



**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
Пермский национальный исследовательский политехнический
университет**


Факультет Прикладной математики и механики
Выпускающая Динамика и прочность машин
кафедра: 15.03.03 «Прикладная механика»
Направление подготовки: бакалавр
Квалификация:

Допускается к защите
Зав.кафедрой ДПМ
_____ В.П.Матвеевко
«20 » июня 2020 г.


**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ВОЛОКОННО-
ОПТИЧЕСКОГО ДАТЧИКА ДАВЛЕНИЯ**

Выпускная квалификационная работа

Выполнил студент
группы ДПМ-16-16
Власова Мария
Сергеевна


(_____)
подпись

Научный руководитель:
к.т.н., начальник
лаборатории
перспективных
исследований НТЦ ПАО
«ПНППК»
Есипенко Иван
Александрович

()
ПОДПИСЬ

Пермь 2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Кафедра «Динамика и прочность машин»

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав.кафедрой
ДПМ
Матвеевко В.П.
«25» мая
2020г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы студента

Фамилия И.О. Власова М.С.

Факультет ПММ Группа ДПМ-16-
1б

Начало выполнения работы 25 мая
2020

Контрольные сроки просмотра работы кафедрой 16 июня
2020

Дата защиты работы на заседании ГЭК22 июня
2020

1. Наименование работы: Напряженно-деформированное состояние чувствительного элемента волоконно-оптического датчика давления;

2. Исходные данные к
работе

3. Содержание пояснительной записки:

1) Волоконно-оптический датчик давления;

2) Поиск аппроксимирующей функции для толщины чувствительного элемента;

3) Напряженно-деформированное состояние чувствительного элемента;

4. Дополнительные указания

Основная литература

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966.
2. Pandey N. K., Yadav B. C. Fibre optic pressure sensor and monitoring of structural defects //Optica applicata. – 2007. – Т. 37. – №. 1/2. – С. 57.

Руководитель выпускной квалификационной работы студента
к.т.н., начальник лаборатории перспективных исследований НТЦ ПАО «ПНППК»



(Есипенко И.А.)

(должность, Ф.И.О.)

Задание получил

25 мая 2020

(Власова М.С.)

(дата и подпись студента)



КАЛЕНДАРНЫЙ ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

№ п.		Объема этапа, в %	Сроки выполнения		Примечание
			начало	конец	
1	Разработка основных разделов выпускной квалификационной работы	70	25.05.2020	10.06.2020	
2	Оформление выпускной квалификационной работы	20	10.06.2020	14.06.2020	
3	Разработка и оформление иллюстративной части материала к защите диссертации	10	14.06.2020	16.06.2020	
4	Представление ВКР на проверку и отзыв научного руководителя		16.06.2020		
5	Представление работы заведующему кафедрой		16.06.2020		
6	Защита на заседании ФЭК		22.06.2020		

Научный руководитель работы:

к.т.н., начальник лаборатории перспективных
исследований НТЦ ПАО «ПНППК»

« 25 » _____ мая _____ 2020 г.
Есипенко И.А.



РЕФЕРАТ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: волоконно-оптический датчик давления, напряженно-деформированное состояние, численные методы.

Исследуется конструкция и принцип работы волоконно-оптического датчика давления. Из экспериментальных данных определяется функция толщины, аппроксимирующая геометрию чувствительного элемента датчика в пакетах MS Excel и MATLAB с использованием метода наименьших квадратов. Осуществляется постановка краевой задачи деформирования чувствительного элемента как круглой пластинки переменной толщины при воздействии давления. Аппроксимация поставленной задачи выполняется методом конечных разностей. Численное решение полученной системы линейных алгебраических уравнений реализуется в прикладном пакете MATLAB.

Целью выпускной квалификационной работы является создание математической модели напряженно-деформированного состояния чувствительного элемента датчика при воздействии внешнего давления как инструмента для дальнейшей оценки эффективности принимаемых конструкторских решений на этапе проектирования изделия.

Оглавлени

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИЙ ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ	8
1.1. Принцип работы волоконно-оптического датчика давления	9
1.2. Конструкция чувствительного элемента датчика	11
1.3. Методы расчета напряженно-деформированного состояния чувствительного элемент	14
ГЛАВА 2. ПОИСК АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ТОЛЩИНЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА.....	18
2.1. Обработка экспериментальных данных координат криволинейной поверхности чувствительного элемента	18
2.2. Аппроксимация толщины чувствительного элемента с помощью метода наименьших квадратов	21
ГЛАВА 3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА.....	24
3.1. Задача о статическом деформировании чувствительного элемента	24
3.2. Конечно-разностная аппроксимация краевой задачи	26
3.3. Реализация вычислительного алгоритма	27
3.4. Экспериментальное исследование прогиба чувствительного элемента датчика	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	35
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	36
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	39
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	40

ВВЕДЕНИЕ

Датчики давления являются ключевым аспектом безопасной эксплуатации различных технических продуктов и систем, широко используются в большом количестве отраслей от автомобильной промышленности до медицины. Для применения в авиации датчикам выдвигаются повышенные требования: работоспособность при высоких значениях температуры (более 400 °С) и давления (около 10 МПа.), взрыво- и пожаробезопасность. В отличие от электрических, волоконно-оптические датчики удовлетворяют этим требованиям, а также обладают рядом преимуществ в виде высокого разрешения, невосприимчивости к электромагнитному излучению, высокой чувствительности и собственной электрической пассивности.

Интерферометрические датчики с широким динамическим диапазоном и высоким разрешением являются одним из основных видов волоконно-оптических датчиков

давления (ВОДД). На сегодняшний день в ПАО «ПНППК» используется ВОДД, выдерживающий давление до 45 МПа. Однако, чувствительность датчика остается на низком уровне.

Определение напряженно-деформированного состояния чувствительного элемента ВОДД является актуальной и востребованной задачей. Определение величины прогиба датчика в зависимости от давления позволяет оценить его чувствительность без проведения дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, целью выпускной квалификационной работы является создание математической модели напряженно-деформированного состояния чувствительного элемента датчика при воздействии внешнего давления как инструмента для оценки эффективности принимаемых конструкторских решений на этапе проектирования изделия.

Для этого необходимо выполнить следующие задачи:

1. Определить функцию толщины чувствительного элемента датчика из экспериментальных данных;
2. Построить математическую модель задачи о статическом деформировании чувствительного элемента как круглой пластины переменной толщины;
3. Решить краевую задачу методом конечных разностей в прикладном пакете MATLAB;
4. Проверить адекватность модели путем сравнения с известными решениями и сопоставления с экспериментальными данными.

Объем и структура работы. Дипломная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 41 страницу, включая 21 иллюстрацию, 2 таблицы. Список литературы содержит 25 источников.

Глава 1. Волоконно-оптический датчик давления

Как известно, для традиционных электрических датчиков давления существует большое количество технических ограничений, которые сужают области их применения. Датчики такого типа сделаны из кремниевых диафрагм с, нанесенными на них, пьезорезисторами. Основным минусом датчиков такого типа является ухудшение полупроводниковых свойств материалов при работе в высокотемпературных средах. Для изолирования пьезорезисторов от кремниевой диафрагмы используют материалы с высокой температурой плавления (кремний). Таким образом рабочая температура увеличивается от 150°C до 400 °C.

В отличие от таких электрических датчиков, волоконно-оптические датчики имеют невосприимчивость к электромагнитному излучению, высокую производительность и точность, пожаро- и взрывобезопасны. Волоконно-оптические датчики давления (ВОДД) были широко исследованы, но немногие из них были разработаны для работы в высокотемпературных средах. Ключевой фактор, ограничивающий использование ВОДД при высоких температурах заключается в том, что в чувствительном элементе датчика используется не только плавленный кварц (или кремний), но и другие материалы: боросиликатное стекло, полимеры, эпоксидные материалы или клеи. Несоответствие коэффициентов температурного расширения между материалами может вызывать внутренние напряжения. В дополнение тому, часто используемые при низких температурах материалы (полимеры, клеи) будут

значительно влиять на точность датчика. Волоконный датчик, сконструированный полностью с использованием плавленного кварца, обладает большим потенциалом для работы при высоких температурах.

На сегодняшний день существует три основных метода измерения давления при помощи оптического волокна:

1. Модуляция интенсивности;
2. Модуляция длины волны;
3. Модуляция фазы;

Измерение давления по сдвигу фазы интерферометрическими датчиками наиболее перспективно, так у датчиков такого типа получаются лучшие характеристики по сравнению с двумя другими типами датчиков, а также его можно назвать точечным, размеры измерительного элемента могут быть уменьшены до 0,1 мм . Интерферометрические датчики с высоким разрешением и большим динамическим диапазоном являются одним из основных типов ВОДД. Эти датчики представляют собой различные типы интерферометров. Интерферометр Фабри-Перо (ИФП) является наиболее привлекательным для создания датчика давления из-за его простоты, чувствительности и компактности [9]. Датчик давления, в основе которого лежит интерферометр Фабри-Перо, чувствителен не только к давлению, но и к температуре, для его использования при высоких температурах нужно отделять вносимый температурный вклад от вклада давления в изменение зазора. Главными недостатками таких датчиков

являются отсутствие температурного контроля и сложность обработки сигнала и мультиплексирования, но несмотря на это датчики давления Фабри-Перо имеют перспективы применения во всех областях промышленности.

1.1. Принцип работы волоконно-оптического датчика давления

Конструкция волоконно-оптического датчика давления представлена на рис.1. Выбор конструкции был определен легкодоступными и стандартными компонентами. Датчик состоит из одномодового оптического волокна (3), которое находится в феруле из спечённой керамики (ZrO_2). (2). Чувствительным элементом (ЧЭ) датчика является упругая мембрана (1), которая приклеена к феруле с помощью УФ-клея (4) и сделана такой формы, что ее центральная часть находится на отличном уровне от боковой части.

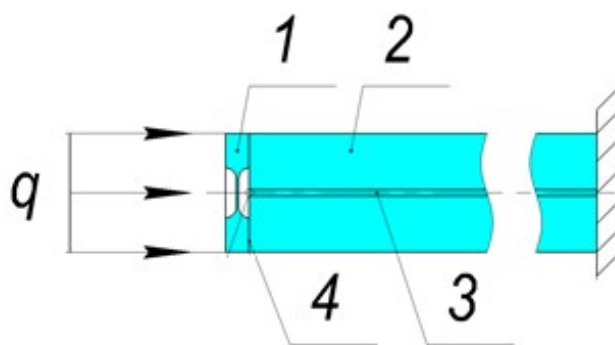


Рисунок 1. Фрагмент конструкции ВОДД: 1 – чувствительный элемент; 2– ферула; 3 – оптическое волокно; 4 – УФ-клей.

В конструкции датчика между собой взаимодействуют отраженные лучи, где одна отражающая поверхность — торец оптического волокна (ОВ), а вторая — внутренняя часть тонкой мембраны (рис. 2). Благодаря обратным

отражениям от торца оптического волокна и внутренней границы мембраны на фотоприемнике образуется интерференционная картина. Параметры полученной картины зависят от расстояния между отражающими поверхностями. Под действием внешнего давления мембрана изменяет свое положение, вследствие чего изменяется длина зазора и происходит смещение длины волны интерферометрического спектра. По сдвигу интерференционной картины определяется величина давления.

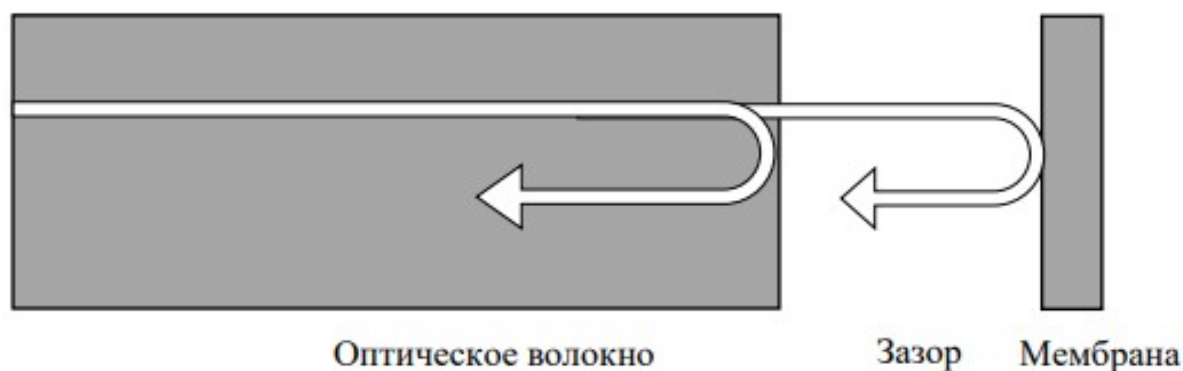


Рисунок 2. Отражающие плоскости ВОДД на интерферометре Фабри-Перо

Определение давления по разности хода светового луча из-за деформации мембраны является одним из самых перспективных методов измерения давления в настоящее время.

1.2. Конструкция чувствительного элемента датчика

Технология изготовления чувствительного элемента основана на методе жидкостного травления. Схема процесса показана на рис. 3.

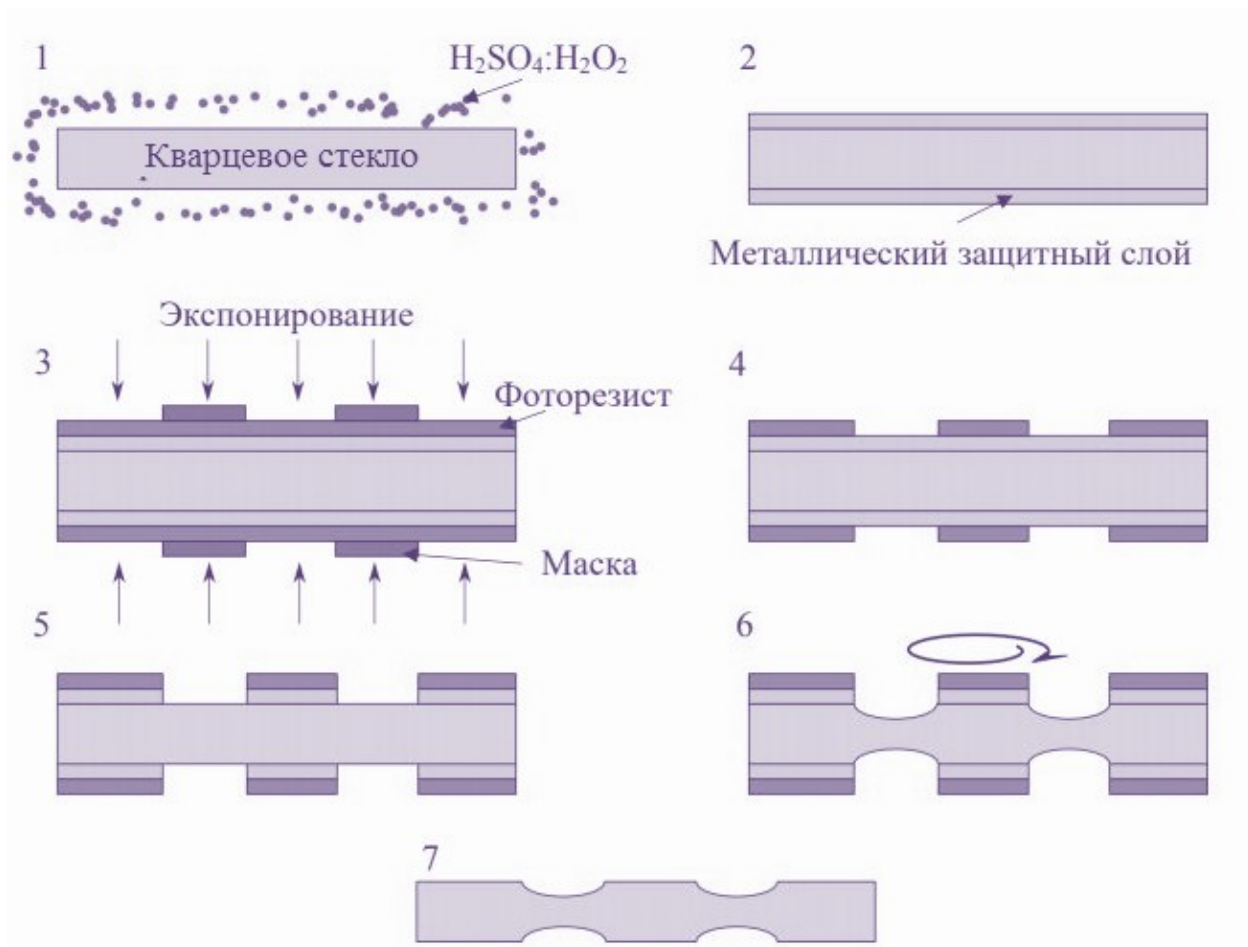


Рисунок 3. Схема процесса получения ЧЭ

Сперва происходит подготовка пластины: очистка в нагретом перекисно-аммиачном растворе с применением ультразвука. Далее происходило вакуумное напыление защитного покрытия на пластину с двух сторон: формирование двухслойного металлического покрытия с помощью магнетронного распыления и термического испарения. Далее была применена фотолитография с двух сторон пластины. Происходило нанесение фоторезиста по маске, его сушка, экспонирование и проявка с получением рисунка в фоторезисте на поверхности обеих сторон пластины, при этом производилось прецизионное

совмещение таким образом, чтобы рисунки на обеих сторонах были друг напротив друга. После чего происходило травление защитного покрытия через рисунок фоторезиста в растворе HNO_3 - H_3PO_4 - AcH - H_2O для формирования защитной маски с обеих сторон пластины. Затем необходимо было провести измерение толщины пластины с точностью ± 1 мкм для расчета времени травления пластины, необходимого для достижения заданной толщины мембраны, лежащей в диапазоне 50-70 мкм. Далее происходило жидкостное травление пластины на протяжении расчетного времени с использованием сложного движения, необходимого для достижения равномерности и устранения затенения пузырьками газов. После этого удаляют защитной маски с помощью растворов. Следующим этапом было измерение толщины изготовленных мембран с точностью $\pm 0,2$ мкм. Завершающим шагом изготовления являлось отделение элементов с мембранами от пластины. Характеристики полученной мембраны представлены в таблице 1, а фото на рисунке 4.

Таблица 1. Параметры мембраны ВОДД

Параметр	Значение
Материал	Кварцевое стекло
Толщина мембраны, мкм	50
Воздушный зазор, мкм	450
Радиус чувствительной части, мкм	300

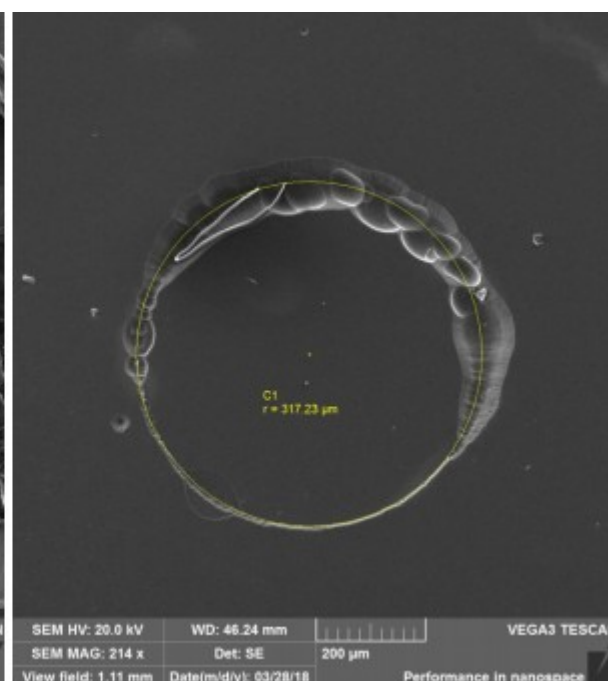
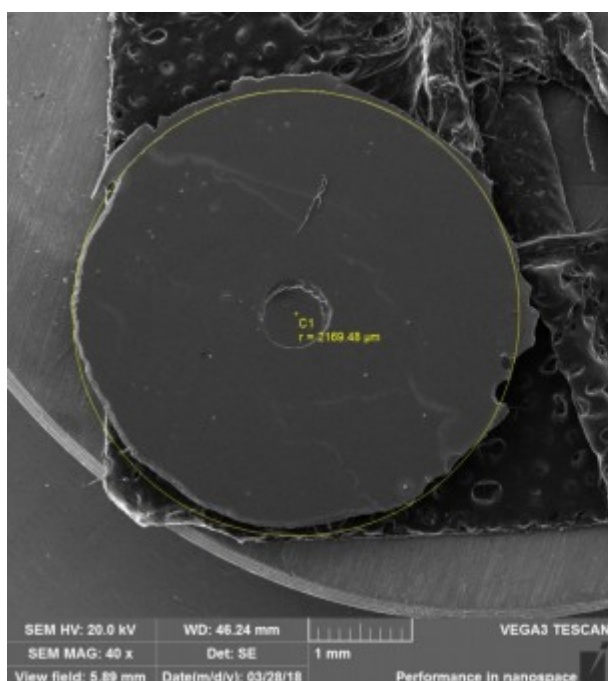
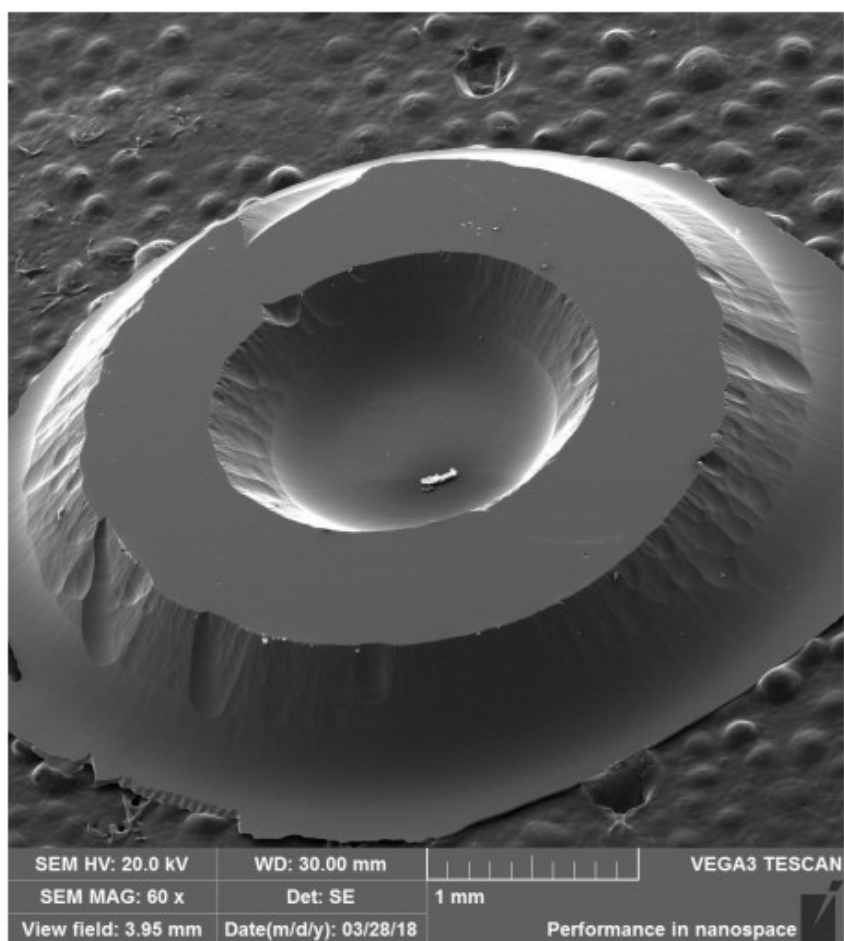


Рисунок 4. а) общий вид мембраны под микроскопом;
 б) общий вид внешней стенки мембраны; в) вид чувствительной части мембраны.

1.3. Методы расчета напряженно-деформированного состояния чувствительного элемента

В работах [5,8], связанных с расчетом напряженно-деформированного состояния чувствительного элемента, в качестве математической модели используется классическое представление круглой пластины постоянной толщины. В таком случае решение строится на основании общих гипотез Кирхгофа:

- Гипотеза прямых нормалей – при изгибе нормали к срединной поверхности не искривляются и остаются перпендикулярными к деформируемой срединной поверхности. Эта гипотеза позволяет установить простые зависимости между деформацией в любой точке пластины и ее срединной поверхностью. В срединной поверхности пластина не испытывает никаких деформаций. При изгибе срединная поверхность остается нейтральной;
- Прямой отрезок, нормальный к срединной поверхности, не растягивается и не сжимается. Точки пластины, лежащие до нагружения на нормали к срединной поверхности, всегда остаются на этой нормали;
- Нормальными напряжениями в направлении, перпендикулярном к срединной поверхности, допустимо пренебрегать.

Основываясь на этих допущениях все компоненты напряжений можно выразить через прогиб w или угол поворота сечения φ от обобщенной координаты – радиуса r . В

нашем случае круглая пластинка радиуса a несет нагрузку интенсивностью q (рис.5), равномерно распределенную по всей поверхности пластинки.

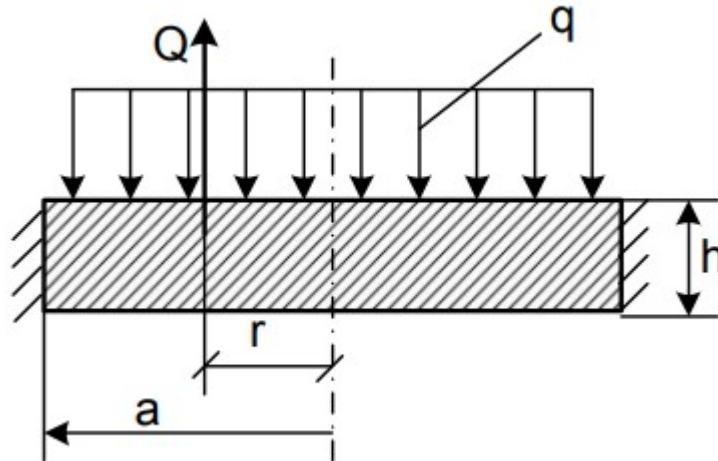


Рисунок 5. Схема нагружения.

Уравнение равновесия имеет вид:

$$M_r + \frac{dM_r}{dr}r - M_t + Q_r = 0, \quad (1)$$

где M_t и M_r - изгибающие моменты по окружному и диаметральному сечению соответственно. Соотношения для моментов:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right), \quad (2)$$

$$M_t = -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \nu \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right).$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Подставим выражения моментов (2) в уравнение (1).

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{Q}{D}; \quad (3)$$

Интегрирование уравнения (3) упрощается, если заметить, что его можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D} \quad (4)$$

где D - цилиндрическая жесткость.

Величина перерезывающей силы Q на расстоянии r от центра пластинки определяется из уравнения:

$$2 \pi r Q = \pi r^2 q;$$

Откуда

$$Q = \frac{qr}{2}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение (4), получаем:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2D}, \quad (5)$$

При повторном интегрировании уравнения (5), получим :

$$\varphi = \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}, \quad (6)$$

Следующее интегрирование дает:

$$\omega = \frac{qr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3 \quad (7)$$

Определим константы, учитывая граничные условия:

1. $r=0; \varphi=0;$

2. $r=a; \varphi=0;$

3. $r=a; \omega=0;$

где a – радиус внешнего контура.

Из первого и второго граничного условия следует

$$C_1 = \frac{-q \cdot a^2}{8D}, C_2 = 0.$$

Окончательно уравнение (6) примет вид:

$$\varphi = \frac{qr}{16D}(a^2 - r^2).$$

Из уравнения (7) получим C_3 :

$$\omega = \frac{qr^4}{64D} + \frac{qa^2r^2}{32D} + C_3 = 0; C_3 = -\frac{qa^4}{64D}.$$

Окончательное уравнение прогибов запишем как:

$$\omega = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2 \tag{8}$$

Радиальные и окружные нормальные напряжения равны:

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2};$$

$$\sigma_t = \frac{6M_t}{h^2}.$$

В соответствии с условием жесткости $\sigma_{r\max} = \frac{6M_{r\max}}{h^2} \leq \sigma - 5\%$

будет проводиться регулировка толщины сечения.

Изменение напряжений σ_r и σ_t для нижней поверхности пластинки вдоль ее радиуса показано на рис.6.

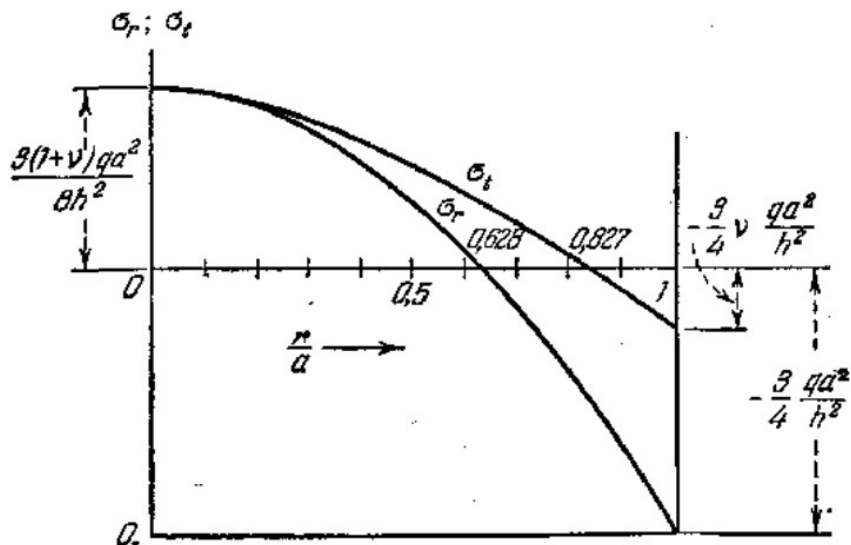


Рисунок 6. Зависимость напряжений от радиуса.

Однако данное решение непригодно для чувствительного элемента ввиду того, что его поверхность искривлена. В связи с этим необходимо, во-первых, определить геометрические характеристики мембраны (толщину в зависимости от радиуса), во-вторых, построить математическую модель для круглой пластины переменной толщины.

Глава 2. Поиск аппроксимирующей функции для толщины чувствительного элемента

2.1. Обработка экспериментальных данных координат криволинейной поверхности чувствительного элемента

Изготовленный ЧЭ имеет криволинейную чувствительную поверхность, координаты которой измерены с помощью оптического профилометра (Рис.7).

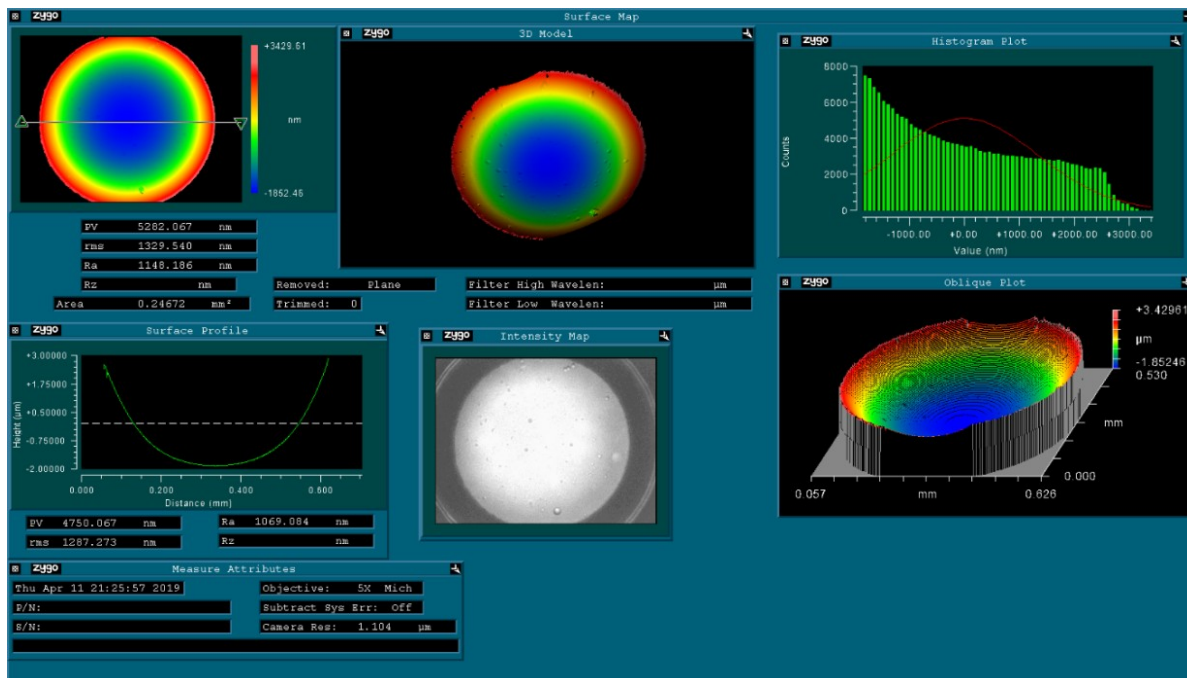


Рисунок 7. Измерение геометрии.

Для получения координат в метрических единицах их необходимо умножить на масштабные коэффициенты:

$$x_i = M_k \cdot x'_i$$

$$y_i = M_k \cdot y'_i$$

$$z_i = M_n \cdot z'_i$$

где M_k , M_n – масштабные коэффициенты;

x' , y' и z' - координаты оптического профилометра;

i – номер измерения.

Далее сдвигается геометрический центр ЧЭ в начало координат:

$$x_{0i} = x_i - x_u$$

$$y_{0i} = y_i - y_u$$

$$z_{0i} = z_i - z_{min}$$

где z_{min} - минимальное значение координаты z ;

x_u и y_u - координаты x и y соответствующие z_{min} .

После этого осуществляется переход к осесимметричному телу (z_0 - ось симметрии) путем преобразований:

$$z_{0i} = z_{0i}$$

$$r_{0i} = \sqrt{x_{0i}^2 + y_{0i}^2}$$

Получается зависимость $z_0(r_0)$ (Рис.8).

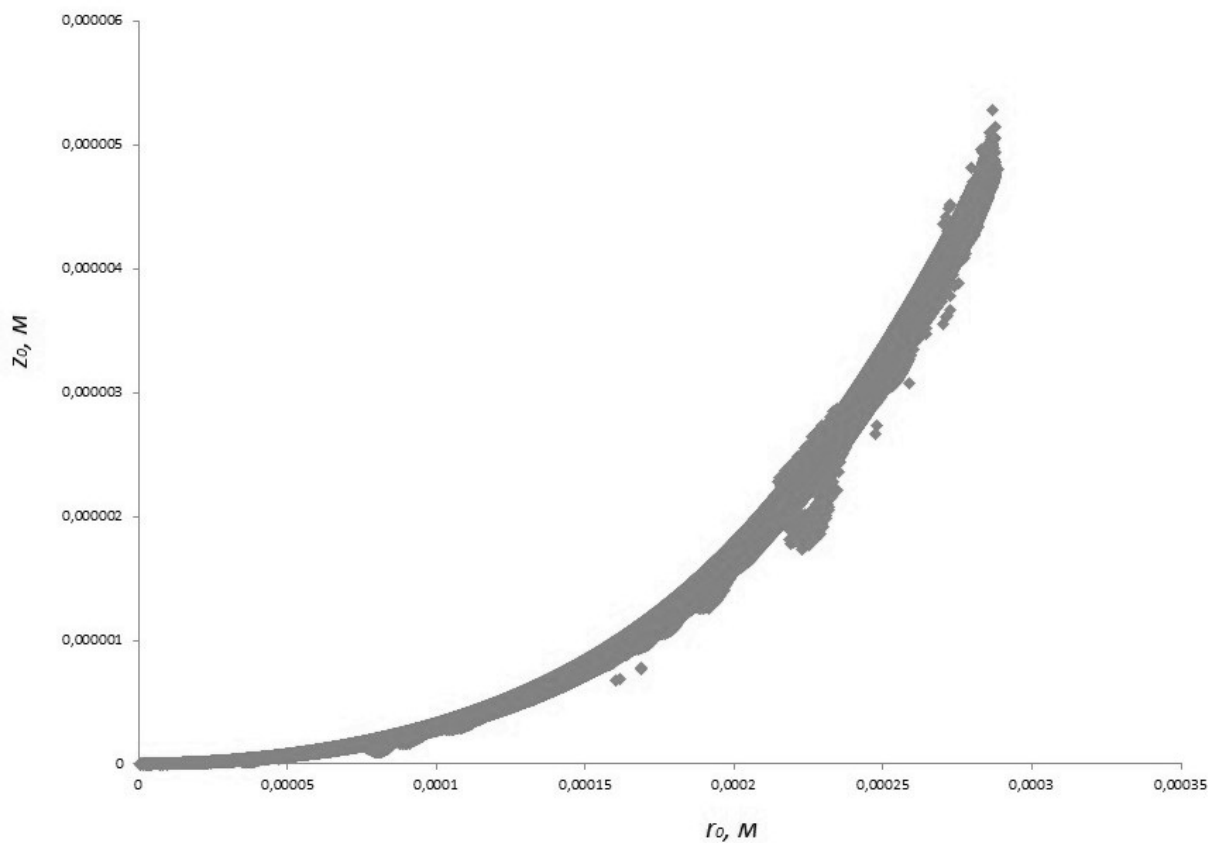


Рисунок 8. Зависимость координаты z_0 от радиуса r_0 .

В предположении о симметричности ЧЭ относительно срединной плоскости толщина есть:

$$H_i = H_0 + 2 \cdot z_{0i}(r)$$

где $H_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ м – толщина центральной части ЧЭ.

Результат представлен на рисунке 9.

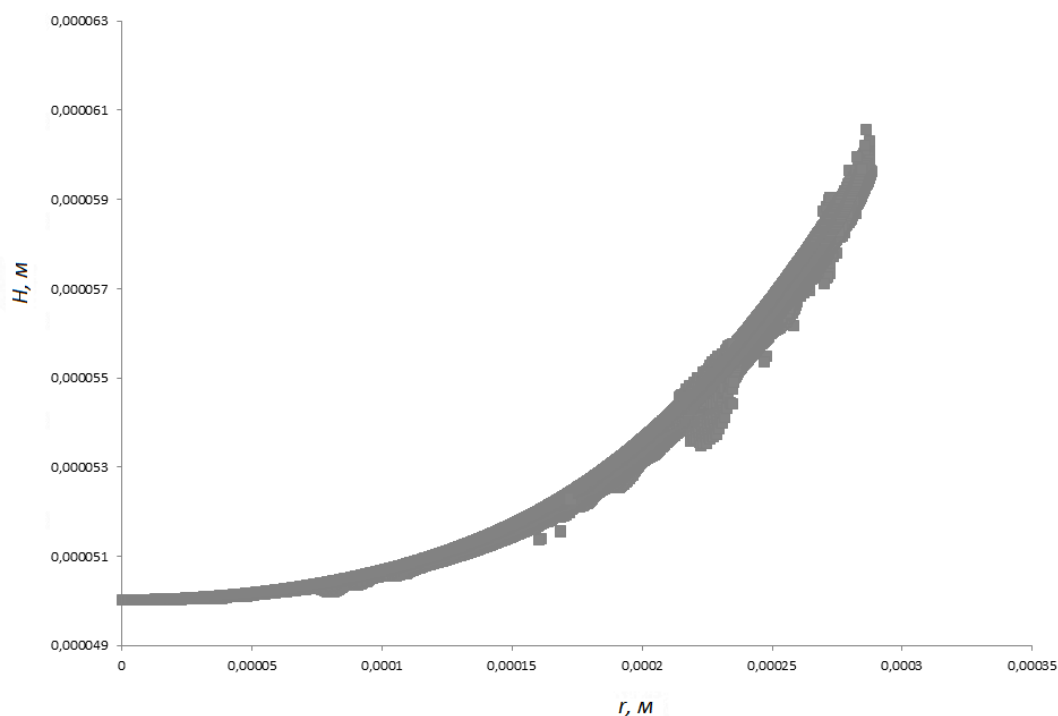


Рисунок 9. Зависимость толщины (H) от радиуса (r).

2.2. Аппроксимация толщины с помощью метода наименьших квадратов

Толщина H_i может быть представлена в виде полиномиальной функции:

$$H_i = H_0 + \alpha_1 r_i^1 + \alpha_2 r_i^2 + \dots + \alpha_j r_i^j$$

где α_n – неизвестные коэффициенты.

Преобразование к матричному виду функции толщины дает переопределенную систему линейных алгебраических уравнений

$$A=BX$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} H_1 - H_0 \\ \vdots \\ H_i - H_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} r_1^1 & \dots & r_1^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_i^1 & \dots & r_i^j \end{bmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix}$$

Коэффициенты α_j находятся с помощью метода наименьших квадратов, который заключается в минимизации суммы квадратов разностей левой и правой частей уравнений системы, то есть

$$(A - BX)^T (A - BX) \rightarrow \min$$

Равенство нулю первой производной дает выражение для X

$$X = (B^T B)^{-1} B^T A$$

Суммарная ошибка аппроксимации

$$\varepsilon = \sum |A - BX|$$

В качестве аппроксимирующих рассмотрим 7 функций (все возможные варианты до полинома 3-й степени). Для отыскания неизвестных коэффициентов была написана программа в пакете MATLAB (приложение 1). Найденные

коэффициенты и суммарные ошибки представлены в таблице 2.

Таблица 2. Коэффициенты аппроксимирующих функций.

№	Функция	α_1	α_2	α_3	ε
1	$H_0 + \alpha_1 r$	0,02182 1	0	0	0,2589 2
2	$H_0 + \alpha_2 r^2$	0	99,387	0	0,1028 8
3	$H_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2$	- 0,01254 6	152,97	0	0,0503 0
4	$H_0 + \alpha_3 r^3$	0	0	410940	0,0410 2
5	$H_0 + \alpha_1 r + \alpha_3 r^3$	0,00177 19	0	381070	0,0318 1
6	$H_0 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3$	0	16,823	342590	0,0335 3
7	$H_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3$	0,00360 45	-18,958	427200	0,0317 3

На рисунке 10 представлены аппроксимирующие функции изменения толщины в сравнении с обработанными экспериментальными данными. Из рисунка видно, что добавление слагаемого $\alpha_3 r^3$ позволяет адекватно описать толщину ЧЭ.

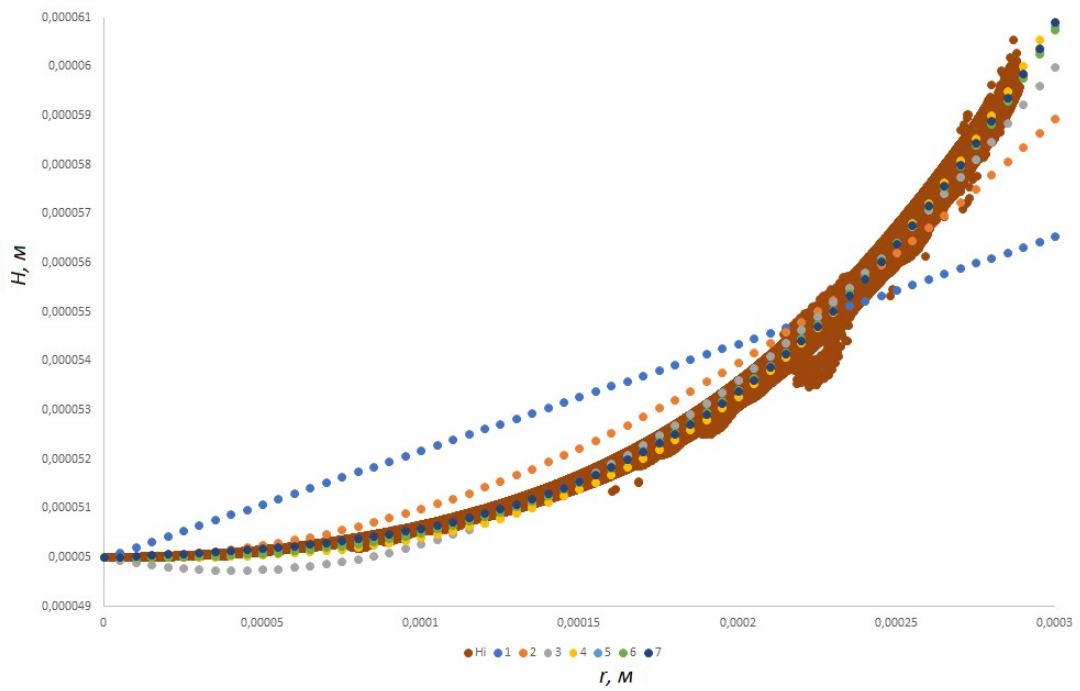


Рисунок 10. Сравнение функции толщины с экспериментальными данными.

На рисунке 11 представлены аппроксимирующие функции содержащие слагаемые $\alpha_3 r^3$ в увеличенном масштабе.

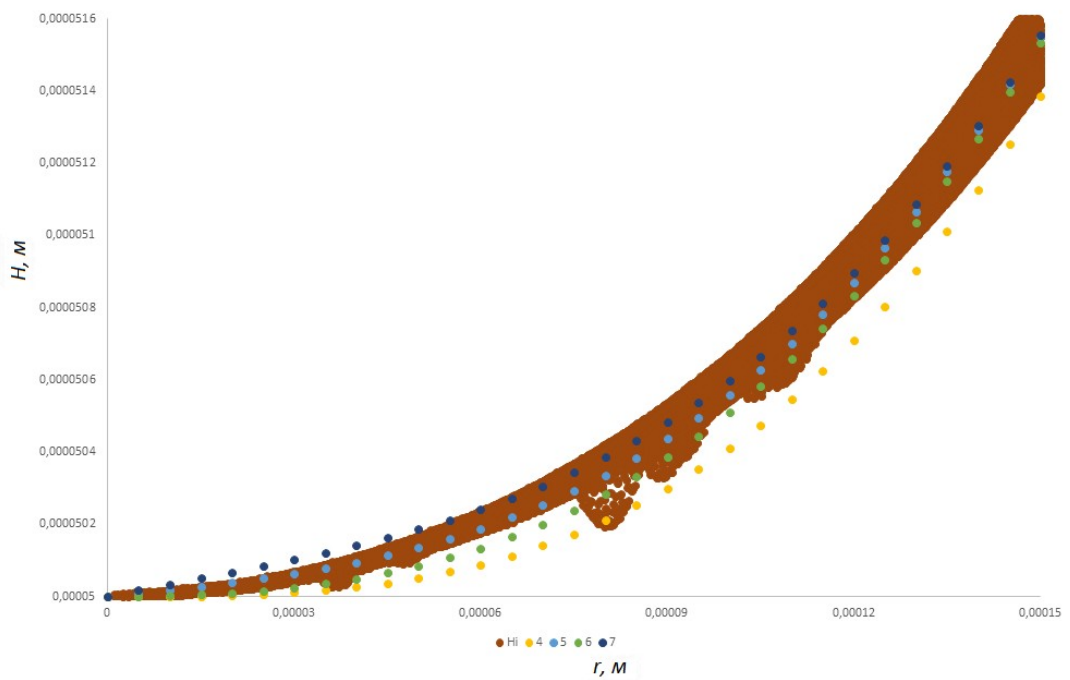


Рисунок 11. Сравнение функции толщины с экспериментальными данными в увеличенном масштабе.

Из рисунка 11 и таблицы 1 видно, что функция $H=H_0+\alpha_1 r+\alpha_3 r^3$ наиболее приближенно к экспериментальным данным описывает толщину.

Глава 3. Напряженно-деформированное состояние чувствительного элемента

3.1. Задача о статическом деформировании чувствительного элемента

Дана пластина переменной толщины, на которую действует распределенная нагрузка (рис. 15).

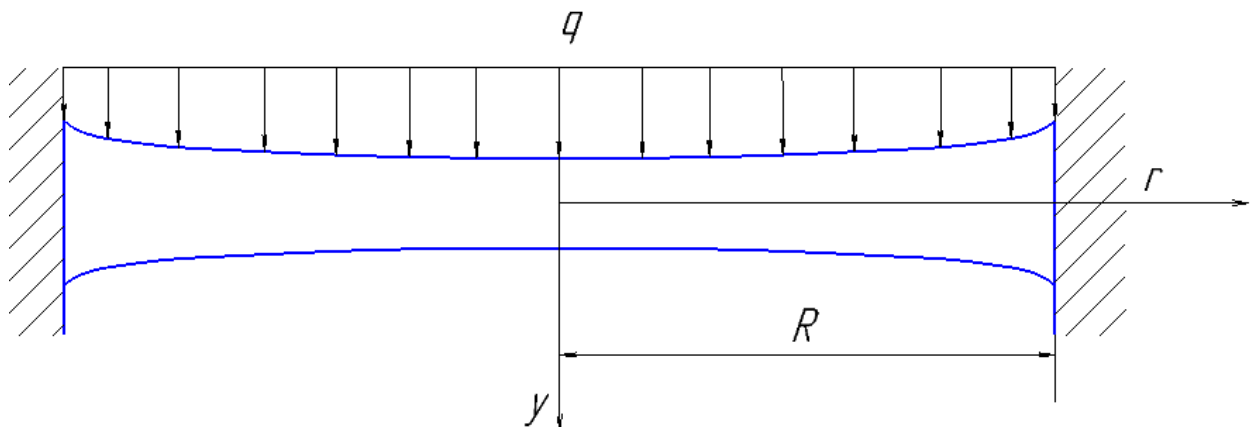


Рисунок 12. Схема нагружения.

Уравнение статического деформирования круглой пластины имеет вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial D}{\partial r} \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \right) = q \quad (9)$$

где w – прогиб;

r – координата;

q – внешняя нагрузка;

$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость;

E – модуль упругости;

ν – коэффициент Пуассона;

$H = H_0 + \alpha_1|r| + \alpha_3|r^3|$ – функция толщины;

H_0 – толщина в центре пластины;

α_1, α_3 – коэффициенты, определенные из экспериментального измерения профиля (п.2.2).

При $r = \pm R$ ставятся граничные условия жесткой заделки:

$$\omega = 0, \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, r \in \pm R. \quad (10)$$

Численные данные:

$$E = 7,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu = 0,2, \quad q = 4,5 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad R = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$
$$H_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad \alpha_1 = 0,0017719 \text{ м}^{-3}, \quad \alpha_3 = 381070 \text{ м}^{-3}.$$

Соотношения изгибающих моментов:

$$M_r = \frac{EH}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right],$$

$$M_t = \frac{EH}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr} + \nu \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right].$$

Соответствующие напряжения:

$$\sigma_r = \frac{E(H_0 + \alpha_1|r| + \alpha_3|r^3|)}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{1}{h^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{2rh} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right],$$
$$\sigma_t = \frac{E(H_0 + \alpha_1|r| + \alpha_3|r^3|)}{2(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{\nu}{h^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{2rh} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right].$$

3.2. Конечно-разностная аппроксимация краевой задачи

Ввиду того, что аналитического решения поставленной краевой задачи в классе элементарных функций не существует, используем метод конечных разностей. Основная идея метода – замена производных в дифференциальном уравнении и граничных условиях конечно-разностными аналогами.

Введём равномерную сетку:

$$w = \left\{ r_i = \left(i - \frac{N+1}{2} \right) h, i=1, \dots, N, h = \frac{2R}{N-3} \right\}$$

где h – шаг;

N – количество узловых точек (четное).

Заменяем производные на конечно-разностные аналоги на данной сетке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2h^3}; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} &= \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{h^4}; \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (11) в основное дифференциальное уравнение (9):

$$a_r w_{i-2} + b_r w_{i-1} + c_r w_i + d_r w_{i+1} + e_r w_{i+2} = f_r, i \in [3, n-2], \quad (12)$$

где:

$$a_r = \left(\frac{Dr^3}{h^4} - \frac{\left(Dr^2 + r^3 \frac{\partial D}{\partial r} \right)}{h^3} \right), e_r = \left(\frac{Dr^3}{h^4} + \frac{\left(Dr^2 + r^3 \frac{\partial D}{\partial r} \right)}{h^3} \right)$$

$$b_r = \left(\frac{-4Dr^3}{h^4} + \frac{2\left(Dr^2 + r^3 \frac{\partial D}{\partial r}\right)}{h^3} + \frac{\left(-Dr + \frac{\partial D}{\partial r}(2+\nu)r^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}r^3\right)}{h^2} - \frac{\left(D - \frac{\partial D}{\partial r}r + \nu r^2 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}\right)}{2h} \right),$$

$$c_r = \left(\frac{6Dr^3}{h^4} - \frac{2\left(-Dr + \frac{\partial D}{\partial r}(2+\nu)r^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}r^3\right)}{h^2} \right)$$

$$b_r = \left(\frac{-4Dr^3}{h^4} - \frac{2\left(Dr^2 + r^3 \frac{\partial D}{\partial r}\right)}{h^3} + \frac{\left(-Dr + \frac{\partial D}{\partial r}(2+\nu)r^2 + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}r^3\right)}{h^2} + \frac{\left(D - \frac{\partial D}{\partial r}r + \nu r^2 \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}\right)}{2h} \right),$$

$$f_r = qr^3$$

Дополним (12) граничными условиями:

$$w_2 = 0, w_1 - w_3 = 0, \tag{13}$$

$$w_{n+1} = 0, w_{n-2} - w_n = 0. \tag{)}$$

Полученные выражения (12) и (13) образуют полную систему линейных алгебраических уравнений.

3.3. Реализация вычислительного алгоритма

Формируем матрицу коэффициентов перед неизвестными и вектор сил:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & d & e & \dots & 0 \\ 0 & a & b & c & d & \dots & 0 \end{matrix} \\ \dots \\ \begin{matrix} 0 & \dots & a & b & c & d & e \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \dots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \\ \dots \\ f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Для решения системы (14) воспользуемся методом обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \dots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & d & e & \dots & 0 \\ 0 & a & b & c & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a & b & c & d & e \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ f \\ \dots \\ f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Результат вычисления прогиба представлен на рисунке 13.

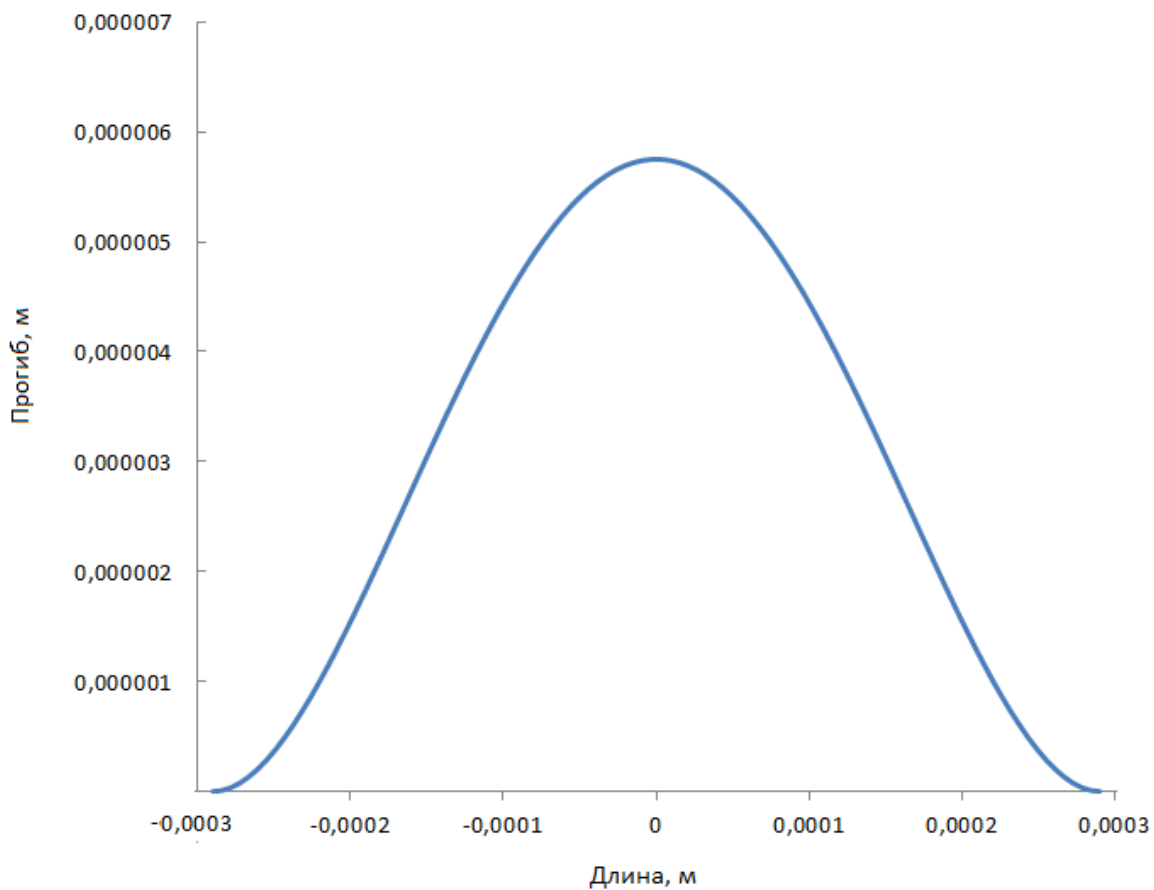


Рисунок 13. График зависимости прогиба от радиуса.

Данное решение сходится при увеличении числа точек разбиения N (рис.14)

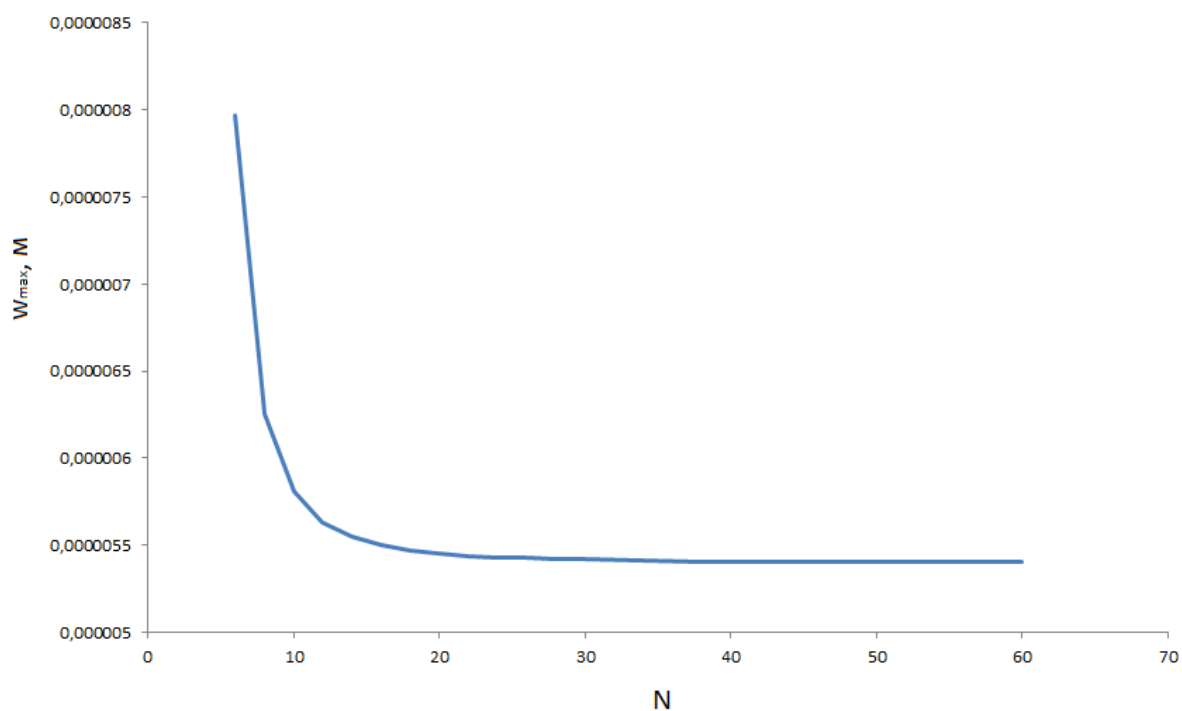


Рисунок 14. График сходимости максимального прогиба.

Также оценить правильность решения можно, сравнив получившиеся результаты с уже известными решениями (п.1.3). Рассмотрены два случая нагружения пластины того же радиуса, но постоянной толщины (Рис.15).

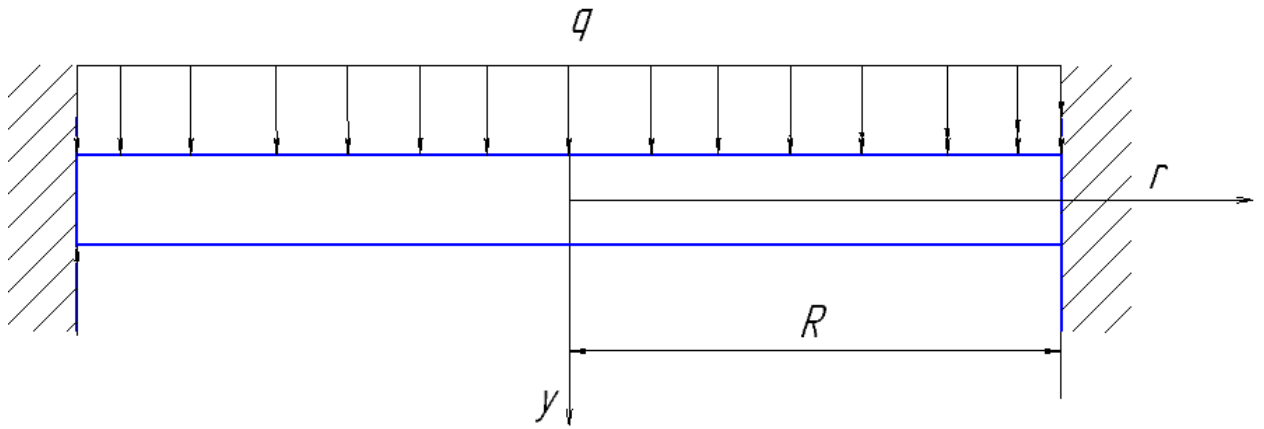


Рисунок 15. Пластина постоянной толщины.

В первом случае используется минимальная толщина исходной пластины 50 мкм, во втором – средняя 52,6 мкм.

Функция прогиба для этих двух случаев:

$$w(r) = \frac{3q(1-\nu^2)}{16EH^3} i$$

Результаты расчетов всех трех случаев изображены на рисунке 16.

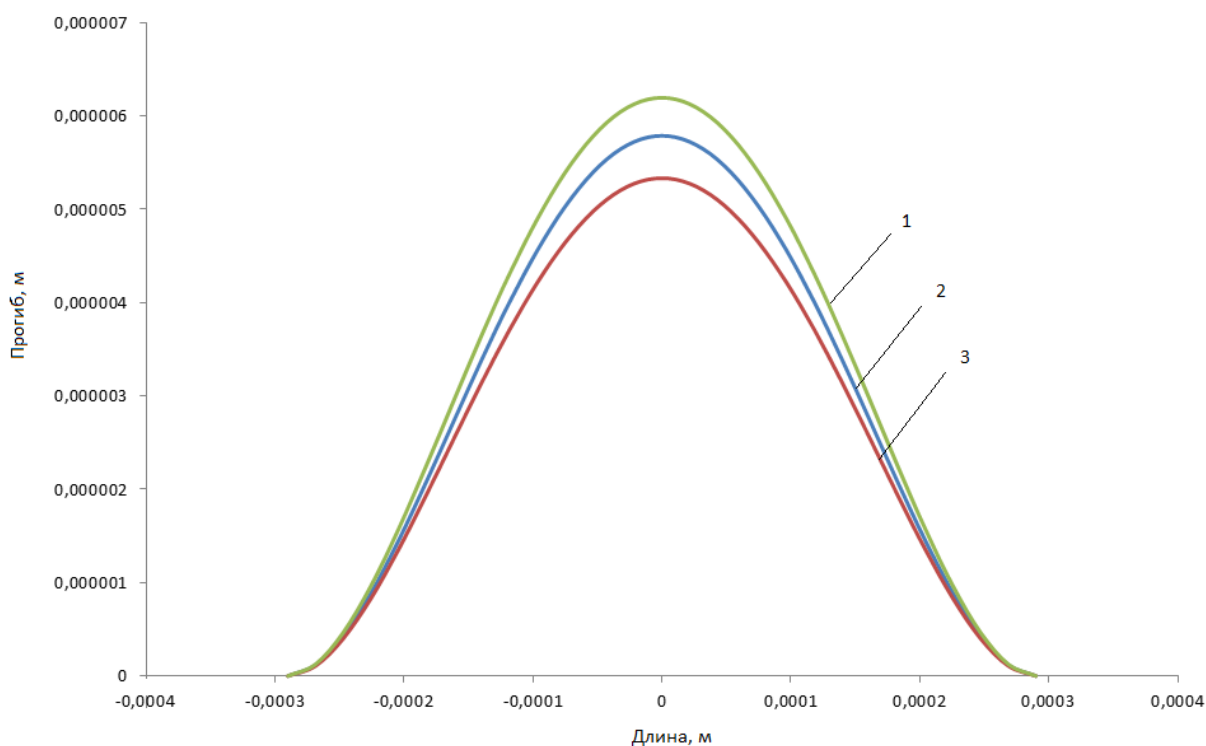


Рисунок 16. График зависимости прогиба от длины: 1 – пластина с толщиной 50 мкм; 2 – пластина переменной толщины; 3 – пластина с толщиной 52,6 мкм.

Так как результат решения нашей задачи находится в диапазоне между двумя известными решениями, можно полагать, что наше решение верно.

Из полученного решения вектора узловых неизвестных перейдем к напряжениям. В чувствительном элементе возникают радиальные — σ_r и окружные напряжения — σ_t . Их конечно-разностная аппроксимация:

$$\begin{cases} \sigma_r = E \frac{H_0(1+\alpha|r^3|)}{2(1-\vartheta^2)} \left[\frac{1}{h^2}(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}) + \frac{\vartheta}{2rh}(w_{i+1}-w_{i-1}) \right] \\ \sigma_t = E \frac{H_0(1+\alpha|r^3|)}{2(1-\vartheta^2)} \left[\frac{\vartheta}{h^2}(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}) + \frac{1}{2rh}(w_{i+1}-w_{i-1}) \right] \end{cases}$$

Результат расчета изображен на рисунке 17.

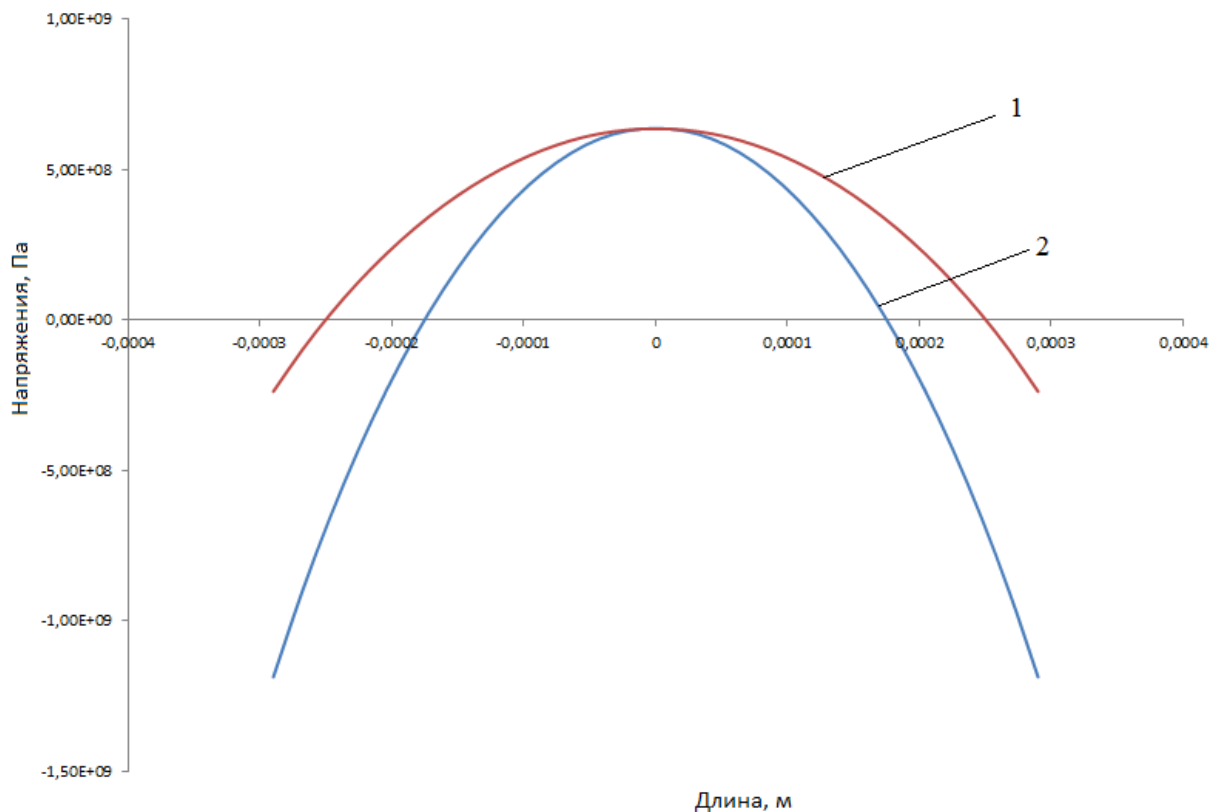


Рисунок 17. График зависимости напряжений от длины:
1 - σ_t ; 2 - σ_r .

3.4. Экспериментальное исследование прогиба чувствительного элемента датчика

Проведены испытания чувствительного элемента. Схема эксперимента показана на рисунках 18 и 19. ВОДД помещался в герметическую барокамеру и с помощью

циркулятора был подключен к источнику излучения и спектроанализатору. Производилась закачка газа (воздух) в камеру с помощью насоса. Давление изменялось в пределах от 0 до 50 МПа с шагом в 5 МПа.

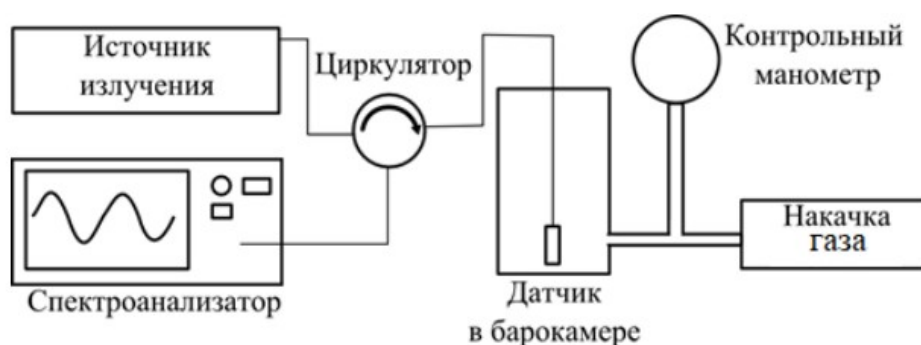


Рисунок 18. Схема экспериментальной установки.



Рисунок 19. Фото барокамеры для исследования ВОДД.

Результаты эксперимента представлены на рисунке 20. Из рисунка видно линейное поведение прогиба от воздействующего давления. Также необходимо отметить, что

разрушение чувствительного элемента происходит при давлении свыше 45 МПа.

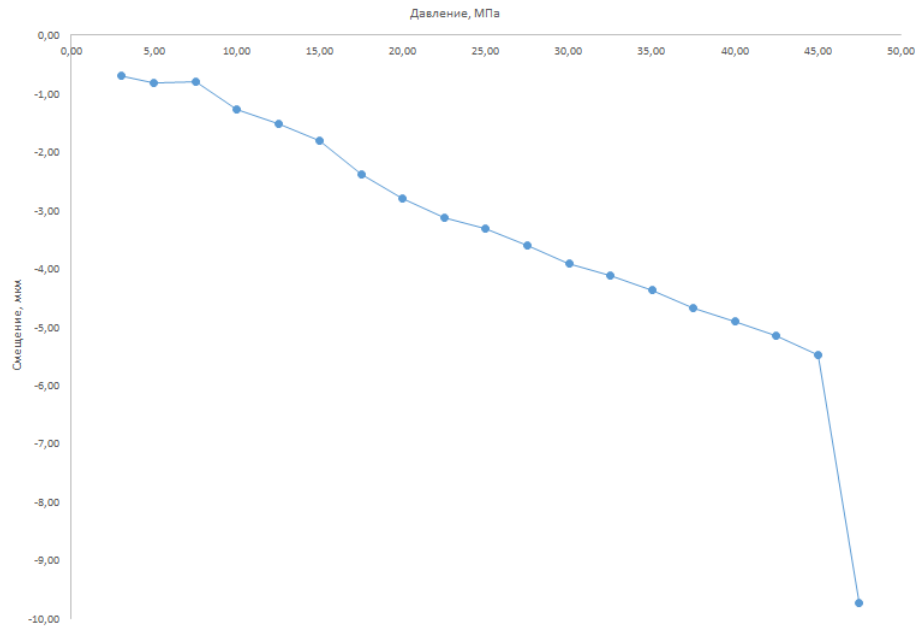


Рисунок 20. График зависимости смещения от прикладываемого давления.

На рисунке 21 показаны результаты расчета максимального прогиба в центре пластины в зависимости от давления в сравнении с экспериментальными данными.

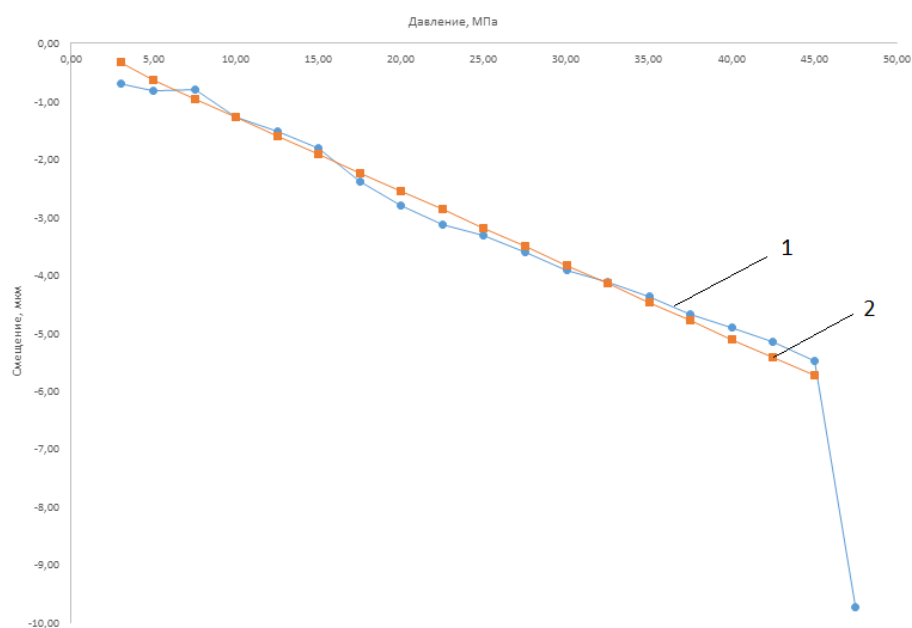


Рисунок 21. График зависимости смещения от прикладываемого давления:

1 - экспериментальные данные; 2 - расчетные данные.

Из рисунка видно, что математическая модель адекватно описывает деформирование чувствительного элемента, а, следовательно, может быть использована в качестве инструмента для проверки эффективности конструкторских решений, направленных на изменение геометрических характеристик.

Заключение

В ходе работы был исследован датчик давления, чувствительным элементом которого является тонкая мембрана. В основе работы датчика давления лежит интерферометр Фабри-Перо. Под действием давления происходит изменения положения мембраны, по этому изменению можно определять давление, оказываемое на датчик.

Была проведена обработка экспериментальных измерений геометрии ЧЭ с последующей аппроксимацией толщины на известные функции с использованием метода наименьших квадратов. Построенные графики и рассчитанные ошибки аппроксимации позволили определить конкретный вид функции толщины, которая была использована в уравнении изгиба круглой пластины.

Численное интегрирование краевой задачи позволило получить значения прогибов, окружных и радиальных напряжений при заданной распределенной нагрузке.

Показана сходимость решения на наборе сгущающихся сеток: при увеличении количества узлов решение стремится к постоянному значению.

Полученные значения прогибов в зависимости от давления хорошо согласуются с экспериментальными данными, следовательно, математическая модель адекватно описывает деформирование чувствительного элемента и может быть использована в качестве инструмента для проверки эффективности конструкторских решений, направленных на изменение геометрических характеристик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: ФМ, 1964.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
4. Pandey N. K., Yadav B. C. Fibre optic pressure sensor and monitoring of structural defects //Optica applicata. – 2007. – Т. 37. – №. 1/2. – С. 57.
5. Wang X. et al. All-fused-silica miniature optical fiber tip pressure sensor //Optics letters. – 2006. – Т. 31. – №. 7. – С. 885-887.
6. Antunes P. F. C. et al. Optical fiber microcavity strain sensors produced by the catastrophic fuse effect //IEEE Photonics Technology Letters. – 2014. – Т. 26. – №. 1. – С. 78-81.
7. Domingues M. F. et al. Cost-effective optical fiber pressure sensor based on intrinsic Fabry-Perot interferometric microcavities //Optical Fiber Technology. – 2018. – Т. 42. – С. 56-62.
8. .Zhu Y., Wang A. Miniature fiber-optic pressure sensor //IEEE Photonics Technology Letters. – 2005. – Т. 17. – №. 2. – С. 447-449.
9. Wang Y. et al. An optical fiber MEMS pressure sensor using microwave photonics filtering technique //25th International Conference on Optical Fiber Sensors. – International Society for Optics and Photonics, 2017. – С. 1032368-1032368-4.

10. Ming W. et al. A novel optical fibers MEMS pressure sensor //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2006. – Т. 34. – №. 1. – С. 996.
11. Berthold J. et al. Apparatus for continuous readout of fabry-perot fiber optic sensor : заяв. пат. 11/726,273 США. – 2007.
12. Lopushansky R. L., Berthold J. W. Method and apparatus for continuous readout of Fabry-Perot fiber optic sensor : пат. 7492463 США. – 2009.
13. Пустовой В. И. , Лихачев И. Г. Волоконно-оптическое устройство измерения давления : пат. 2509994 РФ. – 2012.
14. Удд Э. Волоконно-оптические датчики. М.: Техносфера, 2008. 520 с
15. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки: Пер. с англ./ Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Наука, 1982.
16. Оптоволоконные сенсоры: принципы и компоненты. Вып. 1: Пер. с англ. /Под ред. Дж. Дейкина, Б. Калшо. - М.: Мир, 1992.
17. Абраменко Т. В., Гориш А. В., Кириллов А. Б., Котов А. Н. Общие принципы конструирования датчиковой аппаратуры для измерения различных физических параметров. Международный симпозиум «Надежность и качество», труды международного симпозиума, 27 мая - 2 июня 2002, с. 202-204, Пензенский государственный университет, Пенза, 2002г.

18. Котов А. Н. Тенденция современного развития ВОД. VHI СанктПетербургская международная конференция «Региональная информатика - 2002 (РИ -2002), материалы конференции, часть 2, с. 17, 26-28 ноября 2002, Санкт-Петербург.
19. Мурашкина Т. И. Теория, расчет и проектирование волоконно-оптических измерительных приборов и систем. Учебное пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та. -1999. 133 с.
20. Мурашкина Т. И., Новиков В. В., Цибизов П. В. Проектирование волоконно-оптических датчиков давления и перемещения / Методические указания к курсовому проекту. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2000.
21. J. Sirkis, T. A. Berkoff, R. T. Jones, H. Singh, A. D. Kersey, E. J. Friebele, and M. A. Putnam, J. Lightwave Technol. 13, 1256, 1995.
22. X. Wang, J. Xu, Y. Zhu, B. Yu, M. Han, K. Cooper, G. Pickrell, and A. Wang, in Conference on Lasers and Electro-Optics/Quantum Electronics and Laser Science Conference (CLEO/QELS) 2005 (Optical Society of America, 2005; CD ROM)
23. Zhu, T.; Wu, D.; Liu, M.; Duan, D.W. In-Line Fiber Optic Interferometric Sensors in Single-Mode Fibers. Sensors 2012, 12, 10430–10449
24. J. Han, J. Y. Kim, T. S. Kim, and J. S. Kim, “Performance of Fabry-Perot microcavity structures with corrugated diaphragms,” Sens. Actuators A 79, 162-72, 2000.

25. M. Born and E. Wolf, Principles of Optics (Pergamon Press, Oxford, 1980)

Приложение 1

```
clc  
clear all  
close all
```

```
%% Импорт данных r и H  
rH = importdata('rH.txt');
```

```
%% Формирование столбца A  
A = rH(:,2)-0.00005;
```

```
%% Формирование матриц B для 7 функций  
B1(:,1) = rH(:,1);  
B2(:,1) = rH(:,1).^2;  
B3(:,1) = rH(:,1);  
B3(:,2) = rH(:,1).^2;
```

```

B4(:,1) = rH(:,1).^3;
B5(:,1) = rH(:,1);
B5(:,2) = rH(:,1).^3;
B6(:,1) = rH(:,1).^2;
B6(:,2) = rH(:,1).^3;
B7(:,1) = rH(:,1);
B7(:,2) = rH(:,1).^2;
B7(:,3) = rH(:,1).^3;

```

```

%% МНК для 7 функций
alpha1 = (B1'*B1)\(B1'*A);
alpha2 = (B2'*B2)\(B2'*A);
alpha3 = (B3'*B3)\(B3'*A);
alpha4 = (B4'*B4)\(B4'*A);
alpha5 = (B5'*B5)\(B5'*A);
alpha6 = (B6'*B6)\(B6'*A);
alpha7 = (B7'*B7)\(B7'*A);

```

```

%% Расчет ошибок
eps(1) = sum(abs(A-B1*alpha1));
eps(2) = sum(abs(A-B2*alpha2));
eps(3) = sum(abs(A-B3*alpha3));
eps(4) = sum(abs(A-B4*alpha4));
eps(5) = sum(abs(A-B5*alpha5));
eps(6) = sum(abs(A-B6*alpha6));
eps(7) = sum(abs(A-B7*alpha7));

```

Приложение 2

```

clc
close all
clear all

q =42.5*10.^6;
ho = 5*0.00001;
alp1 = 0.0017719 ;
alp2=381070;
E = 74*10.^9;
v = 0.2;
R = 2.9*0.0001;
n = 50;
h = 2*R/(n-3);
x = -R-h:h:R+h;
p = q*12*(1-v*v)/(E*ho*ho*ho);

```



```

k = zeros(n,n);
V = zeros(n,1);

for i = 1:numel(x)
    r(i) = x(i);
    H1(i) = ho+alp1*abs(r(i))+alp2*(abs(r(i)).^3);
    D(i)=E*H1(i).^3/(12*(1-v^2));
end
%производные%
% dfD(1)=D(1)/(2*h);
% dfD(numel(x))=D(numel(x)-1)/(2*h);
% df2D(1)=D(1)/(h*h);
% df2D(numel(x))=D(numel(x)-1)/(h*h);
dfD(1)=alp1+3*alp2*r(1).^2;
dfD(numel(x))=alp1+3*alp2*r(numel(x)).^2;
df2D(1)=6*alp2*r(1);
df2D(numel(x))=6*alp2*r(numel(x));

for i=1:numel(x)
dfD(i)=alp1+3*alp2*(r(i).^2);
df2D(i)=6*alp2*r(i);
end
for i = 1:numel(x)
    a(i) = (D(i)*(r(i).^3))/(h.^4) -
(D(i)*r(i).^2+r(i).^3*dfD(i))/h.^3;
    b(i) = (-4*D(i)*(r(i).^3))/h.^4+2*(D(i)*(r(i).^2)+
((r(i).^3)*dfD(i)))/h^3+(-D(i)*r(i)
+dfD(i)*(2+v)*(r(i).^2)+df2D(i)*(r(i).^3))/h.^2 - (D(i) -
dfD(i)*r(i)+df2D(i)*v*(r(i).^2))/(2*h);
    c(i) = (6*D(i)*(r(i).^3))/h.^4-2*(-D(i)*r(i)
+dfD(i)*(2+v)*(r(i).^2)+df2D(i)*(r(i).^3))/h.^2;
    d(i) = (-4*D(i)*(r(i).^3))/h.^4-2*(D(i)*(r(i).^2)+
((r(i).^3)*dfD(i)))/h^3+(-D(i)*r(i)
+dfD(i)*(2+v)*(r(i).^2)+df2D(i)*(r(i).^3))/h.^2+(D(i) -
dfD(i)*r(i)+df2D(i)*v*(r(i).^2))/(2*h);
    e(i) = (D(i)*(r(i).^3))/(h.^4)+
(D(i)*r(i).^2+r(i).^3*dfD(i))/h.^3;
end

k(1,1) = 1; k(1,3) = -1;
k(2,2) = 1;

k(n,n) = 1;
k(n,n-2) = -1;
k(n-1,n-1) = 1;

for i = 3:n-2
f(i) = (r(i).^3)*q;

    k(i,i-2) = a(i);
    k(i,i-1) = b(i);

```

```

        k(i,i) = c(i);
        k(i,i+1) = d(i);
        k(i,i+2) = e(i);
        V(i) = f(i);
end

y = k\V;
% y(2) = 0;
w = y(2:end-1);
x1 = -R:h:R;
figure;
plot(x1,w);
grid on
xlabel('Длина');
ylabel('Прогиб');
for i = 2:n-1
    Gr(i) = -E*H1(i)*((y(i+1)-2*y(i)+y(i-1)))/(h*h)+v*(y(i+1)-
y(i-1))/(2*r(i)*h))/(2*(1-v*v));
    Gt(i) = -E*H1(i)*(v*(y(i+1)-2*y(i)+y(i-1)))/(h*h)+(y(i+1)-
y(i-1))/(2*r(i)*h))/(2*(1-v*v));
    G(i) = sqrt(Gr(i).^2+Gt(i).^2-Gr(i)*Gt(i));
end
Gr = Gr(2:end);
Gt = Gt(2:end);
G = G(2:end);
figure;
hold on
grid on;
plot(x1,Gr,'m-')
plot(x1,Gt,'r-')
plot(x1,G,'g-')
hold off
xlabel('Длина');
ylabel('Gt Gr G');

```