МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Корреляционный анализ процессов с меняющимися во времени характеристиками

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА

студента 2 курса магистратуры 235 группы направления 09.04.02 «Информационные системы и технологии» факультета нелинейных процессов Короновского Александра Алексеевича

Научный руководитель профессор, д.ф.-м.н.

<u>Гар</u> А.Н. Павлов 95 батов (отлитно)

Зав. кафедрой физики открытых систем профессор, д.ф.-м.н.

А.А. Короновский

Саратов 2020 год

Содержание

Вв	едение	2
1.	Алгоритм метода DFA и его применение	5
2.	Применение метода DFA к временным рядам ритма сердца	10
3.	Оценка динамики нефронов методом DFA	13
4.	Показатель Херста	16
5.	Мульти-фрактальный спектр временных рядов	20
6. пр	Оптимальные значения параметров метода MFDFA, теория именения метода к временным рядам	27
7. гој	Применение метода MFDFA к временным рядам динамики сосудов ювного мозга	32
8. ди	Модифицированный метод DFA и его применение к временным ряда намики сосудов головного мозга	ам 37
Зан	слючение	41
Сп	исок литературы	43

Введение

Структурные характеристики временных часто визуально различимы, но не охватываются обычными мерами, такими как, например, средняя амплитуда сигнала. В ряде случаев временные можно представить в виде масштабно-инвариантной структуры, повторяющей саму себя на субинтервалах временного ряда.

Масштабно-инвариантные структуры могут быть найдены в распространённых случаях биомедицинских временных рядов, таких как разветвление нервной системы, легких и костной структуры, и позволяют разделить здоровые и раковые ткани. В нескольких отчетах за последнее время предполагается, что изменения в масштабно-инвариантной структуре биомедицинских временных рядов отражают изменения в адаптивности физиологических процессов, а успешное лечение патологических состояний и улучшение здоровья может влиять на структуру фрактала. По этой причине фрактальный анализ является прогностическим и диагностическим инструментом для обработки биомедицинских временных рядов [1].

Моно-фрактальные мульти-фрактальные И структуры биомедицинских временных рядов являются частным случаем масштабноинвариантных структур. Наиболее часто моно-фрактальные структуры таких временных рядов определяются одним показателем степенного закона и предполагают, что неизменный масштаб независим от времени и пространства. Тем не менее пространственное и временное изменение часто масштабно-инвариантной возникают В структуре биомедицинского Эти пространственные и временные изменения временного ряда. определяют мульти-фрактальную структуру биомедицинского временного ряда, которая зависит показателя степенного ОТ закона МУЛЬТИфрактального спектра.

Формально, временной ряд X(t) является масштабным инвариантом, если $X(ct) = c^H X(t)$. Фрактальный анализ оценивает степенной закон (*H*) – что

определяет особый класс структуры масштабного инварианта временного ряда. Фрактальный анализ часто применяется в обработке биомедицинских сигналов для определения структуры масштабного инварианта на ЭКГ, ЭЭГ, МРТ и рентгеновских снимках [1].

При анализе таких временных рядов достаточно типичны степенные зависимости в поведении АКФ или функции спектральной плотности [2]. Точная характеристика закономерностей потери корреляций важна при проведении анализа различных систем, так как она позволяет делать выводы о наличии и особенностях длительной памяти в их динамике. Например, такой анализ является математической основой для решения задач диагностики функциональных нарушений в структуре сердечного ритма.

Непосредственные расчеты АКФ по временному ряду ограничены достаточно малыми значениями τ по сравнению с самим исследуемым сигналом. Более того, для случайных процессов (в отсутствие характерного временного масштаба) автокорреляционная функция быстро спадает до нуля. Поэтому, начиная с некоторого τ, значения АКФ становятся настолько малы, что оказываются сопоставимыми с ошибками вычислений, возникающими при анализе сигналов конечной длительности [2, 3].

Как следствие, на больших временах возможность отслеживать корреляций просто отсутствует (в закономерности спада рамках классического корреляционного анализа). По этой причине было альтернативных предложено несколько подходов К исследованию длительных корреляций в экспериментальных данных, среди которых чаще других используется метод анализа флуктуаций относительно тренда (detrended fluctuation analysis, DFA) [4, 5]. Данный анализ применяется эффектов длительных именно С целью выявления корреляций В исследуемом процессе (анализ корреляций при малых τ целесообразно проводить с помощью классического метода расчета АКФ).

Основная идея флуктуационного анализа (от англ. *fluctuation analysis*) состоит в том, чтобы преобразовать спадающую АКФ в некоторую возрастающую функцию, которая будет менее чувствительна к статистическим ошибкам.

Несмотря на значительное число опубликованных работ, возможность изучения сильно нестационарных данных на основе DFA продолжает дискутироваться. Некоторые исследователи полагают, что в этом случае сказываются ограничения метода, и необходимо применять иные подходы [6], тогда как другие коллективы продолжают отдавать предпочтение именно DFA и его различным модификациям [7–9].

Настоящая работа посвящена рассмотрению методов флуктуационного анализа с устранением тренда (DFA), который позволяет оценить мульти-фрактальный спектр временных рядов.

Цель работы заключается в построении и применении алгоритмов флуктуационного анализа к нестационарным процессам на примере физиологических временных рядов, а также в модернизации этого метода для процессов с меняющимися во времени характеристиками.

1. Алгоритм метода DFA и его применение

Нестационарная динамика систем с меняющимися во времени характеристиками ограничивает применимость классических методов спектрально-корреляционного анализа. По этой причине было предложено несколько альтернативных подходов к исследованию длительных корреляций в экспериментальных данных, среди которых чаще других используется метод анализа флуктуаций относительно тренда (*detrended fluctuation analysis*, DFA) [4, 5].

Метод DFA имеет две характерные особенности: вместо спадающей корреляционной функции в рассмотрение вводится возрастающая функция, которая обеспечивает более надежное оценивание степенных закономерностей для длительных корреляций, особенно при наличии помех и ограничений объема выборки; составной частью алгоритма вычислений являются аппроксимация и последующее устранение низкочастотного тренда, позволяющие применять метод как для стационарных, так и для нестационарных процессов без их предварительной фильтрации.

Эти обстоятельства определили широкое использование DFA, например, при обработке экспериментальных данных в физиологии и медицине [10–12], а также в различных областях физики [13–19].

DFA используется для временных рядов со структурой, подобной случайному блужданию [4, 5]. Если временной ряд имеет структуру подобную шуму – то для дальнейшего анализа он должен быть преобразован в вид сигнала, подобный временному ряду случайного блуждания, непосредственно перед использованием самого метода.

На первом шаге алгоритма проводится суммирование значений временного ряда *X_i*,

$$Y_k = \sum_{i=1}^k (X_i - \overline{X}), \tag{1}$$

Сумму (1) называют профилем переменной x, ее иногда рассматривают как одномерное случайное блуждание, при котором изменение состояния в момент времени с номером і происходит на величину *X*_i. Ее реализация представлена на рисунке 1.



Рисунок 1. Мульти-фрактальный временной ряд (верхняя панель), моно-фрактальный (средняя панель) и белый шум (нижняя панель) показаны синим цветом. Красным цветом на картинке изображены вычисленные по формуле 1.1 вычисленный профиль для каждого из представленных временных рядов. Все временные ряды содержат 8000 выборок данных, в каждой из которых номера выборок обозначены горизонтальной осью.

Стоит отметить, что мульти-фрактальный временной ряд имеет отчетливые периоды с небольшими и большими колебаниями в отличие от временных рядов моно-фрактала и белого шума.

Традиционный анализ вариаций во временных рядах состоит в том, чтобы вычислить среднее отклонение (RMS).



Для сигналов с различной структурой, зачастую, значение RMS часто

Рисунок 2. Временной ряд мультифрактала (верхняя панель), монофрактала (средняя панель) и белого шума (нижняя панель) с нулевым средним (красные пунктирные линии) $u \pm 1$ RMS (красные сплошные линии). Все временные ряды имеют одинаковую RMS = 1, но совершенно разную структуру.

4000

Time (sample number)

5000

6000

7000

8000

1000

0

2000

3000

Значение RMS чувствительна только к различиям в амплитуде вариации, а не к различиям в структуре вариации.

Временные ряды мульти-фракталов в верхней панели рисунков 1 и 2 имеют локальные флуктуации как больших, так и малых величин. Поэтому, среднеквадратическое значение может быть вычислено для сегментов временного ряда, чтобы различать величины локальных колебаний.

Простая процедура состоит в том, чтобы разрезать временной ряд на непересекающиеся сегменты одинакового размера и вычислить локальное

RMS для каждого сегмента. А затем, привести сигнал к нулевому среднему значению.



Рисунок 3. Вычисление RMS локальных флуктуаций линейных (А), квадратичных (В) и кубических (С) трендов случайного блуждания.

Для каждого участка проводится аппроксимация данных методом наименьших квадратов определяется уравнение прямой Z, представляющей локальный тренд в пределах одного сегмента. Далее он устраняется в каждом сегменте путем перехода к разности $Y_k - Z_k$, и проводится анализ среднеквадратического отклонения от локального тренда, то есть вычисляется функция:

$$F(L) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [Y_k - Z_k]^2}.$$
 (2)

Такие вычисления повторяются для разных масштабов (то есть различных размеров сегментов), чтобы получить зависимость F(L) в широком диапазоне значений параметра *L*. Обычно с ростом *L* функция

F(L) также возрастает, и линейная зависимость $\lg F(L)$ а от $\lg L$ свидетельствует о наличии свойства масштабной инвариантности (скейлинга), которое проявляется в степенной зависимости

$$F(L) \sim L^{\alpha}.$$
 (3)

В этом случае флуктуации можно охарактеризовать скейлинговым показателем α, представляющим собой наклон соответствующего линейного участка при представлении зависимости (3) в двойном логарифмическом масштабе – линии регрессии.

2. Применение метода DFA к временным рядам ритма сердца

Сердечный ритм является важным физиологическим показателем, отражающим процессы вегетативной, нейрогуморальной и центральной регуляции в сердечно-сосудистой системе и организме в целом [20].

Исследование параметров сердечного ритма на основе регистрации сигналов периферических артериальных пульсаций дает дополнительную информацию о сердечно-сосудистой системе по сравнению с распространенными методиками анализа сердечного ритма.

В качестве исследуемого временного ряда была выбрана последовательность RR-интервалов электрокардиограммы человека. RRпоказатель продолжительности сердечного цикла, интервал ЭТО измеряется в любых отведениях. Синусовый ритм считается правильным, если колебания интервалов R—R не превышает 0,1 с. Частоту сердечных сокращений в 1 мин определяют путем деления 60 с на продолжительность интервала R—R (в секундах) [21].



Рисунок 4. Анализируемая последовательность RR-интервалов

На примере данных, изображенных на рисунке 4, применение алгоритма метода DFA. На первом шаге алгоритма строится профиль функции – по формуле (1) суммируются значения временного ряда. Результат представлен на рисунке 5.



Рисунок 5. Профиль функции для временного ряда RR-интервалов, изображенных на рисунке 4

Затем, проводится аппроксимация полученного временного ряда, и вычисляется значение функции F по формуле (2), при фиксированном значении временного окна L. После чего значение временного окна изменяется. Результаты аппроксимации при разных значениях временного масштаба L представлены на рисунке 6.



Рисунок 6. Аппроксимация, профиля функции, изображенного на рисунке 5. (a) L =1024, (б) L = 512, (в) L = 256, (г) L = 64, (д) L = 32, (e) L = 16

Значение функции F ставится в соответствие от значения временного окна L, после чего график зависимости F(L) строится в двойном логарифмическом масштабе (рис. 7.а).

Для проверки результатов работы алгоритма сравним результаты, полученные ранее в работе [5] (рис. 7.6).



Рисунок 7. Результат применения метода DFA к экспериментальным данным, приведенным на рисунке 4., б. Результаты применения метода DFA для диагностики заболеваний сердечно-сосудистой системы, полученные в работе [5].

Значение показателя скейлинга определяется как коэффициент наклона прямой на плоскости зависимости логарифма среднеквадратичного отклонения *F* от логарифма *L*. Его значение для приведенного примера экспериментальных данных равно 1.61.

Полученный результат подтверждает наличие самоподобия в широком диапазоне масштабов. Показатель скейлинга на временных окнах в 10-100 точек, близкий к значению 1.5, свидетельствует о динамике сердечного ритма, находящейся в пределах нормы, что соответствует ожидаемым результатам, описанным в работе [5].

Применённый таким образом метод DFA для диагностики патологии сердечно-сосудистой системы позволяет с хорошей точностью сопоставить полученные результаты с более сложными методами количественного анализа временных рядов.

3. Оценка динамики нефронов методом DFA

На рисунке 8. представлены временные ряды наиболее характерных случаев поведения динамики проксимального давления в канальцах нефронов, полученных в результате экспериментов на крысах, проводимых в институте Панума (университет Копенгагена, Дания).



Рисунок 8. Анализируемые сигналы проксимального давления нефронов (случаи нормотензивных и гипертензивных крыс)

Изучаемые колебания являются почти периодическими в норме, но при почечной гипертонии они становятся сильно нерегулярными, демонстрируя типичные характеристики динамического хаоса.

Для сигналов, изображенных на рисунке 8, был проведен корреляционный анализ, описанный в предыдущей главе. Результаты представлены на рисунке 9.



Рисунок 9. Результат применения метода DFA к экспериментальным данным, приведенным на рисунке 8.

В результате сравнительного анализа динамики нефронов нормотензивных и гипертензивных крыс были получены различные значения показателя скейлинга, свидетельствующие о возможности диагностики процесса развития почечной гипертонии.

Показатель скейлинга, при котором возможно диагностировать почечную гипертонию больше или равен значения 0.8.

4. Показатель Херста

Наклон линии регрессии называется показателем Херста [22]. Показатель Херста определяет моно-фрактальную структуру временных рядов тем, насколько быстро растет общее среднеквадратичное значение *F* локальных флуктуаций (среднеквадратичное отклонение) с увеличением размера выборки сегмента (то есть масштаба).

Больший показатель Херста (*H*), визуально рассматривается как более медленно развивающиеся вариации (то есть, более устойчивая структура) во временных рядах моно-фракталов и мульти-фракталов по сравнению с белым шумом.



Рисунок 10. Диапазон показателей Херста определяет континуум фрактальных структур между белым шумом (H = 0,5) и коричневым шумом (H = 1,5). Розовый шум H = 1 разделяет между шумами H <1, которые имеют более очевидные быстро развивающиеся флуктуации, и случайными блужданиями H> 1, которые имеют более явные медленно развивающиеся флуктуации. Розовый шум H = 1 разделяет между шумами H <1, которые имеют более очевидные быстро развивающиеся флуктуации, и случайными блужданиями H> 1 разделяет между шумами H <1, которые имеют более очевидные быстро развивающиеся флуктуации, и случайными блужданиями H> 1, которые имеют более очевидные быстро развивающиеся флуктуации, и случайными блужданиями H> 1, которые имеют более явные медленно развивающиеся флуктуации. Дальнодействующая зависимая структура большинства биомедицинских сигналов находится в промежутке фрактальных структур.

На рисунке 10 показано, что показатели Херста определяют континуум между шумом, подобным временному ряду, и случайным блужданием, подобным временному ряду.

Показатель Херста будет в интервале от 0 до 1 для шума, подобного временному ряду, тогда как выше 1 для случайного блуждания, подобного временному ряду. Временной ряд имеет зависящую от дальнего расстояния (long-range) (т.е. коррелированную) структуру, когда показатель Херста находится в интервале 0,5–1, и антикоррелированную структуру, когда показатель Херста показатель Херста находится в интервале 0–0,5. Значение 0.5 <α <1 указывает на наличие длительных корреляций, при которых за большим (по сравнению со средним) значением переменной х чаще следует большое, а за малым – малое.

Временной ряд имеет независимую или зависимую от ближнего расстояния структуру в особом случае, когда показатель Херста равен 0,5 -процесс, для которого значения переменных X_i в соседние моменты времени являются полностью некоррелированными.

Потери корреляций можно достичь, например, если случайным образом перемешать порядок точек временного ряда (в этом случае часто говорят о суррогатных данных). В отсутствие корреляций $\alpha = 0.5$. Если в сигнале существуют только корреляции небольшой длительности, начальный наклон может отличаться от 0.5, но α будет приближаться к 0.5 для больших *L*.

Особый случай $\alpha = 1$ соответствует 1/f-шуму, часто встречающемуся в динамике многих биологических систем. При $\alpha > 1$ корреляции существуют, но они не обязательно носят степенной характер. Например, α = 1.5 характеризует винеровский случайный процесс. Скейлинговый показатель α может служить индикатором, который описывает гладкость

исходного временного ряда: чем больше α, тем более гладким является анализируемый процесс.

С этой точки зрения 1/f-шум может интерпретироваться как компромисс между полностью некоррелированным белым шумом и более гладким винеровским процессом. Для бесконечного временного ряда $\alpha = (\beta + 1)/2$, то есть скейлинговый показатель метода анализа флуктуаций относительно тренда связан со скейлинговым показателем функции спектральной плотности мощности, а, следовательно, и с характеристикой спада АКФ.

Преимущество ПО сравнению простым данного метода С флуктуационным анализом состоит в том, что появляется возможность Хотя анализировать нестационарные процессы. ΜЫ пытаемся аппроксимировать тренд прямой линией (что на практике не всегда эффективно), можно рассматривать и другие варианты аппроксимации сплайнами и т.п.), также рассматривая (полиномами, флуктуации относительно локального тренда [3].

Если же при анализе нестационарных процессов тренд вовсе не устранять, то можно сделать ошибочные выводы при расчете скейлинговых характеристик. Рассматриваемый вариант флуктуационного анализа в настоящее время является одним из наиболее широко используемых методов исследования длительных корреляций в нестационарных процессах.

Он очень часто применяется в исследованиях сложной динамики биологических систем по экспериментальным данным. В частности, он активно используется в исследованиях структуры символьных последовательностей, таких как цепочки нуклеотидов ДНК [23].

В последнем случае в зависимости от того, какой нуклеотид встречается, значения *X_i* выбирают равными либо +1, либо -1, и проводится

поиск корреляций различной длительности в полученных бинарных последовательностях.

Известно много других применений данного метода, изначально предложенного для исследования эффектов длительных корреляций в структуре сердечного ритма и решения задач медицинской диагностики [24].

5. Мульти-фрактальный спектр временных рядов

Структура временных рядов моно-фракталов и мульти-фракталов различна, даже если они имеют схожее общее среднеквадратичное значение и величину наклона *H*, как это было показано на рисунках 2 и 4. Временные ряды мульти-фракталов имеют локальные флуктуации как с экстремально малыми, так и с большими величинами, что отсутствует во временных рядах моно-фракталов.

Отсутствие флуктуаций с экстремально большими и малыми величинами приводит к нормальному распределению для временных рядов моно-фракталов, где изменение описывается только статистическим моментом второго порядка (т.е. дисперсией). Поэтому DFA моно-фрактала основаны на статистике только второго порядка для всей RMS, то есть значения F (2).

В мульти-фрактальных временных рядах RMS локальных флуктуаций будут иметь чрезвычайно большую величину для сегментов в периоды времени больших флуктуаций и крайне малую величину для сегментов в течение периодов времени малых флуктуаций.

Следовательно, мульти-фрактальные временные ряды имеют распределение отличное от нормального, и следует учитывать все статистические моменты, а не только дисперсию, как в случае монофрактальных временных рядов.



Рисунок 11. Среднеквадратическое отклонение, и соответствующая линия регрессии, вычисленные для мульти-фрактальных временных рядов (А), моно-фрактальных (В) и белых шумов (С). Функции масштабирования, и соответствующие наклоны регрессии (синие пунктирные линии) зависящие от q. Функции масштабирования (красные и серые точки) и наклон регрессии – Hq (красные и серые пунктирные линии) не зависят от q (В, С). Показатель Херста q-го порядка для мульти-фрактальных временных рядов (синяя кривая), моно-фрактальных (красная кривая) и белых шумов (серая кривая), где цветные точки представляют наклоны Hq (D) для q = -3, q = -1, 1, и показано в (A – C). Стоит отметить, что пересечение Hq для мульти-фрактальных и моно-фрактальных временных рядов [пересечение между синей и красной кривыми в (D)] близко к q = 2. Этот перехват отражает сходство между их общими среднеквадратическими значениями F.

На рисунке 11 показано, что наклоны линий регрессии зависят от значения степени *q* для мульти-фрактального временного ряда (см. Рисунок 11 А). Разница между среднеквадратическими значениями q-порядка для положительных и отрицательных q более наглядна при малых размерах сегментов по сравнению с большими размерами сегментов (см. Рисунок 11 А). На малых сегментах возможно различать локальные периоды с

большими и небольшими колебаниями (то есть положительными и отрицательными q соответственно), потому что малые сегменты совпадают с данными периодами. Напротив, большие сегменты пересекают несколько локальных периодов с небольшими и большими флуктуациями и поэтому усредняют их различия в величине. Таким образом, взаимосвязь между среднеквадратичным порядком q-порядка мульти-фрактальных временных рядов становится похожей на временные ряды моно-фракталов при самых больших размерах сегментов (сравните рисунки 11 А и 11 В).

Растущее сходство между вычисленными среднеквадратическим значениями временных рядов мульти-фракталов и моно-фракталов q-порядка с увеличением размера выборки сегментов приводит к уменьшению наклона линий регрессии для мульти-фрактальных временных рядов (см. Рисунок 11 D).

Уменьшение угла наклона линий регрессии указывает на то, что сегменты сигнала с небольшими флуктуациями имеют структуру, подобную случайному блужданию, тогда как сегменты с большими флуктуациями имеют структуру сигнала похожего на шум (см. континуум показателей Херста на рисунке 11).

Сходство между значениями масштабирующей функцией *F* временных рядов моно-фракталов и мульти-фракталов на рисунке 11 обозначено пересечением линий регрессии при значении порядка степени q = 2 (синие и красные линии на рисунке 11 D). Это означает, что моно-фрактальный DFA не будет различать структуру моно-фрактального и мульти-фрактального временных рядов.

Существенное ограничение метода моно-фрактального корреляционного анализа при работе с мульти-фрактальными временными рядами заключается в его неспособности различать структуру моно-фрактального и мульти-фрактального временных рядов. Показатель Херста

порядка q является лишь одним из нескольких типов показателей масштабирования, используемых для параметризации мульти-фрактальной структуры временных рядов.

Типичная процедура преобразования описанного ранее алгоритма в MFDFA состоит в том, чтобы сначала преобразовать показатель Херста (Hq) в массовый показатель q-порядка (tq), а затем преобразовать tq в показатель сингулярности порядка q (hq) и размерность сингулярности q-порядка (Dq) [25].



Рисунок 12. Иллюстрация континуума мульти-фрактальных временных рядов (A) с тем же показателем Херста q-порядка для q = 2, но с разной шириной мульти-фрактального спектра (B).

График зависимости *hq* от *Dq* называется мульти-фрактальным спектром (Рис. 12 А). Таким образом, показатель массы порядка q *tq* может быть вычислен, если известно значение *Hq*.

Разница между максимальным и минимальным значениями *hq*, изображенная на рисунке 12 В, называется мульти-фрактальной шириной спектра. На рисунке 12, также, заметен рост структурных различий между периодами с небольшими и большими флуктуациями по мере увеличения ширины спектра мульти-фракталов.



Рисунок 13. Временные ряды мульти-фрактальных, моно-фрактальных и белых шумов (A), и их локальные показатели Херста (B, C).

Рисунок 13 А иллюстрирует набор локальных показателей Херста, вычисленных с помощью программного модуля [26] для мульти и монофрактальных временных рядов, и белых шумов с временным масштабом 5 нс. Локальный показатель Херста имеет большие вариации для мультифрактальных временных рядов по сравнению с моно-фрактальными и временными рядами белого шума.

Значение небольших флуктуаций в периоды мульти-фрактальных временных рядов с локальными флуктуациями больших величин (т. е. большими среднеквадратичными значениями) отражают структуру локальных флуктуаций для подобных шуму временных рядов (красные линии на рисунке 13 А). Напротив, большие значения локальных показателей Херста в периоды с локальными флуктуациями малых величин (то есть с малым среднеквадратичным значением) отражают временные ряды подобные случайному блужданию (серые пунктирные линии на рисунке 13 А).

Следовательно, локальный показатель Херста (*Ht*) в периоды с флуктуациями малых и больших величин согласуется с показателем Херста (Hq)ДЛЯ q-го порядка для отрицательных И положительных q соответственно. Преимущество локального показателя Херста ПО сравнению с показателем Херста q-го порядка заключается в способности показателя Херста идентифицировать локального момент времени структурных изменений в пределах временного ряда. В исследованиях, где физиологическое явление нарушается в некоторый момент времени (v), функция локального показателя Хёрста – Ht (ns, v) может определить, как это возмущение влияет на инвариантную структуру локального масштаба биомедицинских временных рядов.

Временное изменение локального показателя Херста можно суммировать в гистограмме, представляющей функцию распределения вероятности локального показателя Херста Ph (Ht) (Рис. 13 В). Мультиспектр фрактальный определяется просто логарифмическим преобразованием нормированного распределения вероятностей значением Dq. Согласно результатам, изображенным на рисунке 13, распределение и спектр имеют большую ширину для мульти-фрактальных временных рядов по сравнению с временными рядами моно-фракталов и белого шума.

Распределение для локальной инвариантной структуры масштаба временного ряда является таким же, что и обычное распределение вероятностей для локальных амплитуд временного ряда. Это объясняется тем, что текущее состояние физиологической системы связано как с прошлыми, так и с будущими состояниями, которые влияют на инвариантную структуру локального масштаба временных рядов. Таким

образом, распределение (*Ph*) и мульти-фрактальный спектр (*Dh*) биомедицинских временных рядов могут отражать важные свойства саморегуляции физиологических процессов.

6. Оптимальные значения параметров метода MFDFA, теория применения метода к временным рядам

Принцип метода MFDFA заключается в подсчете каждого значимого статистического момента q-порядка, и построении на их основе мультифрактального спектра исследуемого временного ряда.

Для успешной реализации применения MFDFA к биомедицинским временным рядам следует учитывать тот факт, что минимальный размер выборки сегмента должен быть достаточно большим, чтобы предотвратить ошибку при вычислении среднеквадратичного отклонения. Минимальный размер сегмента, превышающий 10 выборок, является «правилом времени» для вычисления RMS. Кроме того, минимальный размер выборки должен быть значительно больше, чем полиномиальный порядок, чтобы предотвратить наложение полиномиального тренда.

$$F_{q} = \sqrt[q]{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [Y_{k} - Z_{k}]^{q}}.$$
(4)

Так, максимальный размер сегмента меньше 1/10 размера выборки временного ряда обеспечит как минимум 10 сегментов при вычислении значения функции Fq (4), являющейся обобщением F (2) для каждого статистического момента.

Неточная оценка RMS может рассматриваться как шум измерения локального показателя Херста, присутствующий для временных рядов моно-фракталов и белых шумов на рисунке 13 А. Измерительный шум в *Ht* представлен в виде распределения *Ph* и мульти-фрактального спектра *Dh* для моно-фрактальных и белых шумовых временных рядов с ненулевой шириной (см. Рисунки 13 B, C).

Феноменологические аргументы важны для выбора минимального и максимального размеров сегментов В пределах границ, которые обеспечивают численные устойчивые вычисления. Например, если сила воздействия на землю измеряется при 200 Гц с помощью силовой пластины, то минимальный размер сегмента должен быть больше, чем $200/10 \Gamma \mu = 20$ образцов. Другим примером является исключение наименьших размеров сегментов в вариабельности сердечного ритма, о которых известно, что преобладают колебания из-за частоты дыхания. Кроме того, вариабельность сердечного ритма оперирует несколькими диапазонами шкал (то есть колебаниями с высокой частотой, низкой частотой, очень низкой частотой, сверхнизкой частотой), на которые предположительно влияют различные механизмы (например, частота дыхания, бароцептивные реакции, циркадный ритм) [27]. Три сигнальных инвариантных интервала также обнаруживаются в сигнале ЭЭГ, где показатель Херста способен разделяться между здоровыми и эпилептическими субъектами [28]. Таким образом, MFDFA может использоваться для интервалов в диапазоне масштабирования в этих явлениях [27, 29].

Значение степеней *q* в расчете метода MFDFA определяет порядок среднеквадратичного значения локальной флуктуации функции (4). Они должны состоять из положительных и отрицательных значений, чтобы взвешивать периоды с большими и малыми отклонениями во временном ряду.

Точность вычисления показателя Херста q-порядка уменьшается с ростом отрицательных и положительных значений порядков q. Это показано на рисунке 13. Одиночный сегмент с RMS наименьшего и наибольшего отклонения будет расти, увеличивая соответственно отрицательные и положительные q-порядки, и полностью доминировать в масштабировании значения функции Fq (то есть, в ее среднеквадратичном отклонении).

Доминирование отдельных сегментов с наименьшим и наибольшим отклонением дестабилизирует значения Fq и приводит к увеличению разброса вокруг линий регрессии (рис. 10). Поэтому при выборе q-порядков вычислении Fq (4)) следует избегать больших (значения q, при отрицательных и положительных значений q, поскольку они вызывают большие численные ошибки при вычислении мульти-фрактального спектра. Стабильность вычисления мульти-фрактального спектра также зависит от различий между сегментами наибольшего и наименьшего отклонения. Временные ряды, которые имеют большую ширину мульти-фрактального спектра, будут иметь большие различия между сегментами с наименьшим и наибольшим отклонением и, следовательно, дестабилизируют вычисление Fq при меньших отрицательных и положительных q-порядках (сравните мульти-фрактальное масштабирование на рисунке 11 Α С МОНОфрактальным масштабированием на рисунке 11 В).

Достаточный выбор значений q-порядков будет между значениями -5 5 биомедицинских И для большинства временных рядов [30]. Дестабилизация Fq при больших отрицательных и положительных qпорядках также зависит от размера выборки временного ряда. Временные ряды с большим размером выборки будут иметь несколько сегментов с чрезвычайно большим и малым отклонением, тогда как временные ряды с умеренным размером выборки будут иметь только один сегмент. Несколько сегментов больших и малых вариаций стабилизировали бы вычисление Fq для больших отрицательных и положительных q-порядков. Не существует единого мнения по поводу определения «слишком малых» размеров выборки для мульти-фрактального анализа, однако для временных рядов с менее чем 1000 выборок следует с осторожностью интерпретировать результат.

При вычислении DFA, и в MFDFA, по формулам (3) и (4) соответственно, среднеквадратическое значение локальной флуктуации

вычисляется вокруг полиномиального тренда, где форма аппроксимации определяется его порядком *m*. Более высокий порядок дает более сложную форму аппроксимации, но может привести к ошибке в вычислении временных рядов в пределах небольших размеров сегмента.

Таким образом, m = 1-3, вероятно, является хорошим выбором, когда наименьший размер сегмента содержит 10 – 20 выборок. Большинство исследований, которые используют DFA для биомедицинских временных рядов, не сообщают детали полиномиального убывания. Тем не менее, мульти-фрактальный спектр для нескольких порядков следует сравнивать, чтобы гарантировать, что на мульти-фрактальный спектр не влияют нестационарные тренды во временных рядах. Функции аппроксимации, присутствующие в биомедицинских сигналах, не обязательно должны иметь полиномиальную форму, они также могут иметь как колебательные, так и другие формы полиномов.

Как DFA, так и MFDFA могут быть расширены для включения более адаптивных процедур выделения тренда, таких как вейвлет-разложение [31], скользящее среднее [32] и эмпирическая модовая декомпозиция [33].

Кроме того, показано, что адаптивный фрактальный анализ работает лучше, чем DFA с полиномиальным трендом, когда используется для биомедицинских временных рядов с сильными тенденциями [28]. Расширение и модификация процедуры вычитания тренда в DFA и MFDFA предпочтительнее, если используются для биомедицинских временных рядов с нестационарными трендами.

Основным компонентом как DFA, так и MFDFA являются локальные колебания RMS. Статистические параметры, отличные от среднеквадратичного значения, могут использоваться для определения локальных колебаний во временных рядах. В мульти-фрактальном анализе, основанном на вейвлет-преобразованиях, локальные флуктуации

определяются как произведение свертки между временным рядом и осциллограммой, помещенной в локальные сегменты временного ряда [34, 35].

Следовательно, результаты анализа, называемого максимумами модуля вейвлет-преобразования [36], мульти-фрактального анализа с лидерами вейвлетов [37, 38] и вейвлет-проекции градиентного модуля [39] можно непосредственно сравнивать с результатами DFA и MFDFA.

При оценке энтропии мульти-фрактального спектра локальные флуктуации определяются как сумма временных рядов в локальном сегменте относительно общей суммы всех временных рядов [40]. Этот метод использует функцию энтропии порядка q вместо RMS q-порядка и оценивает функции *hq* и *Dq* напрямую, как наклон регрессии энтропийных функций q-порядка.

Показано, что MFDFA работает так же хорошо или лучше, чем описанные в работах [25, 41 – 43] другие виды мульти-фрактальных анализов. Тем не менее, расширение процедуры вычитания тренда в DFA и MFDFA следует учитывать, когда биомедицинские временные ряды содержат сильные колебательные или наклонные тренды [43, 44].

7. Применение метода MFDFA к временным рядам динамики сосудов головного мозга

Перед применением алгоритма непосредственно к биомедицинским временным рядам следует выделить принципиальные отличия применения метода MFDFA от метода DFA.

Во-первых, моно-фрактальный DFA используется для подтверждения того факта, что биомедицинские временные ряды имеют структуру, подобную шуму. Во-вторых, локальные колебания, близкие к нулю, должны быть устранены в рамках алгоритма MFDFA. В-третьих, перед применением метода MFDFA следует проверять наличие масштабной инвариантности, первоначально применив для этого метод DFA на больших диапазонах всего временного ряда.

При отсутствии масштабной инвариантности для всего диапазона, метод DFA может быть применен к тому же временному ряду, но с измененным масштабом входных параметров. MFDFA следует использовать с q-порядками от -5 до 5 и аппроксимацией полиномом порядка 1 – 3.

В качестве примера, был рассмотрен нестационарный процесс, содержащий значительные изменения среднего уровня (рис. 14 а) или чередование участков с разными статистическими характеристиками (рис. 14 с). В обоих примерах стандартные отклонения от аппроксимирующей функции сильно различаются для разных сегментов (рис. 14 b, d), и если в первом случае низкочастотный тренд можно устранить на этапе предварительной обработки, проведя фильтрацию, то во втором случае фильтрация может не повлиять на нестационарность анализируемых данных, если она связана, например, с изменением дисперсии сигнала при постоянном среднем уровне.



Рисунок 14. Анализируемые нестационарные процессы, демонстрирующие изменения разными статистическими среднего уровня (a) чередование участков с И характеристиками (c), И соответствующие ИМ профили с кусочно-линейной аппроксимацией тренда (b, d). В обоих примерах среднеквадратичное отклонение профиля от линейной аппроксимации тренда значительно больше для второго сегмента по сравнению с остальными.

Рассмотрим применение метода MFDFA к биомедицинским временным рядам динамики периферического кровообращения в сосудах головного мозга крыс при показателях в пределах нормы и при гипертонии, индуцированной фармакологически.

Существующие защитные механизмы организма не допускают сильных «скачков» периферического артериального давления при введении препарата, вызывающего гипертонию. Хотя кратковременные изменения в макроцеребральном кровообращении могут возникать и приводить к сильно нестационарным сигналам. Наиболее сильное изменение динамики микроцеребрального кровообращения наблюдается при максимально допустимой введённой дозы препарата.

Применение методов DFA может дать дополнительную информацию о корреляционных особенностях динамики церебрального кровообращения и реакциях сосудов головного мозга на такую фармакологически индуцированную гипертонию.

Ожидалось, что существующие механизмы, которые регулируют кровообращение в сосудах, и защищают церебральную кровеносную систему от резкого изменения периферического давления могут оказывать изменения на другие характеристики исследуемого временного ряда кровяного давления.

Тем не менее, результаты применения DFA для макро- и микроцеребрального кровообращения (обозначается как «macro» и «micro» соответственно) демонстрируют отсутствие значительных различий в кровяном давлении в сагиттальной пазухе головного мозга после введения препарата (таблица 1).

State	Arterial pressure, mmHg	CBF velocity, rel. units	
		macrocirculation	microcirculation
Control	105 ± 8	1.00 ± 0.06	0.55 ± 0.05 0.62 \pm 0.05*
0.23 μg/kg 0.5 μg/kg	177 ± 12 198 ± 13	1.02 ± 0.08	0.61 ± 0.06
1 μg/kg	215 ± 12	1.03 ± 0.07	$0.84\pm0.07^*$

Таблица 1. Изменения периферического артериального давления и связанные с ним реакции в динамике при различных введеных дозах препарата.

Динамика кровяного давления становится наиболее наглядной при построении мульти-фрактального спектра временных рядов давления церебральной кровеносной системы (рисунок 15).





Рисунок 15. Построение мульти-фрактальных спектров для временных рядов нефронов крыс методом MFDFA для случаев а. macro и b. Micro

Принимая во внимание разные реакции вен и капилляров на различную дозу введенного препарата, дополнительно приводится значение $\Delta \alpha = \alpha_{macro} - \alpha_{micro}$.

Результаты применения метода MFDFA ко временным рядам давления церебральной кровеносной системы при различной дозе введённого препарата представлены в таблице 2.

State	α_{macro}	α _{micro}	Δα	$\Delta \alpha_{filt}$
Control	0.99 ± 0.05	0.73 ± 0.06	0.26 ± 0.05	0.28 ± 0.05
0.25 µg/kg	0.96 ± 0.08	0.80 ± 0.07	$0.16 + 0.07^*$	$0.17 + 0.06^*$
$0.5 \ \mu g/kg$	0.93 ± 0.06	0.75 ± 0.04	$0.18 \pm 0.05^{*}$	$0.19 \pm 0.05^{*}$
$1 \mu g/kg$	0.98 ± 0.07	0.77 ± 0.04	0.21 ± 0.07	0.23 ± 0.06

Таблица 2. Различия в показателе скейлинга в случае исходных и предварительно отфильтрованных наборов данных, полученных с помощью метода MFDFA.

После введения препарата наблюдается тенденция к уменьшению различий в степенных корреляциях дальнего действия между динамикой церебральной кровеносной системы в сагиттальном синусе и окружающей сетью капилляров. Это отчетливо отражается в разности α, которая значительно снижается для первой дозы препарата, после которой различия становятся менее выраженными для следующих доз, показывая нелинейную реакцию динамики кровеносной системы с увеличением дозы препарата. Такой отклик отличается от поведения величин, приведенных в таблице 1.

8. Модифицированный метод DFA и его применение к временным рядам динамики сосудов головного мозга

В описанных ранее примерах стандартные отклонения от аппроксимирующей функции сильно отличаются для разных сегментов (рисунки 3, 6), если в первом случае низкочастотный тренд можно устранить на этапе предварительной обработки, проведя фильтрацию, то во втором случае фильтрация может не повлиять на нестационарность анализируемых данных, если она связана, например с изменением дисперсии сигнала при постоянном среднем уровне.

В рамках метода DFA отличия локальных значений стандартных отклонений, вычисленных для разных сегментов, не учитываются, хотя они могут оказывать существенное влияние на величину функции (3). Поэтому предлагается ввести в рассмотрение дополнительную меру, которая характеризует эффекты нестационарности

$$dF(L) = max[F_{loc}(L)] - min[F_{loc}(L)],$$
(5)

где $F_{loc}(L)$ – локальные среднеквадратичные отклонения профиля сигнала Y(k) от аппроксимации тренда $Y_L(k)$, вычисленные в пределах одного сегмента.

Для стационарных процессов при заданном L разброс значений $F_{loc}(L)$ будет сравнительно небольшим, и величина dF(L) приближается к нулю. При наличии сильной нестационарности dF(L) принимает значения в диапазоне от нуля до $max[F_{loc}(L)]$. Обычно наблюдаются изменения dF(L) при увеличении L, и соответствующая степенная зависимость описывается другим показателем скейлинга

$$dF(L) \sim L^{\beta}.$$
 (6)

На рисунке 16 б. приведен пример различий показателей α и β для сигнала, изображенного на рисунке 15 а. Отметим, что в обоих случаях

приведенные зависимости близки к линейным при выборе логарифмического масштаба по обеим осям, что свидетельствует о выполнении степенных закономерностей для F(L) и dF(L), которые описываются, соответственно, формулами (5) и (6).



16 а. Анализируемые нестационарные процессы, демонстрирующие изменения среднего уровня, б. Зависимости F(L) и dF(L) в логарифмическом масштабе для сигнала, изображенного на рисунке, показывающие различие показателей α и β .

В наборе данных с почти одинаковыми значениями $F_{loc}(L)$, значение dF(L) приближается к нулю. Для неоднородных наборов данных dF(L) принимает значения в диапазоне от нуля до максимального локального стандартного отклонения для каждого L, то есть до значения равного $max[F_{loc}(L)]$.

Значение dF(L) изменяется на разных временных масштабах, его степенная зависимость описывается другим показателем масштабирования, отличным от значения показателя F(L). Таким образом, нет четкой связи между масштабированием показатели, и они отражают различные особенности сложной организации наборов данных.

Для стационарных процессов значение dF(L) может уменьшаться с уменьшением временного окна *L* в отличие от зависимости F(L). Это наглядно представлено на рисунке 17 для анти-коррелированного временного ряда.



Рисунок 17. а. Реализация "розового" шума – где каждое последующее значение определяется, как разность двух случайных предыдущих значений. б. Зависимости F(L) и dF(L) в логарифмическом масштабе для сигнала а., показывающая отрицательную динамику β при положительном значении α .

Представленный расчета взглянуть метод позволяет на корреляционную оценку временного ряда, как на меру однородности его значений на различных временных масштабах. Таким образом построение dF(L) для временного ряда дополняет мульти-фрактальный анализ F(L), позволяя получить полную картину для корреляционной оценки временного ряда.

Применение предлагаемого модифицированного подхода было реализовано для решения задачи диагностики функциональных изменений в динамике церебральных кровеносных сосудов крыс при скачкообразном увеличении периферического артериального давления.

Рассматривались две группы животных: в контрольном состоянии и при резком повышении периферического артериального давления, вызванного введением специального препарата. Наличие защитных механизмов препятствует соответствующей реакции кровеносных сосудов головного мозга, и относительная скорость церебрального кровотока сравнительно слабо меняется как в венах (увеличение составляет в среднем 2–3%), так и в сети капилляров (9–11%).

Расчет показателя скейлинга α, представленного на рисунке 18, характеризующего длительные корреляции, продемонстрировал относительно слабые реакции, которые сопоставимы со статистическими погрешностями при анализе небольшой выборки (десять лабораторных животных).

Вычисление показателя скейлинга β позволило диагностировать более выраженные изменения, которые различаются для вен и капилляров по сравнению с контрольным состоянием.



Рисунок 18. а. Результат расчета показателей скейлинга α и β для контрольного состояния. б. Результат расчета показателей скейлинга α и β для состояния резкого повышенного давления в кровеносной системе

Полученные результаты свидетельствуют о том, что привлечение дополнительной характеристики в рамках предложенного модифицированного метода DFA позволяет расширить возможности диагностики структурных изменений динамики при изменении условий функционирования организма.

Заключение

В работе рассмотрены возможности и ограничения применения метода DFA к нестационарным процессам сложной структуры на примере биомедицинских временных рядов и реализация улучшенного метода – MFDFA, который позволяет обойти эти ограничения, построив мульти-фрактальный спектр исследуемых процессов.

Было показано, что мульти-фрактальный спектр отражает изменение фрактальной структуры экспериментальных данных. Это было показано на примере исследований мульти-фрактальной структуры RR-интервалов [45, 46], а также деятельности различных областей мозга и, таким образом, направлять более точную хирургию [47].

Для лучшего применения алгоритма MFDFA были представлены рекомендации в подборе численных параметров для получения более точных результатов при анализе временных рядов.

Применение метода MFDFA к временным рядам было рассмотрено на примере динамики периферического кровообращения в сосудах головного мозга крыс при показателях в пределах нормы и при гипертонии, индуцированной фармакологически.

В рамках метода DFA была предложена его модификация, основанная на расчете разности локальных значений стандартных отклонений, вычисленных для разных сегментов.

Вычисление показателя скейлинга модифицированным методом DFA позволило диагностировать более выраженные изменения, которые различаются для биомедицинских временных рядов.

Проведенное исследование динамики церебральных кровеносных сосудов демонстрирует преимущества модифицированного метода DFA. Возможности предложенного подхода можно применять для исследования

структуры нестационарных процессов в различных областях науки и техники.

По результатам проведенных исследованиям, представленным в данной работе, были опубликованы статьи [48] и [49] в рецензируемых научных журналах.

Список литературы

1. Lopes R., Betrouni N. (2009). Fractal and multifractal analysis: a review. Med. Image Anal. 13, 634–64910.1016/j.media.2009.05.003

2. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.

Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов.
 М.: Мир, 1978.

4. Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S. et al. // Phys. Rev. E. 1994.

V. 49. N. 2. P. 1685–1689.

5. Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E. et al. // Chaos. 1995. V. 5. N. 1. P. 82–87.

6. Bryce R.M., Sprague K.B. // Scientific Reports. 2012. V. 2. P. 315.

Hu K., Ivanov P.C., Chen Z., Carpena P., Stanley H.E. // Phys. Rev. E. 2001.V.
 P. 011114.

8. Chen Z., Ivanov P.C., Hu K., Stanley H.E. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041107.

Shao Y.H., Gu G.F., Jiang Z.Q., Zhou W.X., Sornette D. // Scientific Reports.
 2012. V. 2. P. 835.

10. Kuznetsov N.A, Rhea C.K. // PLoS ONE. 2017. V. 12. N. 3. P. e0174144.

11. Frolov N.S., Grubov V.V., Maksimenko V.A. et al. // Scientific Reports. 2019.V. 9. P. 7243.

12. Nolte G., Aburidi M., Engel A.K. // Scientific Reports. 2019. V. 9. P. 6339.

13. Kiyono K., Tsujimoto Y. // Physica A. 2016. V. 462. P. 807-815.

14. Bhoumik G., Deb A., Bhattacharyya S., Ghosh D. // Advances in High Energy Physics. 2016. V. 2016. P. 7287803

15. Løvsletten O. // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. P. 012141.

16. Pavlova O.N., Abdurashitov A.S., Ulanova M.V. et al. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2019. V. 66. P. 31–40.

17. Pavlova O.N., Pavlov A.N. // Physica A. 2019. V. 536. P. 122586.

18. Павлов А.Н., Руннова А.Е., Максименко В.А., Павлова О.Н., Гришина

Д.С., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, вып. 4. С. 8–10.

 Павлова О.Н., Павлов А.Н. // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, вып. 18. С.6–9.
 Баевский Р.М., Иванов Г. Г. "Вариабельность сердечного ритма: теоретические аспекты и возможности клинического применения" М.: Медицина, 2000. - 295 с.

21. Баевский Р.М., Берсенева А.П. Оценка адаптационных возможностей организма и риск развития заболеваний. - М.: Медицина, 1997. - 265 с.

22. Hurst H. E. (1951). // T. Am. Soc. Civ. Eng. 116, 770-808

23. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

24. Короновский А., Храмов А. Непрерывный вейвлетный анализ. Саратов. Изд-во ГосУНЦ "Колледж", 2002.

25. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H. E. (2002). // Physica A 316, 87–114, doi.: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3

26. Research group in Geriatrics. Beyond 1/f fluctuations: software https://www.ntnu.edu/inb/geri/software

27. Stein P., Kleiger E. (1999) // Ann. Rev. Med. 50, 249–261, doi.: 10.1146/annurev.med.50.1.249

28. Gao J. B., Hu J., Tung W.-W. (2011). // PLoS ONE 6, e24331., doi.: 10.1371/journal.pone.0024331

29. Makowiec D., Rynkiewicz A., Wdowczyk-Szulc J., Zarczyńska-Buchowiecka M., Galaska R., Kryszewski S. (2011) // Physiol. Meas. 32, 1681–1699, doi.: 10.1088/0967-3334/32/10/014

 Lashermes B., Abry P., Chainais P. (2004). // Int. J. Wavelets Multi. 2, 497– 523, doi.: 10.1142/S0219691304000597

 Manimaran P., Panigrahi P. K., Parikh J. C. (2009). // Physica A 388, 2306– 2314, doi.: 10.1016/j.physa.2009.02.011

32. Carbone A., Castelli G., Stanley H. E. (2004). // Physica A 344, 267–271, doi.:

10.1016/j.physa.2004.06.130

33. Qian X.-Y., Zhou W.-X., Gu G.-F. (2009). Modified Detrended Fluctuation Analysis Based on Empirical Mode Decomposition.

34. Daubechies I. (1992). // Philadelphia, PA: SIAM

35. Mallat S. (1999). // 2nd Edn San Diego: Academic Press

36. Muzy J. F., Bacry E., Arneodo A. (1991). // Phys. Rev. Lett. 67, 3515–3518, doi.: 10.1103/PhysRevLett.67.3515

37. Jaffard S., Lashermes B., Abry P. (2006). // ed. Qian T., Vai M. I., Xu Y., editors. (Basel: Birkhäuser Verlag), 219–264

38. Wendt H. (2008). // Ph.D. thesis, Lyon University, Lyon

 Turiel A., Perez-Vicente C. J., Grazzini J. (2006). // Comp. Phys. J. 216, 362– 390, doi.: 10.1016/j.jcp.2005.12.004

40. Chhabra A., Jensen R. V. (1989). // Phys. Rev. Lett. 62, 1327– 133010.1103/PhysRevLett.62.1327

41. Oświęcimka P., Kwapien J., Drozdz S. (2006). // Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. 74, 016103, doi.:10.1103/PhysRevE.74.016103

42. Serrano E., Figliola A. (2009). // Physica A 388, 2793–2805, doi.: 10.1016/j.physa.2009.03.043

43. Huang X. Y., Schmitt F. G., Hermand J.-P., Gagne Y., Lu Z. M., Liu Y. L. (2011). // Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. 84, 016208, doi.: 10.1103/PhysRevE.84.016208

44. Hu J., Gao J. B., Wang X. S. (2009). // J. Stat. Mech. P02066, 1–20

45. Ivanov P. C., Amaral L. A. N., Goldberger A. L., Havlin S., Rosenblum M.

G., Struzik Z., Stanley H. (1999). // Nature 399, 461–46510.1038/20924

46. Wang G., Huang H., Xie H., Wang Z., Hu X. (2007). // Med. Eng. Phys. 29, 375–37910.1016/j.medengphy.2006.06.013

47. Zheng Y., Gao J. B., Sanchez J. C., Principe J. C., Okun M. S. (2005). // Phys. Lett. A 344, 253–26410.1016/j.physleta.2005.06.092

48. Pavlov A.N., Abdurashitova A.S., Koronovskii A.A. Jr., Pavlovaa O.N.,

Semyachkina-Glushkovskayaa O.V., Kurths J. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 85, 105232

49. Павлов А.Н., Павлова О.Н., Короновский А.А. (мл.) // Письма в ЖТФ, 2020, том 46, вып. 6