



**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Факультет Прикладной математики и механики
Выпускающая кафедра: Динамика и прочность машин
Направление подготовки: 15.03.03 «Прикладная механика»
Квалификация: бакалавр

Допускается к защите
Зав.кафедрой ДПМ
_____ В.П.Матвеевко
«21» июня 2019г.

ИЗУЧЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ФОРМЫ ГИБКОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЕГО КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

Выпускная квалификационная работа

Выполнила:
студентка группы ДПМ-15-16
Еленская Наталья Витальевна
(_____)
подпись

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. кафедры ДПМ
Келлер Илья Эрнстович
(_____)
подпись

Пермь 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Кафедра «Динамика и прочность машин»

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ДПМ
Матвеевко В.П.
«05» июня 2019г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение выпускной квалификационной работы студента

Фамилия И.О.	Еленская Н.В.
Факультет ПММ	Группа ДПМ-15-1б
Начало выполнения работы	05 июня 2019
Контрольные сроки просмотра работы кафедрой	18 июня 2019
Дата защиты работы на заседании ГЭК	25 июня 2019
1. Наименование работы: Изучение эволюции формы гибкого упругого стержня при его квазистатическом кручении;	
2. Исходные данные к работе	
3. Содержание пояснительной записки:	
1) Математическая постановка задачи;	
2) Исследование статических уравнений нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня;	
3) Численное решение системы уравнений в среде MATLAB	
Дополнительные указания	

Основная литература

1. Bachurikhin V.P., Keller I.E., Merzlyakov A.F., Yurlov M.A. Experimental study of nonlinear effects under torsion of the uniform cylinder with initially circular cross section. Solid State Phenomena. Trans Tech Publications, Switzerland. 2016. Vol.243. P.29-34.
2. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. —М.:Машиностроение, 1978. — 222 с, ил. — (Б-ка расчетчика).

Руководитель выпускной квалификационной работы студента

д. ф.-м. н., профессор кафедры ДПМ

(Келлер И. Э.)

(должность, Ф.И.О.)

Задание получил

05 июня 2019

(Еленская Н. В.)

(дата и подпись студента)

**КАЛЕНДАРНЫЙ ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

№п. п.		Объем этапа, в %	Сроки выполнения		Примечание
			начало	конец	
1	Разработка основных разделов выпускной квалификационной работы	70			
2	Оформление выпускной квалификационной работы	20			
3	Разработка и оформление иллюстративной части материала к защите диссертации	10			
4	Представление ВКР на проверку и отзыв научного руководителя				
5	Представление работы заведующему кафедрой				
6	Защита на заседании ГЭК				

Научный руководитель работы:

д.ф.-м.н., профессор кафедры ДПМ

И. Э. Келлер

« _____ » _____ 2019 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	8
1.1. Наблюдаемые нелинейные эффекты	8
1.2. Основные положения механики гибких стержней	10
1.3. Вывод нелинейной системы равновесия гибкого упругого стержня для общего случая статической неопределимости	11
ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГИБКОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ.....	23
2.1. Общий случай решения статических уравнений системы.....	23
2.2. Частные решения системы для случая постоянной крутки стержня ..	25
2.3. Частный случай эволюции формы стержня в виде однородной цилиндрической спирали	31
ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB	36
3.1. Использование численных методов для решения нелинейных систем дифференциальных уравнений.....	36
3.2. Численное решение нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня в случае постановки начальной задачи	36
3.3. Численное решение нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня в случае постановки краевой задачи	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	49
ПРИЛОЖЕНИЕ А	50
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	51
ПРИЛОЖЕНИЕ В	52
ПРИЛОЖЕНИЕ Г.....	53

Введение

Гибкие стержни широко применяют в различных областях техники: их используют в качестве упругих элементов различных приборов, например, в качестве чувствительных элементов в акселерометрах и частотных преобразователях, механических низкочастотных фильтров в электронной технике, аккумуляторов механической энергии в часовых механизмах и др. Приборы времени, использующие гибкие стержни, широко распространены не только как часы, но и как преобразователи стабильных сигналов в различных устройствах автоматики[1].

Целью данной работы является формулировка уравнений математической модели эволюции формы гибкого стержня при его кручении, ее численная реализация и верификация. Работа направлена на создание инструмента для исследования нелинейных явлений, обнаруженных в эксперименте.

Объект исследования: эволюция формы гибкого стержня с закрепленными концами при его кручении.

Современное состояние исследования:

В статье [2] обсуждается кинетическая аналогия Кирхгофа, связывающая основные уравнения для статики упругих стержней и динамики твердых тел в свете нескольких различных гамильтоновых формулировок, включая неканоническое описание равновесий стержней. Особое внимание уделяется восстановлению осевой линии стержня из переменных каркаса, которые образуют полное пространство конфигурации в интерпретации твердого тела.

В статье [3] рассматривается геометрическая теория стержней для случая естественно прямого, линейно упругого, нерастяжимого, круглого стержня, испытывающего изгиб и кручение, но не сдвигающегося. Исследуется поведение таких стержней под воздействием конечного момента

и натяжения, явно вычисляются геометрические свойства изогнутых стержней. В едином подходе, использующем динамическую аналогию Кирхгофа, рассматриваются как классическая спиральная, так и более недавно исследованная локализованная потеря устойчивости. Особое внимание уделяется последовательной трактовке концепций связи, скручивания и изгиба.

В статье [4] показано, что равномерный и гиперэластичный, но в любом случае произвольный нелинейный стержень Коссера, подверженный соответствующим конечным нагрузкам, имеет равновесия, центральные линии которых образуют двухпараметрические семейства спиралей.

В статье [5] приведены результаты экспериментов по прогибу, включающих изгиб и скручивание стержней. Проводятся сравнения с расчетами, основанными на теории стержней Коссера. Стержни зажаты в совмещенных патронах, и эксперименты проводятся в жестких условиях нагрузки. Эксперимент продолжается либо скручиванием концов стержня на определенную величину, а затем корректировкой провисания или фиксацией провисания и изменением величины закручивания. Таким образом, исследуются часто встречающиеся явления, такие как изгиб с защелкой, образование петель и выпучивание в и из плоских конфигураций. Эффект гравитации обсуждается.

В статье [6] представлены результаты испытаний на кручение сплошных цилиндрических образцов при фиксированном расстоянии между концами образца. Обнаружено возникновение осевого напряжения, сначала растягивающего, а затем – сжимающего образец, имеющего пульсационную составляющую с периодом один оборот. Представленные в работе экспериментальные данные обращают внимание на нелинейные эффекты, сопровождающие кручение сплошных металлических цилиндров при больших деформациях.

Задачи:

1. Вывод нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня;
2. Построение частного решения уравнений в форме однородной цилиндрической спирали для тестирования программы;
3. Написание программы в пакете MATLAB для численного решения краевых задач на кручение гибких стержней;
4. Численное решение ряда начальных и граничных задач на кручение гибкого стержня, в том числе воспроизведение решения в виде однородной цилиндрической спирали.

Научная новизна: заключается в том, что впервые была решена краевая задача с конкретными заданными условиями.

Практическая значимость: задача имеет фундаментальную ценность.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем работы составляет 49 страниц, включая 22 рисунка и 0 таблиц. Список литературы содержит 10 наименований.

Глава 1. Постановка задачи

1.1. Наблюдаемые нелинейные эффекты

При достаточно больших степенях деформации кручение сплошных цилиндров с начально круговым поперечным сечением сопровождается нелинейными эффектами — изменением длины (появлением осевого напряжения) и развитием спиральной формы рабочей части образца[6]. Первый эффект называется прямым эффектом Пойнтинга и заключается в следующем: при кручении образца из изотропного материала для сохранения неизменной длины возникает сжимающая осевая сила.

При достаточно сильном закручивании одного из концов гибкого упругого стержня (стержня Коссера), форма линии стержня сильно изменяется и возникают такие эффекты, как закручивание в однородную цилиндрическую спираль, появление петли[5] и т.д.

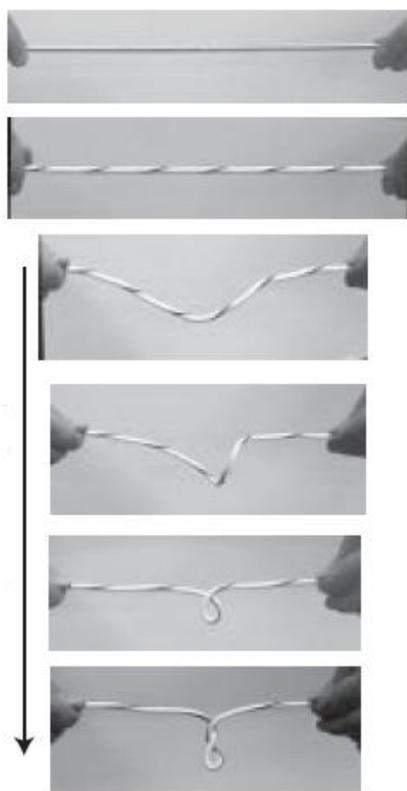


Рис. 1 Эволюция формы скрученного стержня[5]

В статье [6] был проведен опыт на квазистатическое кручение цилиндрических образцов с диаметром рабочей части 10 мм и длиной 112 мм из сплава Al-6%Mg.

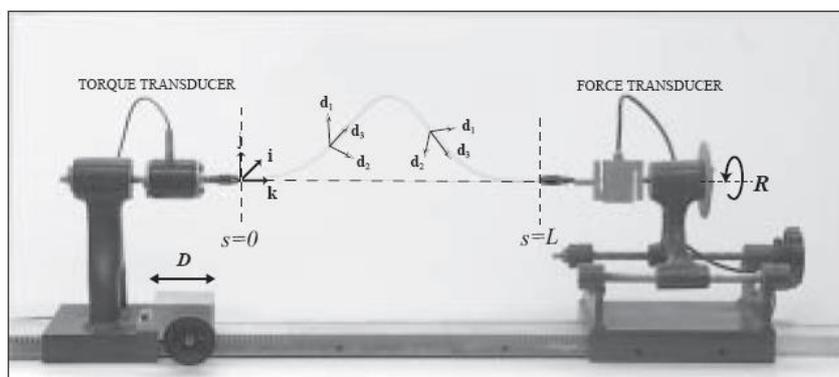


Рис. 2 Схема экспериментальной установки[5].

В ходе работы наблюдалось закручивание оси цилиндрической рабочей части образца в равномерную спираль, число витков которой совпадало с числом оборотов. При достижении шага спирали значения, равного диаметру, начинался изгиб рабочей части образца, сопровождающийся уменьшением диаметра и увеличением длины стержня. Типичные кривые осевой силы и крутящего момента представлены на рис. 3-4.

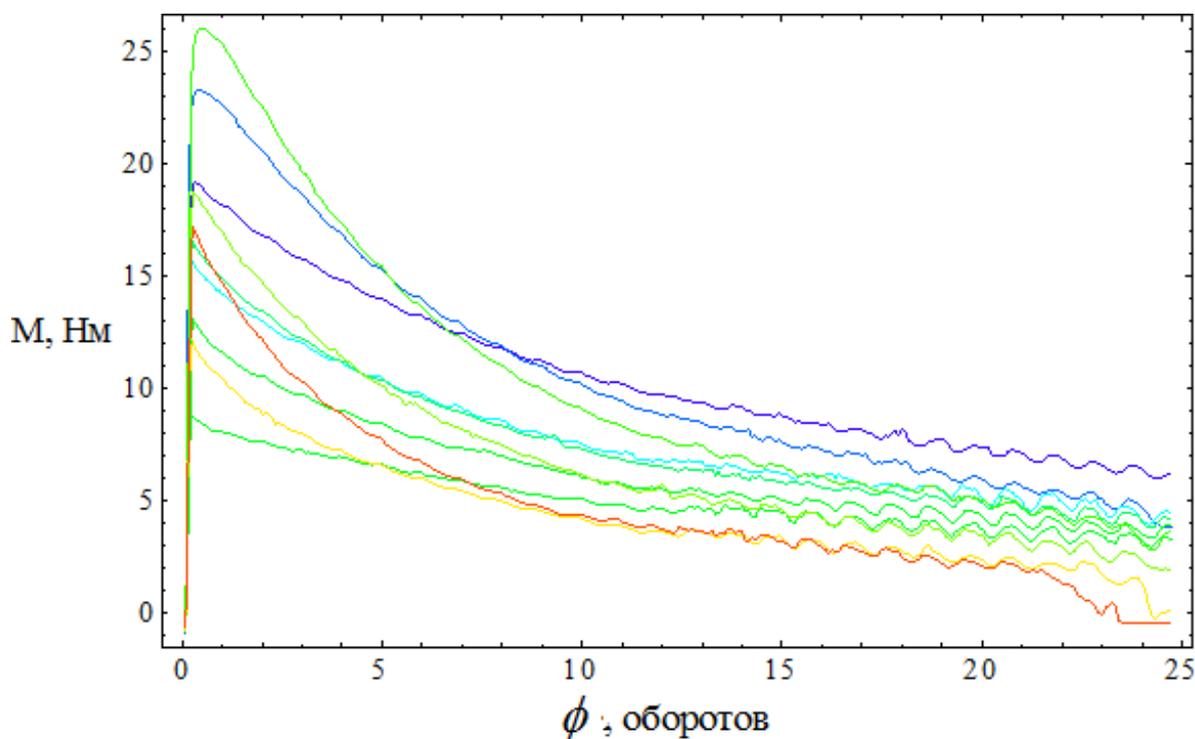


Рис. 3 Крутящий момент в зависимости от количества оборотов[6]

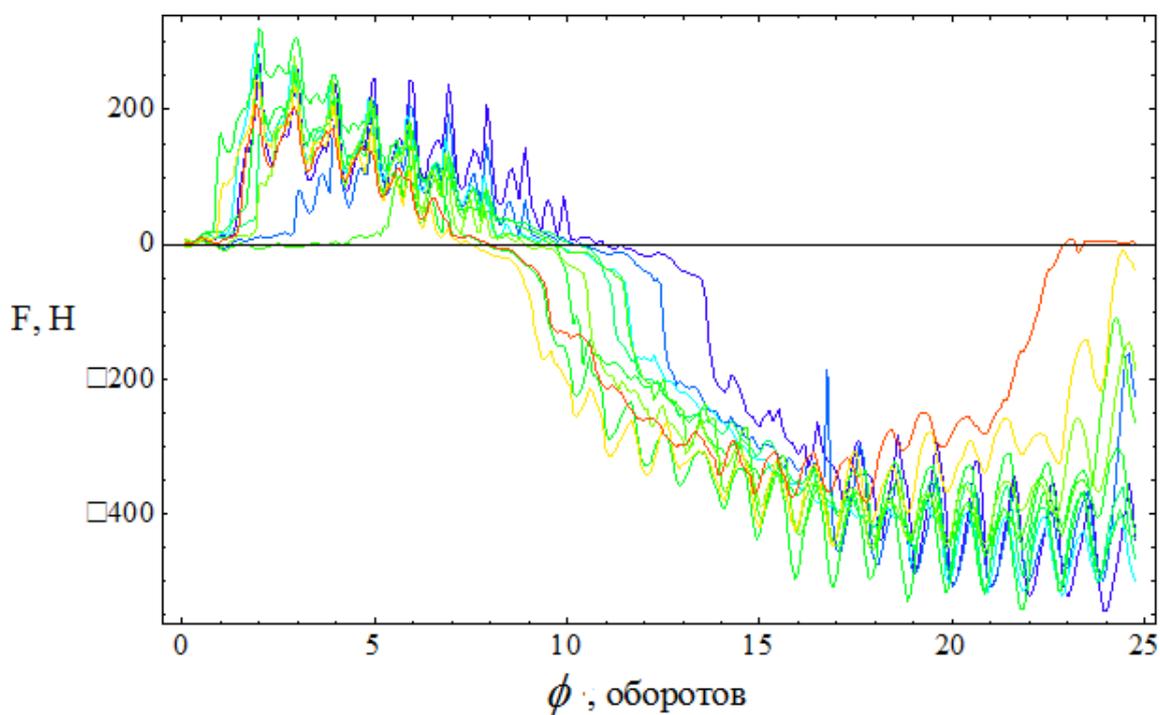


Рис. 4 Осевая сила в зависимости от количества оборотов[6]

Авторы статьи [1] высказывают предположение, что сложная взаимосвязь кручения и изгиба в нелинейной задаче Сен-Венана имеет отношение к аналогичным эффектам в рамках задачи Кирхгоффа, хорошо экспериментально и теоретически исследованным для упругих стержней

Таким образом, сформулируем задачу: имеется стержень с длиной рабочей части $l = 112$ мм, который закручивают с одного конца, вследствие чего он начинает закручиваться и изгибаться, расстояние между концами стержня не фиксировано, сам стержень жёстко закреплён. Известны граничные условия для перемещений и углов поворота: перемещения стержня на концах нулевые, углы Эйлера, определяющие поворот системы координат, нулевые в начале, а нулевые два, а отвечающий за поворот относительно оси стержня равен некоторой константе.

1.2. Основные положения механики гибких стержней

При выводе уравнений равновесия считается, что поперечные нормальные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза Бернулли), т. е. сдвиги не учитываются.

Размеры поперечного сечения остаются малыми по сравнению с длиной стержня и радиусом кривизны оси стержня (под осью стержня понимается линия, соединяющая центры тяжести площадей поперечных сечений стержня). Различные, но статически эквивалентные локальные нагрузки вызывают в стержне (если не учитывать местные напряжения вблизи точки приложения нагрузок) одно и то же напряженное состояние (принцип Сен-Венана). Из гипотезы Сен-Венана следует, что продольные волокна (если стержень представить состоящим из большого числа плотно прилегающих и не связанных между собой волокон) не испытывают поперечного сжатия или растяжения, а также касательных напряжений. Взаимные перемещения сечений стержня при малых упругих деформациях в общем случае конечны, т. е. задача является геометрически нелинейной, а физически — линейной (перемещения точек осевой линии стержня могут быть большими, в то время как материал стержня работает в пределах закона Гука).[1]

1.3. Вывод нелинейной системы равновесия гибкого упругого стержня для общего случая статической неопределимости

Стержень — это длинное тонкое тело, характеризующееся в первую очередь своей осью — пространственной кривой. Ось определяется зависимостью радиус-вектора от дуговой координаты. Далее будем рассматривать стержень с постоянным сечением.

Для постановки задачи и последующего решения вводятся две системы координат: неподвижная декартова с единичными векторами \vec{a}_i и подвижная, в терминах репера Френе \vec{p}_i рис. 5. Дуга s осевой линии отсчитывается от некоторой фиксированной точки, выбор которой произволен.

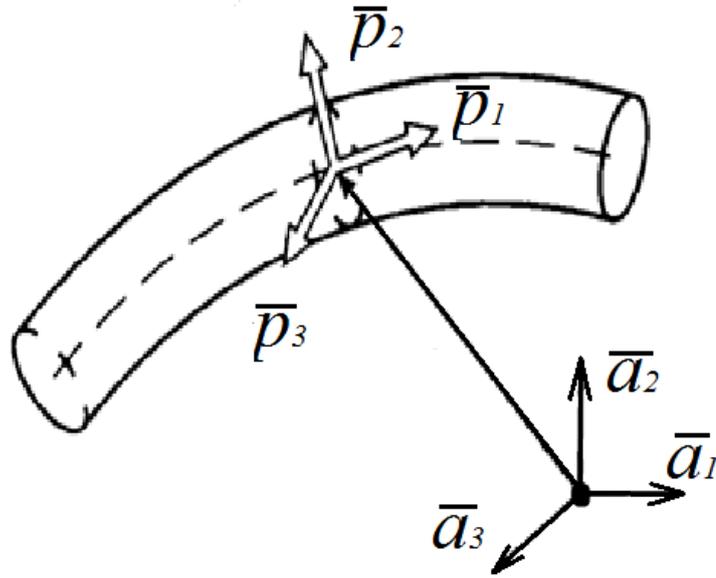


Рис. 5 Схема ориентации осей локального и глобального базисов[7]

Записываем уравнения Кирхгоффа – аналог уравнений равновесия в механике гибких стержней[8,9]:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Q}}{ds} = 0, \\ \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{p}_1 \times \vec{Q} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{Q} = Q_1 \vec{p}_1 + Q_2 \vec{p}_2 + Q_3 \vec{p}_3$ – вектор внутренних усилий;

Q_1 – осевое усилие;

Q_2, Q_3 – перерезывающие усилия;

$\vec{M} = M_1 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 + M_3 \vec{p}_3$ – вектор внутренних моментов;

M_1 – крутящий момент;

M_2, M_3 – изгибающие моменты;

\vec{p}_1 – единичный касательный вектор репера Френе.

$$\vec{p}_1 \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} = Q_2 \vec{p}_3 - Q_3 \vec{p}_2,$$

Запишем соотношения для репера Френе – ортонормированного базиса, присоединенного к кривой стержня[10]:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{ds} = \chi_1 p_2, \\ \frac{dp_2}{ds} = \chi_2 p_3 - \chi_1 p_1, \\ \frac{dp_3}{ds} = -\chi_2 p_2, \end{cases} \quad (2)$$

где p_1 – единичный касательный вектор;

p_2 – единичный вектор главной нормали;

$p_3 = p_1 \times p_2$ – единичный вектор бинормали к кривой в данной точке;

χ_1 – кривизна стержня;

χ_2 – кручение стержня.

Распишем производную вектора внутренних усилий:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{ds} &= \frac{dQ_1}{ds} \vec{p}_1 + Q_1 \frac{d\vec{p}_1}{ds} + \frac{dQ_2}{ds} \vec{p}_2 + Q_2 \frac{d\vec{p}_2}{ds} + \frac{dQ_3}{ds} \vec{p}_3 + Q_3 \frac{d\vec{p}_3}{ds}, \\ \frac{dQ_1}{ds} \vec{p}_1 + Q_1 \chi_1 \vec{p}_2 + \frac{dQ_2}{ds} \vec{p}_2 + Q_2 (\chi_2 \vec{p}_3 - \chi_1 \vec{p}_1) + \frac{dQ_3}{ds} \vec{p}_3 - Q_3 \chi_2 \vec{p}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые относительно базисных векторов \vec{p}_i :

$$\left(\frac{dQ_1}{ds} - \chi_1 Q_2 \right) \vec{p}_1 + \left(\frac{dQ_2}{ds} + \chi_1 Q_1 - \chi_2 Q_3 \right) \vec{p}_2 + \left(\frac{dQ_3}{ds} + \chi_2 Q_2 \right) \vec{p}_3 = 0.$$

Равенство выполняется, если все выражения в скобках равняются нулю, тогда:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = \chi_2 Q_3 - \chi_1 Q_1, \\ \frac{dQ_3}{ds} = -\chi_2 Q_2. \end{cases} \quad (3)$$

Распишем производную вектора внутренних моментов:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{ds} = & \frac{dM_1}{ds} \vec{p}_1 + M_1 \frac{d\vec{p}_1}{ds} + \frac{dM_2}{ds} \vec{p}_2 + M_2 \frac{d\vec{p}_2}{ds} + \\ & + \frac{dM_3}{ds} \vec{p}_3 + M_3 \frac{d\vec{p}_3}{ds} + Q_2 \vec{p}_3 - Q_3 \vec{p}_2, \end{aligned}$$

Переносим всё в левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{ds} \vec{p}_1 + M_1 \chi_1 \vec{p}_2 + \frac{dM_2}{ds} \vec{p}_2 + M_2 (\chi_2 \vec{p}_3 - \chi_1 \vec{p}_1) + \frac{dM_3}{ds} \vec{p}_3 - \\ - M_3 \chi_2 \vec{p}_2 + Q_2 \vec{p}_3 - Q_3 \vec{p}_2 = 0, \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые относительно базисных векторов \vec{p}_i :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dM_1}{ds} - \chi_1 M_2 \right) \vec{p}_1 + \left(\frac{dM_2}{ds} + \chi_1 M_1 - \chi_2 M_3 - Q_3 \right) \vec{p}_2 + \\ + \left(\frac{dM_3}{ds} + \chi_2 M_2 + Q_2 \right) \vec{p}_3 = 0, \end{aligned}$$

Равенство выполняется, если все выражения в скобках равняются нулю, тогда:

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{ds} = \chi_1 M_2, \\ \frac{dM_2}{ds} = \chi_2 M_3 - \chi_1 M_1 + Q_3, \\ \frac{dM_3}{ds} = -\chi_2 M_2 - Q_2. \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что упругие моменты пропорциональны изменениям кривизны и кручения[8]:

$$\begin{cases} M_1 = A_{11}(\chi_2 + \chi^o), \\ M_2 \equiv 0, \\ M_3 = A_{33}\chi_1, \end{cases} \quad (5)$$

где A_{11} , A_{33} – элементы матрицы жесткости A :

$$A = \begin{pmatrix} GJ_\rho & 0 & 0 \\ 0 & EJ & 0 \\ 0 & 0 & EJ \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Подставляем (5) в (4):

$$\begin{cases} A_{11} \frac{d(\chi_2 + \chi^o)}{ds} = 0 \cdot \chi_1, \\ A_{22} \frac{d0}{ds} = A_{33}\chi_2\chi_1 - A_{11}(\chi_2 + \chi^o)\chi_1 + Q_3, \\ A_{33} \frac{d\chi_1}{ds} = -0A_{22}\chi_2 - Q_2. \end{cases} \quad (7)$$

Преобразуем (7):

$$\begin{cases} A_{11} \frac{d\chi_2}{ds} + A_{11} \frac{d\chi^o}{ds} = 0, \\ \left(\frac{A_{33} - A_{11}}{A_{22}} \right) \chi_2\chi_1 - \frac{A_{11}}{A_{22}} \chi^o\chi_1 + \frac{1}{A_{22}} Q_3 = 0, \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -\frac{1}{A_{33}} Q_2. \end{cases}$$

Подставляем элементы матрицы жесткости (6):

$$\begin{cases} \frac{d\chi_2}{ds} + \frac{d\chi^o}{ds} = 0, \\ \left(\frac{EJ - GJ_\rho}{EJ} \right) \chi_2 \chi_1 - \frac{GJ_\rho}{EJ} \chi^o \chi_1 + \frac{1}{EJ} Q_3 = 0, \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -\frac{1}{EJ} Q_2. \end{cases}$$

Перейдем к безразмерным величинам:

$$s = \bar{d}s, \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{d}, \quad \bar{Q} \equiv \frac{EJ}{d^2} Q.$$

Модуль сдвига связан с модулем Юнга через коэффициент Пуассона:

$$GJ_\rho = \frac{EJ}{(\nu + 1)},$$

где G – модуль сдвига,

E – модуль Юнга,

ν – коэффициент Пуассона,

$J = \frac{\pi d^4}{64}$ – момент инерции сечения стержня,

$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции сечения стержня.

Подставим момент инерции и момент сопротивления в формулу связи модуля сдвига с модулем Юнга

$$G = \frac{E}{2(\nu + 1)},$$

тогда, подставив полученное соотношение в систему, получим

$$\begin{cases} \frac{d\chi_2}{ds} + \frac{d\chi^o}{ds} = 0, \\ \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)\chi_2\chi_1 - \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\chi^o\chi_1 + Q_3 = 0, \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим $\frac{d\chi^o}{ds}$:

$$\frac{d\chi^o}{ds} = -\frac{d\chi_2}{ds}.$$

Из второго выражения системы выразим Q_3 :

$$Q_3 = \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\chi^o\chi_1 - \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)\chi_2\chi_1.$$

Возьмем производную и подставим в выражение для $\frac{dQ_3}{ds}$:

$$\frac{dQ_3}{ds} = \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\left(\frac{d\chi^o}{ds}\chi_1 + \frac{d\chi_1}{ds}\chi^o\right) - \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)\left(\frac{d\chi_2}{ds}\chi_1 + \frac{d\chi_1}{ds}\chi_2\right) = -\chi_2Q_2.$$

Подставляем в полученное выражение $\frac{d\chi_1}{ds}$ и $\frac{d\chi^o}{ds}$:

$$\left(\frac{1}{1+\nu}\right)\left(-\chi_1\frac{d\chi_2}{ds} - Q_1\chi^o\right) - \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)\left(\frac{d\chi_2}{ds}\chi_1 - Q_1\chi_2\right) = -\chi_2Q_2.$$

Группируем относительно $\frac{d\chi_2}{ds}$:

$$\frac{d\chi_2}{ds}\left(\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\right)\chi_1 = \left(\frac{1}{1+\nu}\right)(-Q_1\chi^o) - \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)(-Q_1\chi_2) + \chi_2Q_2.$$

Приведем к нормальной форме Коши:

$$\frac{d\chi_2}{ds} = \frac{\chi_2 Q_2 - \left(\frac{1}{1+\nu}\right)(Q_1 \chi^o) + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)(Q_1 \chi_2)}{\chi_1}$$

После упрощения система уравнений статики имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 - \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \chi^o \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \chi_2^2 \right), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \\ \frac{d\chi_2}{ds} = \frac{(1+\nu) \chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu) \chi_1}, \\ \frac{d\chi^o}{ds} = -\frac{(1+\nu) \chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu) \chi_1}. \end{array} \right. \quad (8)$$

где Q_1 – осевое усилие;

Q_2, Q_3 – перерезывающие усилия;

χ_1, χ_2 – кривизны стержня;

χ^o – крутка стержня.

Движение стержня Коссера относительно его недеформированного состояния описывается радиус-вектором и тензором поворота. Чтобы получить и построить в дальнейшем форму стержня, запишем дифференциальное уравнение для радиус-вектора:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{p}_1. \quad (9)$$

В свою очередь \vec{p}_1 связан с ортом базиса в недеформированном состоянии стержня \vec{p}_i^0 векторами соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{p}_i = l_{ij} \vec{p}_j^0, \\ \vec{p}_i^0 = l_{ji} \vec{p}_j, \end{cases} \quad (10)$$

где l_{ij} – компоненты соответствующих ортогональных матриц L и L^{-1} , связывающих данные базисы.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = l_{1j} \vec{p}_j^0,$$

Матрица перехода L представляется в виде:

$$L = L_\theta L_\psi L_\varphi, \quad (11)$$

где матрицы L_φ , L_ψ и L_θ записываются через углы Эйлера.

$$\begin{aligned} L_\varphi &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ L_\psi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \\ L_\theta &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда, подставляя (12) в (11) и, пользуясь средствами Wolfram Mathematica (прил. А), получим матрицу поворота локальной системы координат:

$$L = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & -\cos \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \theta + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \sin \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi & -\cos \theta \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Распишем (9) в покомпонентной форме:

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{ds} = l_{11}, \\ \frac{dr_2}{ds} = l_{12}, \\ \frac{dr_3}{ds} = l_{13}, \end{cases} \quad (14)$$

где l_{11} , l_{12} , l_{13} – элементы матрицы перехода L .

$$\text{Тогда } l_{11} = \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi,$$

$$l_{12} = -\cos \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \theta \sin \varphi,$$

$$l_{31} = \sin \theta \sin \psi.$$

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{ds} = \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{dr_2}{ds} = -\cos \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \theta \sin \varphi, \\ \frac{dr_3}{ds} = \sin \theta \sin \psi, \end{cases} \quad (15)$$

Для окончательной постановки задачи не хватает уравнений, связывающих углы Эйлера с кривизнами. Получим эти соотношения из (16):

$$\vec{p}' = L'L^T \vec{p}, \quad (16)$$

где L' – производная по s от матрицы L

L^T – транспонированная матрица L , равная L^{-1} .

Результатом перемножения этих матриц будет кососимметричная матрица Λ (17).

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & -\theta' - \varphi' \cos \psi & -\varphi' \cos \theta \sin \psi + \psi' \sin \theta \\ \theta' + \varphi' \cos \psi & 0 & -\varphi' \sin \theta \sin \psi - \psi' \cos \theta \\ \varphi' \cos \theta \sin \psi - \psi' \sin \theta & \varphi' \sin \theta \sin \psi + \psi' \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Тогда, подставляя (17) в (16) и расписывая уравнения в покомпонентной форме получим (18):

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{ds} = (-\theta' - \varphi' \cos \psi) p_2 + (-\varphi' \cos \theta \sin \psi + \psi' \sin \theta) p_3, \\ \frac{dp_2}{ds} = (\theta' + \varphi' \cos \psi) p_1 + (-\varphi' \sin \theta \sin \psi - \psi' \cos \theta) p_3, \\ \frac{dp_3}{ds} = (\varphi' \cos \theta \sin \psi - \psi' \sin \theta) p_1 + (\varphi' \sin \theta \sin \psi + \psi' \cos \theta) p_2. \end{cases} \quad (18)$$

Подставим (2) в (20) и сгруппируем относительно p_i . Получаем систему (19)

$$\begin{cases} (-\theta' - \varphi' \cos \psi - \chi_1) p_2 + (-\varphi' \cos \theta \sin \psi + \psi' \sin \theta) p_3 = 0, \\ (\theta' + \varphi' \cos \psi + \chi_1) p_1 + (-\varphi' \sin \theta \sin \psi - \psi' \cos \theta - \chi_2) p_3 = 0, \\ (\varphi' \cos \theta \sin \psi - \psi' \sin \theta) p_1 + (\varphi' \sin \theta \sin \psi + \psi' \cos \theta + \chi_2) p_2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Очевидно, что равенства будут выполняться только в том случае, если выражения в скобках будут равняться нулю. Отсюда получаем три независимых уравнения связи углов Эйлера с кривизнами:

$$\begin{cases} \theta' + \varphi' \cos \psi = -\chi_1, \\ \varphi' \sin \theta \sin \psi + \psi' \cos \theta = -\chi_2, \\ \varphi' \cos \theta \sin \psi - \psi' \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Преобразуем систему так, чтобы в каждом уравнении осталось по одной производной. В результате получаем недостающие три уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{ds} = -\chi_2 \frac{\sin \theta}{\sin \psi}, \\ \frac{d\psi}{ds} = -\chi_2 \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{ds} = \chi_2 \sin \theta \operatorname{ctg} \psi - \chi_1. \end{array} \right. \quad (21)$$

Записываем полную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 - \left(\frac{1}{1+\nu} \right) \chi^o \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \chi_2^2 \right), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \\ \frac{d\chi_2}{ds} = \frac{(1+\nu) \chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu) \chi_1}, \\ \frac{d\chi^o}{ds} = -\frac{(1+\nu) \chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu) \chi_1}, \\ \frac{dr_1}{ds} = \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{dr_2}{ds} = -\cos \varphi \cos \psi \sin \theta - \cos \theta \sin \varphi, \\ \frac{dr_3}{ds} = \sin \theta \sin \psi, \\ \frac{d\varphi}{ds} = -\chi_2 \frac{\sin \theta}{\sin \psi}, \\ \frac{d\psi}{ds} = -\chi_2 \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{ds} = \chi_2 \sin \theta \operatorname{ctg} \psi - \chi_1. \end{array} \right. \quad (22)$$

Глава 2 Исследование статических уравнений нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня

2.1. Общий случай решения статических уравнений системы

Обратимся к системе статических уравнений (8), представленной на странице 16. Заменяем в ней последнее уравнение уравнением связи χ_2 с χ^0 и переписем систему статических уравнений в новом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \quad (23.1) \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 - \left(\frac{1}{1+\nu} \right) \chi^o \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \chi_2^2 \right), \quad (23.2) \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \quad (23.3) \\ \frac{d\chi_2}{ds} = \frac{(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu)\chi_1}, \quad (23.4) \\ \frac{d(\chi^o + \chi_2)}{ds} = 0, \quad (23.5) \end{array} \right. \quad (23)$$

Проинтегрируем уравнение (23.5) и получим связь крутки с кручением

$$\chi^o = -\chi_2 + C_1, \quad (24)$$

где C_1 – некоторая константа интегрирования.

Подставим в уравнение (23.1) Q_2 из уравнения (23.3) и проинтегрируем. В результате получим связь осевой силы Q_1 с кривизной стержня χ_1 :

$$Q_1 = -\frac{1}{2} \chi_1^2 + C_2, \quad (25)$$

где C_2 – некоторая постоянная интегрирования.

Продифференцируем уравнение (23.3) и подставим в (23.2) наряду с уравнениями (24) и (25), получим

$$\frac{d^2 \chi_1}{ds} = -\chi_1 \left(-\frac{1}{2} \chi_1^2 + C_2 - \left(\frac{1}{1+\nu} \right) (-\chi_2 + C_1) \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \chi_2^2 \right),$$

Раскрываем скобки:

$$\frac{d^2 \chi_1}{ds} = \frac{1}{2} \chi_1^3 - C_2 \chi_1 + \frac{C_1}{1+\nu} \chi_1 \chi_2 - \chi_2^2 \chi_1. \quad (26)$$

Рассмотрим уравнение (23.4), подставим в него выражения (24), (25) и (23.3)

$$\frac{d \chi_2}{ds} = \frac{-(1+\nu) \chi_2 \frac{d \chi_1}{ds} - \left(-\frac{1}{2} \chi_1^2 + C_2 \right) (-\chi_2 + C_1) + \nu \left(-\frac{1}{2} \chi_1^2 + C_2 \right)}{(1+\nu) \chi_1},$$

или же

$$\frac{d \chi_2}{ds} = \frac{-(1+\nu) \left(\frac{d \chi_1}{ds} \chi_2 - \frac{1}{2} \chi_1^2 \chi_2 \right) + C_2 (\chi_2 + \nu) + C_1 \left(\frac{1}{2} \chi_1^2 - C_2 \right)}{(1+\nu) \chi_1}. \quad (27)$$

Система (23) свелась к системе двух уравнений (уравнения (26) и (27)) с двумя неизвестными функциями и двумя неизвестными константами. Можно оставить в таком виде и попробовать решить, однако удобнее привести её к нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 - \left(\frac{1}{1+\nu} \right) \chi_1^o \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \chi_2^2 \right), \\ \frac{d \chi_1}{ds} = -Q_2, \\ \frac{d \chi_2}{ds} = \frac{2(1+\nu) \chi_2 Q_2 + (\chi_1^2 - C_2) ((1+\nu) \chi_2 - C_1)}{2(1+\nu) \chi_1}, \end{cases} \quad (28)$$

Система (28) описывает распределение силовых характеристик вдоль оси стержня для общего случая постановки задачи. В дальнейшем

рассмотрим частные случаи решения этой системы дифференциальных уравнений, полагая, что одна из её искомым функций является константой.

2.2. Частные решения системы для случая постоянной крутки стержня

Предположим, что χ^o – константа. Рассмотрим два случая – когда крутка стержня тождественно равна нулю, и когда она константа, неравная нулю.

1) Итак, пусть $\chi^o \equiv 0$. Из условия равенства производных получаем, что $\chi_2 = Const$. Подставляем это значение в систему статических уравнений – одно дифференциальное уравнение превращается в алгебраическое, остается четыре дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \chi_2^2 \right), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \\ \frac{d\chi_2}{ds} = 0, \end{cases}$$

и дополнительное равенство

$$\frac{(1+\nu)\chi_2 Q_2 + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu)\chi_1} = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\chi_2 = 0$ или $Q_2 = \frac{\nu}{1+\nu} Q_1$.

а) Допустим, что $\chi_2 = 0$. Тогда остается система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 Q_1, \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2. \end{cases}$$

б) Предположим, что $Q_2 = \frac{\nu}{1+\nu} Q_1$. Тогда остается система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 \frac{\nu}{1+\nu} Q_1, \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -\frac{\nu}{1+\nu} Q_1, \\ \frac{d\chi_2}{ds} = 0. \end{cases}$$

и дополнительное условие на Q_1 :

$$\frac{dQ_1}{ds} = -\frac{\chi_1(1+\nu)}{\nu} (Q_1 + Const).$$

2) Рассмотрим случай, когда константа $\chi^o \neq 0$. Тогда система статических уравнений преобразуется к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 - \left(\frac{1}{1+\nu} \right) \chi^o \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \chi_2^2 \right), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \\ \frac{d\chi_2}{ds} = \frac{(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu)\chi_1}, \\ -\frac{(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu)\chi_1} = 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим алгебраическое уравнение:

$$\frac{(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2}{(1+\nu)\chi_1} = 0$$

Равенство нулю выполняется в двух случаях, если $(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2 = 0$. Данное выражение содержится как в алгебраическом уравнении, так и в уравнении на производную на χ_2 . Из этого получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\chi_2}{ds} = 0,$$

значит, χ_2 – константа.

Выразим Q_2 из условия равенства нулю выражения $(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2 = 0$.

$$(1+\nu)\chi_2 Q_2 - Q_1 \chi^o + \nu Q_1 \chi_2 = 0.$$

$$(1+\nu)\chi_2 Q_2 = Q_1(\chi^o - \nu\chi_2),$$

$$Q_2 = \frac{(\chi^o - \nu\chi_2)}{(1+\nu)\chi_2} Q_1,$$

где дробь при Q_1 – некоторая константа. Для упрощения выражений обозначим её λ . Тогда получим следующее соотношение:

$$\lambda = \frac{(\chi^o - \nu\chi_2)}{(1 + \nu)\chi_2},$$

$$Q_2 = \lambda Q_1.$$

Так как χ_2 оказалась константой, система статических уравнений уменьшилась:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 \left(Q_1 - \left(\frac{1}{1 + \nu} \right) \chi^o \chi_2 + \left(\frac{\nu}{1 + \nu} \right) \chi_2^2 \right), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \end{cases}$$

где χ^o, χ_2 – некоторые константы. Тогда выражение в скобках при χ_1 в дифференциальном уравнении относительно Q_2 есть сумма Q_1 и некоторой константы, обозначим её μ . Тогда

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 (Q_1 + \mu), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \end{cases}$$

где $\mu = \left(\frac{\nu\chi_2 - \chi^o}{1 + \nu} \right) \chi_2$.

Рассмотрим получившуюся систему уравнений с учетом всех полученных условий:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \chi_1 Q_2, \\ \frac{dQ_2}{ds} = -\chi_1 (Q_1 + \mu), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -Q_2, \end{cases}$$

где $Q_2 = \lambda Q_1$, $\lambda = \frac{(\chi^o - \nu\chi_2)}{(1+\nu)\chi_2}$, $\mu = \left(\frac{\nu\chi_2 - \chi^o}{1+\nu}\right)\chi_2$. Подставим

соотношение для Q_2 :

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \lambda\chi_1 Q_1, \\ \lambda \frac{dQ_1}{ds} = -\chi_1 (Q_1 + \mu), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -\lambda Q_1, \end{cases}$$

Получили два дифференциальных уравнения относительно Q_1 .

а) Рассмотрим случай, когда $\lambda = \mu = 0$. Из этого следует следующее равенство: $\chi^o = \nu\chi_2$. Тогда $Q_2 = 0 \cdot Q_1$, т.е. $Q_2 = 0$.

Из условия $\lambda = 0$ система преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = 0, \\ -\chi_1 Q_1 = 0, \\ \frac{d\chi_1}{ds} = 0, \end{cases}$$

Из этой системы получаем, что $\chi_1 = const$, $Q_1 = const$, при этом $\chi_1 Q_1 = 0$. Возможны два случая: $\chi_1 = 0$, тогда $Q_1 = const$, либо $Q_1 = 0$, тогда $\chi_1 = const$. Однако, условие $\chi_1 = 0$ не допускает наша система уравнений, значит, остается случай $Q_1 = 0$, $\chi_1 = const$.

б) Рассмотрим случай, когда: $\lambda, \mu \neq 0$.

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = \lambda \chi_1 Q_1, \\ \lambda \frac{dQ_1}{ds} = -\chi_1 (Q_1 + \mu), \\ \frac{d\chi_1}{ds} = -\lambda Q_1, \end{cases}$$

Получили два уравнения относительно производной от Q_1 , то есть, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \lambda \chi_1 Q_1 &= -\frac{\chi_1}{\lambda} (Q_1 + \mu), \\ \frac{\chi_1}{\lambda} (\lambda^2 Q_1 + Q_1 + \mu) &= 0. \end{aligned}$$

Получаем два случая:

$$\begin{cases} \chi_1 = 0, \\ Q_1 (\lambda^2 + 1) + \mu = 0. \end{cases}$$

I. Если $\chi_1 = 0$, то получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{ds} = 0, \\ -\lambda Q_1 = 0, \end{cases}$$

тогда $Q_1 = 0$. Отсюда Q_2 тоже равняется нулю. Получаем следующее:

$$\begin{cases} Q_1 = 0, \\ Q_2 = 0, \\ \chi_1 = 0, \\ \chi_2 = C_1 - const \\ \chi^o = C_2 - const \end{cases}$$

II. Если $Q_1(\lambda^2 + 1) + \mu = 0$, то $Q_1 = -\frac{\mu}{(\lambda^2 + 1)} - Const$, но тогда χ_1

линейно зависит от s :

$$\chi_1 = -\frac{\mu}{(\lambda^2 + 1)} s.$$

Из этого следует, что $\frac{dQ_1}{ds} = -\frac{\lambda\mu}{(\lambda^2 + 1)} s Q_1$. Приходим к

противоречию.

2.3. Частный случай эволюции формы стержня в виде однородной цилиндрической спирали

Сформулируем вспомогательную задачу о винтовой линии, вид которой описывается следующим уравнением:

$$\bar{x} = R \left(\cos \frac{ks}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \bar{a}_1 + \sin \frac{ks}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \bar{a}_2 \right) + \frac{s}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \bar{a}_3, \quad (20)$$

где s – длина дуги вдоль спирали, т.е. длина стержня,

k – параметр спирали,

R – радиус спирали.

Запишем геометрические соотношения для спиральной линии:

$$p_1 = \frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{Rk}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \left(-\sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \right) \bar{a}_1 + \cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \right) \bar{a}_2 \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 k^2}},$$

Первая производная от p_1 имеет вид

$$\frac{dp_1}{ds} = -\frac{Rk^2}{1 + R^2 k^2} \left(\cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \right) \bar{a}_1 + \sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2 k^2}} \right) \bar{a}_2 \right),$$

Известна связь p_1 с p_2 :

$$\frac{dp_1}{ds} = \chi_1 p_2,$$

отсюда получаем χ_1 и p_2 :

$$\chi_1 = \frac{Rk^2}{1 + R^2k^2},$$

$$p_2 = - \left(\cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) a_1 + \sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) a_2 \right).$$

Первая производная от p_2 имеет вид

$$\frac{dp_2}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \left(\sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_1 - \cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_2 \right).$$

Известна связь p_2 с p_3 через p_1 :

$$\frac{dp_2}{ds} = \chi_2 p_3 - \chi_1 p_1,$$

тогда χ_2 и p_3 получим из выражения:

$$\begin{aligned} \chi_2 p_3 = & \frac{k}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \left(\sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_1 - \cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_2 \right) - \\ & - \frac{R^2k^3}{\sqrt{(1 + R^2k^2)^3}} \left(\sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_1 - \cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_2 \right) + \frac{Rk^2}{\sqrt{(1 + R^2k^2)^3}} \bar{a}_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_2 p_3 = & \frac{k}{\sqrt{(1 + R^2k^2)^3}} \left(\sin \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_1 - \cos \left(\frac{ks}{\sqrt{1 + R^2k^2}} \right) \bar{a}_2 \right) + \\ & + \frac{Rk^2}{\sqrt{(1 + R^2k^2)^3}} \bar{a}_3, \end{aligned}$$

тогда получим χ_2 и p_3 :

$$\chi_2 = \frac{k}{1 + R^2k^2},$$

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{1+R^2k^2}} \left(\sin\left(\frac{ks}{\sqrt{1+R^2k^2}}\right) \bar{a}_1 - \cos\left(\frac{ks}{\sqrt{1+R^2k^2}}\right) \bar{a}_2 \right) + \frac{Rk}{\sqrt{1+R^2k^2}} \bar{a}_3,$$

Получим статические характеристики системы (25), предварительно задав геометрические параметры спирали: длина дуги $l = 20$, радиус спирали $R = 1$, параметр спирали $k = 1$. Подставим значения $\chi_1 = 0.5$ и $\chi_2 = 0.5$ в (30). Сразу же получаем из одного из уравнений значение перерезывающего усилия $Q_2 = 0$. Далее, используя средства прикладного пакета Wolfram Mathematica, определяем из оставшейся системы двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{\chi_2}{1+\nu} C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \chi_1^2 - \chi_2^2, \\ \left(\frac{1}{2} \chi_1^2 - C_2 \right) \left((1+\nu) \chi_2 - C_1 \right) = 0, \end{cases}$$

константы $C_1 = 0.65$ и $C_2 = 0.125$ для заданных условий. Далее, подставляя полученные постоянные в (24) и (25), находим значения крутки и осевой силы. В рамках заданных условий значения получили следующие величины $Q_1 = 0$, а $\chi^0 = 0.15$, что совпадает со значением $\chi^0 = \nu\chi_2$. Таким образом получаем решение системы, совпадающее с частным случаем 2а предыдущего параграфа.

Проверим, удовлетворяют ли кинематические уравнения системы (22) кинематике спирали. Для этого подставим χ_1 и χ_2 в (21) и, используя средства MATLAB, численно решим полученную систему уравнений совместно с уравнениями (15).

Для решения задачи зададим следующие входные условия: Условия на левом конце стержня:

$$r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \psi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Численное решение получим по методу Рунге-Кутты 4-го порядка, для этого используем процедуру ode45, листинг программы представлен в приложении 2. Построим полученные функции изменения радиус-вектора и углов поворота вдоль оси стержня, графические зависимости представлены на рис. 6-7.

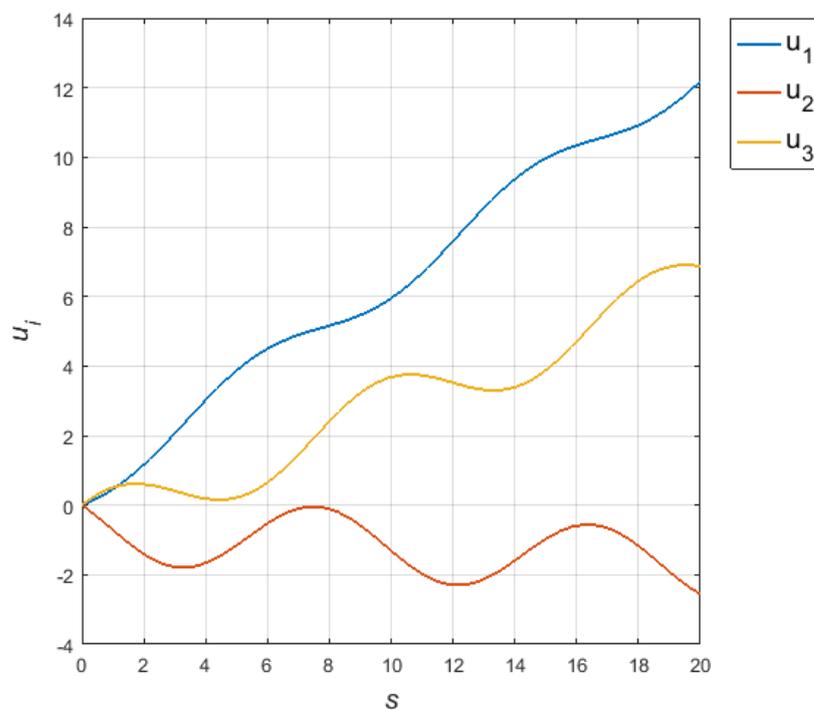


Рис. 6 Изменение радиус-вектора вдоль оси стержня

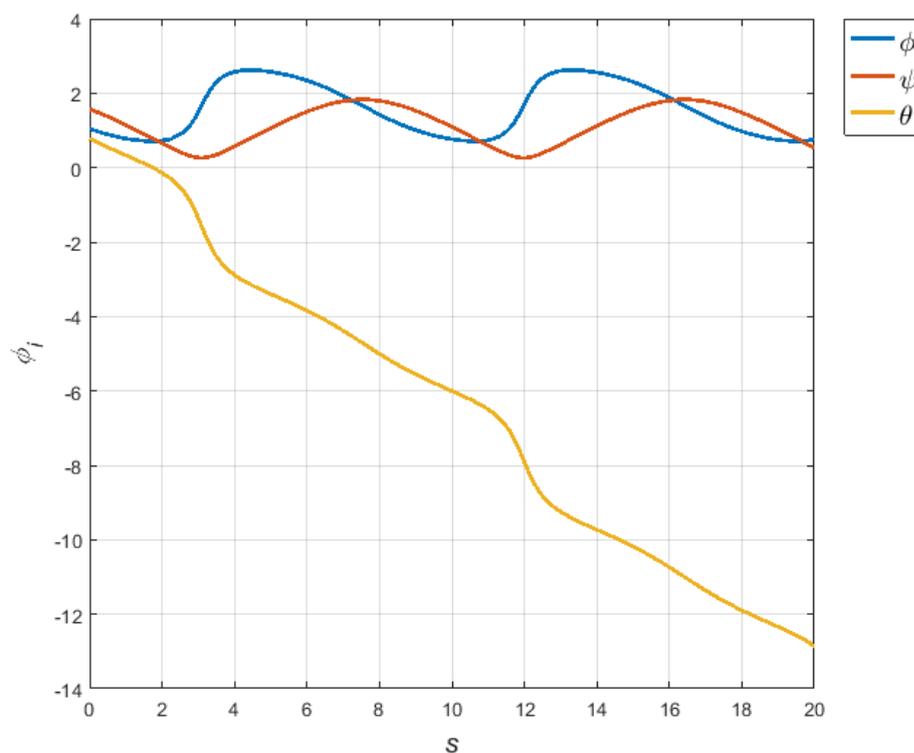


Рис. 7 Изменения углов поворота вдоль оси стержня.

Форма осевой линии стержня представлена на рис. 8

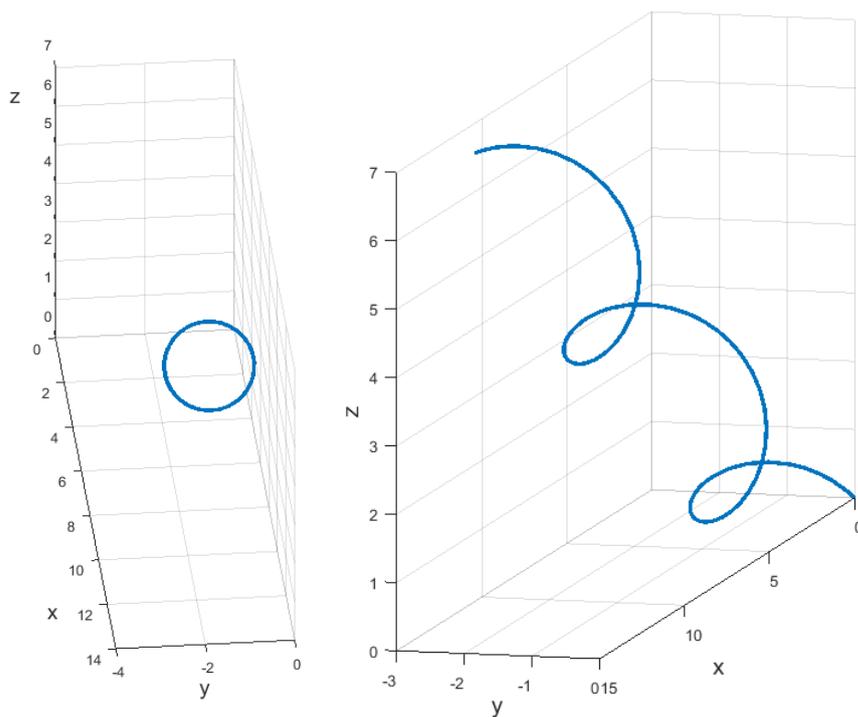


Рис. 8 Эволюция формы стержня при заданных условиях

Таким образом, получено решение поставленной задачи и убедились, что выведенные кинематические уравнения (15) и (21) совместны с кинематикой спирали.

Глава 3 Численное решение системы уравнений в среде MATLAB

3.1. Использование численных методов для решения нелинейных систем дифференциальных уравнений

В предыдущей главе были рассмотрены несколько частных случаев решения нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня. Непосредственное решение аналитическими методами затруднено ввиду сложности системы (24), необходимо использовать численные методы решения систем дифференциальных уравнений. Вычисления будут вестись в пакете прикладных программ MATLAB, который представляет собой высокоуровневый язык и интерактивную среду для программирования, численных расчетов и визуализации результатов.

Далее будем использовать два численных метода: метод пристрелки, позволяющий свести краевую задачу к задаче Коши, и метод Рунге-Кутты 4-го порядка, использующийся для решения начальных задач. В большинстве своем задачи, связанные со стержнями, – краевые. Чтобы решить такую задачу, необходимо свести её к начальной, то есть получить из граничных условий, заданных для части функций, входящих в систему уравнений, начальные условия на все искомые функции. В нашем случае – перейти от условий на правой границе, заданных для кинематической составляющей системы уравнений равновесия, к начальным условиям на уравнения статики. Для этого напишем программу в среде MATLAB, способную сводить краевую задачу к задаче Коши и решающую её.

3.2. Численное решение нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня в случае постановки начальной задачи

Проверим корректность работы программы на начальной задаче, решение которой мы точно знаем. Такой задачей является частный случай эволюции формы стержня в виде однородной цилиндрической спирали. Воспользуемся статическими начальными относительно осевой линии стержня условиями, полученными в параграфе 2.3 предыдущей главы и выбранными там же кинематическими и геометрическими.

Сформулируем задачу следующим образом: имеется нелинейная система дифференциальных уравнений (22), физический параметр – коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, геометрический параметр – длина осевой линии $l = 20$, и одиннадцать начальных условий, представленных ниже:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \chi_1 = 0.5, \chi_2 = 0.5, \chi^0 = 0.15,$$

$$r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = 0, \varphi(0) = \frac{\pi}{3}, \psi(0) = \frac{\pi}{2}, \theta(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка, записанный в процедуру ode45, решим поставленную начальную задачу. Отобразим полученное решение на рис. 9, построив на одном графике распределение силовых факторов вдоль осевой линии стержня, а на рис. 10 – изменение кинематических характеристик стержня.

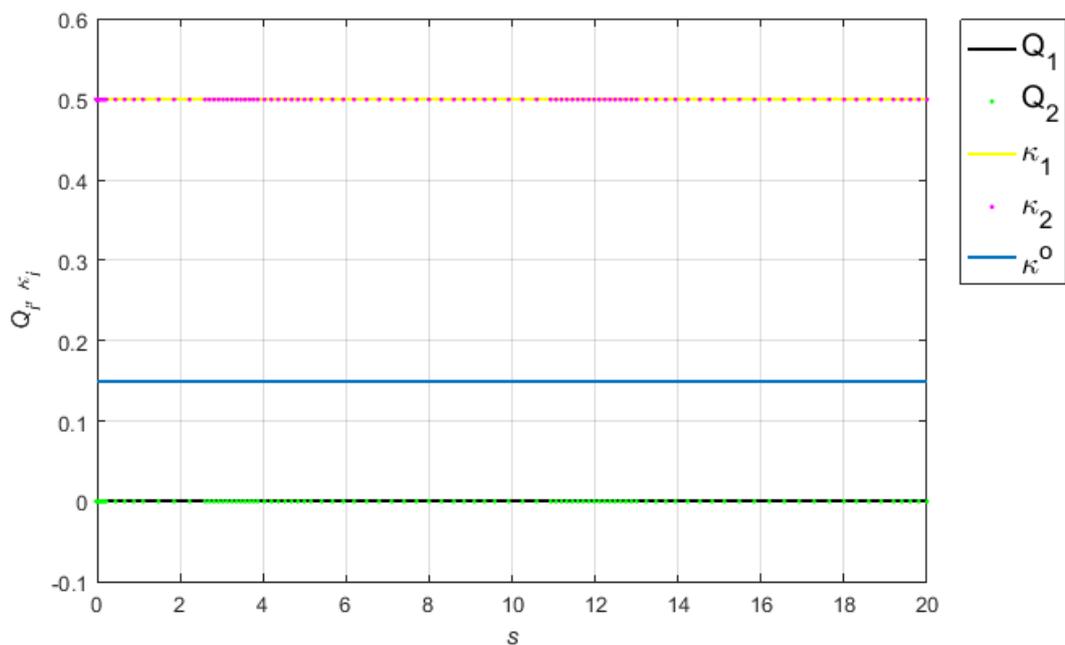


Рис. 9 Распределение силовых характеристик по длине стержня

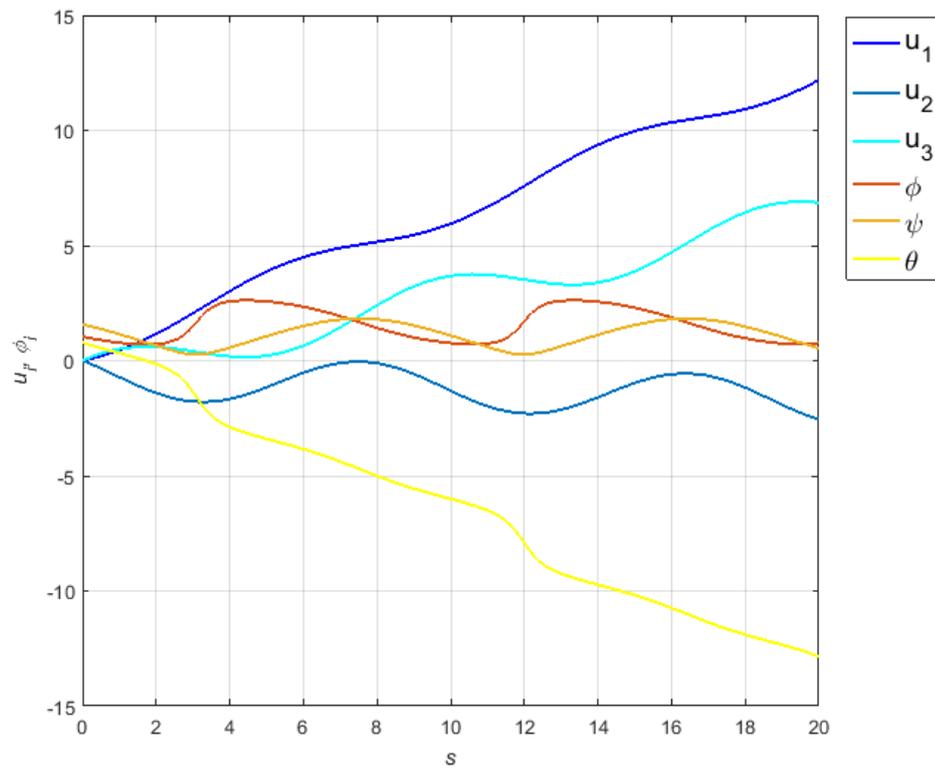


Рис. 10 Изменение координат радиус вектора и углов поворота вдоль оси стержня

Форма стержня представлена на рис. 11

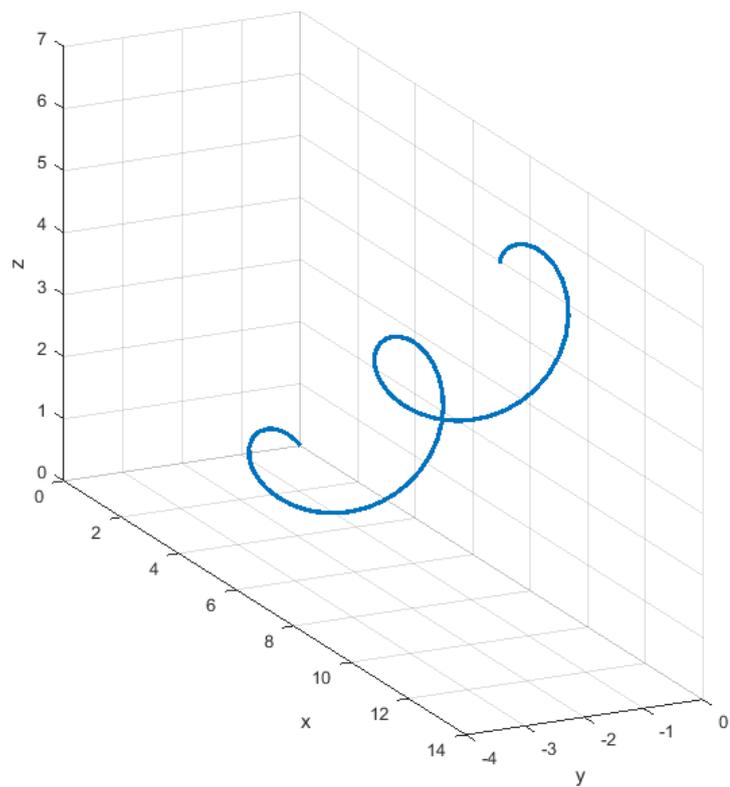


Рис. 11 Форма осевой линии стержня при заданных условиях

Решение совпадает с решением из предыдущей главы, полученная форма равновесия стержня – однородная цилиндрическая спираль. Программа для решения начальных задач работает корректно.

Решим новую задачу, полагая, что χ_1 и χ_2 не являются константами. Начальные условия возьмем из предыдущей задачи, заменив только значения χ_1 и Q_1 на левом конце стержня; $Q_1 = -0.375$, $\chi_1 = 1$. Решаем поставленную задачу, результаты вычислений представлены на рис. 12-13.

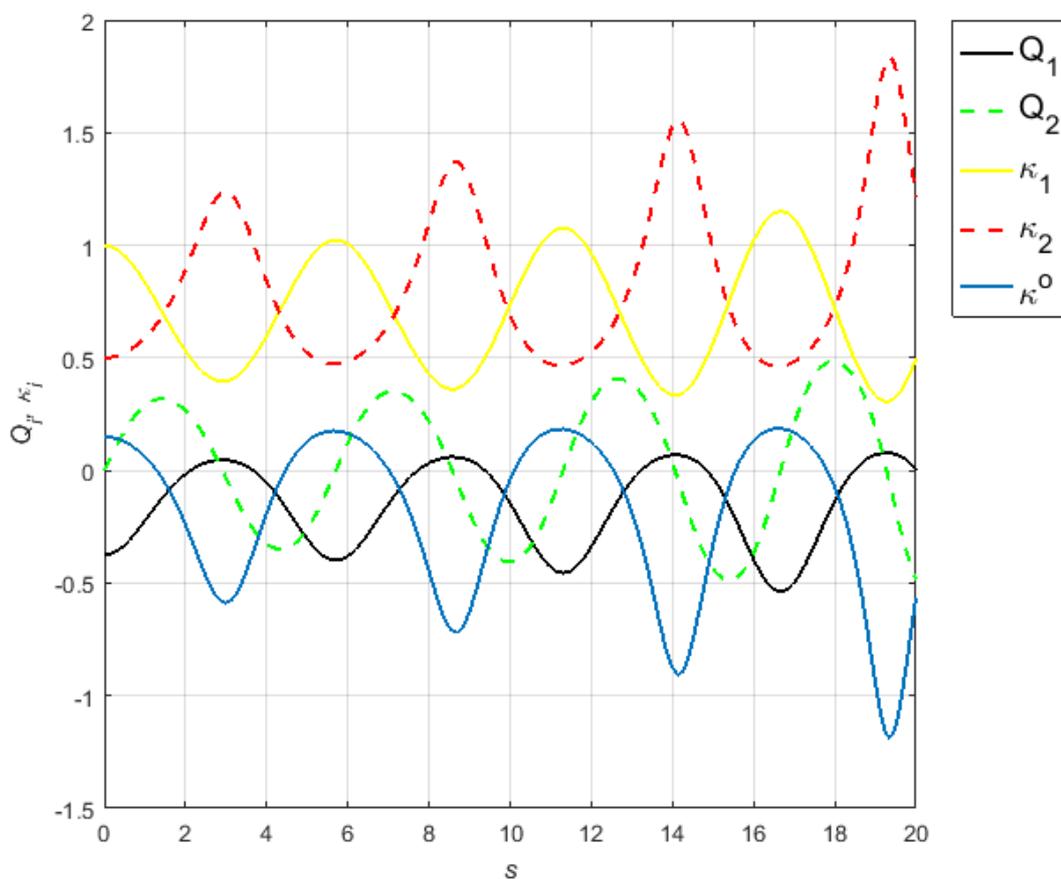


Рис. 12 Распределение силовых характеристик по длине стержня при начальных условиях $Q_1 = -0.375$, $\chi_1 = 1$.

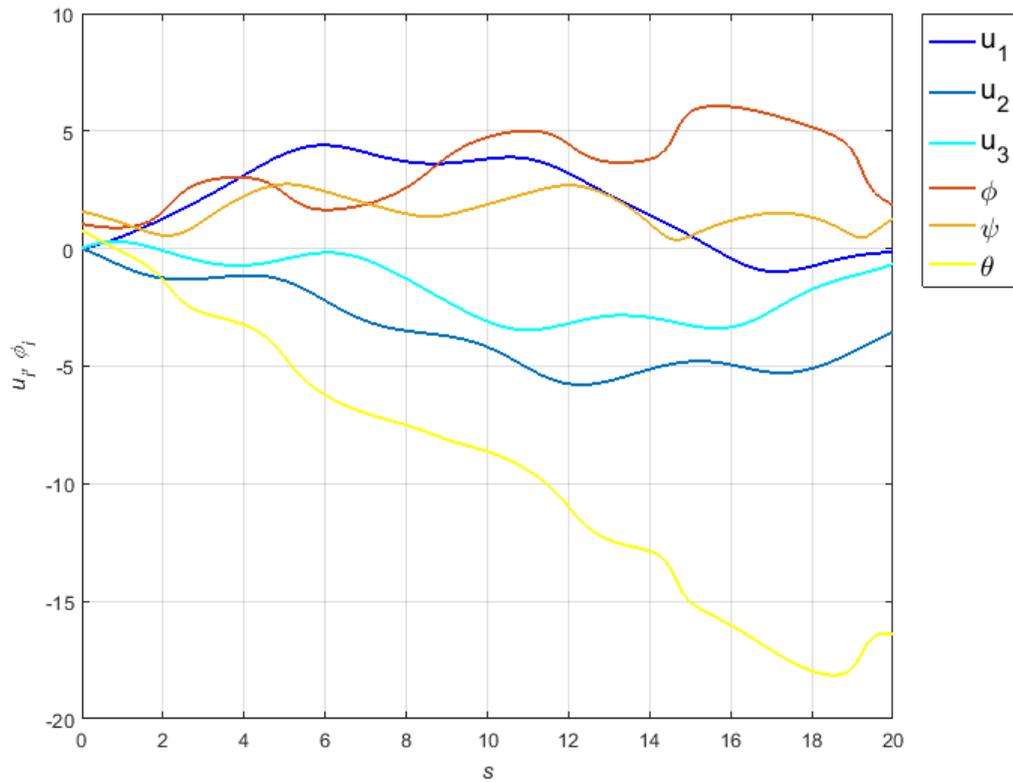


Рис. 13 Изменение кинематических характеристик по длине стержня при начальных условиях $Q_1 = -0.375$, $\chi_1 = 1$.

Кривая осевой линии стержня представлена на рис.14.

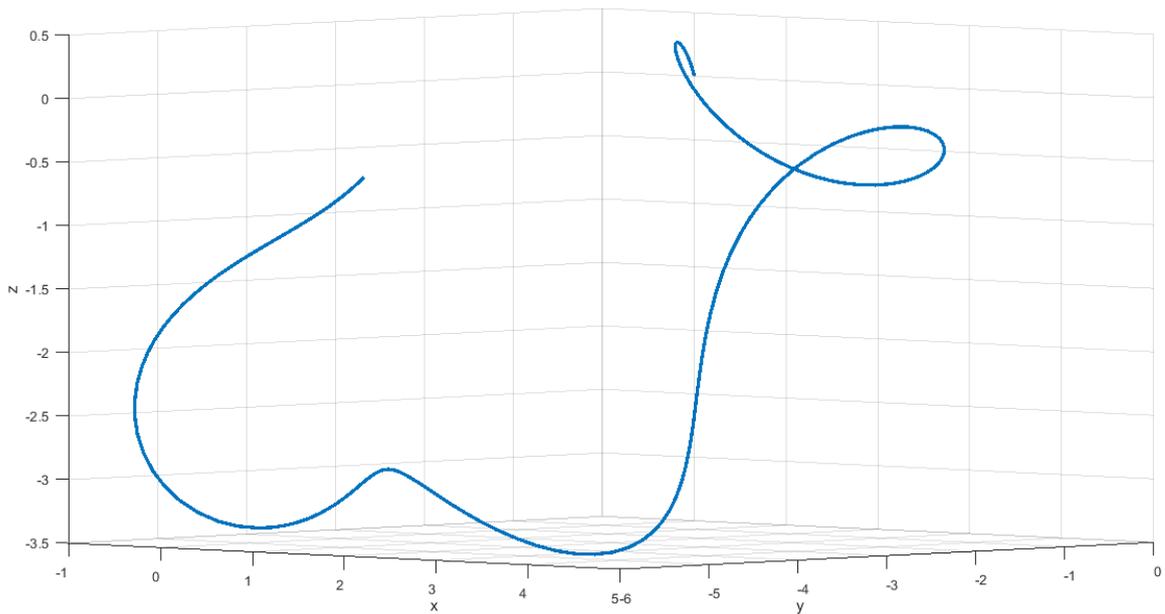


Рис. 14 Форма равновесия стержня при начальных условиях $Q_1 = -0.375$, $\chi_1 = 1$.

Анализируя графики, представленные на рис.12, видим, что полученные силовые характеристики есть функции, изменяющиеся вдоль

осевой стержня, получена форма равновесия стержня для поставленных начальных условий. Программа для решения начальных задач работает корректно, переходим к краевым задачам.

3.3. Численное решение нелинейной системы уравнений равновесия гибкого упругого стержня в случае постановки краевой задачи

Для того, чтобы перейти от краевой задачи к начальной, будем использовать метод пристрелки. Будем считать, что нам известны перемещения на правом конце стержня, а на левом – осевая и перерезывающая силы, кривизна стержня, перемещения и углы поворота локального базиса. Тогда в качестве неизвестных выступают значения кручения и крутки на левом конце стержня.

Для решения поставленной задачи была написана программа в среде MATLAB, реализующая с помощью метода пристрелки переход от краевой задачи к задаче Коши

Проверим корректность работы программы на краевой задаче, решение которой мы точно знаем. Такой задачей является частный случай эволюции формы стержня в виде однородной цилиндрической спирали. Частично используем статическими начальными относительно осевой линии стержня условиями, полученными в параграфе 2.3 предыдущей главы. Два начальных условия оставим неизвестными: на χ_2 и на χ^0 – их подберем с помощью метода пристрелки. Кинематические краевые условия выберем таким образом, чтобы спираль была сориентирована вдоль одной из неподвижных осей.

Сформулируем задачу следующим образом: имеется нелинейная система дифференциальных уравнений (22), физический параметр – коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, геометрический параметр – длина осевой линии $l = 17$, и одиннадцать смешанных условий, представленных ниже:

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \chi_1 = 0.5, r_2(0) = 0,$$

$$r_1(0) = r_1(17) = 0, \quad r_3(0) = r_3(17) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{4}, \quad \psi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(0) = 0.$$

Методом пристрелки подбираем значения χ_2 и χ^0 на левом конце стержня. На рис. 15 представлена функция невязки

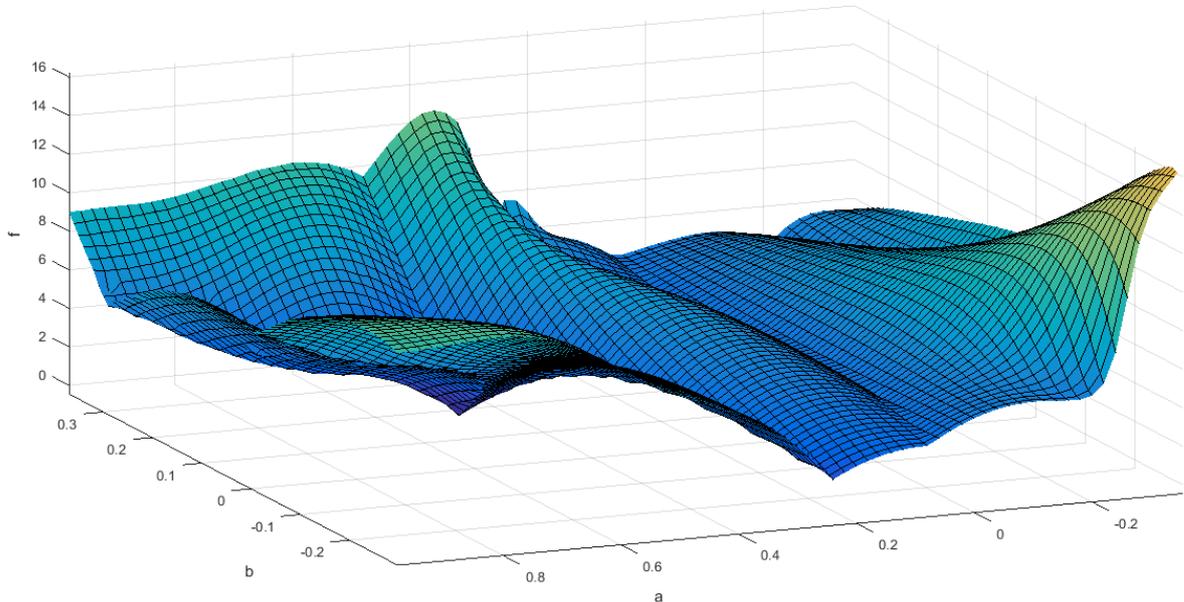


Рис. 15 Сходимость краевой задачи к задаче Коши при подборе начальных условий a и b

Задача сводится к начальной при следующих значениях a и b :

$$a = 0.5 \Rightarrow \chi_2(0) = 0.5$$

$$b = 0.15 \Rightarrow \chi^0(0) = 0.15$$

Решаем полученную начальную задачу. Распределение силовых и кинематических параметров представлено на рис. 16-17.

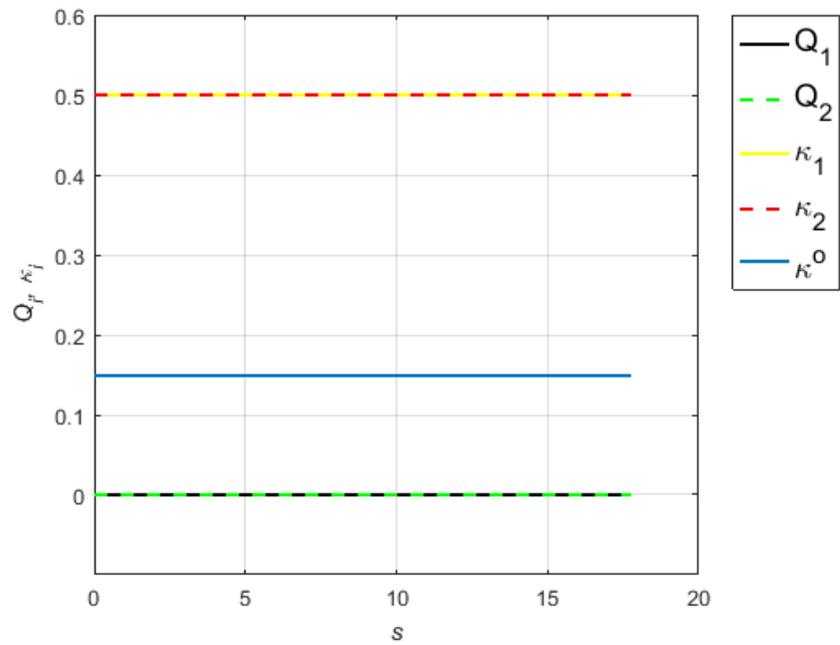


Рис. 16 Распределение силовых характеристик по длине стержня при начальных условиях $\chi_2 = 0.5$, $\chi^0 = 0.15$.

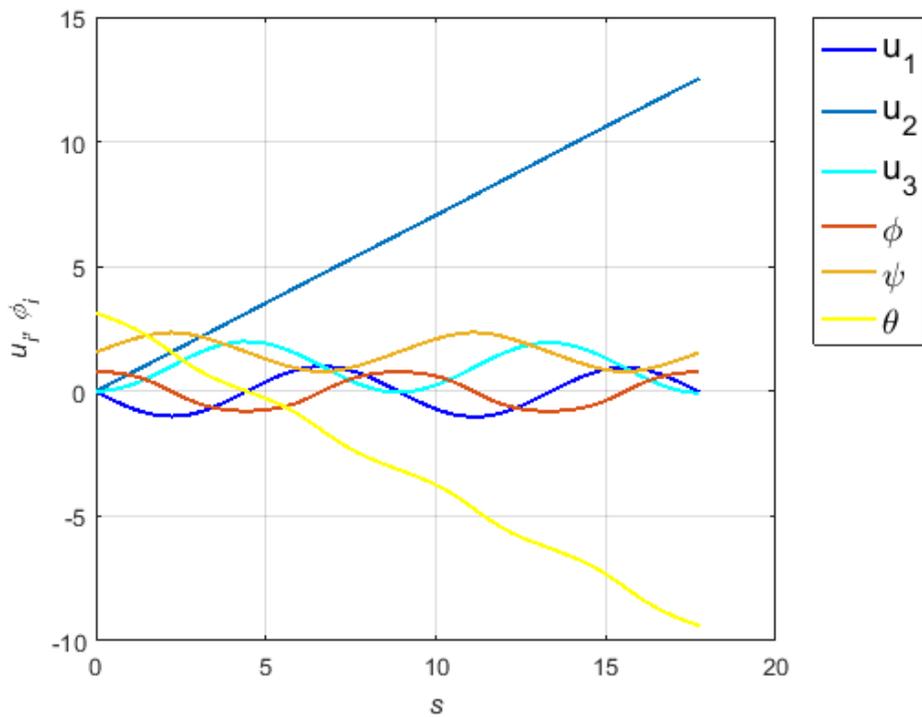


Рис. 17 Изменение кинематических характеристик по длине стержня при начальных условиях $\chi_2 = 0.5$, $\chi^0 = 0.15$.

Получили решение в конфигурации однородной цилиндрической спирали, геометрия осевой Коссера представлена на рис.18:

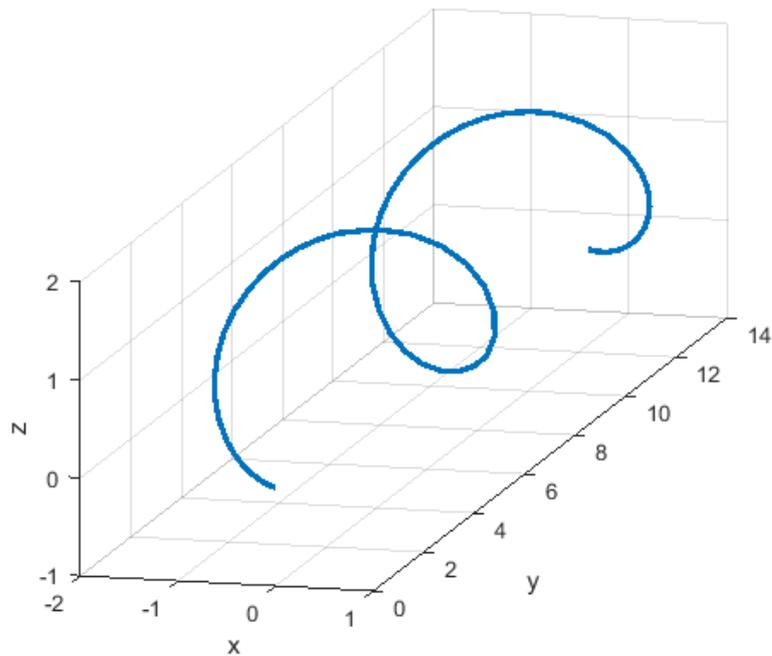


Рис. 18 Форма равновесия стержня тестовой краевой задачи

Таким образом на тестовой задаче убедились, что алгоритм для перехода от краевой задачи к начальной работает корректно.

Решим задачу для новых смешанных условий: пусть $\chi_1 = 0.4$, остальные условия возьмем из предыдущей задачи, в роли подбираемых неизвестных условий оставим χ_2 и χ^0 . По методу пристрелки перейдем к начальной задаче, функция невязки представлена на рис. 19.

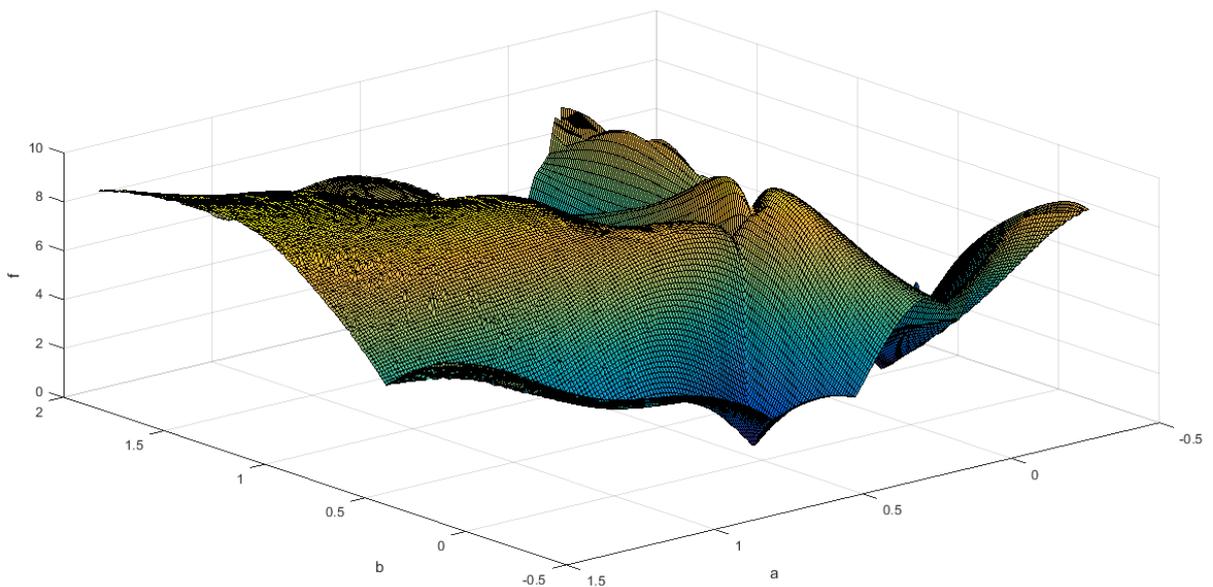


Рис. 19 Сходимость краевой задачи к задаче Коши при подборе начальных условий a и b

Задача сводится к начальной при следующих значениях a и b :

$$a = -0.27 \Rightarrow \chi_2(0) = -0.27,$$

$$b = 0.54 \Rightarrow \chi^0(0) = 0.54.$$

Решаем полученную начальную задачу. Распределение силовых и кинематических параметров представлено на рис. 20-21.

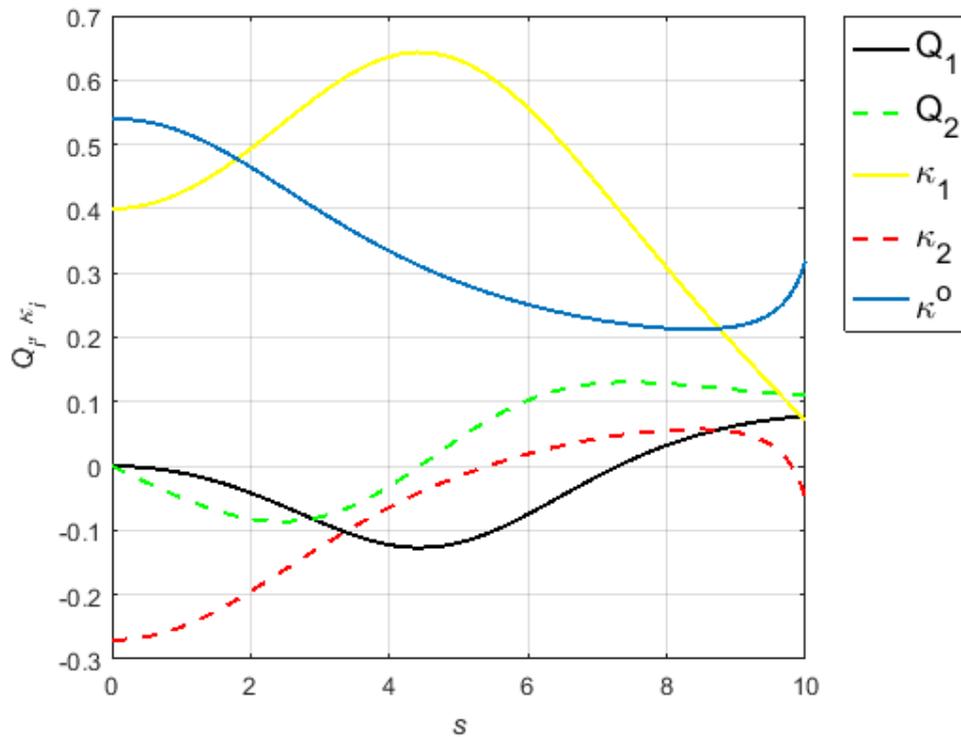


Рис. 20 Распределение силовых характеристик по длине стержня при начальных условиях $\chi_2 = -0.27$, $\chi^0 = 0.54$.

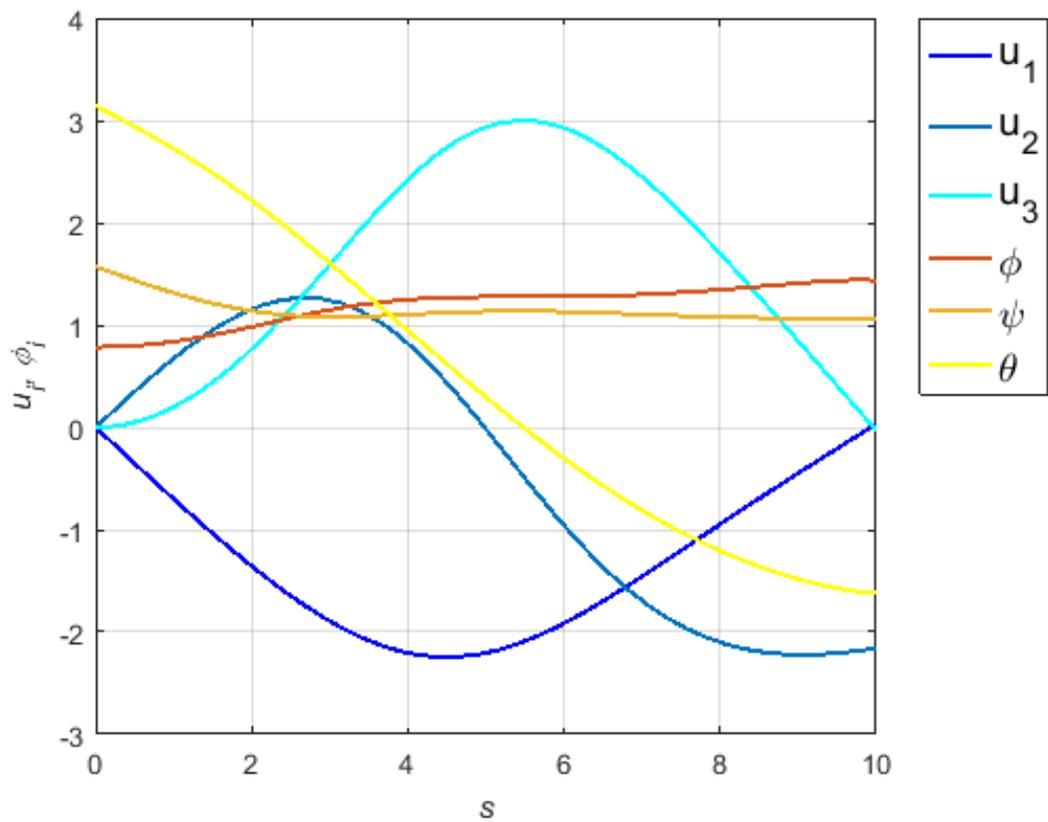


Рис. 21 Изменение кинематических характеристик по длине стержня при начальных условиях $\chi_2 = -0.27$, $\chi^0 = 0.54$.

Построим конфигурацию стержня поставленной задачи, вид кривой представлен на рис.22.

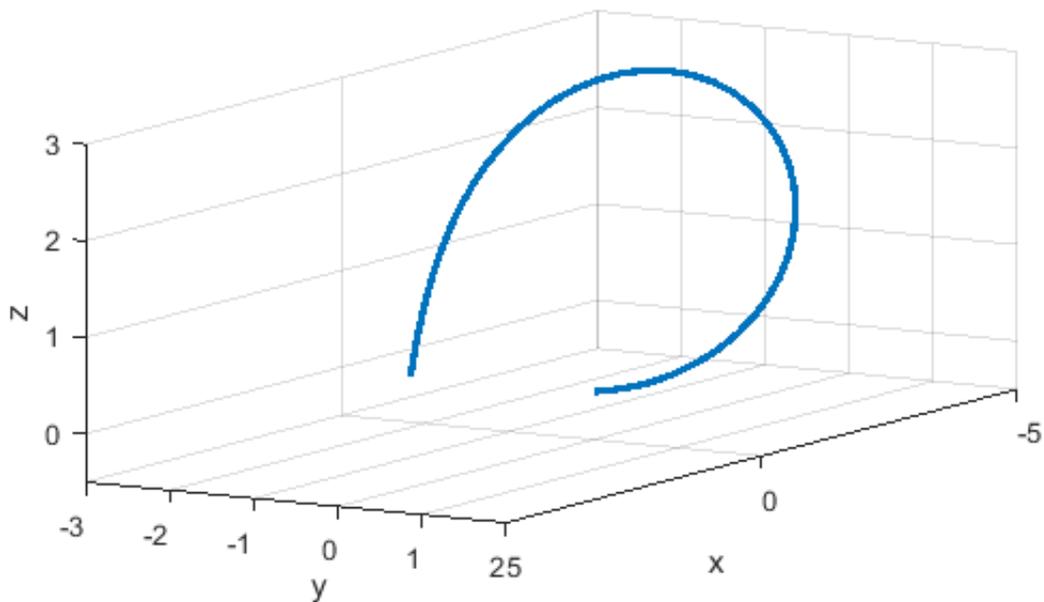


Рис. 22 Форма равновесия стержня поставленной краевой задачи

Таким образом, получено решение краевой задачи путем сведения её к начальной методом пристрелки. В дальнейшем, написанный алгоритм можно использовать для решения начальных и краевых задач, а также для задач со смешанным типом граничных условий.

Заключение

В работе исследуется эволюция формы гибкого упругого стержня при его квазистатическом кручении. Выводится нелинейная система уравнений равновесия гибкого упругого стержня для общего случая статической неопределимости, которая необходима для объяснения нелинейных эффектов, обнаруженных экспериментально и описанных в статье [6]. Аналитические преобразования проводятся с использованием прикладного пакета программ Wolfram Mathematica. Рассматриваются возможные специализации этой системы, соответствующие определенным гипотезам о виде распределения крутящего момента по длине стержня. Реализуется численное решение краевой задачи о кручении стержня, жестко закрепленного с обоих концов, в программе MATLAB.

Выводы по работе:

1. Выведена нелинейная система уравнений равновесия гибкого стержня при его кручении.
2. Получено точное частное решение системы, соответствующее конфигурации стержня в виде однородной цилиндрической спирали.
3. В пакете MATLAB написана программа численного решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка. При этом решение краевой задачи сводилось к решению задачи Коши методом пристрелки. Корректная работа программы подтверждена воспроизведением решения в виде однородной цилиндрической спирали.
4. Получены и исследованы решения ряда начальных и краевых задач. Численная процедура проведена с путем подбора недостающих начальных условий.
5. В результате создан инструмент для исследования нелинейных эффектов при кручении гибкого стержня.

Список литературы

1. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. — М.:Машиностроение, 1978. — 222 с.
2. Kehrbaum S., Maddocks J. H., Elastic Rods, Rigid Bodies, Quaternions and the Last Quadrature. // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* – 1997 –Vol. 355 – No. 1732 – P. 2117–2136.
3. Van der Heijden G.H.M., Thompson J.M.T. Helical and Localised Buckling in Twisted Rods: A Unified Analysis of the Symmetric Case. // *Nonlinear Dynamics*. – 2000. – Vol.21. – P. 71–99.
4. Choualeb N., Maddocks J.H. Kirchhoff's Problem of Helical Equilibria of Uniform Rods. // *Journal of Elasticity*. – 2004. – Vol.77. – P. 221–247.
5. Goss V.G.A., van der Heijden G.H.M., Thompson J.M.T., Neukirch S. Experiments on Snap Buckling, Hysteresis and Loop Formation in Twisted Rods. // *Experimental Mechanics*. – 2005. – Vol.45, – No.2. – P.101-111.
6. Bachurikhin V.P., Keller I.E., Merzlyakov A.F., Yurlov M.A. Experimental study of nonlinear effects under torsion of the uniform cylinder with initially circular cross section. // *Solid State Phenomena*. – 2016 – Vol.243. – P.29-34.
7. Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. - 341 с.
8. Светлицкий В. А. Статистическая механика и теория надежности: учебник для вузов / В. А. Светлицкий. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 504 с.
9. Светлицкий В. А. Строительная механика машин. Механика стержней: учебник для вузов : в 2 т. / В. А. Светлицкий. - Москва: Физматлит, 2009.
10. Келлер И.Э. Тензорное исчисление: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань». 2012. – 176 с.

Приложение А

F= {{ Cos[θ[s]], -Sin[θ[s]],0},{ Sin[θ[s]], Cos[θ[s]],0}, {0, 0, 1}}

A ={{ Cos[φ[s]], -Sin[φ[s]], 0},{ Sin[φ[s]], Cos[φ[s]], 0},{0, 0, 1}}

B = {{1, 0, 0},{0, Cos[ψ[s]], -Sin[ψ[s]]},{0, Sin[ψ[s]], Cos[ψ[s]]}}

A//MatrixForm

B//MatrixForm

F//MatrixForm

L =F.B.A

L//MatrixForm

Lt = Transpose [L]

Lt//MatrixForm

Ld = D[L,s]//FullSimplify

Ld//MatrixForm

LL = Ld.Lt//FullSimplify

LL//MatrixForm

p= {{p1},{p2},{p3}}

p//MatrixForm

P=LL.p

P//MatrixForm

G = {{K1*p2},{K2*p3-K1*p1},{-K2*p2}}

PP=P-G//FullSimplify

PP//MatrixForm

SYSR = {{-Cos[θ[s]] *Sin[ψ[s]],Sin[θ[s]] ,0 ,0},{ Cos[ψ[s]],0,1,K1},

{ Cos[ψ[s]],0,1,K1},{-Sin[θ[s]] *Sin[ψ[s]],-Cos[θ[s]],0,-K2},

{Cos[θ[s]]*Sin[ψ[s]],-Sin[θ[s]],0,0},{ Sin[θ[s]]* Sin[ψ[s]],Cos[θ[s]],0,K2}}

SYSR //MatrixForm

MatrixRank[SYSR]

SYS = {{-Cos[θ[s]] *Sin[ψ[s]],Sin[θ[s]] ,0 },{ Cos[ψ[s]],0,1},{ Cos[ψ[s]],0,1},{-
Sin[θ[s]] *Sin[ψ[s]],-Cos[θ[s]],0},{ Cos[θ[s]]*Sin[ψ[s]],-Sin[θ[s]],0},{ Sin[θ[s]]*
Sin[ψ[s]],Cos[θ[s]],0}}

SYS //MatrixForm

MatrixRank[SYS]

Приложение Б

```
function dy = su4(t,y)
R = 1;
k = 1;

k1 = R*k^2/(1+R^2*k^2);
k2 = k/(1+R^2*k^2);

dy=zeros(6,1);
dy(1) = cos(y(6)).*cos(y(4)) - cos(y(5)).*sin(y(6)).*sin(y(4));
dy(2) = -cos(y(4)).*cos(y(5)).*sin(y(6)) - cos(y(6)).*sin(y(4));
dy(3) = sin(y(6)).*sin(y(5));
dy(4) = -k2.*sin(y(6))./sin(y(5));
dy(5) = -k2.*cos(y(6));
dy(6) = k2.*sin(y(6)).*cot(y(5)) - k1;
end

clc
clear all
close all

C=0;
I=0;
[T,Y] = ode45(@su4, [0 20], [0 0 0 pi/3 pi/2 pi/4]);
[C,I] = max(T);

figure
plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2),T,Y(:,3),'LineWidth', 1.5)
legend({'u_{1}', 'u_{2}', 'u_{3}'}, 'FontSize',14, 'Location','bestoutside')
xlabel('\its', 'FontSize',14)
ylabel('\itu_i', 'FontSize',14)
grid on

figure
plot(T,Y(:,4),T,Y(:,5),T,Y(:,6),'LineWidth', 2)
legend({'\phi', '\psi', '\theta'}, 'FontSize',14, 'Location','bestoutside')
xlabel('\its', 'FontSize',14)
ylabel('\it\phi_i', 'FontSize',14)
grid on

figure
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3), 'LineWidth', 2.5)
xlabel('x', 'FontSize',14)
ylabel('y', 'FontSize',14)
zlabel('z', 'FontSize',14)
grid on
daspect([1,1,1])
% view([0,1,0])
```

Приложение В

```
function dy = su3(t,y)
nu = 0.3;
C1 = nu/(1+nu);
C2 = 1/(1+nu);
C3 = 1+nu;
dy=zeros(11,1);
dy(1) = y(3).*y(2);
dy(2) = -y(3).*(y(1) - C2.*y(5).*y(4) + C1.*y(4).*y(4));
dy(3) = -y(2);
dy(4) = (C3.*y(4).*y(2) - y(1).*y(5) + nu.*y(1).*y(4))./(C3.*y(3));
dy(5) = -(C3.*y(4).*y(2) - y(1).*y(5) + nu.*y(1).*y(4))./(C3.*y(3));
dy(6) = cos(y(11)).*cos(y(9)) - cos(y(10)).*sin(y(11)).*sin(y(9));
dy(7) = -cos(y(9)).*cos(y(10)).*sin(y(11)) - cos(y(11)).*sin(y(9));
dy(8) = sin(y(11)).*sin(y(10));
dy(9) = -y(4).*sin(y(11))./sin(y(10));
dy(10) = -y(4).*cos(y(11));
dy(11) = y(4).*sin(y(11)).*cot(y(10)) - y(3);

clc
clear all
close all
R = 1;
k = 1;
nu = 0.3;
k1 = R*k^2/(1+R^2*k^2);
k2 = k/(1+R^2*k^2);
k0 = -k2 + 0.65;
q1 = -1/2*k1^2 + 0.125;
q2 = 0;
C=0;
I=0;
[T,Y] = ode45(@su3, [0 17.7572], [q1 q2 k1 k2 k0 0 0 0 pi/4 pi/2 0]);
[C,I] = max(T);
disp([Y(end,7),Y(end,8)])
figure
plot(T,Y(:,1),'k', T,Y(:,2),'g--', T,Y(:,3),'y', T,Y(:,4),'r--',T,Y(:,5),
'LineWidth',1.5)
legend({'Q_{1}', 'Q_{2}', '\kappa_{1}', '\kappa_{2}', '\kappa^{o}'},...
'FontSize',14,'Location','bestoutside')
xlabel('\its')
ylabel('\itQ_i, \it\kappa_i')
grid on
figure
plot(T,Y(:,6),'b', T,Y(:,7), T,Y(:,8),'c', T,Y(:,9),
T,Y(:,10),T,Y(:,11),'y','LineWidth', 1.5)
legend({'u_{1}', 'u_{2}', 'u_{3}','\phi', '\psi',
'\theta'},'FontSize',14,'Location','bestoutside')
xlabel('\its')
ylabel('\itu_i, \it\phi_i')
grid on
figure
plot3(Y(:,6),Y(:,7),Y(:,8),'LineWidth', 2.5)
daspect([1,1,1])
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid on
```

Приложение Г

```
function dy = su3(t,y)
nu = 0.3;
C1 = nu/(1+nu);
C2 = 1/(1+nu);
C3 = 1+nu;
dy=zeros(11,1);
dy(1) = y(3).*y(2);
dy(2) = -y(3).*(y(1) - C2.*y(5).*y(4) + C1.*y(4).*y(4));
dy(3) = -y(2);
dy(4) = (C3.*y(4).*y(2) - y(1).*y(5) + nu.*y(1).*y(4))./(C3.*y(3));
dy(5) = -(C3.*y(4).*y(2) - y(1).*y(5) + nu.*y(1).*y(4))./(C3.*y(3));
dy(6) = cos(y(11)).*cos(y(9)) - cos(y(10)).*sin(y(11)).*sin(y(9));
dy(7) = -cos(y(9)).*cos(y(10)).*sin(y(11)) - cos(y(11)).*sin(y(9));
dy(8) = sin(y(11)).*sin(y(10));
dy(9) = -y(4).*sin(y(11))./sin(y(10));
dy(10) = -y(4).*cos(y(11));
dy(11) = y(4).*sin(y(11)).*cot(y(10)) - y(3);
end

clc
clear all
close all

R = 1;
k = 1;
nu = 0.3;
% k1 = R*k^2/(1+R^2*k^2);
k1 = 0.4;
k2 = k/(1+R^2*k^2);
k0 = -k2 + 0.65;
% q1 = -1/2*k1^2 + 0.125;
q1 = 0;
q2 = 0;

a = -0.5;
z = 1;
Z = zeros(1,5);

for i = 1:100
    b = -0.15;
    for j = 1:100
        C=0;
        I=0;
        [T,Y] = ode45(@su3, [0 10], [q1 q2 k1 a b 0 0 0 pi/4 pi/2 0]);
        [C,I] = max(T);
        f=abs(Y(I,7))+abs(Y(I,8));
        A(i)=a;
        B(j)=b;
        F(i,j)=f;
        if f < z
            z = f;
            Z = [a,b];
            disp(z)
            disp(Z)
        end
        b = b + 0.01;
    end
end
```

```

    a = a + 0.01;
end

figure
surf(B,A,F)
xlabel('b')
ylabel('a')
zlabel('f')

C = 0;
I = 0;
[T,Y] = ode45(@su3, [0 10], [q1 q2 k1 Z(1,1) Z(1,2) 0 0 0 pi/4 pi/2 pi]);
[C,I] = max(T);

figure
plot(T,Y(:,1),'k', T,Y(:,2),'g--', T,Y(:,3),'y', T,Y(:,4),'r--',T,Y(:,5),
'LineWidth',1.5)
legend({'Q_{1}', 'Q_{2}', '\kappa_{1}', '\kappa_{2}', '\kappa^{o}'},...
'FontSize',14,'Location','bestoutside')
xlabel('\its')
ylabel('\itQ_i, \it\kappa_i')
grid on

figure
plot(T,Y(:,6),'b', T,Y(:,7), T,Y(:,8),'c', T,Y(:,9),
T,Y(:,10),T,Y(:,11),'y','LineWidth', 1.5)
legend({'u_{1}', 'u_{2}', 'u_{3}','\phi', '\psi',
'\theta'},'FontSize',14,'Location','bestoutside')
xlabel('\its')
ylabel('\itu_i, \it\phi_i')
grid on

figure
plot3(Y(:,6),Y(:,7),Y(:,8),'LineWidth', 2.5)
daspect([1,1,1])
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid on

```