



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Факультет	Прикладной математики и механики
Выпускающая кафедра:	Динамика и прочность машин
Направление подготовки:	15.03.03 «Прикладная механика»
Квалификация:	бакалавр

Допускается к защите  
Зав.кафедрой ДПМ  
\_\_\_\_\_ В.П.Матвеевко  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Выпускная квалификационная работа  
**РОТОРНО–ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОГРУЖНОЙ  
НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ**

Выполнила:  
студентка группы ДПМ-16-16  
Фролова Лилия Валерьевна

(  )

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., проф. кафедры ДПМ  
Келлер Илья Эрнстович

(  )

Пермь, 2020

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
Кафедра «Динамика и прочность машин»**

**УТВЕРЖДАЮ**  
Зав. кафедрой ДПМ  
Матвеевко В.П.  
«25» мая 2020г.

**ЗАДАНИЕ  
на выполнение выпускной квалификационной работы студента**

Фамилия И.О.	Фролова Л.В.
Факультет ПММ	Группа ДПМ-16-16
Начало выполнения работы	25 мая 2020
Контрольные сроки просмотра работы кафедрой	16 июня 2020
Дата защиты работы на заседании ГЭК	23 июня 2020
1. Наименование работы: Роторно-динамический анализ погружной насосной установки;	
2. Исходные данные к работе	
3. Содержание пояснительной записки:	
1. Математическая модель и основы динамики вращающегося ротора.	
2. Роторно-динамический анализ погружной насосной установки.	
3. Влияние коэффициента демпфирования на устойчивость системы.	

4. Основная литература

- 1) Agnieszka Muszynska. Rotordynamics. Boca Raton. – 2005, 1128 pages.
- 2) Вибрация энергетических машин. Справочное пособие. Под ред. д-ра техн. наук проф. Н. В. Григорьева Л., Машиностроение, (Ленингр. Отделение), 1974, 464 с.

Руководитель выпускной квалификационной работы студента

д.ф.-м.н., проф. кафедры ДПМ

(должность, Ф.И.О.)

(Келлер И.Э.)

Задание получил

25 мая 2020

(дата и подпись студента)

(Фролова Л.В.)

**КАЛЕНДАРНЫЙ ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ  
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

№п. п.		Объем этапа, в %	Сроки выполнения		Примечание
			начало	конец	
1	Разработка основных разделов выпускной квалификационной работы	70	25.05.2020	10.06.2020	
2	Оформление выпускной квалификационной работы	20	10.06.2020	14.06.2020	
3	Разработка и оформление иллюстративной части материала к защите диссертации	10	14.06.2020	16.06.2020	
4	Представление ВКР на проверку и отзыв научного руководителя		16.06.2020		
5	Представление работы заведующему кафедрой		16.06.2020		
6	Защита на заседании ГЭК		23.06.2020		

Научный руководитель работы:

д.ф.-м.н., профессор кафедры ДПМ

«25» \_\_\_\_\_ мая \_\_\_\_\_ 2020 г.



Келлер И.Э.

Оглавление	
ВВЕДЕНИЕ .....	5
1.МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РОТОРА .....	7
1.1 Основы динамики вращающегося ротора .....	7
1.2 Математическая модель изотропного ротора .....	8
1.3 Свободная реакция ротора. Собственные частоты.....	11
1.4 Модель роторной динамики с учетом гироскопических сил .....	13
2. РОТОРНО-ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОГРУЖНОЙ НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ .....	18
2.1 Данные по погружной насосной установке.....	18
2.2 Определение собственных частот и критических скоростей вращения ...	20
3. ВЛИЯНИЕ КОЭФИЦИЕНТА ДЕМПФИРОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ.....	24
4. ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ .....	27
Список использованных источников .....	28

## ВВЕДЕНИЕ

Вращающиеся машины представляют собой самый большой и важный класс используемого оборудования для транспортировки жидких сред, для металлообработки, для производства энергии, и для других целей. Роторы, оборудованные лопастными дисками или рабочими колесами, вращающимися на высоких скоростях в жидкой среде, позволяют вращающимся машинам производить, абсорбировать, преобразовывать или кондиционировать большое количество энергии, часто в сравнительно небольших, компактных установках. Растущий экономический спрос на большие мощности, более высокое качество и экологическая приемлемость при производстве и транспортировке, а также растущие потребности пользователей, предъявляют жесткие требования к производительности машины.

Роторная динамика является чрезвычайно важной отраслью в дисциплине динамики, которая относится к работе и поведению огромного ассортимента вращающихся машин. Поведение машин включает в себя широкий спектр физических явлений, все из которых могут препятствовать надлежащему функционированию машин и даже привести к катастрофическим отказам, если их неправильно идентифицировать и исправить.

В процессе моделирования мы сталкиваемся с реалистично полученными данными о вибрации, поступающими от машин. Уравнения формы относительно просты, включают в себя несколько параметров, которые определяются из диагностических тестов, полученных при нормальных условиях эксплуатации.

Важную составляющую современных программ управления оборудованием в машиностроении во многих отраслях промышленности представляет собой контроль вибраций. Ключевая задача компаний на мировом рынке – наращивание объёмов изготовления высококачественной продукции, что собственно и выполняется при помощи повышения эффективности и безопасности, а так же наращивания скоростей работы машин, и уменьшении времени простоя, из-за чего могут проявляться отказы оборудования, требующие сервисного обслуживания. Предотвратить поломки машин помогают специализированные программы мониторинга вибраций [2, 3, 4].

Ротор – важная составляющая многих машин и вращающихся механизмов. Он состоит из жёстких дисков и вала или системы валов. Иногда ротор усложнён изменениями сечения.

У малогабаритных установок обычно жёсткий ротор, но он становится более гибким с увеличением размера, и это обязательно должно быть учтено при анализе. Для примера возьмем, большие электродвигатели, приводящие в движение прокатные станы, они являются исключением, так как их роторы в

большинстве случаев жёсткие.

Изгибная жёсткость ротора обычно одинакова во всех плоскостях, но есть исключения. Например, изгибная жёсткость у роторов двухполюсных электрических машин в одной плоскости меньше, чем в перпендикулярной, из-за пазов, выточенных для электрических проводников. Ротор может включать компоненты или узлы с такими же динамическими характеристиками. В роторе может возникнуть внутреннее трение, которое возможно вызовет нестабильность системы.

Ротор соединен с опорной конструкцией подшипниками. Для небольших машин с малыми нагрузками, подшипники могут быть заменены обычной втулкой, в которой будет вращаться ротор. При повышении нагрузки ротор ставят на шариковые подшипники, обеспечивающие большую жёсткость и грузоподъёмность, но могут существенно влиять на динамику всей установки из-за наличия подвижных элементов. В больших машинах, например, турбогенераторы, используются подшипники скольжения, где между вращающимися и статичными элементами присутствует масляная плёнка.

Большинство машин, например, реактивные двигатели, насосы, вызывают существенную осевую тягу, в них устанавливают упорные подшипники. Их функция – принимать осевую нагрузку и в дальнейшем передавать ее на корпус системы, а так же поддерживать относительное положение ротора и корпуса. В осевой динамике системы это имеет решающее значение.

Вибрации ротора бывают трёх видов: продольные, крутильные и поперечные. В некоторых системах три вида вибраций независимы друг от друга, и могут анализироваться отдельно. Во многом работа машины зависит от ряда параметров: ротор гибкий или жёсткий, какие подшипники используют, какой тип имеет опорная конструкция системы.

Работа имеет следующую структуру. В главе 1 излагаются уравнения роторной динамики с учетом и без учета гироскопического эффекта, на основе решения, которых анализируется поведение объекта. В главе 2 выполняется роторно-динамический анализ реальной погружной насосной установки, выпускаемой АО «Новомет-Пермь».

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РОТОРА

## 1.1 Основы динамики вращающегося ротора

Вращающиеся системы отличаются рядом свойств:

1. Во время вращения ротора могут появиться поперечные силы и моменты. Так как есть ограничения в точности обработки и сборки всегда присутствуют так называемые несбалансированные силы и моменты. Частоты вибрации, вызванные этими силами и моментами, соответствуют скорости вращения ротора.

2. На вращающийся ротор действуют гироскопические моменты, вызывающие изменение их собственных частот со скоростью вращения.

3. В зависимости от скорости вращения жесткостные и демпфирующие свойства некоторых типов подшипников меняются. При определении собственных частот эти изменения также имеют значение.

4. Центробежные силы, действующие на диск, прикрепленный к вращающемуся ротору, приводят к тому, что жесткость лопасти увеличивается со скоростью вращения.

5. Не все роторы полностью симметричны, но даже малая асимметрия может значительно влиять на динамику ротора. Когда ротор вращается, его жесткость изменяется периодически со скоростью вращения, что может вызывать неустойчивость.

6. Демпфирование во вращающихся машинах может быть более высоким по сравнению с тем, которое наблюдается в стационарных машинах. В некоторых случаях эффективное демпфирование может также вызывать неустойчивость.

Сформулируем некоторые общие положения динамики вращающихся роторов, справедливых для роторов с любым числом дисков и частично рассмотренных на примере однодискового ротора.

1. Решение задачи о колебаниях вращающегося ротора может быть получено с помощью хорошо разработанного аппарата теории ОЛДУ (обыкновенных линейных дифференциальных уравнений) с постоянными коэффициентами только в двух частных случаях:

а) Осесимметричный ротор на любых опорах. Расчет проводится в неподвижной системе координат;

б) Опоры осесимметричны, а ротор любой. Расчет проводится в подвижной системе координат.

Одновременное нарушение осевой симметрии в роторе и его опорах может быть учтено только с помощью аппарата теории ОЛДУ с

периодическими коэффициентами.

2. Вращение ротора с постоянной угловой скоростью не всегда является устойчивым даже при учете сил внешнего и внутреннего трения. Устойчивость всегда обеспечена только при угловых скоростях, меньших, чем первая критическая скорость ротора. Внутренне трение в материале ротора мало способствует устойчивости вращения и даже может стать причиной появления зон неустойчивости в закритической области. Внешнее трение обычно способствует устойчивости, однако наличие неконсервативных сил реакции масляного клина приводит к появлению зон неустойчивости, начинающихся вблизи удвоенной первой критической скорости.

3. Критические скорости вращения ротора могут быть найдены формально как собственные частоты плоских изгибных колебаний не вращающегося ротора, но только в частных случаях:

а) ротор и его опоры полностью осесимметричны, при этом инерция поворота дисков учитывается совместно с гироскопическим эффектом.

б) симметричный ротор на неосесимметричных опорах, диски ротора таковы, что инерцией их поворота можно полностью пренебречь и полагать массы точечными, в этом случае критические скорости находятся для каждой из главных плоскостей жесткости опор по отдельности.

в) ротор не осесимметричный, но все его диски и упругие участки имеют общие главные направления осей инерции и жесткости, а опоры осесимметричны. Первые критические скорости такого ротора равны собственным частотам его изгибных колебаний в каждой из главных плоскостей по отдельности.

В более сложных случаях задача нахождения критических оборотов ротора не сводится к задаче о плоских изгибных колебаниях [1].

## **1.2 Математическая модель изотропного ротора**

В общем случае постановка задачи об устойчивости и колебаниях вращающегося вала состоит в следующем [5]:

1. Составляются общие уравнения малых колебаний ротора около стационарного его движения, соответствующего вращению с постоянной скоростью.
2. Внутри областей устойчивости выясняется характер зависимости прогибов вращающегося вала от скорости его вращения, те угловые скорости, при которых прогибы вала достигают максимальных значений, могут оказаться в эксплуатации опасными.

3. Внутри областей неустойчивости характер движения ротора может быть выяснен только с помощью нелинейной теории колебаний. Обычно это автоколебания с частотой близкой к собственной частоте ротора.

Практические расчеты критических скоростей роторов очень часто могут выполняться и без предварительного исследования устойчивости вращения, так как в общих случаях [5].

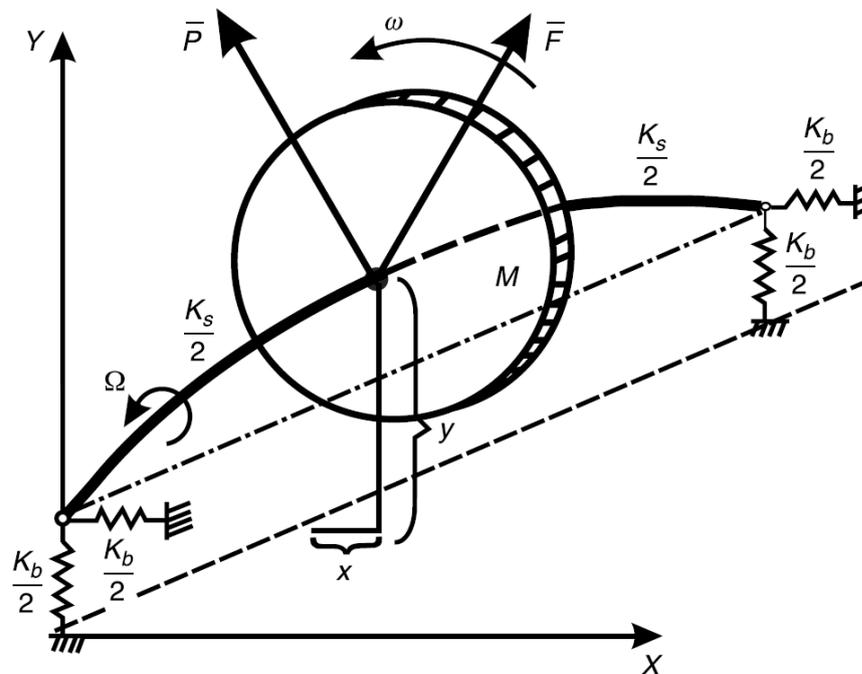


Рис. 1.1. Расчётная схема изотропного ротора.

Уравнения, приведенные ниже, представляют собой баланс сил, действующих на изотропный ротор в его первом поперечном положении (рис. 1.1.). Ротор вращается с постоянной частотой вращения,  $\Omega$ , но в этой вводной модели частота вращения явно не присутствует [5].

$$M \ddot{x} + D\dot{x} + Kx = F \cos(\omega t + \delta) + P \cos \gamma \quad (1.1)$$

$$M \ddot{y} + D\dot{y} + Ky = F \sin(\omega t + \delta) + P \sin \gamma \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) имеют типичную форму линейных дифференциальных уравнений, в виде моделей вибрирующих физических систем, известные как вибраторы, из классической теории колебаний.

В уравнениях (1.1) и (1.2) коэффициенты  $M$ ,  $K$ ,  $D$  обозначают, соответственно, общую (модальную) массу ротора, поперечную изотропную

жесткость и поперечное внешнее демпфирование ротора. Жесткость и демпфирование рассматриваются в обобщенном смысле.  $\omega$  – это частота внешнего воздействия на ротор, несинхронно вращающейся силы с амплитудой  $F$ . Эта сила может быть вызвана дисбалансом ротора (в данном конкретном случае  $\omega = \Omega$ ), или периодической рабочей нагрузкой вращающейся машины, или периодическим действием, связанным с рабочей жидкостью, в машинах для работы с жидкостью. Эта величина силы может быть постоянной или, как и дисбаланс ротора, может зависеть от частоты. Если это вращающее усилие вызвано дисбалансом, прикрепленным к ротору, то его частота будет синхронной, таким образом  $\omega = \Omega$ , где  $\Omega$ , будучи частотой вращения ротора, также является частотой возбуждения дисбаланса ротора [5].

Отметим, что простейшая модель ротора ((1.1),(1.2)) прямо не включает скорость вращения  $\Omega$ , таким образом, во время вращения или в состоянии покоя результаты, предоставляемые этой моделью, будут одинаковыми. Конечно, эта модель, являясь самым простым первым шагом к более сложным моделям, она не способна отразить все возможные физические явления, с которыми могут быть связаны роторы машин.

Еще более упрощенная модель((1.1) и (1.2))  $P = 0, \omega = \Omega, F = Mr\Omega^2$  ( $r$  – радиус дисбаланса) известна как "Ротор Джеффкота". Модель ротора, описанная уравнениями (1.1) и (1.2), применима в случае несинхронных (или, в частности, синхронно) возбужденных машин с изотропными роторами, вращающихся с относительно низкой частотой вращения (ниже второго резонанса балансировки). Следуя модальной концепции, модели роторов могут становиться более сложными, включая большее количество режимов, большее сцепление и внешние силы.

Уравнения (1.1) и (1.2) имеют аналогичный формат и не связаны между собой. Основываясь на признаке изотропии ротора и используя формат комплексного числа, уравнения (1.1) и (1.2) могут быть легко преобразованы путем объединения горизонтальных и вертикальных смещений ротора в две сложные сопряженные переменные: " $z(t)$ " и его комплексный сопряженный " $z^*(t)$ ", как показано ниже [5]:

$$z = x + jy \quad (1.3)$$

$$z^* = x - jy, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1.4)$$

Умножая уравнение (1.2) на "j" и сначала добавляя его, а затем вычитая из него (уравнение (1.1)), получаем два следующих уравнения[5]:

$$M \ddot{z} + D\dot{z} + Kz = Fe^{j(\omega t + \delta)} + Pe^{j\gamma} \quad (1.5)$$

$$M \ddot{z}^* + D\dot{z}^* + Kz^* = Fe^{-j(\omega t + \delta)} + Pe^{-j\gamma} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5) и (1.6) не только отделены друг от друга, но и имеют почти идентичную форму (они являются сложными сопряженными уравнениями). Единственные различия заключаются в ориентациях внешних возбуждающих сил. Уравнения (1.5) и (1.6) можно отнести, соответственно, к "передней" моде ротора (боковая вибрация, вращающаяся в направлении вращения ротора) и "задней" моды (в направлении, противоположном вращению).

Преимуществом линейных дифференциальных уравнений является то, что внешние возбуждения не мешают друг другу и отдельные решения, соответствующие отдельным возбуждениям, могут быть просто добавлены друг к другу. При добавлении они представляют собой полную реакцию ротора. В рассмотренном случае общее решение уравнений движения ротора состоит из трех элементов[6]:

1. Свободное боковое движение ротора, регулируемое его собственными частотами,
2. Принудительное статическое смещение ротора под действием внешней радиальной постоянной силы,
3. Принудительная несинхронная реакция ротора на боковую вибрацию.

### 1.3 Свободная реакция ротора. Собственные частоты

Рассмотрим модель ротора в формате (ур. (1.5) и (1.6)) без внешних сил возбуждения  $F=0$ ,  $P=0$ . Собственное решение для уравнений (1.5) и (1.6) следующее (первая составляющая реакции ротора):

$$z = Ae^{st}, \quad z^* = Ae^{st} \quad (1.7)$$

Где  $A$  - константа интеграции и  $s$  - комплексная собственная частота. Подстановка первого решения (1.7) в уравнение (1.5) и решение его для  $s$  обеспечивает характерное уравнение:

$$M s^2 + Ds + K = 0$$

Существует два решения этого уравнения, представляющие собой два собственных значения ротора:

$$s_{1,2} = -\frac{D}{2M} \pm i\sqrt{\frac{K}{M} - \frac{D^2}{4M^2}} \quad (1.8)$$

Аналогичная процедура применяется к уравнению (1.6), и обеспечивает еще два собственных значения, идентичных (1.8) [5]:

$$s_{3,4} = -\frac{D}{2M} \pm i\sqrt{\frac{K}{M} - \frac{D^2}{4M^2}} \quad (1.9)$$

Уравнения(1.8) и (1.9) представляют собой полный набор из четырех собственных значений для первоначальной системы уравнений (1.1) и (1.2). Воображаемые (или "кватратурные") части собственных значений (уравнения (1.8) и (1.9)) означают две затухающие собственные частоты системы,  $\omega_n$ :

$$\omega_{n1,2} = \pm\sqrt{\frac{K}{M} - \frac{D^2}{4M^2}} \quad (1.10)$$

В уравнении (1.10) знак "+" соответствует собственной частоте прямого (в направлении вращения) режима, "-" обратного (в направлении, противоположном вращению) режима. Атрибут "демпфирование" на собственных частотах используется здесь для того, чтобы подчеркнуть, что демпфирование присутствует в формуле собственных частот (1.10). При анализе собственных значений более сложных механических систем демпфированием обычно пренебрегают, так как оно часто вызывает проблемы в вычислениях. В этом случае результаты вычислений собственных значений ограничиваются "не демпфирующими собственными частотами". На самом деле, поскольку демпфирование обычно мало, численные различия между собственными частотами "не демпфирования" и "демпфирования" не значительны, хотя очевидно, что эти различия зависят от действительных значений демпфирования в системе. Однако при анализе стабильности, который представляет собой вторую часть решения собственной задачи, демпфирование является жизненно важным и не должно игнорироваться [5].

Отметим, что при достаточно высоком демпфировании выражение под радикалом (ур. (1.10)) может стать отрицательным. Это происходит когда  $D > 2\sqrt{KM}$ . В этом случае все собственные значения будут реальными и отрицательными. Этот случай, весьма маловероятный для роторов, в теории вибрации называется чрезмерно демпфированным случаем. Свободная реакция (1.7) не будет иметь "вибрационно-связанных" мнимых,

тригонометрических членов, только реальные корни в экспоненциальных функциях. Таким образом, реакция будет неосцилляторной. Значение демпфирования,  $D = 2\sqrt{KM}$ , называется "критическим", так как устанавливает границу между двумя качественно различными динамическими характеристиками вибрирующих систем. Это значение служит также для введения безразмерной меры, "коэффициента демпфирования",  $\zeta = D / (2\sqrt{KM})$ , определяемой как отношение фактического демпфирования в системе к критическому демпфированию. Таким образом, системы  $\zeta < 1$  (малым демпфированием) характеризуются свободными от колебаний реакциями. Системы с  $\zeta \geq 1$  демпфированием перегружены и реагируют экспоненциально на импульсное возбуждение[5].

Реальные (или "прямые") части собственных значений (ур. (1.8) и (1.9)) отвечают за стабильность свободных колебаний ротора. Если реальные части положительны, то ротор нестабилен, если они не положительны, то стабильность системы гарантирована. Так как в рассматриваемом случае реальные части отрицательны, ротор стабилен. На практике стабильность можно проверить путем возмущения ротора: если положение статического равновесия ротора внезапно изменится, или если ротор будет возбужден импульсной силой, амплитуда свободной вибрации ротора со временем уменьшится.

Важность анализа собственных значений ротора и свободных колебаний заключается в двух аспектах: поиске собственных значений частоты и оценке условий устойчивости. Как собственные частоты, так и параметры устойчивости, связанные с демпфированием, являются собственными значениями, то есть корнями характеристического уравнения [7].

#### **1.4 Модель роторной динамики с учетом гироскопических сил**

Введём две декартовы системы координат, проходящие через центр тяжести диска: неподвижную  $\xi\eta\zeta$  и подвижную  $xуz$  – так, что ось  $\xi$  соответствует оси вращения ротора; ось  $\eta$  вертикальная для горизонтального вала; ось  $z$  совпадает с осью  $\zeta$ ; оси  $x, у$  совпадают с главными направлениями моментов инерции диска и вращаются вокруг оси  $z$  со скоростью  $\omega$  [1]. Диск совершает малые колебания относительно осей  $x, у$ . Схема ротора представлена на рисунке 1.2. [4].

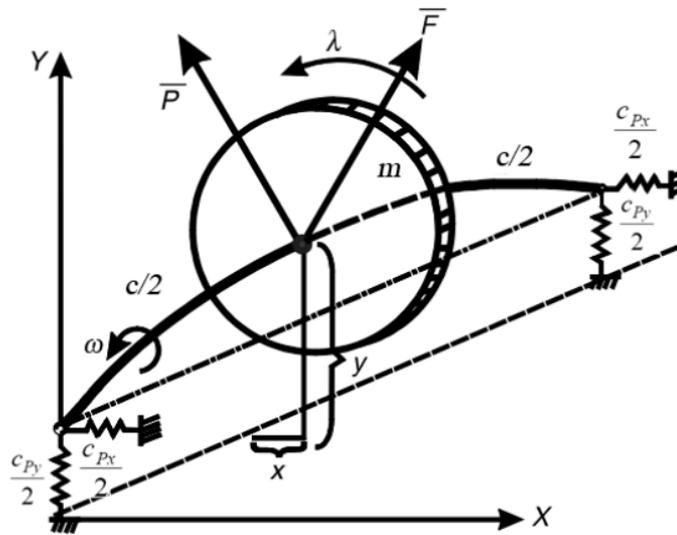


Рис. 1.2. Расчётная схема ротора.

Уравнения малых колебаний в подвижной системе координат  $x, y, z$  имеют вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) &= P_x; \\ m(\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) &= P_y; \\ A\ddot{\alpha} + [\Theta - (A+B)]\omega\dot{\beta} + (\Theta - B)\omega^2 \alpha &= M_x; \\ A\ddot{\beta} + [\Theta - (A+B)]\omega\dot{\alpha} + (\Theta - A)\omega^2 \beta &= M_y, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где  $m$  – масса диска;

$A, B$  – моменты инерции диска относительно осей  $x, y$ ;

$\Theta$  – момент инерции относительно осей вращения;

$P_x, P_y$  – проекции внешних сил, приложенных к диску;

$M_x, M_y$  – проекции вектора момента внешних нагрузок.

Уравнения этой системы имеют постоянные коэффициенты.

В неподвижной системе координат уравнения малых колебаний примут вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= P_\xi; & m\ddot{\eta} &= P_\eta; \\ \Theta_\xi \ddot{\phi} + \omega\Theta\dot{\psi} + (A-B)[\omega(\dot{\phi} - \omega\phi) \cos 2\omega t - \\ & - \omega(\phi + \omega\psi) \sin 2\omega t + \frac{1}{2}\ddot{\psi} \sin 2\omega t] &= M_\xi; \\ \Theta_\eta \ddot{\eta} - \omega\Theta\dot{\phi} + (A-B)[\omega(\dot{\eta} - \omega\psi) \cos 2\omega t - \\ & - \omega(\psi + \omega\phi) \sin 2\omega t + \frac{1}{2}\ddot{\phi} \sin 2\omega t] &= M_\eta, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где  $\Theta_\xi = A \cos^2 \omega t + B \sin^2 \omega t$ ;  $\Theta_\eta = A \sin^2 \omega t + B \cos^2 \omega t$ .

Уравнения этой системы в общем случае имеют периодические

коэффициенты. В случае осесимметрии диска, когда моменты инерции равны  $A = B$ , система упрощается:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= P_{\xi}; \\ A\ddot{\phi} + \omega\Theta\dot{\psi} &= M_{\xi}; \\ m\ddot{\eta} &= P_{\eta}; \\ A\ddot{\psi} + \omega\Theta\dot{\phi} &= M_{\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Так как в общем случае вал нельзя считать жёстко закреплённым, также необходимо выразить действующие на ротор нагрузки через смещения шеек вала в опорах. Пусть  $x^0, y^0, \alpha^0, \beta^0$  – проекции перемещения и поворота диска при отсутствии деформации ротора, достигнутые за счёт смещений опор (рис. 1.3.). Тогда величины, характеризующие смещение и поворот диска, вызванные изгибными деформациями ротора, имеют вид [1]:

$$\tilde{x} = x - x^0; \quad \tilde{y} = y - y^0; \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \alpha^0; \quad \tilde{\beta} = \beta - \beta^0 \quad (1.14)$$

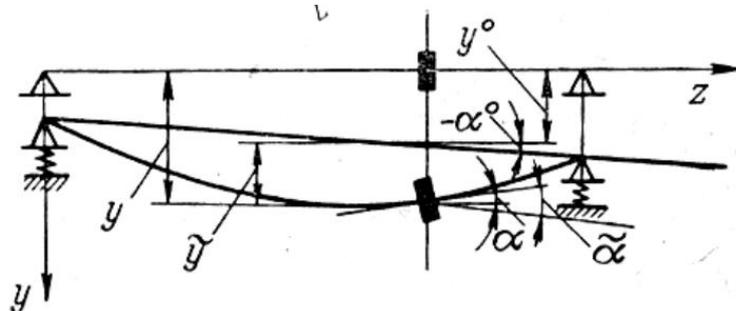


Рис. 1.3. Схема вала с диском в пролёте

Примем оси  $x, y$  главными осями изгибной жёсткости. В этом случае усилия, действующие в плоскости  $zx$  ( $yz$ ), вызовут изгиб только в этой плоскости. При наличии сил внутреннего трения в материале вала будем иметь для плоскости  $zx$ :

$$\left. \begin{aligned} -P_x &= c_p \tilde{x} + c \tilde{\beta} + b_p \dot{\tilde{x}} + b \dot{\tilde{\beta}}; \\ -M_y &= c \tilde{x} + c_M \tilde{\beta} + b \dot{\tilde{x}} + b_M \dot{\tilde{\beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Для плоскости  $yz$ :

$$\left. \begin{aligned} -P_y &= c_p^* \tilde{y} - c^* \tilde{\alpha} + b_p^* \dot{\tilde{y}} - b^* \dot{\tilde{\alpha}}; \\ -M_x &= -c^* \tilde{y} + c_M^* \tilde{\alpha} - b^* \dot{\tilde{y}} + b_M^* \dot{\tilde{\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Здесь  $c_p, c, \dots, c_M^*$  – коэффициенты изгибной жёсткости вала;  $b_p, b, \dots, b_M^*$  – коэффициенты линеаризованного внутреннего трения.

Если оси инерции диска и главные оси жёсткости вала не совпадают, соотношения для действующих усилий усложнятся, поскольку будут

включать в себя также все компоненты перемещений и поворотов. В случае осесимметрии вала, коэффициенты жёсткости в уравнениях (1.15) и (1.16) будут совпадать, и в этом случае уравнения в неподвижных координатах сохраняют постоянные коэффициенты и имеют следующий вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} -P_{\xi} &= c_P \xi + c_{\Psi} + b_P (\xi + \omega \eta) + b(\psi + \omega \phi); \\ -M_{\eta} &= c_{\xi} \xi + c_M \psi + b(\xi + \omega \eta) + b_M (\psi + \omega \phi); \\ -P_{\eta} &= c_P \eta - c_{\phi} + b_P (\eta - \omega \xi) - b(\phi + \omega \psi); \\ -M_{\eta} &= -c_{\eta} + c_M \phi - b(\eta + \omega \xi) + b_M (\phi + \omega \psi). \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Обычно в важных задачах можно не учитывать реактивные изгибающие моменты, а оси  $\xi$ ,  $\eta$  можно считать направленными по главным осям жёсткости опор. Тогда реакции опор для ротора на шариковых подшипниках имеют вид [1]:

$$A_{\xi} = -c_{\xi} \xi_A; \quad A_{\eta} = -c_{\eta} \eta_A, \quad (1.18)$$

где  $\xi_A$ ,  $\eta_A$  – перемещения шейки вала в опоре А;

$A_{\xi}$ ,  $A_{\eta}$  – проекции реакции опоры А;

$-c_{\xi}$ ,  $-c_{\eta}$  – соответствующие коэффициенты жёсткости опорной конструкции.

В подвижной системе координат эти уравнения записываются через периодические коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= -(c_{\xi} \cos^2 \omega t + c_{\eta} \sin^2 \omega t)x_A - y_A \frac{c_{\eta} - c_{\xi}}{2} \sin 2\omega t; \\ A_y &= -\frac{c_{\eta} - c_{\xi}}{2} \sin 2\omega t - y_A (c_{\xi} \sin^2 \omega t + c_{\eta} \cos^2 \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо добавить уравнения равновесия вала, связывающие реакции опор, действующие на диск нагрузки и геометрические соотношения, выражающие перемещения через перемещения шеек вала в опорах. В зависимости от расположения опор вала, эти уравнения будут варьироваться. Например, для консольного вала, левая опора которого абсолютно жёсткая (рис. 1.4), имеем [1]:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{a+l}{l} P_x + \frac{1}{l} M_y; \\ A_y &= \frac{a+l}{l} P_y + \frac{1}{l} M_x; \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= x_A \left(1 + \frac{a}{l}\right); & y^0 &= y_A \left(1 + \frac{a}{l}\right); \\ \beta^0 &= \frac{x_A}{l}; & \alpha^0 &= -\frac{y_A}{l}; \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

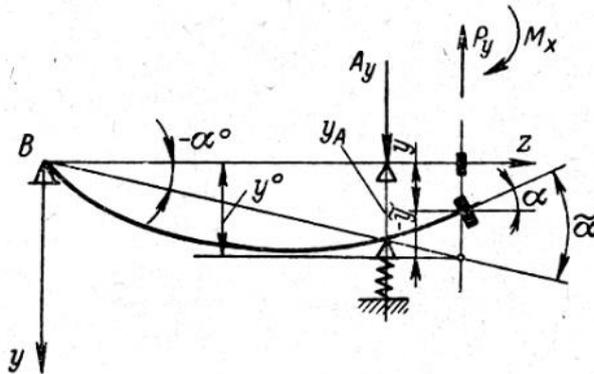


Рис. 1.4. Схема вала с упругой опорой

Уравнения (1.11) – (1.21) образуют замкнутую систему, число неизвестных в которой совпадает с числом уравнений. В общем случае система дифференциальных уравнений имеет переменные коэффициенты, однако в некоторых частных случаях получаются уравнения с постоянными коэффициентами.

## 2. РОТОРНО-ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОГРУЖНОЙ НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ

### 2.1 Данные по погружной насосной установке

На рисунке 2.1. приведены граничные условия закрепления установки в скважине. Установка помещена в кожухе и имеет условия жесткого закрепления в верхней части и в нижней части. На установку действует сила тяжести. Установка расположена под углом  $75^\circ$  от вертикали.

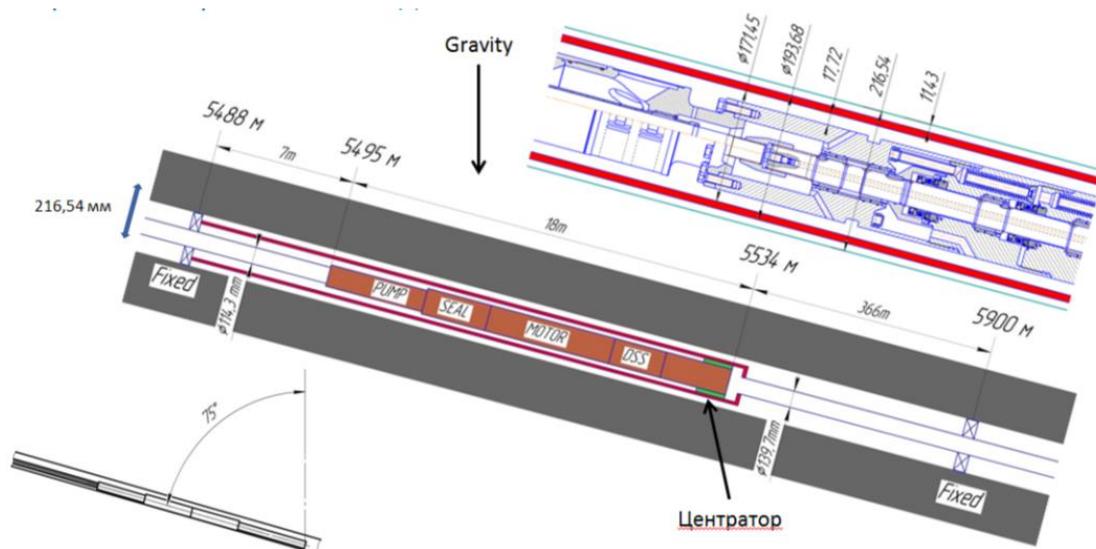


Рисунок 2.1. Граничные условия закрепления установки в скважине

Состав погружной насосной установки:

1. Электроцентробежный насос (Pump) (большое отношение длины к диаметру, 31 рабочее колесо, радиальный подшипники в каждой ступени, достаточно гибкий вал) представлен на рисунке 2.2.

Расчетная схема ступени насоса приведена на рисунке 2.2.(схема ротора насоса в пределах одной ступени). На данной схеме изображены расстояния между подшипниками, лабиринтными уплотнениями рабочего колеса и положение точечной массы рабочего колеса.

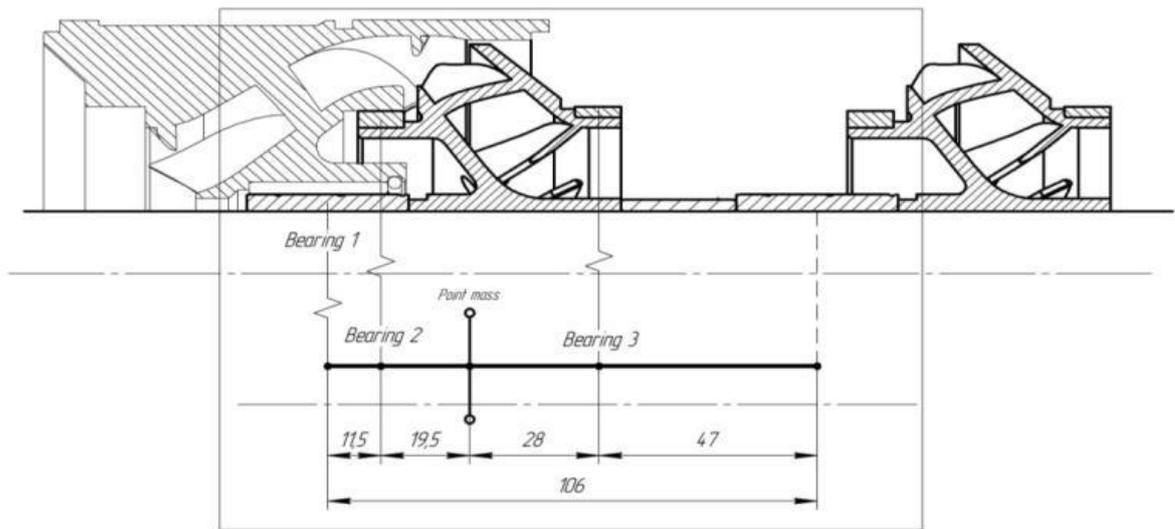


Рисунок 2.2. Расчетная схема насоса

2. Электродвигатель (Motor) (вентильный с постоянными магнитами, 17 пакетов, разделенных радиальными подшипниками).

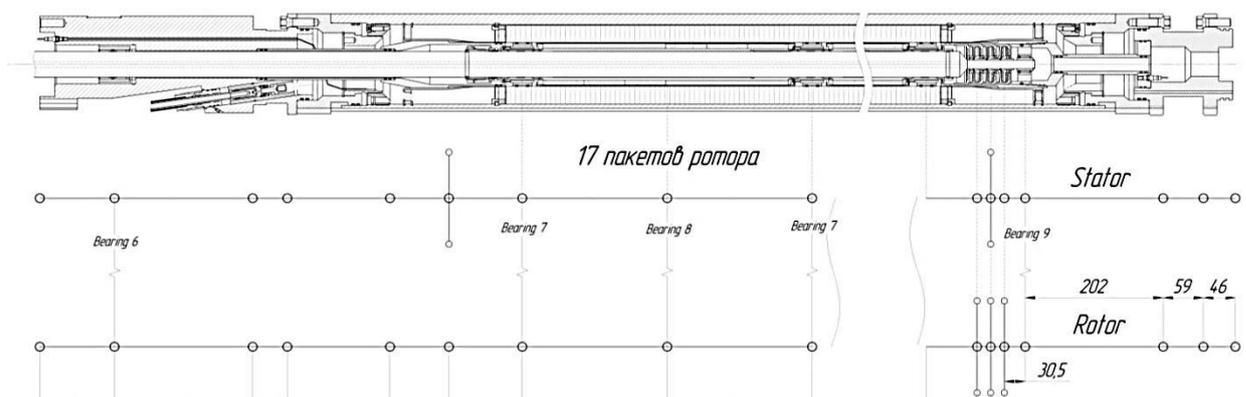


Рисунок 2.3. Расчетная схема точечных масс двигателя

3. Гидрозащита электродвигателя (Seal) (между насосом и двигателем, включает в себя радиальные подшипники, один осевой подшипник с самоустанавливающимися сегментами, торцовые уплотнения) представлена на рисунке 2.4.

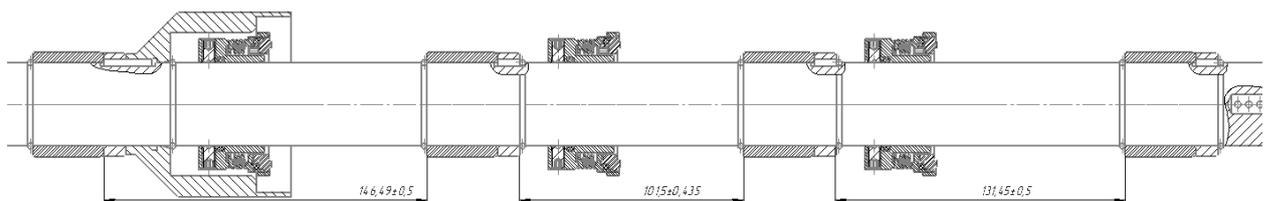


Рисунок 2.4. Гидрозащита электродвигателя

## 2.2 Определение собственных частот и критических скоростей вращения

Для определения критических скоростей, рассмотрим каждую составляющую установки в отдельности. Воспользуемся формулой (1.10) и найдем собственную частоту в пределах одной ступени насоса (рис 2.2), одного пакета ротора в электродвигателе (рис 2.3) и одного из трех участков гидрозащиты (рис 2.4). Коэффициент демпфирования, учитывать не будем, тогда уравнение (1.10) примет вид:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{K}{M}}, \quad K = \frac{K_{22} \cdot K_{iz}}{K_{22} + K_{iz}}, \quad (2.1)$$

где  $K$  – коэффициент обобщенной жесткости,  $M$  – масса одной ступени. Коэффициент жесткости  $K_{22}$ , представленные в таблице 1, зависят от скорости вращения.

Таблица 2.1. Коэффициенты жесткости

w	K <sub>22</sub> (w) [Н/м]		
	Pump	Motor	Seal
9,20	1,83E+04	6,08E+03	5,95E+01
15,20	3,56E+04	3,20E+08	4,00E+02
21,30	5,01E+04	4,75E+08	2,79E+02
27,40	5,74E+04	1,42E+07	5,95E+02
33,5	5,54E+04	3,61E+03	3,03E+01
39,6	5,79E+04	3,54E+03	6,31E+01
45,6	6,65E+04	3,01E+03	2,69E+01
51,7	7,99E+04	3,52E+03	5,99E+01
57,8	8,31E+04	1,91E+04	1,01E+03
63,9	8,40E+04	2,40E+03	9,36E+02
70	9,92E+04	5,98E+03	1,00E+03
76	9,57E+04	6,34E+03	8,46E+02
82,1	1,03E+05	5,60E+03	7,99E+02
88,2	1,05E+05	5,83E+03	8,30E+02
94,3	1,06E+05	6,71E+03	8,94E+02
100,4	1,01E+05	6,42E+03	6,34E+02
106,4	1,31E+05	7,03E+03	8,34E+02
112,5	1,14E+05	3,71E+03	6,59E+02
118,6		4,55E+03	8,65E+02
124,7		8,08E+03	

Коэффициент изгибной жесткости участка дается формулой

$$K_{iz} = \frac{12EJ}{L^3},$$

где  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$  – модуль Юнга,  $J$  – момент инерции,  $L$  – длина участка.

Таблица 2.2. Данные для вычисления коэффициента изгибной жесткости

	Pump	Motor	Seal		
L [m]	0,106	0,384	0,146	0,102	0,132
D [m]	0,03	0,038	0,009	0,009	0,009
d [m]	0	0,009	0	0	0
J [m <sup>4</sup> ]	3,97E-08	1,03E-07	3,22E-10	3,22E-10	3,22E-10
K iz [N/m]	8,41E+07	4,57E+06	2,61E+05	7,64E+05	3,53E+05

Массы участков:  $M$  (Pump) = 1,8 кг;  $M$  (Motor) = 9,4 кг;  $M$  (Seal) = 5,3 кг.

Так как мы видим, что коэффициенты изгибной жесткости намного больше коэффициентов жесткости  $K_{22}$ , то, согласно формуле (2.1), они практически не вносят вклад в обобщенную жесткость.

В таблице 2.3. представлены значения собственных частот, рассчитанных по формуле (2.1).

Таблица 2.3. Собственные частоты

$w^*$ ( $K_{22}$ )		
Pump	Motor	Seal
100,80	25,43	3,35
140,65	5837,33	8,69
166,78	7104,84	7,26
178,56	1230,38	10,59
175,47	19,61	2,39
179,27	19,40	3,45
192,22	17,89	2,25
210,63	19,35	3,36
214,92	45,12	13,79
215,99	15,98	13,29
234,79	25,23	13,76
230,62	25,96	12,64
239,68	24,40	12,28
240,95	24,90	12,52
243,01	26,72	12,99
236,41	26,12	10,94
270,08	27,35	12,55
251,11	19,87	11,15
	21,99	12,77
	29,32	

Для определения резонансной скорости вращения, построим графики изменения собственных частот от скорости. Так как значения данных

скоростей невелики, экстраполируем функции, чтобы увидеть пресечения графиков.

На рисунке 2.5 представлены данные для сегмента Pump. Видно, что критической скоростью вращения для Pump будет ~ 690 Гц.

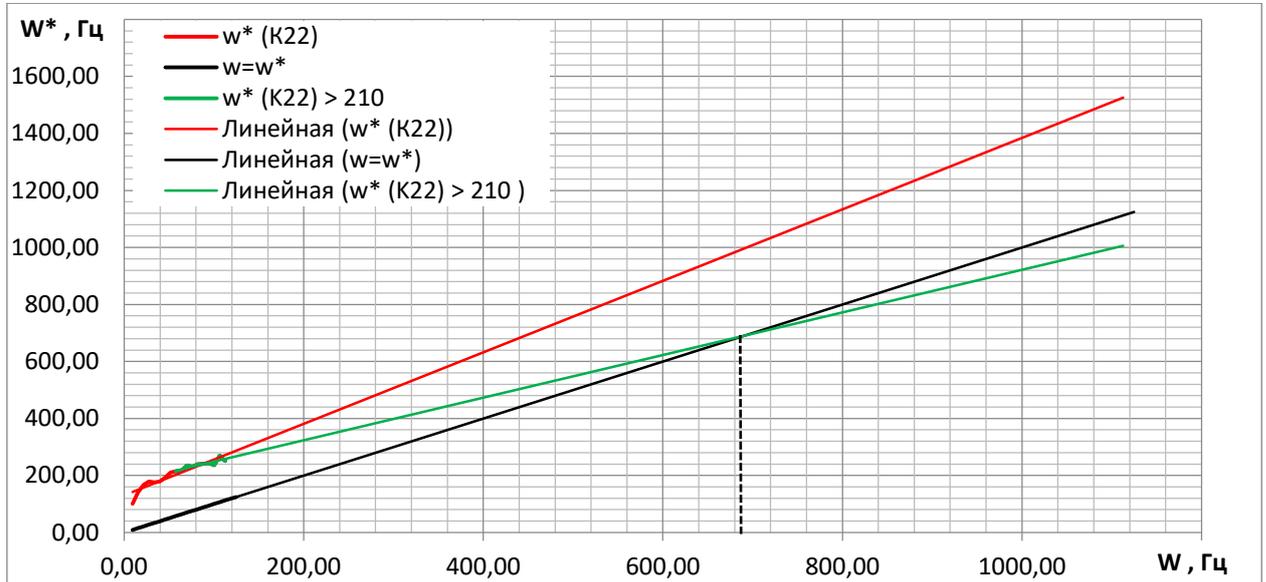


Рисунок 2.5. Изменения собственных частот от скорости вращения для Pump.

На рисунке 2.6. представлены резонансные скорости вращения для сегмента Motor. Из графиков следует, что критической скоростью вращения для Motor будет ~ 22 Гц, что значительно меньше, чем для Pump.

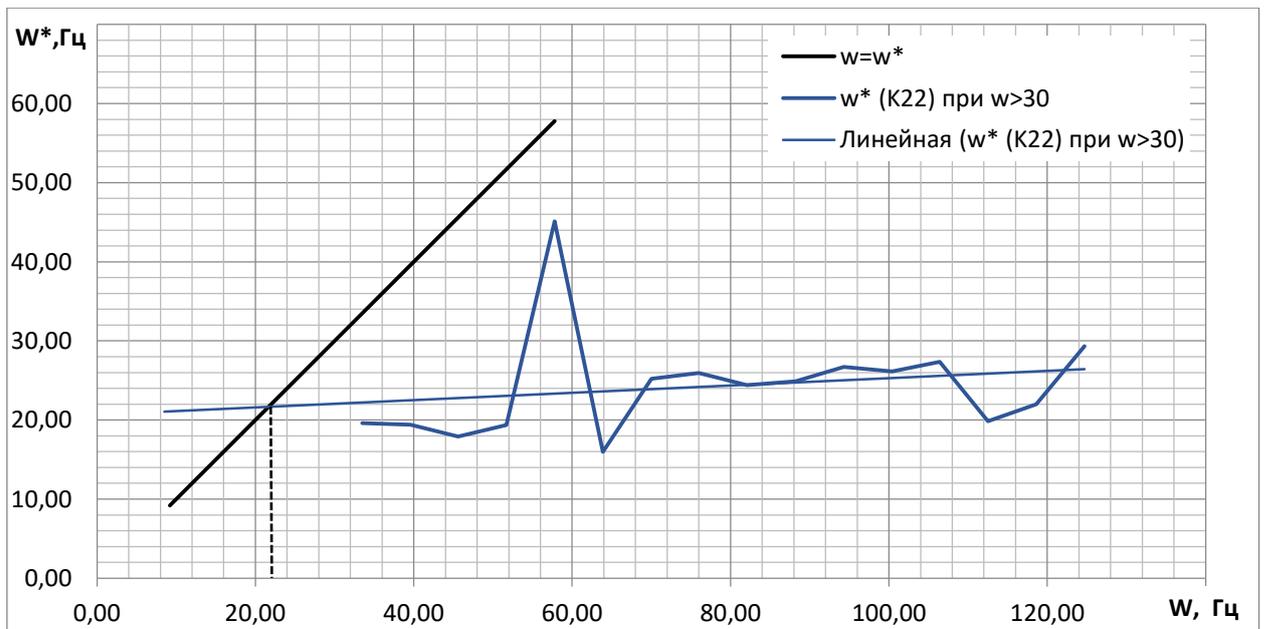


Рисунок 2.6. Изменения собственных частот от скорости вращения для Motor

Также построим графики и для Seal (рис. 2.7). Критическая скорость вращения будет ~ 4,5 Гц.

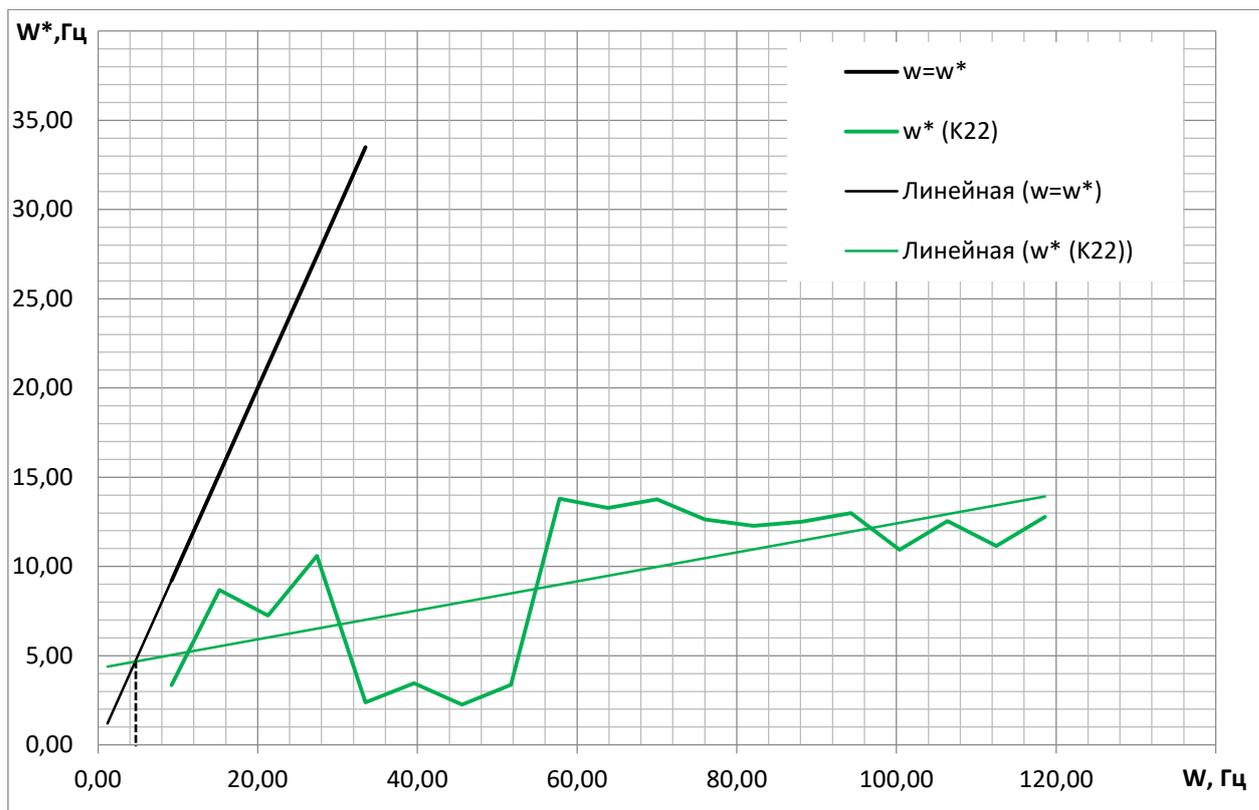


Рисунок 2.7. Изменения собственных частот от скорости вращения для Seal.

Критические скорости вращения для Seal и Motor более чем на порядок меньше чем для Pump.

Различие критических скоростей вращения есть следствие отличия жесткостей сегментов на два порядка. Обычно машины стараются сделать равножесткими. Так как мы не обладаем всеми данными системы, и не знаем, как были получены значения коэффициентов жесткости  $K_{22}$ , мы не можем точно сказать, являются ли полученные нами критические скорости вращения верными.

### 3. ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДЕМПФИРОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ

Так как полученные нами в предыдущей главе значения критических скоростей вращения не учитывали коэффициент демпфирования, то теперь рассмотрим и его вклад в собственные значения скоростей вращения.

В таблице 3.1 представлены коэффициенты демпфирования, для участков системы, зависящие от скорости вращения.

Таблица 3.1. Коэффициенты демпфирования

w	D <sub>22</sub> (w) [Нс/м]		
	Pump	Motor	Seal
9,20	1,86E+05	5,07E+04	7,30E+03
15,20	1,29E+05	3,13E+04	4,77E+03
21,30	1,03E+05	1,85E+06	3,68E+03
27,40	8,77E+04	6,17E+04	3,10E+03
33,5	8,11E+04	1,54E+04	2,77E+03
39,6	6,82E+04	1,34E+04	2,58E+03
45,6	6,79E+04	1,20E+04	2,48E+03
51,7	6,39E+04	1,09E+04	2,45E+03
57,8	5,91E+04	1,01E+04	2,49E+03
63,9	5,51E+04	9,46E+03	2,56E+03
70	5,06E+04	9,00E+03	2,63E+03
76	4,90E+04	8,64E+03	2,68E+03
82,1	4,66E+04	8,40E+03	2,72E+03
88,2	4,41E+04	8,12E+03	2,70E+03
94,3	3,83E+04	8,07E+03	2,81E+03
100,4	3,65E+04	8,02E+03	2,87E+03
106,4	3,64E+04	8,04E+03	2,91E+03
112,5	3,70E+04	7,90E+03	2,90E+03
118,6		8,06E+03	3,04E+03
124,7		8,27E+03	

Для начала сравним коэффициенты разности под знаком радикала. Они представлены в таблице 3.2. Из этих данных мы можем сделать вывод, что слагаемое с коэффициентом демпфирования в 2 и более раза превосходит слагаемое с коэффициентом жесткости. Если подставить полученные данные в формулу (1.10), то мы увидим, что найденные собственные скорости вращения будут мнимыми, что говорит об апериодическом возврате возмущенного состояния ротора в положение устойчивого равновесия.

Таблица 3.2. Значения коэффициентов разности под знаком радикала формулы (1.10)

D <sup>2</sup> /4M <sup>2</sup>			K/M		
Pump	Motor	Seal	Pump	Motor	Seal
2,66E+09	7,26E+06	4,75E+05	1,02E+04	6,47E+02	1,12E+01
1,29E+09	2,78E+06	2,03E+05	1,98E+04	3,41E+07	7,55E+01
8,15E+08	9,70E+09	1,21E+05	2,78E+04	5,05E+07	5,27E+01
5,93E+08	1,08E+07	8,57E+04	3,19E+04	1,51E+06	1,12E+02
5,07E+08	6,70E+05	6,81E+04	3,08E+04	3,84E+02	5,71E+00
3,59E+08	5,07E+05	5,90E+04	3,21E+04	3,76E+02	1,19E+01
3,55E+08	4,04E+05	5,47E+04	3,70E+04	3,20E+02	5,07E+00
3,15E+08	3,35E+05	5,36E+04	4,44E+04	3,74E+02	1,13E+01
2,69E+08	2,87E+05	5,53E+04	4,62E+04	2,04E+03	1,90E+02
2,34E+08	2,53E+05	5,83E+04	4,67E+04	2,55E+02	1,77E+02
1,98E+08	2,29E+05	6,15E+04	5,51E+04	6,36E+02	1,89E+02
1,85E+08	2,11E+05	6,37E+04	5,32E+04	6,74E+02	1,60E+02
1,67E+08	1,99E+05	6,57E+04	5,74E+04	5,95E+02	1,51E+02
1,50E+08	1,86E+05	6,49E+04	5,81E+04	6,20E+02	1,57E+02
1,13E+08	1,84E+05	7,03E+04	5,91E+04	7,14E+02	1,69E+02
1,03E+08	1,82E+05	7,31E+04	5,59E+04	6,82E+02	1,20E+02
1,02E+08	1,83E+05	7,54E+04	7,29E+04	7,48E+02	1,57E+02
1,05E+08	1,77E+05	7,46E+04	6,31E+04	3,95E+02	1,24E+02
	1,84E+05	8,21E+04		4,84E+02	1,63E+02
	1,93E+05			8,59E+02	

На рисунке 3.1 представлены изменения собственных частот для Pump, рассчитанные по формуле (1.10), с учетом коэффициента демпфирования.

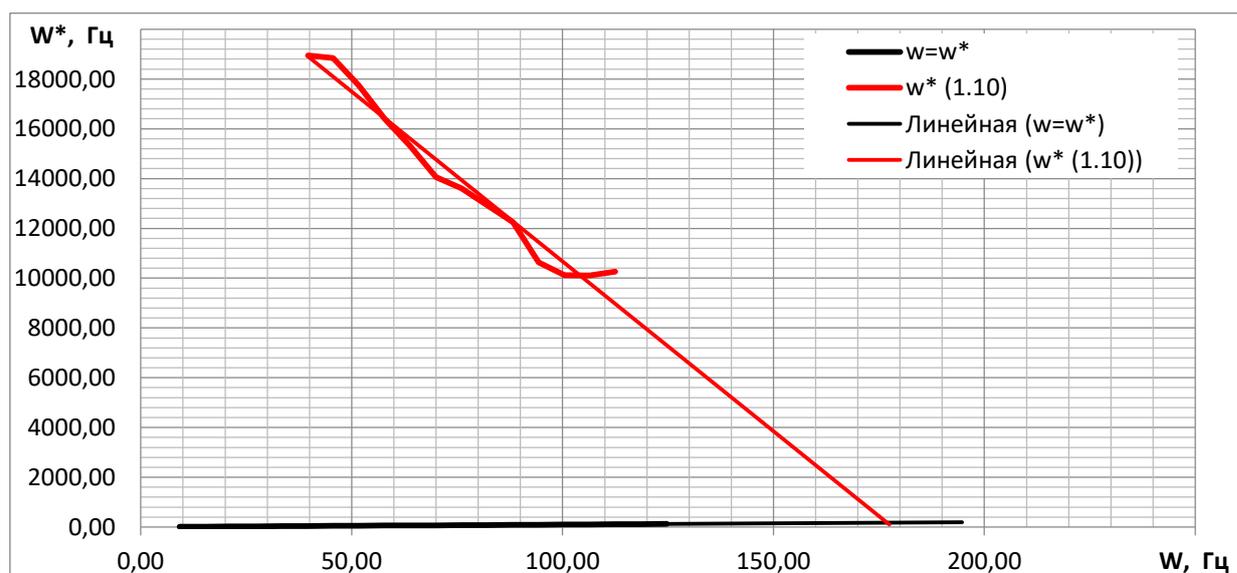


Рисунок 3.1. Изменения собственных частот от скорости вращения для Pump с учетом коэффициента демпфирования.

На рисунках 3.2. и 3.3 показаны зависимости собственных частот от скорости вращения для Motor и Seal соответственно, при вычислении учитывался коэффициент демпфирования. Они получаются мнимыми, так же как и значения для Pump.

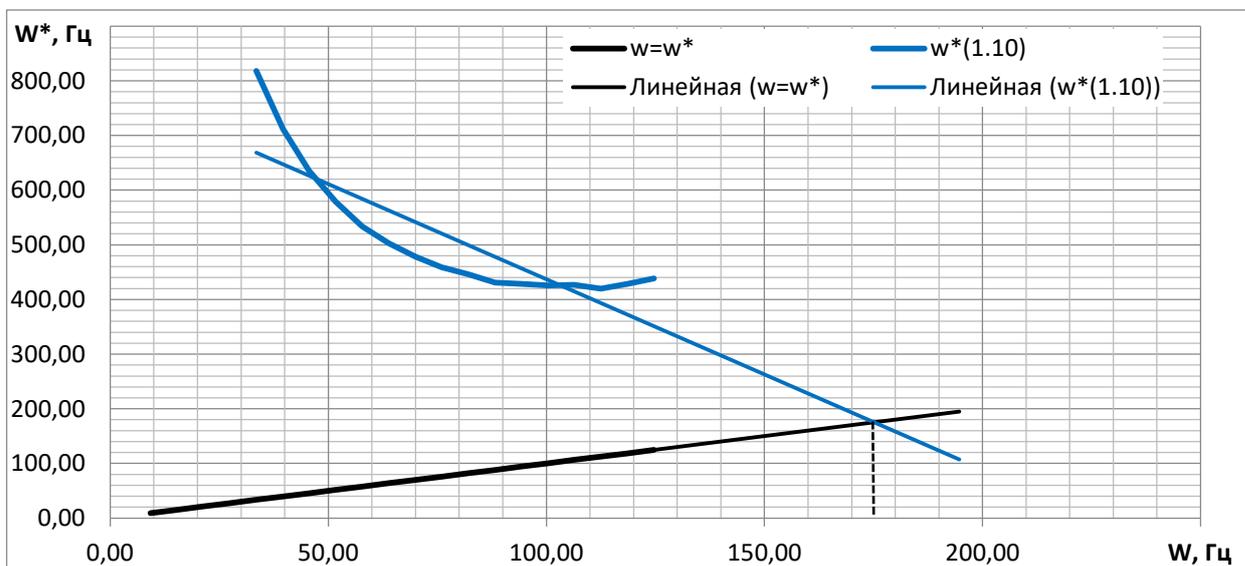


Рисунок 3.2. Изменения собственных частот от скорости вращения для Motor с учетом коэффициента демпфирования.

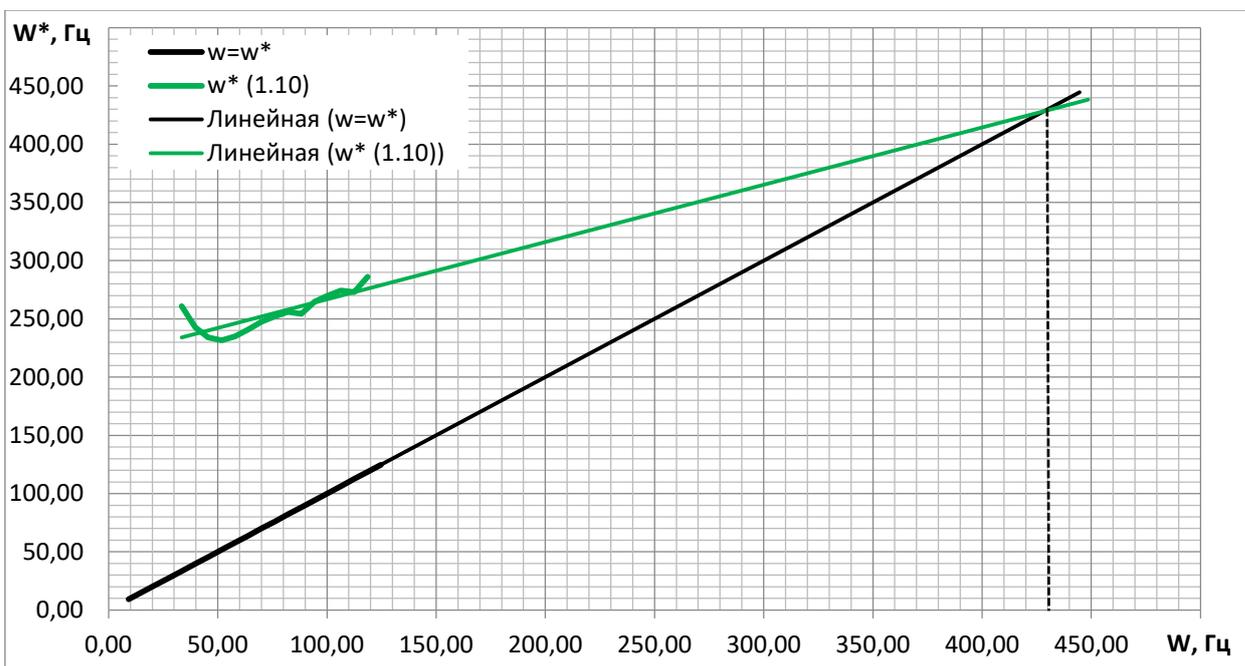


Рисунок 3.3. Изменения собственных частот от скорости вращения для Seal с учетом коэффициента демпфирования.

#### 4. ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

Выполнен инженерный анализ роторной динамики двухопорных повторяющихся сегментов электродвигателя, насоса и уплотнения погружной насосной установки. Использована простейшая модель без учета гироскопических сил. Полученные значения критических скоростей вращения сегментов агрегата без учета демпфирования оказались различного порядка, что неправдоподобно и может быть связано с неправильной трактовкой данных, полученных от АО «Новомет-Пермь». Для всех сегментов также оценивался коэффициент демпфирования, который оказался в десятки раз больше значения, выше которого система оказывается устойчивой с апериодическим сценарием возврата возмущенного состояния к равновесному. Этот результат также не вызывает доверия и пока связывается нами с неправильной трактовкой данных, полученных от АО «Новомет-Пермь». В дальнейшем необходим самостоятельный пересчет коэффициентов жесткости и демпфирования для отдельных сегментов установки в Rotor Exel.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вибрация энергетических машин. Справочное пособие. Под ред. д-ра техн. наук проф. Н. В. Григорьева Л., Машиностроение, (Ленингр. Отделение), 1974, 464 с.
2. Гольдин А. С. Вибрация роторных машин. М.: Машиностроение, 1999, 344 с.
3. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. /Ред. В. Н. Челомей. – М: Машиностроение, 1980 – Т.
4. Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф. М. Диментберга и К. С. Колесникова. 1980, 544 с.
5. Agnieszka Muszynska. Rotordynamics. Boca Raton. – 2005, 1128 pages.
6. Vance, John M. Machinery vibration and rotordynamics. – John Wiley & Sons, Inc. 2010, 402 pages.
7. I. P.U. Alabart Development of a Strategy to Determine the Internal Damping Coefficient in a Rotating Interference Fit to Verify Stability in Rotordynamics: Master Konstr. und Produktzuverlässigkeit: 356834. - Berlin, 2014. - 82 Seiten.