

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Пермский национальный исследовательский политехнический  
университет»

Факультет прикладной математики и механики  
Кафедра «Динамика и прочность машин»  
Направление подготовки: 15.04.03 Прикладная механика  
Направление (профиль) образовательной программы:  
Динамика и прочность машин, конструкций и механизмов

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
**(магистерская диссертация)**

На тему Топологическая оптимизация элементов гидромеханических агрегатов, при заданных эксплуатационных характеристиках

Студент Билалов Руслан Альфредович

Состав ВКР:

1. Пояснительная записка на 43 страницах
2. Графическая часть состоит из 15 рисунков

Допускается к защите

Заведующий кафедрой

д.т.н., профессор

\_\_\_\_\_ В. П. Матвеев

« 20 » \_\_\_\_\_ июня 2019 г.

Регистрационный номер \_\_\_\_\_

Руководитель ВКР

\_\_\_\_\_ (М. В. Вольский)

Консультант

\_\_\_\_\_ (И. Э. Келлер)

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Пермский национальный исследовательский политехнический  
университет»

Кафедра «Динамика и прочность машин»

**УТВЕРЖДАЮ**

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ В. П. Матвеевко

« 13 » \_\_\_\_\_ мая \_\_\_\_\_ 2019 г.

### **ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

Фамилия, И. О. Билалов Руслан Альфредович

Факультет прикладной математики и механики Группа ДПМ-17-1м

Начало выполнения работы 13.05.2019

Контрольные сроки просмотра работы кафедрой 20.06.2019

Сроки представления на рецензию 24.06.2019

Защита работы на заседании ГЭК 27.06.2019

1. Наименование темы Топологическая оптимизация элементов гидро-механических агрегатов, при заданных эксплуатационных характеристиках
2. Исходные данные к работе Техническое задание, 3d-модель конструкции
3. Содержание пояснительной записки
  - а) Введение;
  - б) Список сокращений и условных обозначений;
  - в) Подходы к топологической оптимизации конструкций;
  - г) Мат. модель топологической оптимизации элемента конструкции;
  - д) Численное моделирование задачи топологической оптимизации;
  - е) Заключение;
  - ж) Список литературы;
  - и) Список рисунков.
4. Дополнительные указания \_\_\_\_\_

## 5. Основная литература

- а) Bendsøe, M. P. Optimization of Structural Topology, Shape, and Material / M. P. Bendsøe. – Springer, 1995. – 267 p.
- б) Topology optimization with manufacturing constraints: A unified projection-based approach / S. L. Vatanabe [et al.] // Advances in Engineering Software. – 2016. – No. 100. – P. 97–112.
- в) Larsson, R. Methodology for Topology and Shape Optimization: Application to a Rear Lower Control Arm : Master's thesis in Applied Mechanics / R. Larsson. – Göteborg, 2016. – 41 p.
- г) Фетисов, К. В. Проблемы использования топологической оптимизации при проектировании облегченных изделий аэрокосмической отрасли и возможные пути их решения / К. В. Фетисов, П. В. Максимов // Математическое моделирование в естественных науках. — 2017. — Т. 1. — С. 112—116.

Руководитель выпускной квалификационной работы магистра

Начальник бригады КО-4

М. В. Вольский

Консультант

д.ф.-м.н., профессор кафедры ДПМ

И. Э. Келлер

Задание получил

Р. А. Билалов

## КАЛЕНДАРНЫЙ ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

№	Наименование этапа	Объем, %	Сроки выполнения		Приме чание
			начало	конец	
1	Разработка основных разделов диссертации	75	13.05.19	19.06.19	+дораб. по п.4
2	Оформление диссертации	15	06.06.19	15.06.19	вместе с п.1
3	Разработка и оформление иллюстративного материала к защите диссертации	3	06.06.19	15.06.19	вместе с п.1,2
4	Представление диссертации на проверку и отзыв научного руководителя	5	16.06.19	18.06.19	
5	Представление работы заведующему кафедрой	1	20.06.19		
6	Защита на заседании ГЭК	1	27.06.19	27.06.19	

Научный руководитель работы

(М. В. Вольский)

« 13 » \_\_\_\_\_ мая 2019 г.

# Оглавление

	Стр.
Список сокращений и условных обозначений . . . . .	7
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1. Подходы к топологической оптимизации конструкций</b>	<b>11</b>
1.1 Введение . . . . .	11
1.2 История топологической оптимизации . . . . .	12
1.3 Техники топологической оптимизации . . . . .	12
1.4 Современные направления в теории топологической оптимизации . . . . .	14
<b>Глава 2. Математическая модель топологической         оптимизации элемента конструкции</b>	<b>16</b>
2.1 Концептуальная постановка задачи . . . . .	16
2.2 Математическая постановка задачи . . . . .	16
2.3 Постановка задачи оптимизации . . . . .	19
2.3.1 Обеспечение запаса прочности . . . . .	19
2.3.2 Ограничение на первую собственную частоту колебаний	19
2.3.3 Ограничение по массе . . . . .	20
2.3.4 Ограничение по перемещениям . . . . .	20
2.3.5 Производственные ограничения . . . . .	20
2.3.6 Задача оптимизации конструкции . . . . .	21
2.4 Численная реализация модели . . . . .	21
2.4.1 Метод конечных элементов . . . . .	23
2.4.2 Численный метод решения задачи топологической оптимизации . . . . .	24
2.4.3 Обзор программного обеспечения для задач топологической оптимизации . . . . .	24
<b>Глава 3. Численное моделирование задачи топологической         оптимизации</b>	<b>28</b>

	Стр.
3.1 Дискретизация исходной геометрии . . . . .	28
3.2 Решение задачи топологической оптимизации . . . . .	29
3.2.1 Статический расчет на прочность . . . . .	29
3.2.2 Динамический расчет - модальный анализ . . . . .	30
3.2.3 Результаты топологической оптимизации . . . . .	31
3.2.4 Анализ сходимости численных расчетов . . . . .	36
3.3 Выводы . . . . .	37
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>43</b>

## Список сокращений и условных обозначений

- $\sigma$  тензор напряжений Коши  
 $\varepsilon$  тензор малых деформации  
 $C$  тензор упругих модулей  
 $K$  матрица жесткости  
 $M$  матрица масс  
 $k_e$  матрица жесткости конечного элемента  
 $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$  вектор перемещений  
 $\mathbf{u}_e$  вектор перемещений конечного элемента  
 $\mathbf{t} = \{t_x, t_y, t_z\}$  вектор усилий,  $\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n}$   
 $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$  вектор нормали к поверхности  
 $F$  вектор внешних сил на единицу объема  
 $W$  матрица-столбец, содержащая амплитудные значения перемещений - форма колебаний  
 $\rho$  плотность  
 $p$  давление  
 $c$  податливость  
 $N$  количество конечных элементов  
 $f$  заданная доля объема (или отношение конечной массы конструкции к начальной)  
 $I$  единичный тензор  
 $\nabla$  оператор набла  
 $\cdot$  скалярное произведение  
 $()^T$  операция транспонирования  
 $\sigma_{max}$  максимальные напряжения, полученные в ходе решения  
 $\sigma_B$  предел прочности материала - временное сопротивление  
 $\sigma_0$  напряжения, возникающие от силы тяжести насоса  
 $\omega$  круговая частота колебаний  
 $\omega_0$  заданная собственная частота  
 $\omega_1$  первая собственная частота  
 $m_1$  нижнее ограничение по массе конструкции  
 $m_2$  верхнее ограничение по массе конструкции  
 $S_i$   $i$ -ая граница

$S$	свободная граница
$i$	индекс
$\mathbf{u}_{max}$	ограничение на максимальные перемещения
$V_0$	начальный объем
$V_x$	конечный объем
$\partial V$	форма конструкции
$x_e$	параметр псевдоплотности конечного элемента
$E_e$	модуль упругости конечного элемента
$E_0$	модуль упругости материала
$E_{min}$	малый модуль упругости на пустой области (то есть с нулевой псевдоплотностью $x_e$ )
$q$	штрафной параметр
<i>НДС</i>	напряженно - деформированное состояние
<b>SIMP</b>	Solid Isotropic Material with Penalization, метод штрафных функций для изотропного твердого тела
<b>ESO</b>	Evolutionary Structural Optimization, эволюционная структурная оптимизация
<b>BESO</b>	Bidirectional Evolutionary Structural Optimization, двунаправленная эволюционная структурная оптимизация
<i>МКЭ</i>	метод конечных элементов
<i>КЭ</i>	конечный элемент
<i>МКР</i>	метод конечных разностей
ПО	программное обеспечение
ЭВМ	электронно-вычислительная машина
ЧПУ	числовое программное управление
CAD	Computer Aided Design, системы автоматизированного проектирования
CAE	Computer Aided Engineering, системы для инженерных расчетов
CAM	Computer Aided Manufacturing, системы автоматизированного производства
FDM	Fused Deposition Modeling, моделирование методом наплавления
SLS	Selective Laser Sintering, селективное лазерное спекание
SLM	Selective Laser Melting, селективное лазерное плавление
STL	Stereolithography, формат файла, широко используемый для хранения трёхмерных моделей объектов для использования в аддитивных технологиях



## Введение

Неотъемлемое техническое требование к любой продукции авиационной промышленности - снижение веса изделия. Важно отметить, что снижение веса - проблема, которую конструкторы и дизайнеры решают постоянно, пытаясь максимально минимизировать массу летательного аппарата, поднимаемую в воздух. Более 80% веса полностью загруженного коммерческого авиалайнера – это корпус и его топливо, а вовсе не пассажиры и их багаж. Сокращение веса всего на 1% дает экономию топлива в 0.75%. То есть, экономическая выгода от снижения веса самолета и его комплектующих очевидна [1].

Снижение массы самолета приводит к уменьшению потребного запаса топлива на борту, что, в свою очередь, снижает массу самолета, потребную тягу и, соответственно, массу двигателя и т. д. Оценив все эти изменения массы самолета и потребного запаса топлива, окончательно получим, что снижение массы самолета на 1 кг приводит к уменьшению расхода топлива на один час полета примерно на 40 г. Годовой налет пассажирского самолета составляет около 2500 ч, причем в эксплуатации находится не один самолет, а примерно 500 самолетов данного типа. Тогда годовая экономия топлива составит 50 т. Итак, уменьшение при проектировании или изготовлении массы пустого самолета даже на 1 кг дает значительную экономию топлива при эксплуатации самолетов. Получение в процессе проектирования и производства минимально возможной массы всех компонентов самолета - одна из основных задач специалистов, создающих новый самолет. Эта задача должна решаться, в первую очередь, уменьшением массы конструкции за счет:

- выбора оптимальных конструктивно-силовых схем агрегатов и применения более совершенных методов расчета конструкции на прочность [2];
- применения новых, более прочных материалов или материалов с большей выносливостью - сопротивляемостью усталостным повреждениям (например, алюминий-литиевых сплавов, композиционных материалов).
- а так же многими другими.

На сегодняшний день применение всего инструментария конечно-элементной оптимизации конструкций позволяет существенно упростить конструкторскую работу для выбора тех самых оптимальных параметров для снижения массы летательных аппаратов.

**Целью** данной работы является исследование возможностей оптимизации топологии элементов шестеренного насоса, а также внедрению результатов исследования в производство с целью снижения массы насоса и улучшения его прочностных характеристик.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать предметную область.
2. Разработать математическую модель для решения задачи топологической оптимизации конструкции.
3. Провести ряд вычислительных экспериментов.
4. Сравнить результаты численного моделирования с натурными экспериментами и работами других авторов в данной области.
5. Внедрить результаты в производство.

**Научная новизна:** заключается в том, что впервые была решена задача топологической оптимизации конкретного элемента шестеренного насоса, при заданных эксплуатационных характеристиках.

#### **Практическая значимость**

1. Повышение конкурентоспособности Предприятия на рынке гидромеханических агрегатов.
2. Экономия материала.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается проведенным анализом сходимости численных расчетов, а результаты численного моделирования находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами в данной области [3–6]. Кроме того планируется сравнение с натурными экспериментами в части подтверждения прочности и работоспособности (вибропрочности) после воздействия синусоидальной вибрации. Испытания будут проводиться с целью подтверждения соответствия требованиям [7].

**Объем и структура работы.** Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 43 страницы, включая 15 рисунков. Список литературы содержит 30 наименований.

# Глава 1. Подходы к топологической оптимизации конструкций

## 1.1 Введение

Топологическая оптимизация — это, в некотором смысле, попытка автоматизировать труд инженеров. Разрабатывать конструкции, которые достаточно эффективны для решения определенных задач, инженеры научились довольно давно: несущие балки, детали самолетов, корпуса подводных лодок и так далее. Для каждого конкретного приложения инженер может сказать, как приблизительно должна выглядеть та или иная деталь. Но насколько оптимальной будет такая деталь? Можно ли придумать форму лучше? И если да, то насколько лучше?

Эти вопросы могут быть сформулированы на достаточно строгом математическом языке в виде задачи оптимизации, и при определенных допущениях на них может быть дан единственно верный ответ. Представим, что у нас есть кронштейн, который одним концом жестко заделан в стену, а другой конец тяжело нагружен. Можно ли придумать для него такую форму, которая минимизирует запасенную в нем упругую энергию (меру его жесткости), и при этом потратить минимум материала? Топологическая оптимизация дает ответ на этот и подобные вопросы.

Топологическая оптимизация тесно связана с оптимальным проектированием механических систем.

При оптимальном проектировании механических систем целевой функцией может быть не только масса, или объем материала системы, но и ее жесткость или собственная частота, критическая сила или функция, определяющая условие разрушения, или какая-либо другая важная характеристика системы.

Большую роль в задачах оптимального проектирования играют те или иные ограничения, накладываемые на переменные задачи. Эти ограничения могут формулироваться с помощью целевой функции другой задачи и наоборот. На систему могут быть наложены ограничения геометрического типа [8].

Так же топологическая оптимизация используется, в частности, при разработке микроструктур метаматериалов. Например, сконструировать такую

микроструктуру, чтобы после ее периодического повторения и усреднения на макроуровне получить желаемые упругие свойства [9].

## 1.2 История топологической оптимизации

Сама идея структурной оптимизации, то есть возможности разумно экономить материал, появилась в начале XX века. Первую, пионерскую работу в 1904 году написал Митчелл [10]. В контексте численных методов о структурной оптимизации впервые стали говорить одновременно с появлением метода конечных элементов, то есть в 1960-е годы.

А первая задача оптимального проектирования механических систем была составлена и решена Лагранжем [11]. Это была задача о минимуме веса колонны, сжимаемой приложенной к ее свободному концу силой.

Наиболее интересные идеи топологической оптимизации появились в 1980-е годы, и на их основе были разработаны хорошие, законченные теории. Но настоящий всплеск интереса к этой теме начался вместе с широким распространением трехмерной печати. Оптимизировать структуру только полдела, ее ведь нужно еще и реализовать. А если оптимальная структура настолько сложна, что ее не позволяет сделать ни один станок с числовым программным управлением? Именно здесь на помощь приходит 3D-печать. На рубеже 2000–2010-х годов истекли некоторые ключевые патенты на технологии, связанные с 3D-печатью. После этого она стала развиваться экспоненциально, и, как следствие, все вспомнили про топологическую оптимизацию. Благодаря этому появился инструмент, позволяющий печатать смоделированные структуры[9].

## 1.3 Техники топологической оптимизации

Самой первой техникой топологической оптимизации была **SIMP**. Исследователи достаточно быстро поняли, что задача оптимизации как поиска распределения материала изначально была сформулирована плохо. Измене-

ние топологии, то есть появление в заполненной области сквозных отверстий или полостей, приводит к появлению огромного количества равноценных структур. Более того, чем мельче вводимые полости или отверстия, тем лучше можно получить оптимизируемый функционал — число, которое сопоставляется структуре. На практике же такие микроперфорированные решения нам неинтересны, и их появление лишь артефакт постановки задачи.

Как же получить адекватное решение? В этом поможет регуляризация: нужно по возможности уменьшить пространство поиска, объяснив в задаче, что именно мы ищем. Например, нам нужна структура с каким-то конечным числом элементов или структура по возможности с небольшой площадью поверхности. Кроме того, нужно сформулировать задачу так, чтобы она была, что называется, выпуклой: чтобы в направлении улучшения свойств можно было двигаться потихоньку, маленькими итерациями, а в конце концов прийти к наилучшей структуре.

Классическая формулировка задачи топологической оптимизации **SIMP** позволяет сделать именно это: с одной стороны, сформулировать изначально невыпуклую задачу в удобном для градиентного спуска виде, не делая ее при этом глобально выпуклой, но создавая выпуклые подзадачи на каждом локальном шаге. С другой стороны, при помощи техники фильтрации мы можем определить необходимый размер детали.

Этот метод не сразу получил признание, потому что он довольно сложен и не существует его прямой и понятной инженерной интерпретации. В **SIMP** подразумевается, что в области, в которой мы моделируем, нужно сначала найти серое (иначе говоря, промежуточное) распределение, то есть размазать условную балку и сталь для нее в виде промежуточной плотности, а потом постепенно собрать эту плотность в отдельные элементы конструкции. Такой подход может показаться на первый взгляд несколько странным: совсем неочевидно, как его можно интерпретировать. Поэтому до определенного момента прикладники относились к этой технике скептически. Потом появилась еще одна техника, которая стала конкурировать с **SIMP**. Она основана на так называемом *жадном вырезании*: мы берем сплошной кусок материала и начинаем вырезать материал в тех местах, где упругая энергия минимальна. Основная цель — по возможности оставлять полезные для данной конструкции области, несущие нагрузку, где есть напряжение, а ненапряженные области удалять. Таким образом, двигаясь итеративно, мы

получаем конструкции, близкие к тому, что генерирует **SIMP**. Такая техника довольно просто реализуется и называется **ESO**. В более общей постановке метода **BESO** позволяет не только удалять, но и добавлять эффективный материал, что позволяет найти более эффективные структуры.

Две техники — простая и вычислительно не затратная **BESO**, а также несколько более математически строгая **SIMP** — сегодня активно конкурируют. Они были реализованы во многих коммерческих пакетах и стали широко применяться в современной индустрии[9; 12].

#### 1.4 Современные направления в теории топологической оптимизации

Топологическая оптимизация сама по себе — подраздел теории оптимизации, но с некоторой спецификой, связанной с ее развитием в плотном контексте практических приложений. В этой области работают инженеры, которым важен практический результат. Если они получили конструкцию легче на 5%, обладающую той же жесткостью и прочностью, что и предыдущая, — это и есть их результат. Но также топологическую оптимизацию изучают чистые математики и вычислители, которых интересует именно теоретическая, а не инженерная сторона вопросов.

У математических методов оптимизации тоже есть характеристики, которые позволяют оценить их эффективность: насколько быстро они сходятся, насколько устойчивы, насколько сложные формы и топологии позволяют получить. Здесь развивается абстрактная теория о существовании и единственности подобных решений. На текущий момент с математической стороны, по крайней мере в плане чистого вариационного исчисления, теория более-менее завершена, достаточно понятны все основные формулировки оптимизации формы и оптимизации топологии, их свойства и способы решения.

Активно развиваются области, связанные с методами быстрой оптимизации. Одной математической постановки недостаточно: нужно реализовать эту постановку и научить компьютер быстро решать задачу. И в этой области сейчас сосредоточены очень большие усилия как теоретического, так и технического характера. Как создать параллельный алгоритм оптимизации

для распределенных вычислений? Как уменьшить число степеней свободы? В численном решении рано или поздно все сводится к системе линейных уравнений, которую тоже надо как-то решать. По возможности она должна как-то удобно решаться — не методом Гаусса, который требует число операций, пропорциональное кубу числа неизвестных, а быстрее. В этой области сейчас сосредоточены основные усилия математиков-прикладников.

Один из интересных трендов последних лет — использование топологически оптимальных конструкций в дизайне и архитектуре. Это делается не из желания сэкономить, а скорее из эстетических соображений. Топологическая оптимизация обычно приводит к конструкциям, похожим на естественные структуры — гладким, без концентрации напряжения, то, что называют *bionic design*. Еще одно модное направление — топологическая оптимизация в природе, в том числе неживой. Это естественные процессы, которые эквивалентны математической оптимизации. Эти результаты активно популяризируются среди инженеров. Ведь и сегодня далеко не все из них знают о существовании топологической оптимизации[9].

## Глава 2. Математическая модель топологической оптимизации элемента конструкции

### 2.1 Концептуальная постановка задачи

Дан элемент конструкции гидромеханического агрегата - крышка шестеренного насоса (Рисунок 2.1). Конструкция должна выдерживать нагрузки, определенные в Техническом задании. Требуется снизить массу конструкции при сохранении ее прочностных и эксплуатационных свойств при возможности ее технической и производственной реализации. Снижение массы должно происходить за счет образования новых, не сквозных полостей.

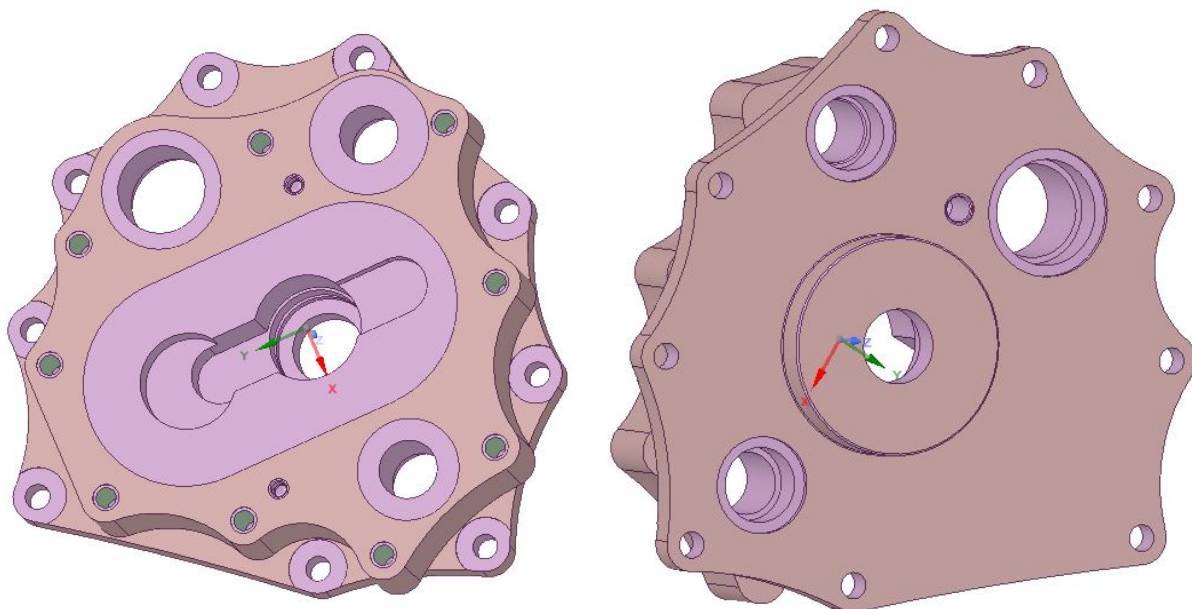


Рисунок 2.1 — Крышка шестеренного насоса

### 2.2 Математическая постановка задачи

Для описания поведения конструкции, приведенной в разделе 2.1 использовалась система уравнений механики сплошных сред, состоящая из:

- уравнения движения (2.1),
- геометрического соотношения (2.2),



– определяющего соотношения - закона Гука (2.3).

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Система уравнений (2.1–2.3) добавлялась граничными условиями и условиями нагружения согласно рисункам 2.2 и 2.3.

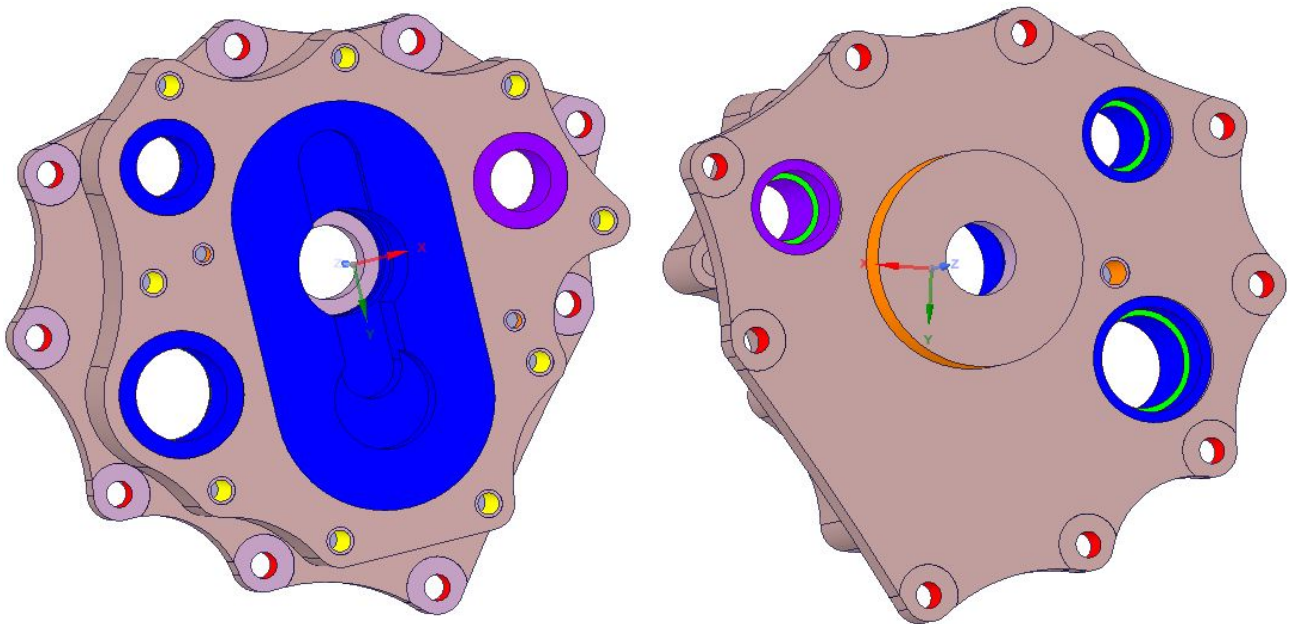


Рисунок 2.2 – Граничные условия

На рисунках 2.2 и 2.3 приняты обозначения:

- Красным цветом обозначены крепежные отверстия, фиксация детали по всем осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  - Граница  $S_1$ ;
- Оранжевым цветом обозначены фиксирующие отверстия, фиксация детали по осям  $X$ ,  $Y$  - Граница  $S_2$ ;
- Синим цветом обозначены поверхности на которые действует давление  $p_1$  - Граница  $S_3$ ;
- Фиолетовым цветом обозначены поверхности на которые действует давление  $p_2$  - Граница  $S_4$ ;
- Желтым цветом обозначены отверстия, на которые действует удаленно-приложенная нагрузка  $\boldsymbol{\sigma}_0$  - Граница  $S_5$ ;

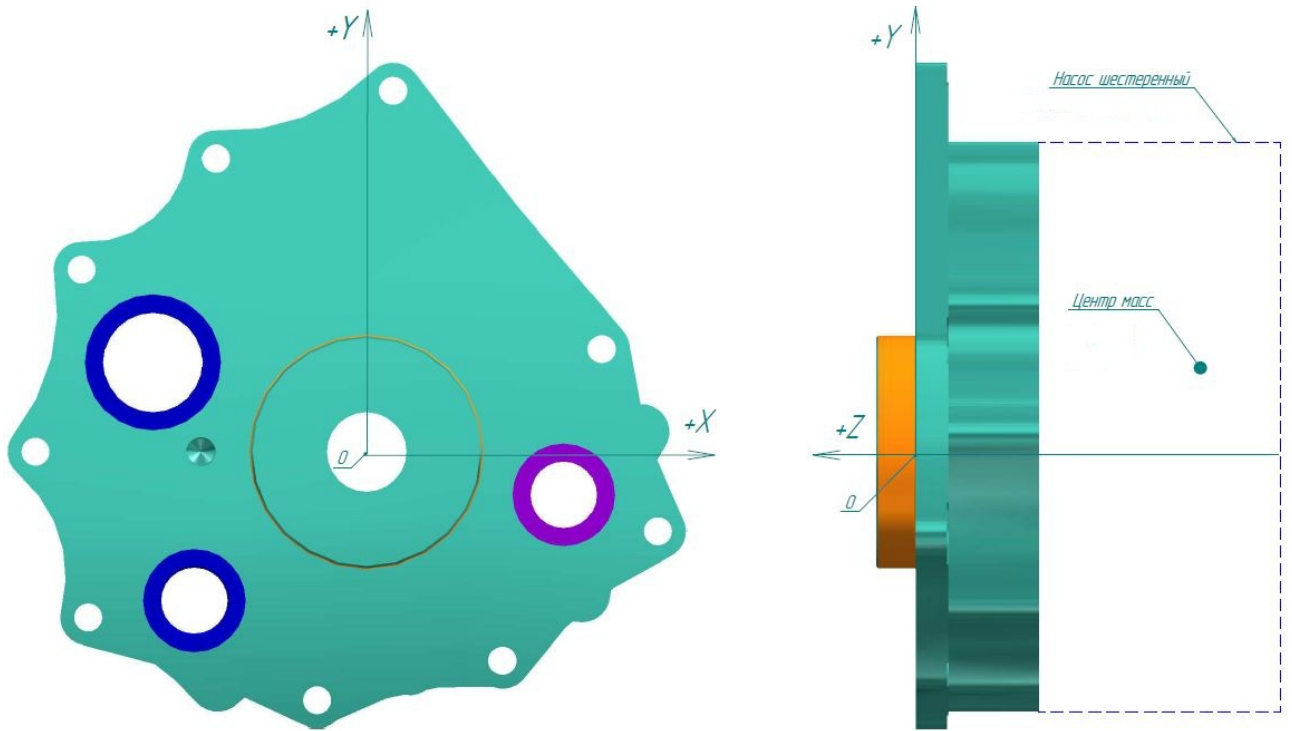


Рисунок 2.3 — Рабочее положение на двигателе (земля снизу)

- Зеленым цветом обозначены места присоединения уплотнительных колец - Граница  $S_6$ ;
- На оставшейся границе  $S$  заданы условия свободной поверхности. Математически граничные условия запишутся так:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}|_{S_1} &= \mathbf{0} \\
 u_x|_{S_2} &= 0 \\
 u_y|_{S_2} &= 0 \\
 t_z|_{S_2} &= 0 \\
 \boldsymbol{\sigma}|_{S_3} &= -p_1 \mathbf{I} \\
 \boldsymbol{\sigma}|_{S_4} &= -p_2 \mathbf{I} \\
 \mathbf{t}|_{S_5} &= \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} \\
 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|_S &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом система уравнений (2.1–2.3) с граничными условиями (2.4) описывает поведение конструкции для определения НДС, необходимого для решения оптимизационной задачи. Начальное НДС - не напряженное.

## 2.3 Постановка задачи оптимизации

Помимо удовлетворения задаче, поставленной в разделе 2.2 для постановки задачи топологической оптимизации необходимо задать ограничения.

### 2.3.1 Обеспечение запаса прочности

Согласно [13] коэффициент запаса прочности по временному сопротивлению (пределу прочности) для сталей, алюминия, меди и их сплавов в рабочих условиях должен соответствовать значению, равному 2.4. Из соображений инженерной практики и особенностях технологического производства конструкции было принято решение для топологической оптимизации установить коэффициент запаса по пределу прочности равному 2.5. Математически это ограничение записывается как показано в формуле (2.5).

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_B}{2.5} \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Ограничение на первую собственную частоту колебаний

Согласно Техническому заданию для конструкции необходимо обеспечить частоту собственных колебаний не менее  $\omega_0$  Гц. Математически это ограничение записывается как показано в формуле (2.6).

$$\omega_1 \geq \omega_0 \quad (2.6)$$

### 2.3.3 Ограничение по массе

Минимальное ограничение по массе было выбрано из соображения конкурентноспособности. Максимальное ограничение - из анализа результатов работ [3–6]. Итоговое ограничение по массе было записано в следующем виде:

$$m_1 \leq \iiint_V \rho dV \leq m_2 \quad (2.7)$$

### 2.3.4 Ограничение по перемещениям

Ограничение по максимальным локальным перемещениям были выбраны из соображений инженерной практики, требований [14] и результатов испытаний опытных образцов конструкции. Они накладывались в местах прилегания уплотнительных колец, как показано на рисунке 2.2 и были формализованы в (2.8).

$$\mathbf{u}|_{S_6} \leq \mathbf{u}_{max} \quad (2.8)$$

### 2.3.5 Производственные ограничения

Поскольку конструкция, описанная в разделе 2.1 производится путем фрезерования были выставлены производственные ограничения для обеспечения возможности производства конструкции после оптимизации фрезерованием. В группу таких ограничений входило:

1. Не допускается образование внутренних полостей в конструкции.
2. Не допускается образование новых сквозных отверстий.
3. Удаление материала должно происходить по нормали к поверхности конструкции.

Математически эти ограничения были сформулированы через понятие *гомеоморфизм* и записаны в следующем виде:

$$\exists f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{X}$  - исходная топология конструкции,  $\mathbf{Y}$  - топология конструкции после оптимизации, а функция  $f$  удовлетворяет условиям взаимно однозначности, а так же  $f$  и обратная функция  $f^{-1}$  непрерывны.

### 2.3.6 Задача оптимизации конструкции

После математической постановки, приведенной в разделе 2.2 поставим следующую задачу оптимизации. Найти топологию конструкции, изображенной на рисунке 2.1, в которой удовлетворяются уравнения (2.1–2.3), граничные условия (2.4), условие обеспечения запаса прочности (2.5), условие ограничения первой собственной частоты колебания (2.6), условие ограничения по массе конструкции (2.7), условие ограничения максимальных перемещений (2.8) и производственных ограничений (2.9), а функционал (2.10), равный податливости системы принимает минимальное значение.

$$c(\mathbf{C}, \boldsymbol{\sigma}, \partial V) \rightarrow \min \quad (2.10)$$

## 2.4 Численная реализация модели

Аналитическое решение системы уравнений (2.1–2.4) не представляется возможным в виду существенной геометрической сложности, не говоря уже про задачу оптимизации (2.10) с ограничениями (2.5–2.9). Поэтому для решения поставленной задачи необходимо использовать численные методы. Согласно [15] все имеющиеся на сегодняшний день методы для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных можно разделить на три большие группы:

1. **Конечно-элементные методы** [16]. Область интегрирования (сплошная среда) разделяется на конечные элементы, внутри которых искомые переменные аппроксимируются непрерывными функциями. Исходные уравнения записываются для значений переменных в узлах элементов, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов внутри-элементных аппроксимирующих функций. Такой подход позволяет легко учесть сложную геометрию задачи или выделить некоторые геометрические особенности (более детальная сетка) в рамках простой формы области интегрирования. Преимуществами также является непрерывная аппроксимация по всему пространству, в отличие от метода конечных разностей.
2. **Метод конечных разностей** [17]. Сплошная среда заменяется конечно-разностной сеткой (ячейками) определенного размера (масштаб дискретизации), внутри которых искомые функции постоянны. Интегрируемым уравнениям ставятся в соответствие конечно-разностные аналоги, решение которых для каждой ячейки приводит к нахождению неизвестных значений в ячейках сетки. После того, как значения искомых параметров на текущем шаге по времени известны, производится поиск значений в ячейках следующего временного слоя. В результате решение системы уравнений представляет собой набор точек в пространстве и времени с определенными интервалами (шагами). Как правило, *МКР* существенно проще в плане программной реализации, чем *МКЭ*, однако возникают трудности при аппроксимации граничных условий на криволинейных образующих и ведении расчетов на неравномерных сетках.
3. **Бессеточные методы** [18]. Каждая искомая функция в исходной системе дифференциальных уравнений в частных производных раскладывается по системе базисных функций. При подстановке данного разложения в исходную систему получается, что каждое дифференциальное уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, в отличие от *МКР* и *МКЭ*, в которых численное решение будет тем точнее, чем меньше масштаб дискретизации сплошной среды, при указанном подходе точность решения будет пропорциональна

количеству базисных функция в разложении. Подобные методы численного интегрирования появились при возникновении проблемы зависимости решения задачи от сетки, особенно в задачах, связанных с разрушением. Однако истинно бессеточными были только самые ранние представители данных методов, например, метод Галеркина, метод Ритца. Поздние же модификации приобрели некий аналог сетки в виде узлов, покрывающих область интегрирования. При этом разложение по системе функций стало носить локальный характер. Вместе с этим и проблемы, связанные с зависимостью решения от сетки стали присущи «бессеточным» методам.

### 2.4.1 Метод конечных элементов

*МКЭ* подробно описан, например в [16; 19]. Суть метода заключена в его названии. Область, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, разбивается на конечное количество подобластей (элементов). В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. В простейшем случае это полином первой степени. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций обычно ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов и ограничивается только возможностями ЭВМ. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разрежённый вид, что существенно упрощает её решение.

Если говорить в матричных терминах, то собираются так называемые матрицы жёсткости  $\mathbf{K}$  (или матрица Дирихле) и масс  $\mathbf{M}$ . Далее на эти матрицы накладываются граничные условия (например, при условиях Неймана

в матрицах не меняется ничего, а при условиях Дирихле из матриц вычёркиваются строки и столбцы, соответствующие граничным узлам, так как в силу краевых условий значение соответствующих компонент решения известно). Затем собирается система линейных уравнений и решается одним из известных методов.

### 2.4.2 Численный метод решения задачи топологической оптимизации

Алгоритм **SIMP** был описан в монографии [20]. Метод основан на МКЭ, где вводится параметр псевдоплотности  $KЭ x_e$ , который определяет модуль упругости следующим образом:

$$E_e(x_e) = E_{min} + x_e^q(E_0 - E_{min}), x_e \in [0, 1] \quad (2.11)$$

Математически задача может быть сформулирована как минимизация функции податливости (2.12) (внешней работы) через минимизацию энергии деформации при заданных ограничениях (2.13):

$$c(x) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \sum_{e=1}^N E_e(x_e) \mathbf{u}_e^T \cdot \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{u}_e \rightarrow \min \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \frac{V(x)}{V} = f \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ 0 < x_{min} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Аналогичным образом алгоритм **SIMP** был представлен, например, в работах [21; 22].

### 2.4.3 Обзор программного обеспечения для задач топологической оптимизации

По всем вышеизложенным численным методам существуют различные наборы ПО и пакеты прикладных программ. Однако возможностью тополо-



гической оптимизации конструкций обладают, в основном, пакеты, в которых реализован МКЭ. Ниже представлен обзор ПО, с помощью которого можно проводить топологическую оптимизацию [23].

- **Siemens NX.** NX — универсальная комплексная система для проектирования, инженерных расчетов и подготовки управляющего кода для станков с ЧПУ — CAD, CAE и CAM. Топологическая оптимизация в рамках модуля NX CAE ориентирована на взаимодействие деталей в CAD-сборке. В рабочее пространство помещается деталь подлежащая оптимизации, к ней присоединяются другие, которые не будут затронуты процессом, но участвуют во взаимодействии. Указание креплений и приложенных нагрузок производится именно в рамках сборки.
- **Siemens Solid Edge.** Solid Edge — CAD-система твердотельного и поверхностного моделирования, прежде всего предназначенная для работы с деталями и сборками, но обладающая встроенным модулем инженерного анализа. Разработчик позиционирует Solid Edge как средство быстрого проектирования и прототипирования, «заточенное» под аддитивное производство. Оптимизация производится в несколько шагов, без необходимости тонких настроек: загрузить «болванку», указать отверстия и места приложения нагрузки, задать требуемую долю снижения массы и запас прочности. Полученная деталь может быть напрямую отправлена в печать или доработана штатными средствами Solid Edge.
- **CATIA 3DEXPERIENCE.** Платформа 3DEXPERIENCE, по состоянию на начало 2018 года, состоит из 104 модулей, которые называются ролями. Это решения для различных задач проектирования, управления процессом разработки, симуляции, визуализации. Одна из этих ролей — Function Driven Generative Designer. Эта роль не только позволяет произвести оптимизацию топологии детали в соответствии с указанными требованиями, но и доработать полученный объект — упростить, убрать неровности.
- **SOLIDWORKS.** Оптимизация топологии была добавлена в SOLIDWORKS 2018. Она доступна в модуле SOLIDWORKS Simulation редакций Professional и Premium. Инженер указывает нагрузки, условия оптимизации — например, наилучшее отноше-

ние жесткости к массе, и запускает исследование топологии. По завершении процесса, для подготовки к производству, выполняется сглаживание сетки оптимизированной детали.

- **Autodesk Fusion 360.** Облачная платформа для проектирования, инженерных расчетов и подготовки к производству на станках с ЧПУ — CAD/CAE/CAM. В максимальной подписке, которая называется Ultimate, доступен модуль Advanced Simulation. Он отвечает за моделирование деформаций, работу с анизотропными материалами и оптимизацию топологии — Shape optimization. Возможности для настройки оптимизации не очень широки, но для основной задачи — создания детали с минимальной массой и необходимой прочностью — достаточны.
- **ANSYS Mechanical.** ANSYS Mechanical позволяет моделировать деформацию конструкций под нагрузкой, рассчитывать влияние вибраций и возникновение резонансов. Для проведения автоматизированной топологической оптимизации необходимо импортировать модель-заготовку детали, указать точки крепления и приложения нагрузок, задать граничные условия, такие как минимальная толщина. Возможно моделирование как традиционных материалов, так и анизотропных — композиты, 3D-печатные детали.
- **solidThinking Inspire.** В сравнении, например, с Ansys Mechanical — это более дружелюбное ПО, рассчитанное на решение нескольких узких задач — моделирования взаимодействия деталей в сборках, простого эскизного проектирования, топологической оптимизации. Объекты, с которыми необходимо работать, могут быть как созданы в Inspire, так и импортированы из других CAD-систем. После «отрезания лишнего» оптимизированная деталь упрощается и сглаживается, что значительно улучшает внешний вид и позволяет сразу отправить ее в производство. Помимо топологической оптимизации, Inspire способна формировать сетчатое заполнение вместо сплошного, эта функция пригодится при необходимости еще больше снизить массу детали.
- **Autodesk Netfabb Ultimate.** Эта программа известна многим пользователям 3D-принтеров, как удобное средство «ремонта» сетки и разделения модели на части. Функциональность Netfabb 2018

- значительно шире — там, например, есть создание ветвистых поддерживающих структур для FDM-печати, моделирование деформации металлических деталей для SLS и SLM, а в редакции Ultimate добавлены топологическая оптимизация и генерация сетчатого заполнения.
- **ABAQUS**. Методология **BESO** была встроена в ABAQUS и подверглась усовершенствованию в части производительности, сглаживания неровностей поверхности, образованных ребрами и гранями конечных элементов, создания возможности импорта / экспорта моделей из и в наиболее распространенные CAD форматы. Для исключения возможных ошибок, возникающих при преобразовании модели в КЭ-формат, ABAQUS располагает необходимым набором инструментов [24].

## Глава 3. Численное моделирование задачи топологической оптимизации

### 3.1 Дискретизация исходной геометрии

Для трехмерного моделирования и решения задачи, поставленной в Главе 2 система уравнений (2.1–2.4) интегрировалась численно с помощью МКЭ в пакете прикладных программ ANSYS Mechanical [25]. Область интегрирования была покрыта преимущественно на гексагональные  $KЭ$ , согласно рекомендациям [26] и исходя из соображений экономии оперативной памяти ЭВМ. Результаты показаны на рисунке 3.1.

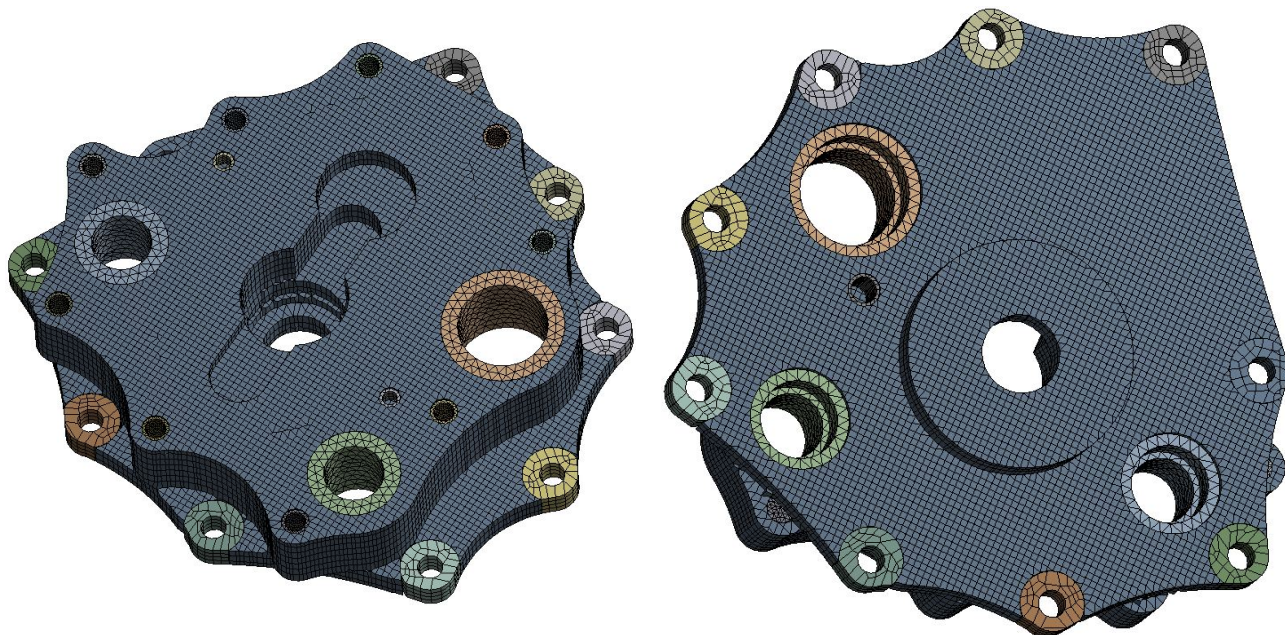


Рисунок 3.1 — Конечно-элементная модель

Так же была произведена настройка сеточного генератора, для формирования преимущественно структурированной  $KЭ$ -сетки для лучшей сходимости численных расчетов, а так же сходимости решения задачи оптимизации. Количественные и качественные показатели построенной  $KЭ$ -сетки по типам  $KЭ$  показаны на рисунке 3.2.

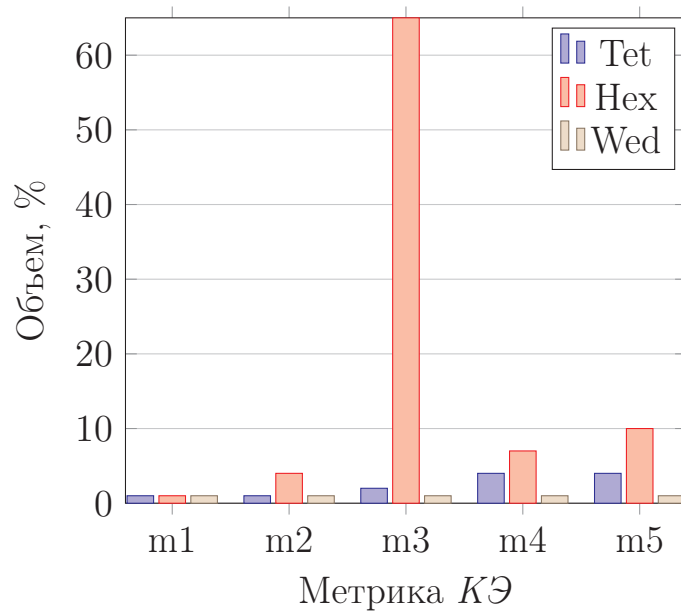


Рисунок 3.2 — Качество построенной КЭ-сетки

## 3.2 Решение задачи топологической оптимизации

### 3.2.1 Статический расчет на прочность

Для того, чтобы наложить ограничения на перемещения, описанные в разделе 2.3.4 и задать ограничения  $\mathbf{u}_{max}$  был проведен статический расчет на прочность. При статическом расчете левая часть уравнения (2.1) равна нулю. Поэтому использовалось уравнение равновесия (3.1).

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \quad (3.1)$$

Полученные значения вектора перемещений  $\mathbf{u}$  в результате решения системы уравнений (2.2–2.4 и 3.1) использовались для ограничения  $\mathbf{u}_{max}$  так, что бы в результате решения задачи оптимизации в местах прилегания уплотнительных колец (рисунок 2.2) перемещения не увеличились.

Кроме того, статический расчет будет использоваться для перерасчета целевой функции податливости (2.10) на каждой итерации в ходе решения задачи топологической оптимизации.

### 3.2.2 Динамический расчет - модальный анализ

Для того, чтобы наложить ограничение на  $\omega_1$ , описанное в разделе 2.3.2 был произведен динамический расчет - модальный анализ, результатом которого являются значения собственных частот колебаний конструкции.

Собственные (или свободные) колебания конструкции совершаются при отсутствии внешних сил. Поэтому для проведения модального анализа в уравнении (2.1) вектор внешних сил  $\mathbf{F}$  равен нулю. Кроме того, условия нагружения из (2.4) также не учитывались. Демпфирующие силы системы отсутствуют. Для МКЭ решение задачи на собственные колебания сводится к уравнению (3.2), решение которого можно искать в виде (3.3).

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{W} \cos \omega t \quad (3.3)$$

Задача по поиску значений собственных частот колебаний сводится к решению уравнения

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3.4)$$

Конструкция может совершать колебания с различными частотами, каждой частоте  $\omega_i$  соответствует определенная форма  $\mathbf{W}_i$ . Задача расчета собственных колебаний заключается в отыскании всех или нескольких (в данной задаче - первой) частот и соответствующих им форм колебаний. Отыскание собственных частот колебаний составляет предмет известной задачи линейной алгебры, называемой обобщенной проблемой собственных значений [19].

Кроме того, результаты этого расчета на каждой итерации решения задачи топологической оптимизации будут проверяться на выполнение условия (2.6).

### 3.2.3 Результаты топологической оптимизации

Результаты топологической оптимизации изображены на рисунке 3.3.

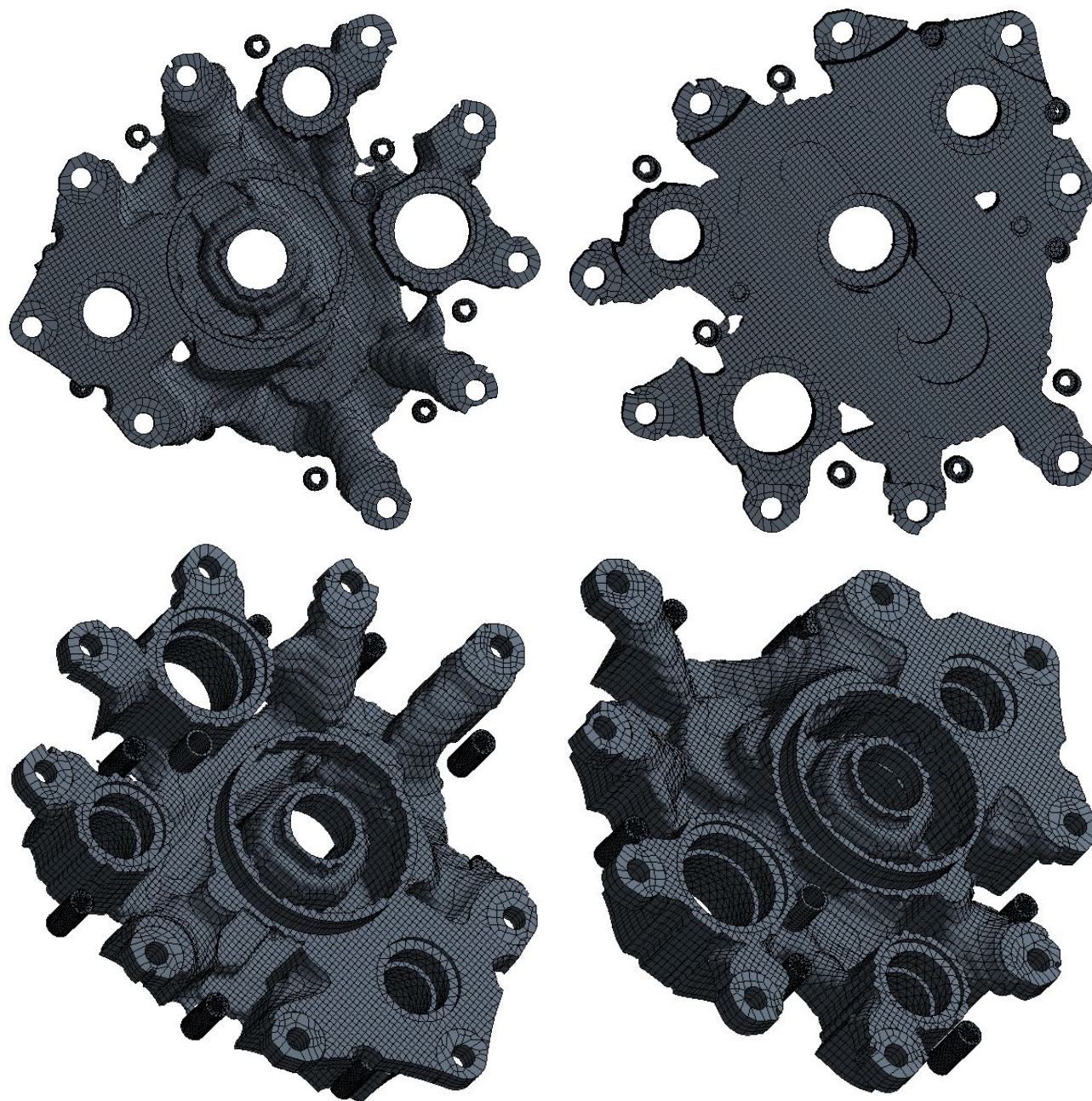


Рисунок 3.3 — Результаты топологической оптимизации

Масса конструкции после численного моделирования составила 40 % от исходной, что вполне удовлетворяет заданным условиям (2.7) и соответствует результатам других работ по топологической оптимизации, например [3–6; 27].

На рисунках 3.4–3.7. представлены графики сходимости решения задачи топологической оптимизации по заданным ограничениям.

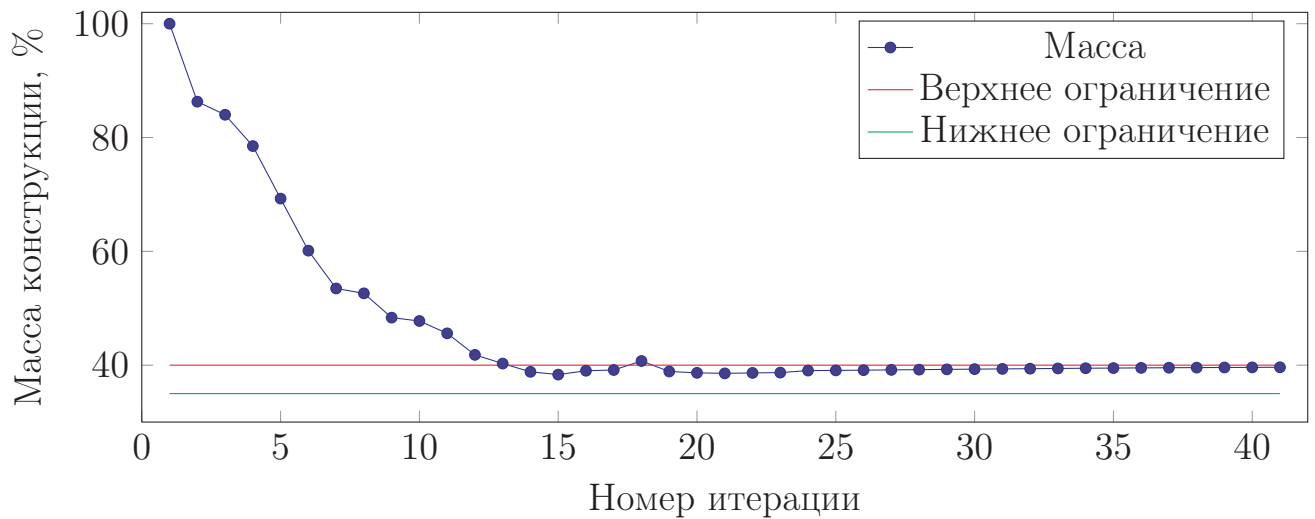


Рисунок 3.4 — Сходимость задачи оптимизации по массе конструкции

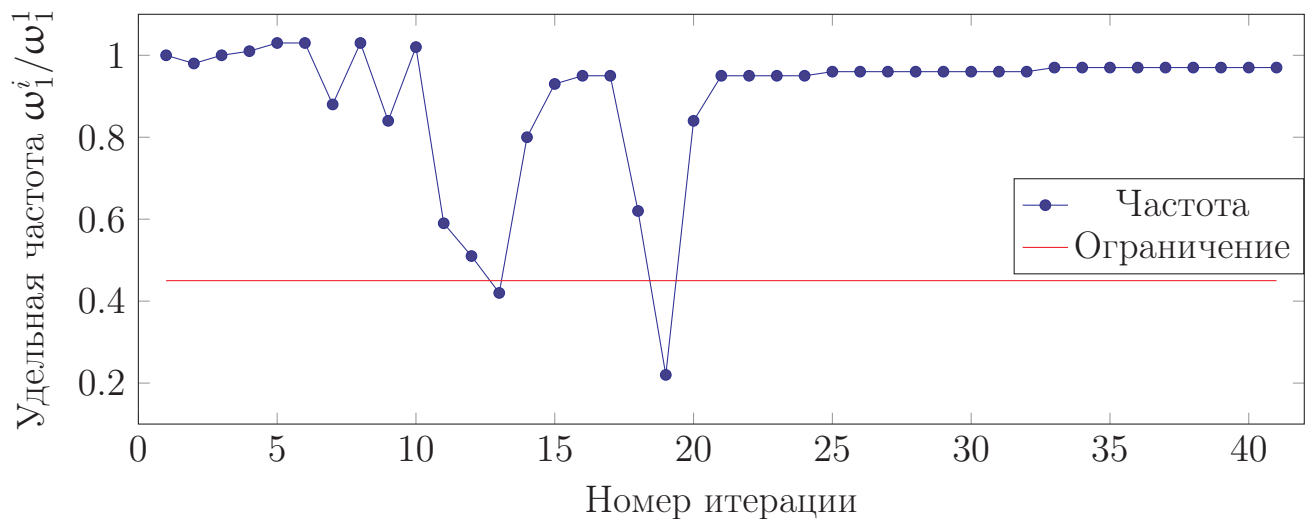


Рисунок 3.5 — Сходимость задачи оптимизации по собственной частоте колебаний

На этом решение задачи топологической оптимизации можно было бы и завершить, но полученный результат слабо применим на практике.

Алгоритм действий после получения результатов топологической оптимизации подробно описан в [28], аналогичные алгоритмы, с некоторыми уточнениями и доработками были предложены и в отечественных работах, например в [22; 27]. В настоящей работе использовался алгоритм, который кратко можно представить как показано на рисунке 3.8.

Согласно рисунку 3.8 следующим шагом после оптимизации является создание оптимальной геометрии конструкции - реализация нового дизайна. Согласно [22], на данный момент не существует подходов и методов, которые бы создавали сложные трехмерные конструкции автоматически,



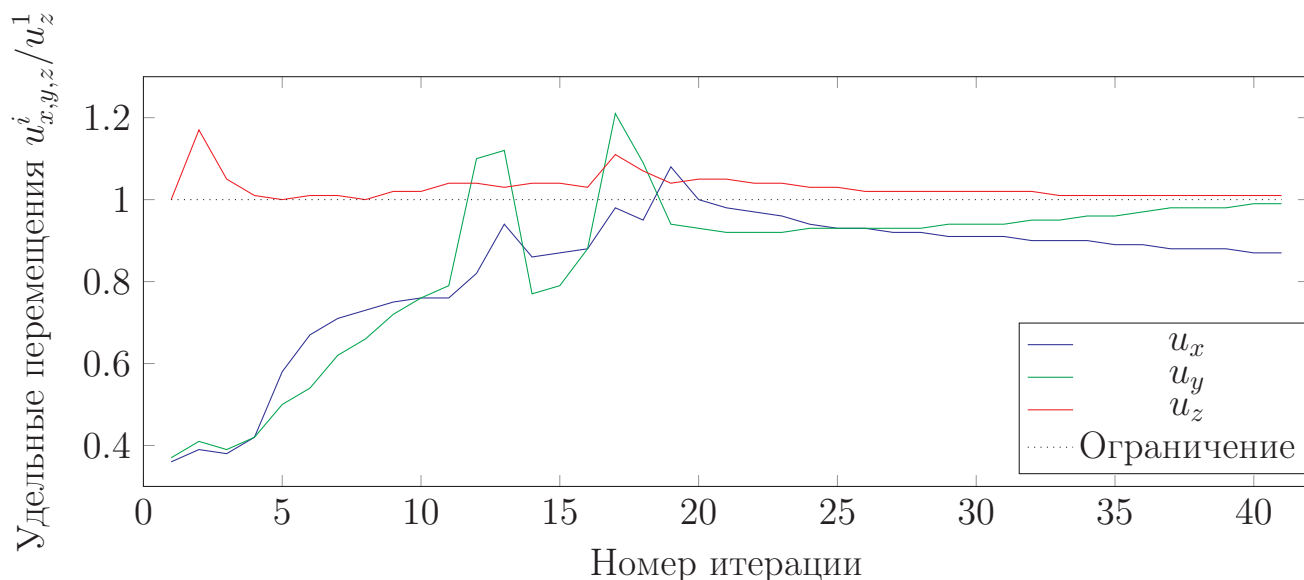


Рисунок 3.6 — Сходимость задачи оптимизации по перемещениям

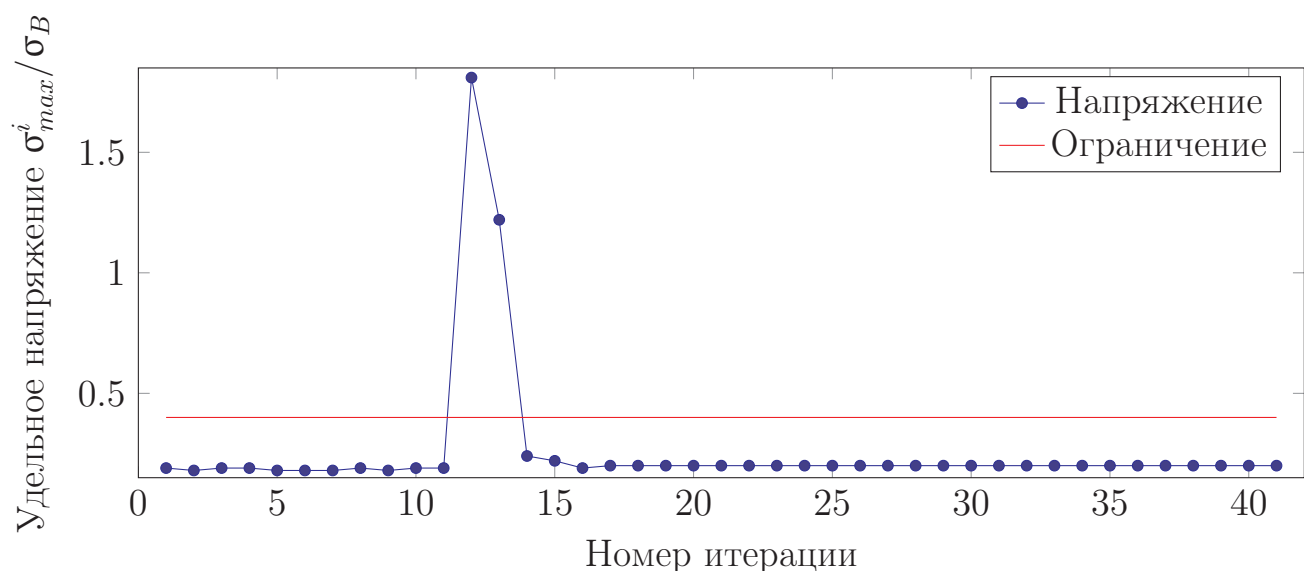


Рисунок 3.7 — Сходимость задачи оптимизации по напряжениям

поэтому все построения необходимо выполнять конструкторам в специализированных системах автоматизированного проектирования (САД), где можно создавать упрощенную геометрию при помощи простых примитивов. Так же для быстрого прототипирования возможна обработка (упрощение, сглаживание) результатов оптимизации в виде STL-файла.

Результат в формате STL-файла, обработка которого выполнялась в программном комплексе ANSYS SpaceClaim[29], был передан для доработки специалистам.

После доработки модель конструкции имеет вид, как показано на рисунке 3.9.

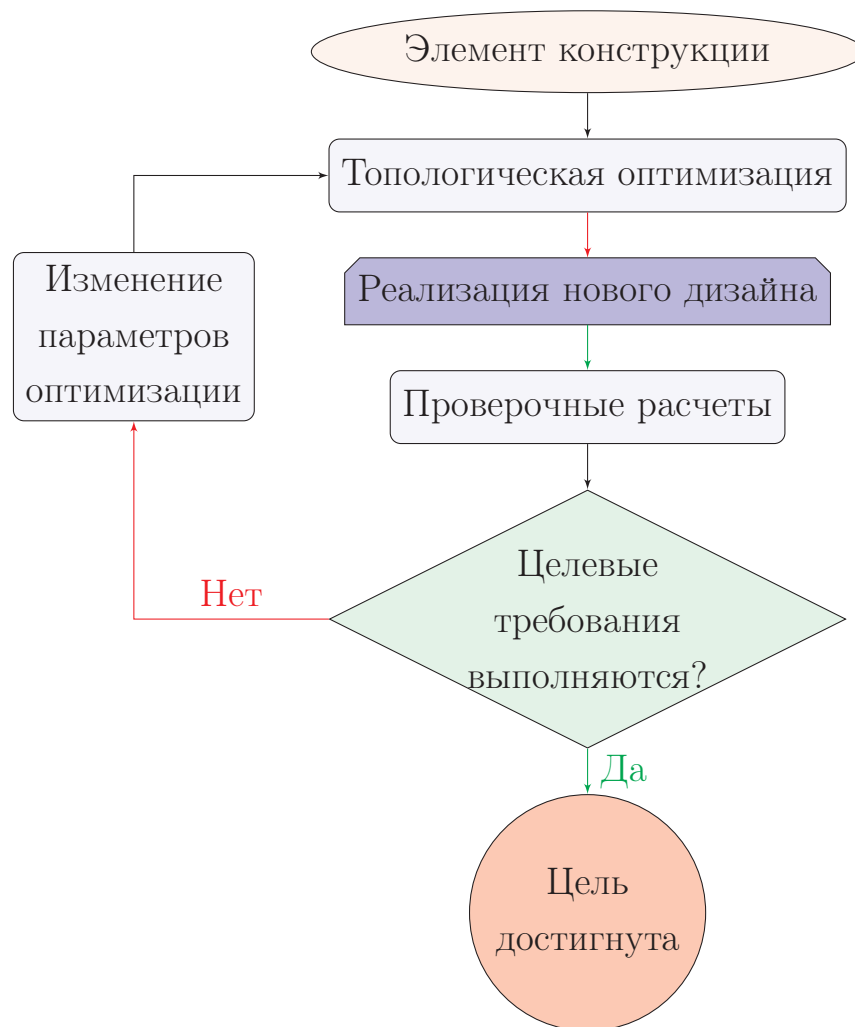


Рисунок 3.8 — Схема алгоритма оптимизации конструкции

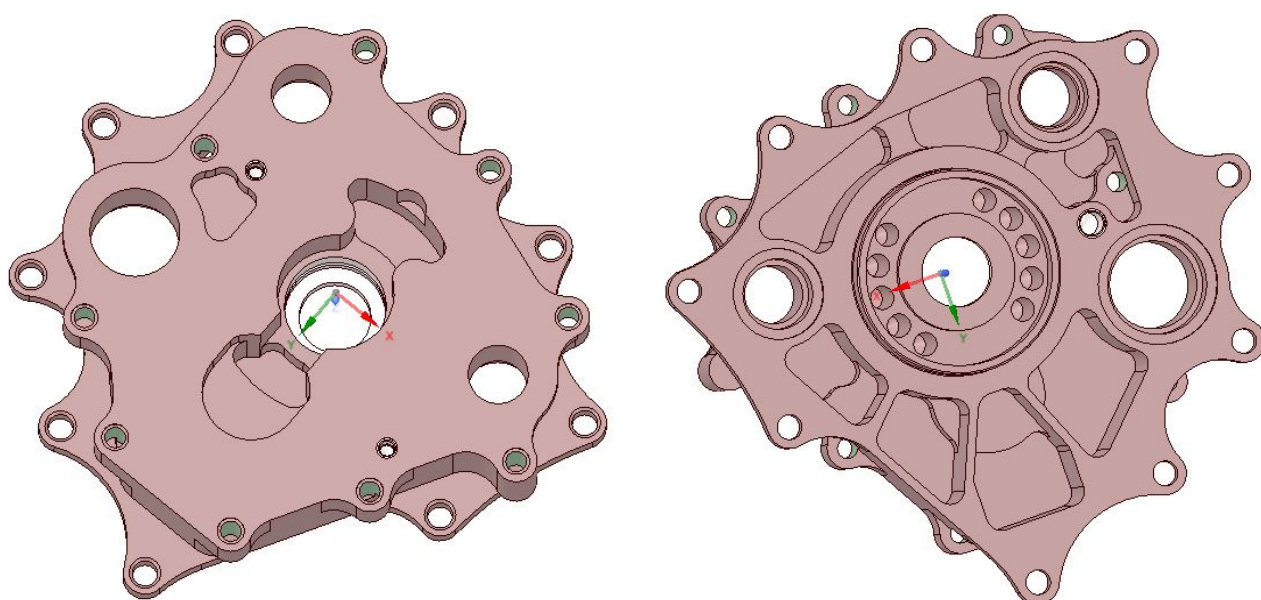


Рисунок 3.9 — 3-d модель конструкции после обработки результатов топологической оптимизации и доработки

Согласно схеме 3.8 после получения нового дизайна конструкции необходимо провести проверочные расчеты, чтобы убедиться, что полученная конструкция удовлетворяет необходимым требованиям.

На рисунках 3.10 и 3.11 представлены результаты численного моделирования, в ходе которого было подтверждено, что новая модель конструкции соответствует требованиям, заданным в виде ограничений в разделе 2.3.

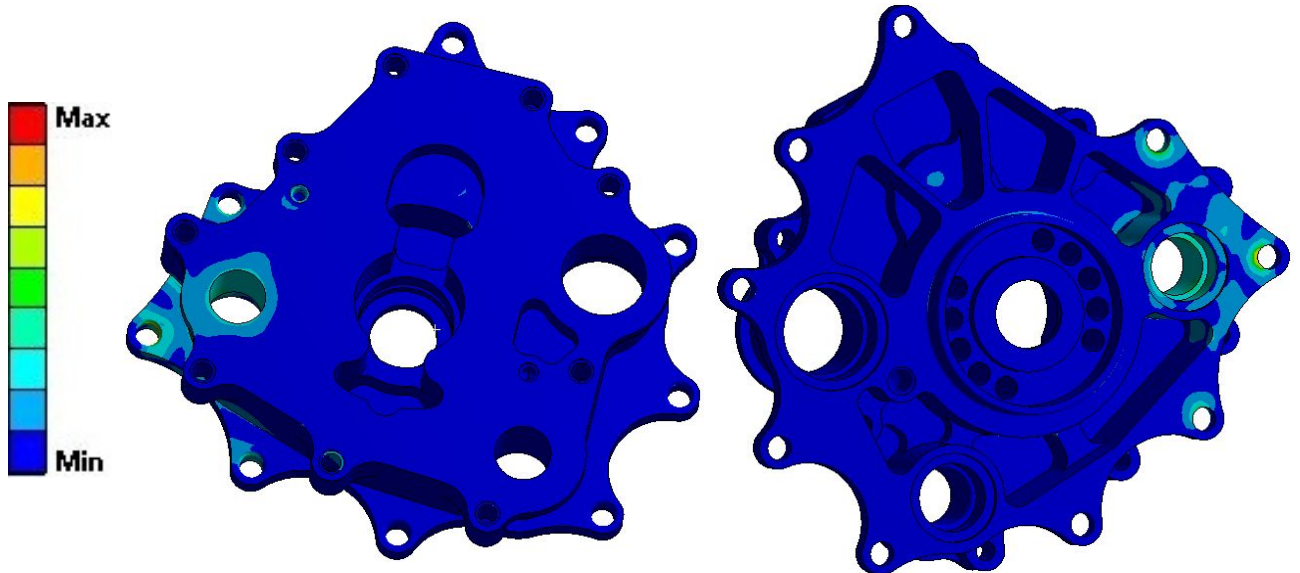


Рисунок 3.10 — Распределение полей напряжений в новом дизайне конструкции

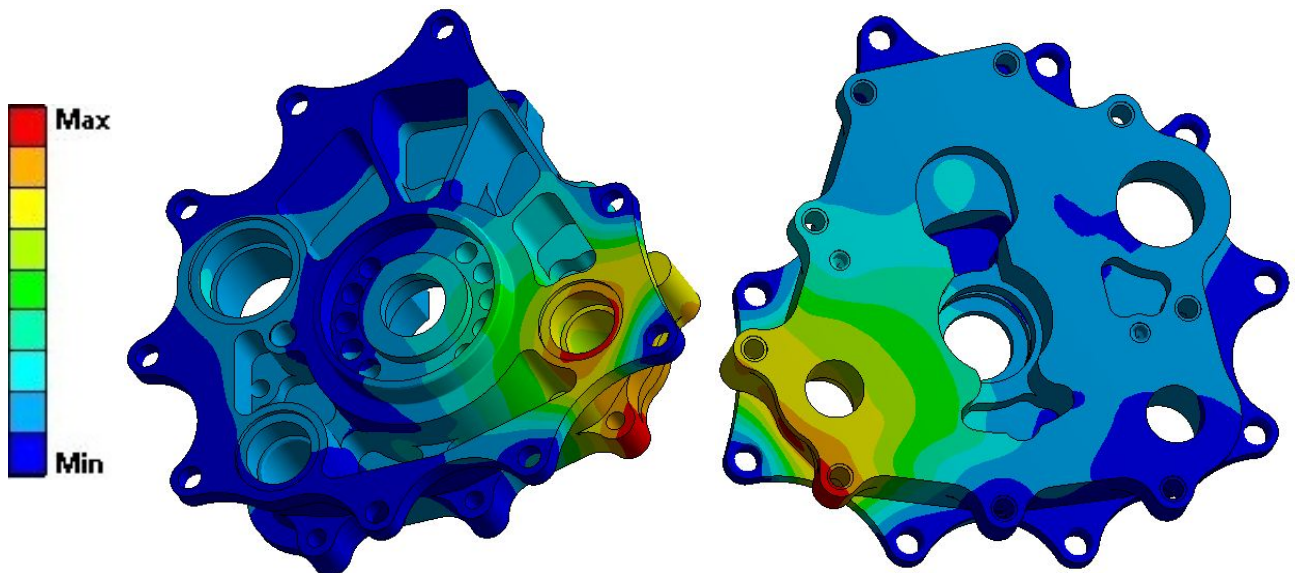


Рисунок 3.11 — Распределение полей перемещений в новом дизайне конструкции

### 3.2.4 Анализ сходимости численных расчетов

Был проведен анализ сходимости численных расчетов. Процедура оценки сходимости численных расчетов аналогична работам других авторов, например [15; 30]. В качестве исследуемых параметров были выбраны компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$  в области прилегания уплотнительных колец (как показано зеленым цветом на рисунке 2.2). Остальные параметры не рассматривались, т.к. задача линейная. Шаг аппроксимации по пространству (характерный размер  $KЭ$ ) уменьшался с каждой итерацией (в исследуемой области, а не на всей конструкции, в целях экономии времени вычислений), при этом норма разности текущего и предыдущего значений выбранных параметров, относилась к норме выбранного параметра на предыдущей итерации. Использовалась норма Чебышева. Соответствующие результаты изображены на рисунке 3.12. По графикам видно, что результаты расчетов сходятся, что свидетельствует об адекватности численного эксперимента, а начиная с некоторого значения величины разбиения по пространству решение перестает сильно зависеть от масштаба дискретизации сплошной среды. Характерный размер  $KЭ$  на 5-ом шаге итерации в итоге был выбран для всей конструкции, как показано на рисунке 3.1, поскольку дальнейшее измельчение  $KЭ$ -сетки было бы нерациональным с вычислительной точки зрения - бóльшие затраты времени и объема оперативной памяти ЭВМ.

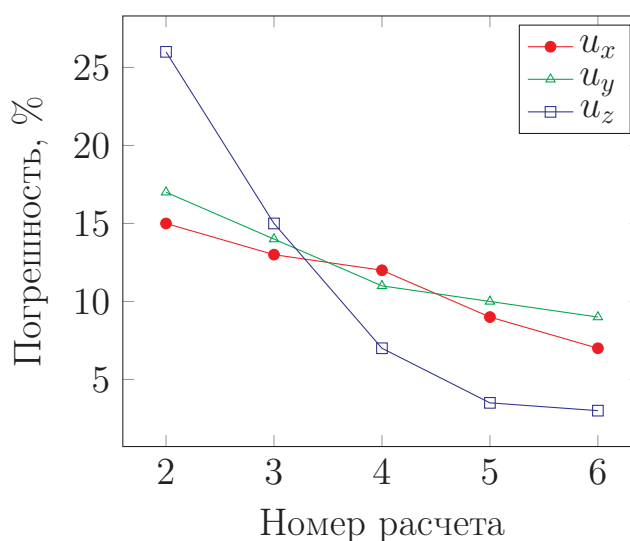


Рисунок 3.12 — Сходимость вектора перемещений  $\mathbf{u}$  по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$

### 3.3 Выводы

Построенная математическая модель была успешно применена для моделирования топологической оптимизации конструкции при заданных эксплуатационных и производственных ограничениях. С помощью анализа сходимости численных расчетов был получен характерный размер  $KЭ$  для дискретизации исходной 3d-модели. Сам результат топологической оптимизации был использован при создании нового дизайна конструкции, по которому будут созданы опытные образцы для начала проведения испытаний. Масса конструкции с новым дизайном составила 52 % от исходной. Так же был проведен расчет на прочность нового дизайна конструкции для подтверждения его применимости в эксплуатации.

## Заключение

### **Основные результаты работы заключаются в следующем:**

1. На основе анализа поставленной задачи было проведено исследование в области задач топологической оптимизации конструкций.
2. Была построена математическая модель для решения задачи топологической оптимизации конструкции при заданных эксплуатационных характеристиках.
3. Проведен обзор численных методов для решения задачи.
4. Проведен обзор ПО для решения задачи.
5. Построенная математическая модель была реализована в программном комплексе ANSYS Mechanical.
6. В результате математического моделирования была получена новая топология конструкции, а после ее обработки был предложен новый дизайн конструкции.
7. В результате численного моделирования было подтверждено, что новый дизайн удовлетворяет необходимым требованиям.

### **Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы:**

1. Подтвердить пригодность нового дизайна конструкции с помощью натуральных экспериментов.
2. Разработать макрос (подпрограмму) для отслеживания сохранности геометрии результата топологической оптимизации.
3. Включить в процесс численного моделирования параметрическую оптимизацию конструкции.
4. Доработать математическую модель для учета тепловых эффектов.
5. Доработать математическую модель для учета остаточных напряжений при изготовлении конструкции.

## Список литературы

1. Снижение общей массы самолета [Электронный ресурс]. — URL: <https://proektoria.online/projects/snizhenie-obshhej-massy-samoleta> (дата обр. 01.04.2019).
2. *Егер, С. М.* Посвящается 75-летию Московского авиационного института [Электронный ресурс] / С. М. Егер, А. М. Матвеев, И. А. Шаталов. — URL: [http://oat.mai.ru/book/glava21/21\\_5/21\\_5.html](http://oat.mai.ru/book/glava21/21_5/21_5.html) (дата обр. 03.04.2019).
3. *Башин, К. А.* Методы топологической оптимизации конструкций, применяющиеся в аэрокосмической отрасли / К. А. Башин, Р. А. Торсунов, С. В. Семенов // Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. — 2017. — № 51. — С. 51—61.
4. *Прокопов, В. С.* Преимущества использования метода топологической оптимизации на этапе проектирования промышленного продукта / В. С. Прокопов, Д. С. Вдовин, С. С. Хрыков // Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта. Труды XVII международной научно-практической конференции. — 2017. — С. 26—29.
5. *Марчук, Н. И.* Решение задач топологической оптимизации конструкций с использованием программы ANSYS / Н. И. Марчук, Е. В. Прасоленко // Новая наука: опыт, традиции, инновации. — 2017. — Т. 2, № 4. — С. 196—199.
6. *Васильев, Б. Е.* Анализ возможности применения топологической оптимизации при проектировании неохлаждаемых рабочих лопаток турбин / Б. Е. Васильев, Л. А. Магеррамова // Вестник самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). — 2015. — Т. 14, № 3—1. — С. 139—147.

7. Квалификационные требования КТ-160D. Условия эксплуатации и окружающей среды для бортового авиационного оборудования. Требования, нормы и методы испытаний. — М. : АР МАК, 2004. — 324 с.
8. *Троицкий, В. А.* Оптимизация формы упругих тел / В. А. Троицкий, Л. В. Петухов. — М. : Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 432 с.
9. *Останин, И.* Топологическая оптимизация [Электронный ресурс] / И. Останин. — 2018. — URL: <https://postnauka.ru/faq/84374> (дата обр. 04.04.2019).
10. *Michell, A.* The limits of economy of material in frame structures / A. Michell // Philosophical Magazine. — 1904. — Vol. 8(47). — P. 589—597.
11. *Lagrange, J.-L.* Sur la figure des colonnes / J.-L. Lagrange. — Mescellanea Taurinsia, 1770-1773.
12. *Фетисов, К. В.* Современные подходы к проектированию облегченных деталей авиационных газотурбинных двигателей с применением топологической оптимизации и аддитивных технологий / К. В. Фетисов, П. В. Максимов // Прикладная математика, механика и процессы управления. — 2016. — Т. 1. — С. 22—23.
13. ГОСТ Р 52857.1-2007 Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования. — М. : Стандартинформ, 2008. — 26 с.
14. ОСТ 1 00128-74 Герметичность изделий. Нормы. — 1978. — 7 с.
15. *Билалов, Д. А.* Механизмы локализации деформации и разрушения в металлах при динамическом нагружении : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.04 / Д. А. Билалов. — Пермь, 2018. — 107 с.
16. *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : МИР, 1979. — 392 с. — Перевод с английского - к.ф.-м.н. Шестакова А. А.
17. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов [и др.]. — М. : Наука, 1976. — 400 с.
18. Mesh-free Galerkin simulation of dynamic shear band propagation and failure mode transition / S. Li [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2002. — Vol. 39. — P. 1213—1240.



19. *Образцов, И. Ф.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. — М. : Высш. шк., 1985. — 392 с. — Учеб. пособие для студентов авиац. спец. вузов.
20. *Bendsøe, M. P.* Optimization of Structural Topology, Shape, and Material / M. P. Bendsøe. — Springer, 1995. — 267 p.
21. Проектирование конструкции автомобиля на основе поиска оптимальных путей нагружения с помощью топологической оптимизации распределения материала / Р. Р. Фасахов [и др.] // Неделя науки СПбПУ. — 2017. — С. 32—34.
22. *Фетисов, К. В.* Проблемы использования топологической оптимизации при проектировании облегченных изделий аэрокосмической отрасли и возможные пути их решения / К. В. Фетисов, П. В. Максимов // Математическое моделирование в естественных науках. — 2017. — Т. 1. — С. 112—116.
23. Обзор софта для топологической оптимизации и бионического дизайна [Электронный ресурс]. — 2018. — URL: <https://habr.com/ru/company/top3dshop/blog/411999/> (дата обр. 13.04.2019).
24. *Оганесян, П. А.* Оптимизация топологии конструкций в пакете ABAQUS / П. А. Оганесян, С. Н. Шевцов // Известия самарского научного центра российской академии наук. — 2014. — Т. 2, № 6—2. — С. 543—549.
25. Workbench User's Guide [Электронный ресурс]. — URL: [https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v192/wb2\\_help/wb2\\_help.html](https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v192/wb2_help/wb2_help.html) (visited on 05/27/2019).
26. Topology optimization with manufacturing constraints: A unified projection-based approach / S. L. Vatanabe [et al.] // Advances in Engineering Software. — 2016. — No. 100. — P. 97—112.
27. *Яров, В. А.* Проектирование круглых монолитных плит перекрытий рациональной структуры с использованием топологической и параметрической оптимизации / В. А. Яров, Е. В. Прасоленко // Вестник томского государственного архитектурно-строительного университета. — 2011. — 3(32). — С. 89—102.

28. *Larsson, R.* Methodology for Topology and Shape Optimization: Application to a Rear Lower Control Arm : Master's thesis in Applied Mechanics / R. Larsson. — Göteborg, 2016. — 41 p.
29. SpaceClaim 2016 Beta Release Notes. — SpaceClaim corporation, 2016. — 117 p.
30. Исследование локализации пластического сдвига в алюминиевых сплавах при динамическом нагружении / Д. А. Билалов [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. — 2015. — Т. 8, № 3. — С. 319—328.

## Список рисунков

2.1	Крышка шестеренного насоса . . . . .	16
2.2	Граничные условия . . . . .	17
2.3	Рабочее положение на двигателе (земля снизу) . . . . .	18
3.1	Конечно-элементная модель . . . . .	28
3.2	Качество построенной $KЭ$ -сетки . . . . .	29
3.3	Результаты топологической оптимизации . . . . .	31
3.4	Сходимость задачи оптимизации по массе конструкции . . . . .	32
3.5	Сходимость задачи оптимизации по собственной частоте колебаний	32
3.6	Сходимость задачи оптимизации по перемещениям . . . . .	33
3.7	Сходимость задачи оптимизации по напряжениям . . . . .	33
3.8	Схема алгоритма оптимизации конструкции . . . . .	34
3.9	3-d модель конструкции после обработки результатов топологической оптимизации и доработки . . . . .	34
3.10	Распределение полей напряжений в новом дизайне конструкции . .	35
3.11	Распределение полей перемещений в новом дизайне конструкции .	35
3.12	Сходимость вектора перемещений $\mathbf{u}$ по осям $X, Y, Z$ . . . . .	36