи во Вселенной, Сб. Образование в техническом ВУЗе в XXI веке, вып.5, ИНЭКА, 2009.
44. Моисеев Н.Н. Алгоритмы развития. М.: Наука, 1987, 302 с.
45. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа: Учеб. пособие для вузов по спец. «Прикл. математика». М.: Наука, 1981. 487 с.
46. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987, 424 с.
47. Николас Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979, 512 с.
48. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. М.: Наука, 1985, 328 с.
49. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986, 432 с.
50. Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. 5-е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2007, 495 с.
51. Ушаковская Е.Д., Синергетика и причины эволюции Вселенной, СПБ
52. Моделирование экономической динамики/Под ред. Р.М. Нижегородцев. М.: Диалог-МГУ, 1997, 152 с.
53. http://be5.biz/ekonomika1/r2010/01577.htm (Садыков В.М., Скрицкий И.А. Теоретические аспекты построения динамических систем в моделировании экономических процессов)
54. http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/437.html (Анищенко В.С. Динамические системы)
55. Г.Ю.Ризниченко, Лекции по математическим моделям в биологии. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2011. – 560 с.

56.https://studfiles.net/preview/6313254/page:2/
57.https://helpiks.org/4-86484.html
58.https://studopedia.su/1_33186_tipi-ekonomicheskih-sistem.html
59.https://studopedia.ru/14_123633_zadachi-funktsii-printsipi-i-tseli-posrednicheskoy-deyatelnosti.html
60.https://studfiles.net/preview/5760739/page:26/
61.Кузнецов М.В. Анализ неравновесных моделей динамических экономических систем / Г.А. Батищева, М.И. Журавлева, М.В. Кузнецов, Е.А. Трофименко // Вестник РГЭУ (РИНХ). – 2017. - № 4 (60).
62.Кузнецов М.В. Нелинейная межсекторная конкуренция «хищник-жертва» с неограниченным ростом. / Журавлева М.И., Кузнецов М.В. // «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)» Факультет компьютерных технологий и информационной безопасности. XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ, ПРИМЕНЕНИЯ И БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ». 18-19 мая 2017г.
63.Кузнецов М.В. Нелинейная межсекторная конкуренция «хищник-жертва» с ограниченным ростом. / Журавлева М.И., Кузнецов М.В. // ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКОНОМИКА И УПРАВЛЕНИЕ Ученые записки, выпуск 19, РГЭУ(РИНХ), Факультет КТ и ИБ, Ростов-на-Дону, 2017.
64.Кузнецов М.В. Динамическая модель жесткой конкуренции / Г.А. Батищева, М.И. Журавлева, М.В. Кузнецов // Роль банковского и реального сектора в решении проблем социально-экономического развития: сборник статей Международной научно-технической конференции (15 ноября 2017 г., г. Омск). В 2 ч. Ч.1. – Уфа: Аэтерна, 2017. – с.74-77.

65. Кузнецов М.В. Нелинейная межсекторная модель в экономике сельского хозяйства/ Г.А. Батищева, М.И. Журавлева, Кузнецов М.В. // Научный вектор: сборник научных трудов магистрантов / научный редактор А.У. Альбеков. – Вып. 4. – Ростов н/Д: Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2018. − 368 с. (С. 153-158).
66. Кузнецов М.В. Исследование и анализ эффективности управления человеческими ресурсами в торговой организации / Г.А. Батищева, М.В. Кузнецов, М.И. Журавлева// Актуальные вопросы современной экономики, 2018. - № 6, режим доступа http://авсэ.рф/ViewArticle.aspx
67. Кузнецов М.В. Нелинейная динамическая модель равновесия частного и государственного секторов / М.В. Кузнецов, М.И. Журавлева // Международная научно-практическая конференция «Новые направления научной мысли», 13 декабря 2018. Институт магистратуры РГЭУ(РИНХ)
68. Кузнецов М.В. Бифуркационный анализ и компьютерное моделирование нелинейной экономической системы взаимосвязанных экономических процессов / Г.А. Батищева, М.В. Кузнецов, М.И. Журавлева // Актуальные вопросы современной экономики, 2019. - № 3, режим доступа http://авсэ.рф/ViewArticle.aspx.
69. Гиляровская Л.Т. Экономический анализ. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 421с.
70. Бедрина Е.Б., Козлова О.А., Саламатова Т.А., Толпегин А.В. Введение в экономическую теорию: учебное пособие/ Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009.
71. Основы экономической теории: учеб. пособие / В.П. Герасименко [и др.]. 2-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 1996. – 2012с.

72. Экономика: учебник / под ред. А.С. Булатова. – М.: Издательство БЕК, 1995. – 632 с.
73. http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/437.html (Анищенко В.С. Динамические системы)
74. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990, 312 с.