Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет» (СибАДИ)
Кафедра «Управление качеством и производственными системами»

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«Основы теории и планирования эксперимента»

На тему «Применение полного факторного эксперимента при проведении исследований»

Выполнил(а):
Студентка группы УКб-15Э1
Граматчикова В. Е.
Проверила: к.э.н., доцент
Семенова Е.С.

Омск 2019

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирская государственная автомобильно-дорожный университет»
(СибАДИ)

Кафедра «Управление качеством и производственными системами»

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по теме:

«Применение полного факторного эксперимента при проведении исследований»

Студенту группы УКб-15Э1 Граматчиковой В.Е.

1. Срок сдачи выполненной курсовой работы до 15.01.2019 г.

2. Консультант к.э.н., доц. Семёнова Е.С.

3. Исходные данные к курсовой работе: учебная и научная литература российских и зарубежных авторов, действующие нормативные документы, касающиеся рассматриваемой темы, ресурсы всемирной сети Internet.

4.Обязательный перечень содержания работы:

ВВЕДЕНИЕ

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЕЙ И ЗАДАЧ ЭКСПЕРИМЕНТА

1.1 Цели и задачи полного многофакторного эксперимента

1.2 Методика проведения эксперимента по определению устойчивости к многократному изгибу материалов для средств защиты рук

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1 Погрешности измерений

2.2 Определение относительной погрешности результатов измерений разрывной нагрузки материалов для средств защиты рук

3 ПРОВЕДЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

3.1 Понятие корреляционного анализа

3.2 Корреляционная связь

3.3 Определение коэффициента корреляции

3.4 Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции

4 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1 Кодирование переменных

4.2 Построение матрицы планирования в кодированных переменных

4.3 Нахождение коэффициентов уравнения регрессии

4.4 Проверка коэффициентов на значимость

4.5 Проверка уравнения на адекватность

4.6 Интерпретация полученной модели

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Задание выдано	Задание к исполнению принял
"12 " сентября 2018г.	"12 " сентября 2018г.
(подпись)	(подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЕЙ И ЗАДАЧ ЭКСПЕРИМЕНТА 6
1.1 Цели и задачи многфакторного эксперимента 6
1.2 Методика проведения эксперимента по определению устойчивости к многократному изгибу материалов для средств защиты рук 9
2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ 12
2.1 Погрешности измерений 12
2.2 Определение относительной погрешности результатов измерений разрывной нагрузки материалов для средств защиты рук 16
3 ПРОВЕДЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ 18
3.1 Понятие корреляционного анализа 18
3.2 Корреляционная связь 20
3.3 Определение коэффициента корреляции 24
3.4 Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции 26
4 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА 28
4.1 Кодирование переменных. 28
4.2 Построение матрицы планирования в кодированных переменных .. 30
4.3 Нахождение коэффициентов уравнения регрессии 32
4.4 Проверка коэффициентов на значимость 33
4.5 Проверка уравнения на адекватность 35
4.6 Интерпретация полученной модели 37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 38
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 39

ВВЕДЕНИЕ

Описание поведения и прогнозирование состояния сложных технических объектов затруднено отсутствием достаточного количества математических моделей. В ряде случаев простым выходом из ситуации является использование регрессионных закономерностей, получаемых в ходе планирования эксперимента. К сожалению, регрессионные закономерности не дают представлений о типе протекающих в системе процессов и не могут быть использованы вне области планирования эксперимента. При этом их достоинством является способность описания любого объекта при полном соблюдении алгоритма активного эксперимента. Полный факторный эксперимент является наиболее легко реализуемым среди многочисленных методов активного эксперимента.

Целью выполнения курсовой работы является изучение и применение методов планирования полного факторного эксперимента (ПФЭ) применительно к технологическим задачам, освоение принципов составления матрицы планирования ПФЭ, проведение расчета коэффициентов регрессии, использование статистических критериев для оценки однородности, нормальности экспериментальных данных, значимости коэффициентов и адекватности полученной математической модели.

Поставленная цель обусловила решение ряда задач:

1. Исследование теоретических основ и планирование эксперимента по определению качественных характеристик материалов для средств защиты рук, применительных в Северных регионах при решении технологических задач.

2. Определение относительной погрешности результатов измерения.

3. Проведение корреляционного анализа экспериментальных данных.

4. Планирование ПФЭ, выбор числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для получения математической модели процесса.

5. Интерпретация полученной математической модели при влиянии факторов на устойчивость к многократному изгибу материалов для защиты рук.

Объектом в курсовой работе выступают материалы для средств защиты рук. Для защиты рук промышленностью выпускаются различные перчатки. Средства защиты рук следует выбирать исходя из их назначения и свойств, вида выполняемой работы и требуемой степени защиты. В данном случае рассматривались средства защиты рук, рекомендуемых для работ на окрытом воздухе в условиях Севера и Крайнего Севера (диапазон рабочих температур от -60 С° до 100 С°) [11].

Предметом являются методы планирования ПФЭ.

Информационной базой для написания курсовой работы послужили труды отечественных ученых, законодательная и справочная документация, периодические издания и электронные ресурсы.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЕЙ И ЗАДАЧ ЭКСПЕРИМЕНТА

1.1 Цели и задачи многофакторного эксперимента

Чаще всего эксперимент ставят для решения одной из двух основных задач. Первую задачу называют экстремальной. Она заключается в отыскании условий процесса, обеспечивающих получение оптимального значения выбранного параметра. Признаком экстремальных задач является требование поиска экстремума некоторой функции. Эксперименты, которые ставят для решения задач оптимизации, называют экстремальными. Вторую задачу называют интерполяционной. Она состоит в построении интерполяционной формулы для предсказаний значений изучаемого параметра, зависящего от ряда факторов. Для решения экстремальной или интерполяционной задачи необходимо иметь математическую модель исследуемого объекта. Модель объекта получают, используя результаты опытов. При исследовании многофакторного процесса постановка всех возможных опытов для получения математической модели связана с огромной трудоемкостью эксперимента, так как их число очень велико. Задача планирования состоит в установлении минимально необходимого числа экспериментов и условий их проведения, в выборе методов математической обработки результатов и в принятии решений. Частным случаем планирования эксперимента является планирование экстремального эксперимента, т. е. процесс выбора их числа и условий проведения, минимально необходимых для нахождения экстремальных экспериментов с помощью метода Бокса - Уилсона, называемого методом крутого восхождения.

Метод Бокса - Уилсона предусматривает проведение экспериментов небольшими сериями. В каждой серии одновременно варьируют все факторы по определенным правилам. Эксперименты проводят так, чтобы после математической обработки результатов предыдущей серии можно было спланировать следующую серию.

При планировании экстремального эксперимента цель исследования должна быть четко сформулирована и должна иметь количественную оценку. Характеристику цели, заданную количественно, называют параметром оптимизации. Параметр оптимизации является реакцией, или откликом, на воздействие факторов, определяющих поведение процесса. Результаты эксперимента используют для получения математической модели исследуемого процесса.

Математическая модель - система математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление. При планировании эксперимента под математической моделью часто понимают уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Такое уравнение называют функцией отклика [3].

Планирование эксперимента — это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для получения математической модели процесса. При этом важно учитывать следующее: стремление к минимизации числа опытов; одновременное варьирование всех переменных, определяющих процесс; выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

При использовании метода активного планирования весь эксперимент обычно разбивается на несколько этапов. Информация, полученная после каждого этапа, используется для планирования исследований на следующем этапе. Планирование эксперимента позволяет варьировать ряд факторов и получать одновременно количественные оценки всех проявляющихся эффектов. При этом в отличие от классического регрессионного анализа, избежать корреляции между коэффициентами уравнения регрессии. При статистическом подходе математическая модель объекта или процесса представляется в общем виде полиномом n-степени, т.е. отрезком ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная функция [4].

Под планированием эксперимента понимают процесс определения числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения

поставленной задачи с требуемой точностью. Эффективность использования МПЭ при исследовании процессов в различных объектах объясняется тем, что их наиболее важные характеристики являются случайными величинами, распределение которых близко к нормальному.

Основная задача исследований — оптимизация, заключающаяся в нахождении совокупности варьируемых параметров, при которых выбранная целевая функция (параметр оптимизации) принимает экстремальное значение.

При решении задачи предполагается, что оптимизируется один параметр, каждый из факторов управляем, результаты опытов должны воспроизводиться. Для построения математической модели используется полный или дробный факторный план эксперимента, обладающий оптимальной матрицей планирования.

При планировании эксперимента цель исследования должна быть четко сформулирована и должна иметь количественную оценку. Характеристику цели, заданную количественно, называют параметром оптимизации.

Границы изменения факторов определяются так, чтобы обеспечить условия физической реализации процесса. Факторы должны быть управляемыми, независимыми (устанавливаться на любом уровне независимо друг от друга), однозначными (не являться функциями других).

На выбор интервала варьирования так же накладываются ограничения: он не может быть меньше ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, и не может быть настолько большим, что верхний и нижний уровень оказались за пределами области определения. Необходимо отметить, что при выборе верхнего и нижнего уровней факторов необходимо учитывать ограничения, связанные с свойствами объекта исследования.

Полный факторный эксперимент (2^k) целесообразно проводить в том случае, если он не продолжителен по времени и требует небольших затрат (число варьируемых факторов k мало). Для каждого включенного в эксперимент факоров устанавливают только два уровня: верхний и нижний.

Для полного факторного эксперимента, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, число опытов определяется по следующей формуле: $N=2^k$, где N - число опытов; k - число факторов.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом.

Вводят условное обозначение верхнего (+), нижнего (-) и основного уровня (0).Затем строится план эксперимента (например, для трех факторов, приведенный в таблице 1.1):

Таблица 1.1 – Матрица планирования

Номер точки плана	Факторы			Значение параметра оптимизации
	X_1	X_2	X_3	
1	+	+	+	Y_1
2	-	+	+	Y_2
3	+	-	+	Y_3
4	-	-	+	Y_4
5	+	+	-	Y_5
6	-	+	-	Y_6
7	+	-	-	Y_7
8	-	-	-	Y_8

Составленная матрица планирования должна соответствовать свойствам полного факторного эксперимента:

1. Симметричность относительно центра эксперимента [5]:

$$\sum X_{ij} = 0, \quad (1)$$

где j - номер фактора; N - число опытов, j =1... k.

2. Условие нормировки:

$$\sum X_{ij}^2 = \mathrm{N}. \quad (2)$$

3. Ортогональность матрицы:

$$\sum X_{ij} X_{iu} = 0, \quad (3)$$

j=u; j, u=0, 1, 2 … k.

1.2 Методика проведения эксперимента по определению устойчивости к многократному изгибу материалов для средств защиты рук

Для определения номенклатуры показателей качества материалов для

средств защиты рук использовался ГОСТ 4.493-89 «Система показателей качества продукции (СПКП). Материалы для средств защиты рук. Номенклатура показателей».

Проводилось исследование некоторых факторов на устойчивость к многократному изгибу материалов для средств защиты рук. На устойчивость к многократному изгибу влияют такие факторы как [1]:

1. толщина, мм;

2. разрывная нагрузка, Н;

3. удлинение при разрыве, %.

Определение устойчивости к многократному изгибу материалов для средств защиты рук осуществлялось по ГОСТ 8978-75 «Кожа искусственная и пленочные материалы. Методы определения устойчивости к многократному изгибу».

Устойчивость к многократному изгибу характеризуется устойчивостью к образованию нарушений на лицевом покрытии или основе.

Существует три метода определения устойчивости к разрушению искусственной кожи:

1. Метод определения устойчивости к разрушению искусственной кожи при сжатии и изгибе образца цилиндрической формы вдоль оси цилиндра.

2. Метод определения устойчивости к разрушению искусственной кожи при сжатии и изгибе образца по форме ромба.

3. Метод определения устойчивости к разрушению искусственной кожи и пленочного материала при изгибе вокруг зажимов.

Первый метод предназначен для определения устойчивости к разрушению искусственной кожи при сжатии и изгибе образца цилиндрической формы вдоль оси цилиндра, чередующихся с распрямлением или растяжением.

Для проведения испытания применяют:

1. Прибор типа МИРЦ.

2. Раму для предварительного одноосного растяжения образцов с зажимами, размещенными попарно в одной плоскости и параллельными между собой.

3. Линейку металлическую по ГОСТ 427-75.

Образцы искусственной кожи растягивают на раме в направлении длины образца. Зажимы рамы устанавливают на расстоянии (140±1) мм, образец складывают втрое по ширине, закрепляют в зажимах и растягивают на определенную величину. Значение этой величины, равное 75% от удлинения при разрыве, вычисляют в миллиметрах по отношению к длине образца между зажимами рамы.

Второй метод предназначен для определения устойчивости к разрушению искусственной кожи при сжатии и изгибе образца по форме ромба, чередующихся с распрямлением или растяжением образца. Измеряют толщину образцов в миллиметрах в трех точках по средней поперечной линии с погрешностью не более 0,01 мм по ГОСТ 17073-71. Для режимов испытания с растяжением и без растяжения рассчитывают минимальный зазор между зажимами, равный шести толщинам.

Третий метод предназначен для определения устойчивости к разрушению искусственной кожи или пленочного материала при изгибе вокруг зажимов с постоянным радиусом кривизны на заданный угол в каждую сторону от вертикального положения образца (двойной перегиб), находящегося при постоянно действующей растягивающей нагрузке. Измеряют толщину образца в миллиметрах по месту изгиба на границе между первым и вторым участками.

Результат каждого измерения устойчивости искусственной кожи и пленочного материала к многократному изгибу выражают числом циклов испытания в килоциклах с погрешностью не более 0,1% от измеренной величины [2].

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1 Погрешности измерений

Измерения не могут быть выполнены абсолютно точно. Всегда имеется некоторая неопределенность в значении измеряемой величины. Эта неопределенность характеризуется погрешностью. Погрешность измерения — отклонение измеренного значения величины от её истинного (действительного) значения. Погрешность измерения является характеристикой точности измерения.

Причины, приводящие к появлению погрешностей:

1. Ограниченная точность измерительных приборов.

2. Влияние на измерение неконтролируемых изменений внешних условий (напряжения в электрической сети, температуры и т.д.).

3. Действия экспериментатора (включение секундомера с некоторым запаздыванием, различное размещение глаз по отношению к шкале прибора и т.п.).

4. Неполное соответствие измеряемого объекта той абстракции, которая принята для измеряемой величины (например, при измерении объема пластинка считается параллелепипедом, в то время как у нее могут быть закругления на ребрах).

5. Нестрогость законов, которые используются для нахождения измеряемой величины или лежат в основе устройства прибора.

Выяснить с абсолютной точностью истинное значение измеряемой величины, как правило, невозможно, поэтому невозможно и указать величину отклонения измеренного значения от истинного. Это отклонение принято называть ошибкой измерения. Возможно лишь оценить величину этого отклонения, например, при помощи статистических методов. На практике вместо истинного значения используют действительное значение величины, то есть значение физической величины, полученное

экспериментальным путём и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него. Такое значение, обычно, вычисляется как среднестатистическое значение, полученное при статистической обработке результатов серии измерений. Это полученное значение не является точным, а лишь наиболее вероятным. Поэтому в измерениях необходимо указывать, какова их точность. Для этого вместе с полученным результатом указывается погрешность измерений.

Задачей эксперимента является определение числового значения измеряемых величин с заданной точностью. Эта задача решается с помощью прямых или косвенных измерений.

При прямом измерении осуществляется количественное сравнение физической величины с соответствующим эталоном при помощи измерительных приборов. Отсчет по шкале прибора указывает непосредственно измеряемое значение.

При косвенных измерениях физическая величина находится при помощи математических операций над непосредственно измеренными физическими величинами.

Точность прямых измерений некоторой величины X оценивается величиной погрешности или ошибки, измерений относительно действительного значения физической величины.

Действительное значение величины ($\mathbf{X}_Д$) – это значение физической величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

По форме представления выделяют абсолютную ($\mathbf{X}_Д$) и относительную (д) погрешности измерений.

Абсолютная погрешность измерения – это погрешность средства измерений, выраженная в единицах измеряемой физической величины, характеризующая абсолютное отклонение измеряемой величины от действительного значения физической величины:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_{Д}. \quad (4)$$

Действительное значение находится по формуле:

$$\mathbf{X}_{Д} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^{n} X, \quad (5)$$

где n – число измерений.

Относительная погрешность измерения – это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к действительному значению измеряемой величины. Обычно относительную погрешность выражают в процентах:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{|\Delta \mathbf{X}|}{\mathbf{X}_{Д}} \cdot \mathbf{100}\%. \quad (6)$$

Если при измерениях получена относительная погрешность более 10%, то говорят, что произведено не измерение, а лишь оценка измеряемой величины. В лабораториях физического практикума относительная погрешность обычно составляет 1-10%. В научных же лабораториях измерения некоторых физических величин, таких, например, как длина световой волны, осуществляется с точностью порядка миллионной доли процента.

Основная погрешность средства измерений — погрешность средства измерений, применяемого в нормальных условиях.

Дополнительная погрешность средства измерений — составляющая погрешности средства измерений, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального ее значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений.

Стабильность средства измерений — качественная характеристика средства измерений, отражающая неизменность во времени его метрологических характеристик (в качестве количественной оценки стабильности служит нестабильность средства измерений).

Нестабильность средства измерений — изменение метрологических характеристик средства измерений за установленный интервал времени.

Класс точности средств измерений — обобщенная характеристика данного типа средств измерений, как правило, отражающая уровень их точности, выражаемая пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность.

Также, нужно учитывать погрешности по характеру проявления, такие как:

– Случайная погрешность — составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом в серии повторных измерений одной и той же величины, проведенных в одних и тех же условиях. В появлении таких погрешностей не наблюдается какой-либо закономерности, они обнаруживаются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Случайные погрешности неизбежны, неустранимы и всегда присутствуют в результате измерения, однако их влияние обычно можно устранить статистической обработкой. Описание случайных погрешностей возможно только на основе теории случайных процессов и математической статистики.

– Систематическая погрешность — погрешность, изменяющаяся во времени по определённому закону (частным случаем является постоянная погрешность, не изменяющаяся с течением времени). Систематические погрешности могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, калибровка и т. п.), неучтёнными экспериментатором. Систематическую ошибку нельзя устранить повторными измерениями. Её устраняют либо с помощью поправок, либо «улучшением» эксперимента.

– Прогрессирующая (дрейфовая) погрешность — непредсказуемая погрешность, медленно меняющаяся во времени. Обусловлена она нарушениями статистической устойчивости.

– Грубая погрешность (промах) — погрешность, возникшая вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры (например, если экспериментатор неправильно прочёл номер деления на шкале прибора или если произошло замыкание в электрической цепи) [4].

2.2 Определение относительной погрешности результатов измерения разрывной нагрузки материалов для средств защиты рук

Результаты прямых многократных измерений разрывной нагрузки материалов тканей для средств защиты рук приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 - Результаты прямых многократных измерений разрывной нагрузки и устойчивости к многократному изгибу материалов для средств защиты рук

№	X (разрывная нагрузка, Н)	Абсолютная погрешность, **ΔX**	Относительная погрешность, **δ**
1	0,6	-0,56	-48,17
2	1	-0,16	-13,62
3	1,1	-0,06	-4,98
4	1,25	0,09	7,98
5	1,2	0,04	3,66
6	1,15	-0,01	-0,66
7	1,3	0,14	12,29
8	0,95	-0,21	-17,94
9	1,08	-0,08	-6,71
10	1,18	0,02	1,93
11	1,21	0,05	4,52
12	1,19	0,03	2,79
13	1,25	0,09	7,98
14	1,23	0,07	6,25
15	1,18	0,02	1,93
16	1,45	0,29	25,25
17	1,18	0,02	1,93
18	1,35	0,19	16,61
19	1,26	0,10	8,84
20	1,2	0,04	3,66
21	1,16	0,00	0,20
22	1,24	0,08	7,11
23	1,1	-0,06	-4,98
24	0,96	-0,20	-17,07
25	1,21	0,05	4,52
26	0,98	-0,18	-15,35
27	1,19	0,03	2,79
28	1,22	0,06	5,38
29	1,1	-0,06	-4,98
30	1,26	0,10	8,84

За действительный размер принимается среднее арифметическое при многократных измерениях. Действительный размер рассчитывается по формуле (5):

$\mathbf{X}_{Д} = \frac{0,6+1+1,1+\cdots+1,26}{30} = 1,16$ Н.

Для каждого ряда наблюдений, приведенных в табл. 2.1, рассчитывается абсолютная погрешность с помощью формулы (4):

$\Delta\mathbf{X_1} = 0,6 - 1,16 = -0,56$ Н;

$\Delta\mathbf{X_2} = 1 - 1,16 = -0,16$ Н;

$\Delta\mathbf{X_3} = 1,1 - 1,16 = -0,06$ Н;

$\Delta\mathbf{X_4} = 1,25 - 1,16 = 0,09$ Н;

$\Delta\mathbf{X_5} = 1,2 - 1,16 = 0,04$ Н;

$\Delta\mathbf{X_6} = 1,15 - 1,16 = -0,01$ Н;

$\Delta\mathbf{X_7} = 1,3 - 1,16 = 0,14$ Н;

$\Delta\mathbf{X_8} = 0,95 - 1,16 = -0,21$ Н.

Аналогичным образом была рассчитана абсолютная погрешность для наблюдений №5-30. Результаты представлены в табл. 2.1 (3 столбец).

Относительная погрешность рассчитывается по формуле (6):

$\sigma_1 = \frac{0,56}{1,16} \cdot 100\% = 48,17\%$;

$\sigma_2 = \frac{0,16}{1,16} \cdot 100\% = 13,69\%$;

$\sigma_3 = \frac{0,06}{1,16} \cdot 100\% = 5,06\%$;

$\sigma_4 = \frac{0,09}{1,16} \cdot 100\% = 7,88\%$;

$\sigma_5 = \frac{0,04}{1,16} \cdot 100\% = 3,57\%$;

$\sigma_6 = \frac{0,01}{1,16} \cdot 100\% = 0,75\%$;

$\sigma_7 = \frac{0,14}{1,16} \cdot 100\% = 12,20\%$;

$\sigma_8 = \frac{0,21}{1,16} \cdot 100\% = 18,01\%$.

Аналогичным образом была рассчитана относительная погрешность для наблюдений 9-30. Результаты представлены в табл. 2.1 (4 столбец).

3 ПРОВЕДЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

3.1 Понятие корреляционного анализа

Зависимости между величинами (факторами, признаками) разделяют на два вида: функциональную и статистическую.

Отличительной особенностью функциональной зависимости двух величин считается тот факт, что значению одной из них всегда соответствует одно или несколько точно определённых значений другой величины. Кроме того, функциональная связь двух факторов возможна только при условии, что вторая величина зависит только от первой и не зависит ни от каких других величин. В случае зависимости величины от множества факторов, функциональная связь возможна, если первая величина не зависит ни от каких других факторов, кроме входящих в указанное множество.

В реальных ситуациях эти условия не выполнимы, поскольку всегда существует огромное количество свойств самого объекта и окружающей его среды, влияющих друг на друга, что приводит к невозможности учёта всех взаимодействий (как качественно, так и количественно), поэтому такого рода связи не существуют. Естественно, функциональная связь является математической абстракцией и находит практическое применение только тогда, когда определённая величина в основном зависит от соответствующих факторов, а остальные связи пренебрежимо слабы.

При статистической зависимости изменение одной из величин влечёт изменение распределения других величин, которые с определенными вероятностями принимают некоторые значения. Функциональную зависимость следует считать частным случаем статистической: значению одного фактора соответствуют значения других факторов с вероятностью, равной единице.

Значительно больший интерес представляет другой частный случай статистической зависимости, когда существует взаимосвязь значений одних

случайных величин со средним значением других, при той особенности, что в каждом отдельном случае любая из взаимосвязанных величин может принимать различные значения.

Такого рода зависимость между переменными величинами называется корреляционной, или корреляцией.

Корреляционный анализ — метод обработки статистических данных, заключающийся в изучении коэффициентов (корреляции). Его применение возможно в случае наличия достаточного количества (для конкретного вида коэффициента корреляции) наблюдений из более чем одной переменной. При этом сравниваются коэффициенты корреляции между одной парой или множеством пар признаков, для установления между ними статистических взаимосвязей.

Корреляционный анализ, как и другие статистические методы, основан на использовании вероятностных моделей, описывающих поведение исследуемых признаков в некоторой генеральной совокупности, из которой получены экспериментальные значения x_i и y_i.

Задача корреляционного анализа сводится к следующим более малым задачам:

– установлению формы (линейная, нелинейная);

– направления (положительное или отрицательное) связи между варьирующими признаками;

– измерению тесноты связи;

– и проверке уровня значимости полученных коэффициентов корреляции.

Популярность метода обусловлена двумя моментами: коэффициенты корреляции относительно просты в подсчете, их применение не требует специальной математической подготовки. В сочетании с простотой интерпретации (принятие гипотезы о наличии корреляции означает что изменение переменной А, произойдет одновременно с изменением значения

Б), простота применения коэффициента привела к его широкому распространению в сфере анализа статистических данных.

Когда исследуется корреляция между количественными признаками, значения которых можно точно измерить в единицах метрических шкал, то очень часто принимается модель двумерной нормально распределенной генеральной совокупности. Такая модель отображает зависимость между переменными величинами x и y графически в виде геометрического места точек в системе прямоугольных координат. Изображенные на координатной плоскости точки (x_i, y_i), где x_i и y_i – значения первой и второй переменных, называются корреляционным полем (рис. 1а). Аналитическая функция, аппроксимирующая (приближенно описывающая) наблюдаемые эмпирические значения, называется функцией регрессии (рис. 1б).

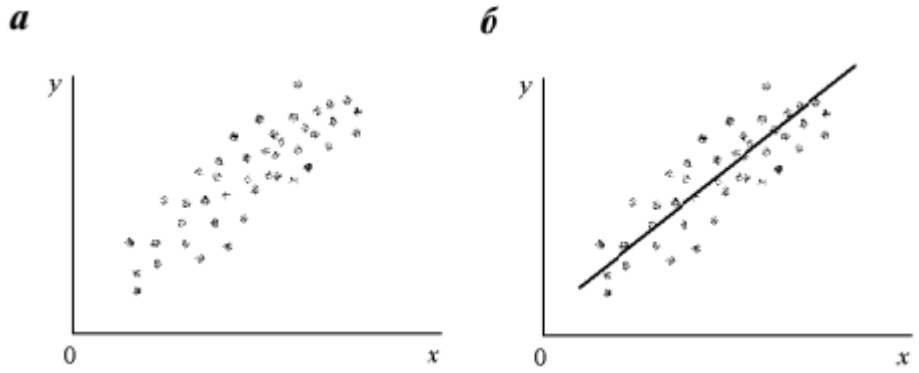

Рисунок 1 – Корреляционное поле (а) и функция регрессии (б)

Функция регрессии отражает тенденцию изменения одной величины под действием другой и строится таким образом, чтобы эмпирические точки корреляционного поля лежали как можно ближе к ней. Функция регрессии может быть линейной, параболической, гиперболической, логарифмической и др [6].

3.2 Корреляционная связь

По направлению корреляционная связь может быть положительной (прямой) и отрицательной (обратной).

При положительной линейной корреляции более высоким значениям

одного признака соответствуют более высокие значения другого, а более низким значениям одного признака - более низкие значения другого. При отрицательной корреляции соотношения обратные.

Знак коэффициента корреляции зависит от направления корреляционной связи: при положительной корреляции коэффициент корреляции имеет положительный знак, при отрицательной корреляции - отрицательный знак.

При изучении корреляционной связи важным направлением анализа является оценка степени тесноты связи. Понятие степени тесноты связи между двумя признаками возникает вследствие того, что в действительности на изменение результативного признака влияет множество факторов. При этом влияние одного из факторов может выражаться более заметно и четко, чем влияние других факторов. С изменением условий роль решающего фактора может перейти к другому признаку.

При статистическом изучении взаимосвязей, как правило, учитываются только основные факторы. Также с учетом степени тесноты связи оценивается необходимость более подробного изучения конкретной данной связи и значение практического ее использования.

В общем, знание количественной оценки тесноты корреляционной связи позволяет решить следующую группу вопросов:

– необходимость глубокого изучения данной связи между признаками и целесообразность ее практического применения;

– степень различий в проявлении связи в конкретных условиях (сопоставление оценки тесноты связи для различных условий);

– выявление главных и второстепенных факторов в данных конкретных условиях путём последовательного рассмотрения и сравнения признака с различными факторами.

Показатели тесноты связи должны удовлетворять ряду основных требований:

– величина показателя тесноты связи должна быть равна или близка к нулю, если связь между изучаемыми признаками (процессами, явлениями) отсутствует;

– при наличии между изучаемыми признаками функциональной связи величина показателя тесноты связи должна быть равна единице;

– при наличии между признаками корреляционной связи абсолютное значение показателя тесноты связи должно выражаться правильной дробью, которая по величине тем больше, чем теснее связь между изучаемыми признаками (стремится к единице).

Корреляционная зависимость определяется различными параметрами, среди которых наибольшее распространение получили парные показатели, характеризующие взаимосвязь двух случайных величин: коэффициент ковариации (корреляционный момент) и линейный коэффициент корреляции (коэффициент корреляции Пирсона).

Сила связи определяется абсолютным значением показателя тесноты связи и не зависит от направления связи.

В зависимости от абсолютного значения коэффициента корреляции r_{xy} корреляционные связи между признаками по силе делятся следующим образом:

– сильная, или тесная при коэффициенте корреляции $r_{xy}>0,70$;

– средняя (при $0,50<r_{xy}<0,69$);

– умеренная (при $0,30<r_{xy}<0,49$);

– слабая (при $0,20<r_{xy}<0,29$);

– очень слабая (при $r_{xy}<0,19$).

Простейшей, но достаточно информативной характеристикой тесноты связи двух величин x и y является коэффициент корреляции. В теории вероятностей этот показатель определяется с помощью других вероятностных характеристик.

Наилучшим приближенным значением коэффициента корреляции (или

коэффициент Пирсона), который можно вычислить с помощью результатов измерений, является величина r_{xy}, определяемая по формуле:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}\ , \tag{7}$$

где

$$S_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x^2}{n} - \bar{x}^2; \tag{8}$$

$$S_{yy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y^2}{n} - \bar{y}^2; \tag{9}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}\ \ )(y_i - \bar{y}\ \ ). \tag{10}$$

Для расчета выборочного коэффициента корреляции нужно знать выборочные средние для x и y, которые рассчитываются по следующим формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{11}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{12}$$

Значение коэффициента корреляции лежит в пределах от –1 до +1. Если случайные величины x, y независимы, то коэффициент корреляции ϱ_{xy} обязательно равен нулю, обратное утверждение неверно.

Коэффициент корреляции характеризует значимость линейной связи между параметрами:

– при $r_{xy} = 1$ значения x и полностью совпадают;

– при $r_{xy} = -1$ величины x и y принимают противоположные значения;

– при $r_{xy} = 0$ величины x и y практически не связаны друг с другом линейным соотношением. Однако это не означает отсутствия каких-то других (например, нелинейных) связей между параметрами;

– при $0 < |r_{xy}| < 1$ однозначной линейной связи величин x и y нет, и чем меньше абсолютная величина коэффициента корреляции, тем в меньшей

степени по значениям одного параметра можно предсказать значение другого.

В первых двух случаях имеет место функциональная зависимость: зная значение одного параметра, можно однозначно указать значение другого параметра.

3.3 Определение коэффициента корреляции

Значение коэффициента корреляции не зависит от того, какую из двух переменных назвать x, а какую – y. Оно также не зависит от выбора единиц измерения этих переменных. Интерпретация величин коэффициентов корреляции и оценка из значимости хорошо известны лишь для нормально распределенных переменных. То есть, прежде чем делать строгие выводы о корреляционной связи переменных, необходимо убедиться в том, что можно принять гипотезу о нормальном распределении обеих переменных.

При исследовании статистической зависимости между разрывной нагрузки (x) и устойчивостью к многократному изгибу (y) для материалов средств защиты рук, получены промежуточные результаты вычисления коэффициента корреляции (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Промежуточные результаты вычисления коэффициента корреляции

№	x	y	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,6	58	-0,56	-19,72	0,31	388,75	11,00
2	1	78	-0,16	0,28	0,02	0,08	-0,04
3	1,1	80	-0,06	2,28	0,00	5,21	-0,13
4	1,25	83,9	0,09	6,18	0,01	38,23	0,57
5	1,2	78	0,04	0,28	0,00	0,08	0,01
6	1,15	81	-0,01	3,28	0,00	10,78	-0,03
7	1,3	82,4	0,14	4,68	0,02	21,93	0,67
8	0,95	71	-0,21	-6,72	0,04	45,11	1,39
9	1,08	74	-0,08	-3,72	0,01	13,81	0,29
10	1,18	76,9	0,02	-0,82	0,00	0,67	-0,02
11	1,21	75,5	0,05	-2,22	0,00	4,91	-0,12
12	1,19	85	0,03	7,28	0,00	53,05	0,24
13	1,25	82	0,09	4,28	0,01	18,35	0,40
14	1,23	79	0,07	1,28	0,01	1,65	0,09
15	1,18	90	0,02	12,28	0,00	150,88	0,27

Окончание таблицы 3.1

16	1,45	86	0,29	8,28	0,09	68,61	2,42
17	1,18	75,5	0,02	-2,22	0,00	4,91	-0,05
18	1,35	80	0,19	2,28	0,04	5,21	0,44
19	1,26	79,6	0,10	1,88	0,01	3,55	0,19
20	1,2	71,4	0,04	-6,32	0,00	39,90	-0,27
21	1,16	77	0,00	-0,72	0,00	0,51	0,00
22	1,24	89	0,08	11,28	0,01	127,31	0,93
23	1,1	79,3	-0,06	1,58	0,00	2,51	-0,09
24	0,96	69,2	-0,20	-8,52	0,04	72,53	1,68
25	1,21	71	0,05	-6,72	0,00	45,11	-0,35
26	0,98	70,9	-0,18	-6,82	0,03	46,47	1,21
27	1,19	72,6	0,03	-5,12	0,00	26,18	-0,17
28	1,22	85,3	0,06	7,58	0,00	57,51	0,47
29	1,1	74	-0,06	-3,72	0,00	13,81	0,21
30	1,26	76	0,10	-1,72	0,01	2,95	-0,18

Для расчета коэффициента корреляции нужно рассчитать выборочные средние для x и y по формулам (11), (12) соответственно:

$$\bar{x} = \frac{0{,}6+1+1{,}1+\cdots+1{,}1+1{,}26}{30} = 1{,}16 \text{ Н};$$

$$\bar{y} = \frac{58+78+80+\cdots+74+76}{30} = 77{,}7 \text{ циклы}.$$

Выборочные дисперсии для x и y рассчитываются по формулам (8), (9):

$$S_{xx} = \frac{(0{,}6-1{,}16)^2+(1-1{,}16)^2+(1{,}1-1{,}16)^2+\ldots+(1{,}26-1{,}16)^2}{30} = 0{,}67 \text{ Н};$$

$$S_{yy} = \frac{(58-77{,}7)^2+(78-77{,}7)^2+(80-77{,}7)^2+\ldots+(76-77{,}7)^2}{30} = 1270{,}58 \text{ циклы};$$

$$S_{xy} = \frac{(0{,}6-1{,}16)(58-77{,}7)+(1-1{,}16)(78-77{,}7)+\ldots+(1{,}26-1{,}16)(76-77{,}7)}{30} = 21{,}05$$

Н·циклы.

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле (7):

$$r_{xy} = \frac{21{,}05}{\sqrt{0{,}67\cdot 1270{,}58}} = 0{,}72.$$

Так как коэффициент корреляции r_{xy}>0,70, то зависимость между исследуемыми величинами сильная или тесная. Следовательно, существует некоторая положительная корреляция между разрывной нагрузкой и устойчивостью к многократному изгибу. Насколько сильна связь между

исследуемыми переменными можно определить, используя метод проверки статистических гипотез.

3.4 Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (x, y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема n и по ней найден выборочный коэффициент корреляции r_{xy}, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности также отличен от нуля. Возникает необходимость при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля (кратко говоря, значим), а x и y коррелированы, то есть связаны линейной зависимостью.

Если нулевая гипотеза будет принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а x и y некоррелированы.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину:

$$T = r_{xy}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}{}^2}}. \qquad (13)$$

Величина T при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с k=n-2 степенями свободы.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через T_H (по формуле (13)) и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы:

$$T_H = 0{,}72\frac{\sqrt{30-2}}{\sqrt{1-0{,}72^2}} = 5{,}5.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы k=28 критическое значение критерия Стьюдента . Так как $|T_H| > t_{кр}$, то нулевая

гипотеза отвергается, принимается альтернативная. Таким образом, можно утверждать, что выборочный коэффициент корреляции получен по данным, отобранным из генеральной совокупности, в которой исследуемые переменные связаны между собой.

Доверительный интервал определяется по формуле:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}}. \quad (14)$$

Доверительный интервал определяется:

$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,72}{1-0,72} = 0,9.$

Распределение z уже при небольших n является приближенным нормальным с математическим ожиданием:

$$\mathrm{M}(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} + \frac{r_{xy}}{2(n-1)}. \quad (15)$$

Математическое ожидание определяется:

$\mathrm{M}(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,72}{1-0,72} + \frac{0,72}{2(30-1)} = 0,91.$

Доверительный интервал для :

$$z - t_{1-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n-3}} \leq \mathrm{M}(z) \leq z + t_{1-\alpha}\frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (16)$$

По функции Лапласа $t_{1-\alpha}$=1,96 доверительный интервал согласно формуле (16) определяется:

$0,91 - 1,96\frac{1}{\sqrt{30-3}} \leq \mathrm{M}(z) \leq 0,91 + 1,96\frac{1}{\sqrt{30-3}}.$

Доверительный интервал для генерального коэффициента корреляции равен:

$0,532 \leq \mathrm{M}(z) \leq 1,288.$

Таким образом, существует некоторая положительная корреляция между разрывной нагрузкой и устойчивостью к многократному изгибу.

4 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1 Кодирование переменных

Для исследования влияния некоторых факторов на устойчивость к многократному изгибу материалов для средств защиты рук были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3. В качестве факторов, влияющих на устойчивость к многократному изгибу y (циклы), были выбраны следующие:

1. z_1 – толщина, мм: $z_1^- = 0{,}6$ мм; $z_1^+ = 0{,}9$ мм.

2. z_2 – разрывная нагрузка, Н: $z_2^- = 0{,}78$ Н; $z_2^+ = 1{,}47$ Н.

3. z_3 – удлинение при разрыве, %: $z_3^- = 1{,}5$ %; $z_3^+ = 1{,}8$ %.

Требуется построить уравнение регрессии, учитывая все взаимодействия факторов, проверить полученную модель на адекватность и произвести ее интерпретацию.

План проведения экспериментов записывается в виде матрицы планирования, в которой в определенном порядке перечисляются различные комбинации факторов на двух уровнях. Знак «+» говорит о том, что во время опыта значение фактора устанавливают на верхнем уровне, а знак «–» показывает, что значение фактора устанавливают на нижнем уровне [7].

При проведении экспериментов получают значения исследуемой величины y (табл.4.1) для каждого опыта (или серии опытов). Затем переходят к построению математической модели.

Таблица 4.1 - Исходная матрица планирования ПФЭ 2^3

№ эксперимента	Изучаемые факторы			Результаты опытов		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+	+	+	73	74	75
2	-	+	+	77	77,6	78,5
3	+	-	+	83,5	83,8	82
4	-	-	+	88	87,6	87,5
5	+	+	-	65,5	66	66,5
6	-	+	-	85,2	84,2	84
7	+	-	-	80	80,2	81,2
8	-	-	-	90,3	89,3	89,2

Под моделью понимается вид функции $y = f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$, которая связывает изучаемый параметр со значениями факторов, лежащих в

интервале между верхним и нижним уровнями. Эта функция называется уравнением регрессии..

Для обработки результатов проведенных экспериментов и дальнейшего определения коэффициентов уравнения регрессии факторы приводят к одному масштабу. Это достигается путем кодирования переменных.

Нижний уровень фактора z_i обозначается через z_i^-, а верхний уровень – через z_i^+.Тогда новые кодированные переменные x_i будут определяться через z_i по формуле:

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\lambda_i}, \quad (17)$$

где z_i^0 - центр плана;

λ_i – интервал варьирования.

Для каждого фактора находится центр, интервал варьирования и зависимость кодированной переменной x_i от натуральной z_i.

Центр плана находится по формуле:

$$Z_i^0 = \frac{z_i^+ + z_i^-}{2}. \quad (18)$$

Центр плана для z_1, z_2 и z_3:

$Z_1^0 = \frac{0,9+0,6}{2} = 0,75$ мм;

$Z_2^0 = \frac{1,47+0,78}{2} = 1,125$ Н;

$Z_3^0 = \frac{1,8+1,5}{2} = 1,65$ %.

Интервал варьирования находится по формуле:

$$\lambda_i = \frac{z_i^+ - z_i^-}{2}. \quad (19)$$

Интервал варьирования для z_1, z_2 и z_3:

$\lambda_1 = \frac{0,9-0,6}{2} = 0,15$ мм;

$\lambda_2 = \frac{1,47-0,78}{2} = 0,345$ Н;

$\lambda_3 = \frac{1,8-1,5}{2} = 0,15$ %.

Данные расчетов представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2 – Кодирование факторов

Факторы	Верхний уровень z_i^+	Нижний уровень z_i^-	Центр z_i^0	Интервал варьирования λ_i	Зависимость кодированной переменной от натуральной
z_1	0,9	0,6	0,75	0,15	$x_1 = \frac{z_1 - 0,75}{0,15} = \frac{1}{3}(20z_1 - 15)$
z_2	1,47	0,78	1,125	0,345	$x_2 = \frac{z_2 - 1,125}{0.345} = \frac{1}{69}(200z_2 - 225)$
z_3	1,8	1,5	1,65	0,15	$x_3 = \frac{z_3 - 1,65}{0,15} = \frac{1}{3}(20z_3 - 33)$

При таком кодировании все новые переменные будут принимать значения от –1 до +1.

4.2 Построение матрицы планирования в кодированных переменных

Линейное уравнение регрессии относительно новых переменных имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k. \quad (20)$$

Для изучения влияние парных взаимодействий различных факторов на исследуемый параметр, то уравнение регрессии записывают в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + \cdots + b_kx_k + b_{1,2}x_1x_2 + b_{1,2}x_1x_3 \cdots + b_{k-1}x_{k-1}x_k$$

или

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_ix_i + \sum_{i<j} b_{i,j}x_ix_j. \quad (21)$$

Если надо учесть другие взаимодействия, то число слагаемых увеличивают.

Прежде, чем определять коэффициенты выбранной модели, матрицу планирования записывают относительно новых переменных. Далее матрицу дополняют (если это требует вид выбранного уравнения регрессии)

столбцами знаков «+» и «–», соответствующих уровням, на которых будут находиться взаимодействия факторов (см. столбцы x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 в табл. 4.3). Знаки этих столбцов получают с помощью исходной матрицы планирования. Обозначим знак «+» или «–» в матрице планирования за x_{ji}, который соответствует j-ому опыту (j=1,...,n) для i-го фактора (i=1,…,k). При этом знак «+» показывает, что кодированная переменная принимает значение +1, а знак «–» соответствует значению –1. Тогда знаки (или уровни варьирования) для взаимодействия факторов x_r и x_p вычисляются простым перемножением: $x_{jr} \cdot x_{jp}$, j=1,…,n [8].

В таблице 4.3 знаки для взаимодействия x_1x_2 получены таким образом:

для 1-го опыта (j=1) $x_{11}x_{12}$= (+1)(+1) =+1,

для 2-го опыта (j=2) $x_{21}x_{22}$= (-1)(+1) = -1,

для 3-го опыта (j=3) $x_{31}x_{32}$=(+1)(-1) = -1, и т.д.

Обычно проводят несколько серий опытов для каждого эксперимента. Это необходимо для проверки уравнения на адекватность.

Адекватность – это способность модели предсказывать результаты эксперимента в некоторой области с требуемой точностью. Результаты опытов в каждом j-ом эксперименте (j=1,…, n) записывают в правые столбцы матрицы планирования. В последнем столбце записывают средние выборочные значения полученных результатов для каждой серии опытов (табл. 4.3). Если обозначить за y_{ji} значение результата, полученного в i-ом опыте (i=1,…,m) для j-ого эксперимента (j=1,…,n), то выборочное среднее для каждого эксперимента вычисляют по известной формуле:

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ , \ j = \overline{1,n} \, . \qquad (22)$$

Для каждого эксперимента по формуле (22) были рассчитаны средние выборочные результатов:

$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}(73 + 74 + 75) = 74$ циклы;

$\bar{y}_2 = \frac{1}{3}(77 + 77{,}6 + 78{,}5) = 77{,}7$ циклы;

$\bar{y}_3 = \frac{1}{3}(83{,}5 + 83{,}8 + 82) = 83{,}1$ циклы;

$\overline{y}_4 = \frac{1}{3}(88 + 87{,}6 + 87{,}5) = 87{,}7$ циклы;

$\bar{y}_5 = \frac{1}{3}(65{,}5 + 66 + 66{,}5) = 66$ циклы;

$\bar{y}_6 = \frac{1}{3}(85{,}2 + 84{,}2 + 84) = 84{,}46$ циклы;

$\bar{y}_7 = \frac{1}{3}(80 + 80{,}2 + 81{,}2) = 80{,}46$ циклы;

$\bar{y}_8 = \frac{1}{3}(90{,}3 + 89{,}3 + 89{,}2) = 89{,}6$ циклы.

В табл. 4.3 представлена матрица планирования с учетом всех взаимодействий и средних значений отклика.

Таблица 4.3 – Матрица планирования для обработки результатов

№ экспе-римента	Факторы			Взаимодействие				Результаты опытов			Среднее результа-тов
	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}$
1	+	+	+	+	+	+	+	73	74	75	74
2	-	+	+	-	-	+	-	77	77,6	78,5	77,7
3	+	-	+	-	+	-	-	83,5	83,8	82	83,1
4	-	-	+	+	-	-	+	88	87,6	87,5	87,7
5	+	+	-	+	-	-	-	65,5	66	66,5	66
6	-	+	-	-	+	-	+	85,2	84,2	84	84,46
7	+	-	-	-	-	+	+	80	80,2	81,2	80,46
8	-	-	-	+	+	+	-	90,3	89,3	89,2	89,6

4.3 Нахождение коэффициентов уравнения регрессии

Коэффициенты уравнения регрессии находят с помощью метода наименьших квадратов.

Так как матрица планирования ПФЭ 2^k должна удовлетворять определенным требованиям (такие матрицы с заданными требованиями уже построены), то формулы, определяющие коэффициенты уравнения регрессии, достаточно просты:

Расчет коэффициентов уравнения регрессии проводится по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_j, \tag{23}$$

$$b_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}\bar{y}_j,\ i = \overline{1,k}, \tag{24}$$

$$b_{r,p} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{jr}x_{jp}\bar{y}_j,\ r < p, r = \overline{1,k}, p = \overline{1,k}, \quad (25)$$

и т.д., если учитываются другие взаимодействия.

Коэффициенты уравнения регрессии рассчитываются по формуле (23):

$$b_0 = \frac{1}{8}(74 + 77{,}7 + 83{,}1 + 87{,}7 + 66 + 84{,}46 + 80{,}46 + 89{,}6) = 80{,}38;$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(74 - 77{,}7 + 83{,}1 - 87{,}7 + 66 - 84{,}46 + 80{,}46 - 89{,}6) = -0{,}25;$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(74 + 77{,}7 - 83{,}1 - 87{,}7 + 66 + 84{,}46 - 80{,}46 - 89{,}6) = -4{,}84;$$

$$b_3 = \frac{1}{8}(74 + 77{,}7 + 83{,}1 + 87{,}7 - 66 - 84{,}46 - 80{,}46 - 89{,}6) = -4{,}49;$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}(74 - 77{,}7 - 83{,}1 + 87{,}7 + 66 - 84{,}46 - 80{,}46 + 89{,}6) = -0{,}06;$$

$$b_{13} = \frac{1}{8}(74 - 77{,}7 + 83{,}1 - 87{,}7 - 66 + 84{,}46 - 80{,}46 + 89{,}6) = -2{,}41;$$

$$b_{23} = \frac{1}{8}(74 + 77{,}7 - 83{,}1 - 87{,}7 - 66 - 84{,}46 + 80{,}46 + 89{,}6) = -1{,}05;$$

$$b_{123} = \frac{1}{8}(74 - 77{,}7 - 83{,}1 + 87{,}7 - 66 + 84{,}46 + 80{,}46 - 89{,}6) =$$
$$= -1{,}28$$

4.4 Проверка коэффициентов на значимость

Полученные коэффициенты необходимо проверить на значимость. Это можно сделать с помощью критерия Стьюдента: если , то b значим , то b незначим и его полагают равным нулю в уравнении регрессии.

Критическую точку $t_{кр.}$ находят из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы n(m - 1) и с заданным уровнем значимости б для случая двусторонней критической области. Среднее квадратическое отклонение коэффициентов $S_{коэф.}$ зависит от дисперсии воспроизводимости результатов по всем проведенным опытам $S^2_{\{y\}}$ и вычисляется по формуле [9]:

$$S_{коэф.} = \sqrt{\frac{S^2_{\{y\}}}{n \cdot m}}. \quad (26)$$

Дисперсия воспроизводимости $S^2_{\{y\}}$ характеризует ошибку всего эксперимента. В случае равномерного дублирования опытов (т.е. при

одинаковом числе наблюдений в каждом эксперименте) для расчета $S^2_{\{y\}}$ используют формулу:

$$S^2_{\{y\}} = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 , \quad (27)$$

где n – число экспериментов (число строк в матрице ПФЭ);

m – число опытов (наблюдений) в каждом эксперименте;

y_{ji} – результат отдельного i-го наблюдения в j-ом эксперименте;

$\bar{y}_j$– среднее выборочное значение наблюдений для j-ого эксперимента.

Для облегчения расчетов нахождения дисперсии воспроизводимости $S^2_{\{y\}}$ лучше использовать формулу (27) в ином виде:

$$S^2_{\{y\}} = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j^2 . \quad (28)$$

В формуле (28) данные внутренние суммы S_j^2 являются выборочными дисперсиями результатов опытов для j-го эксперимента (j=1,…, n).

Для удобства расчеты заносятся в табл. 4.4.

Таблица 4.4 – Расчет выборочных дисперсий

№ Опыта	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}$	$(y_1 - \bar{y})^2$	$(y_2 - \bar{y})^2$	$(y_3 - \bar{y})^2$	S^2
1	73	74	75	74	1	0	1	1
2	77	77,6	78,5	77,7	0,49	0,01	0,64	0,57
3	83,5	83,8	82	83,1	0,16	0,49	1,21	0,93
4	88	87,6	87,5	87,7	0,09	0,01	0,04	0,07
5	65,5	66	66,5	66	0,25	0	0,25	0,25
6	85,2	84,2	84	84,46	0,53	0,07	0,21	0,41
7	80	80,2	81,2	80,46	0,21	0,07	0,53	0,41
8	90,3	89,3	89,2	89,6	0,49	0,09	0,16	0,37

Далее находится сумма полученных значений дисперсий:

$\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = 4{,}01$ циклы.

Отсюда дисперсия воспроизводимости:

$S^2_{\{y\}} = \sum_{j=1}^{8} S_j^2 = \frac{1}{8} \cdot 4{,}01 = 0{,}5$ циклы.

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов определяется по формуле (26):

.

Из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы n(m-1)=8·2=16 при уровне значимости α=0,05 находится . Следовательно,

Данное значение сравнивается с коэффициентами уравнения регрессии, представленными в табл. 4.5.

Сравнивая полученное значение видно, что все коэффициенты кроме b_1, b_{12} больше по абсолютной величине 0,3. Следовательно, все коэффициенты кроме b_1, b_{12} значимы. Полагая, что $b_1 = 0$, b_{12}= 0, то уравнение регрессии в кодированных переменных:

$$y = 80{,}38 - 4{,}84x_2 - 4{,}49x_3 - 2.41x_1x_3 - 1.05x_2x_3 - 1.28x_1x_2x_3 \,. \quad (29)$$

4.5 Проверка уравнения на адекватность

Проверка на адекватность полученного уравнения регрессии со значимыми коэффициентами осуществляется с помощью критерия Фишера: если $F_{расч} < F_{табл}$, то уравнение адекватно, в противном случае – неадекватно.

Расчетное значение критерия $F_{расч.}$ определяется по формуле:

$$F_{расч.} = \frac{S^2_{ост.}}{S^2_{\{y\}}}\,, \quad (30)$$

где $S^2_{\{y\}}$– дисперсия воспроизводимости;

$S^2_{ост.}$ – остаточная дисперсия (или дисперсия адекватности).

Остаточная дисперсия $S^2_{ост.}$вычисляется следующим образом:

$$S^2_{ост.} = \frac{m}{n-r}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{y}_i - \bar{y}_j)^2\,, \quad (31)$$

где n – число экспериментов;

m – число опытов в каждом эксперименте;

r – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

$\tilde{y}_i$ – значение изучаемого параметра, вычисленное по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами для j-ого эксперимента;

$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение наблюдений для j-ого эксперимента.

Табличное значение критерия $F_{табл.}$ находят из таблиц критических точек распределения Фишера по заданному уровню значимости б и по

соответствующим степеням свободы k_1= n - r и k_2= n(m - 1). Степень свободы k_1 соответствует степени свободы числителя формулы (31) – остаточной дисперсии $S^2_{\text{ост.}}$, а k2 – степень свободы знаменателя формулы (22) – дисперсии воспроизводимости $S^2_{\{y\}}$.

Проверка полученного уравнения (29) на адекватность происходит по критерию Фишера. Так как дисперсия воспроизводимости найдена в предыдущем пункте, то для определения расчетного значения критерия $F_{\text{расч.}}$ необходимо вычислить остаточную дисперсию $S^2_{\text{ост.}}$. Для этого нужно найти значения изучаемого параметра по полученному уравнению регрессии $\tilde{y}_j$ (j=1,…, 8), подставляя +1 или -1 вместо x_i в соответствии с номером j эксперимента из табл. 4.1:

$\tilde{y}_1 = 80{,}38 - 4{,}84 - 4{,}49 + 2{,}41 - 1{,}05 + 1{,}28 = 73{,}69$ циклы;

$\tilde{y}_2 = 80{,}38 - 4{,}84 + 4{,}49 - 2{,}41 + 1{,}05 - 1{,}28 = 77{,}39$ циклы;

$\tilde{y}_3 = 80{,}38 + 4{,}84 + 4{,}49 + 2{,}41 + 1{,}05 - 1{,}28 = 82{,}91$ циклы;

$\tilde{y}_4 = 80{,}38 + 4{,}84 + 4{,}49 - 2{,}41 - 1{,}05 + 1{,}28 = 87{,}53$ циклы;

$\tilde{y}_5 = 80{,}38 - 4{,}84 - 4{,}49 - 2{,}41 - 1{,}05 - 1{,}28 = 66{,}31$ циклы;

$\tilde{y}_6 = 80{,}38 - 4{,}84 + 4{,}49 + 2{,}41 + 1{,}05 + 1{,}28 = 84{,}77$ циклы;

$\tilde{y}_7 = 80{,}38 + 4{,}84 - 4{,}49 - 2{,}41 + 1{,}05 + 1{,}28 = 80{,}65$ циклы;

$\tilde{y}_8 = 80{,}38 + 4{,}84 + 4{,}49 + 2{,}41 - 1{,}05 - 1{,}28 = 89{,}79$ циклы.

Далее рассчитывается остаточная дисперсия по формуле (31):

$S^2_{\text{ост.}} = \frac{3}{8-4}[(73{,}69 - 74)^2 + (77{,}39 - 77{,}7)^2 + (82{,}91 - 83{,}1)^2 +$

$+87{,}53-87{,}72+66{,}31-662+84{,}77-84{,}462+80{,}65-80{,}462++89{,}79-89{,}62$

$=1{,}56$ циклы.

Расчетное значение критерия Фишера определяется по формуле (30):

.

По таблице критических точек распределения Фишера находится табличное значение. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$; k_1=n-r=8-7=1; k_2=n(m-1)=8*2=16. Таким образом, $F_{\text{табл}}$=4,49.

Так как, то уравнение регрессии (29) адекватно.

4.6 Интерпретация полученной модели

По уравнению (29) видно, что наиболее сильное влияние на устойчивость к многократному изгибу оказывают фактор x_2 – разрывная нагрузка и x_3 – удлинение при разрыве, так как они имеет наибольший по абсолютной величине коэффициент. После этих факторов по силе влияния на отклик (устойчивость к многократному изгибу) идут: двойное взаимодействие факторов x_1x_2 - сочетание толщины и разрывной нагрузки. Так как коэффициенты при отрицательны, то это означает, что с уменьшением всех факторов и взаимодействий факторов значение отклика будет возрастать, а с увеличением – убывать.

Запись уравнение регрессии (29) в натуральных переменных, происходит таким образом: x_i выражается через значение z_i, которое берется из последнего столбца табл. 4.3. Уравнение регрессии в натуральных переменных:

$$y = 80{,}38 - 4{,}84 \cdot \frac{1}{69}(200z_2 - 225) - 4{,}49 \cdot \frac{1}{3}(20z_3 - 33) - 2.41 \times$$
$$\frac{1}{3}(20z_1 - 15) \cdot \frac{1}{3}(20z_3 - 33) - 1.05 \cdot \frac{1}{69}(200z_2 - 225) \cdot \frac{1}{3}(20z_3 - 33) -$$
$$1.28 \cdot \frac{1}{3}(20z_1 - 15) \cdot \frac{1}{69}(200z_2 - 225) \cdot \frac{1}{3}(20z_3 - 33).$$

Окончательный вид уравнения регрессии после преобразования в натуральные переменные:

$$y = 197{,}6 - 118{,}8z_1 - 179z_2 - 61{,}5z_3 + 264z_1z_2 + 72z_1z_3 + 100z_2z_3 -$$
$$-160z_1z_2z_3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной курсовой работе проводилось исследование влияния некоторых факторов на устойчивость к многократному изгибу материалов для средств защиты рук, рекомендуемых для работ на открытом воздухе в условиях Севера и Крайнего Севера, были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^3. В качестве факторов, влияющих на устойчивость к многократному изгибу, были выбраны следующие: толщина; разрывная нагрузка; удлинение при разрыве. Факторы определялись с помощью номенклатуры показателей качества. Перед постановкой эксперимента по плану ПФЭ, определялась относительная погрешность результатов измерений и проводился корреляционный анализ экспериментальных данных. Исследовалась статистическая зависимость между разрывной нагрузки и устойчивостью к многократному изгибу для материалов средств защиты рук. Так как коэффициент корреляции $r_{xy} = 0{,}72$, то между разрывной нагрузкой и устойчивостью к многократному изгибу существует некоторая положительная корреляция. Метод проверки статистических гипотез доказал этот факт.

При проведении полного факторного эксперимента полученное уравнение регрессии показывает, что наиболее сильное влияние на устойчивость к многократному изгибу средств защиты рук при низких температурах, оказывают факторы разрывная нагрузка и удлинение при разрыве, так как они имеет наибольший по абсолютной величине коэффициент. После этих факторов по силе влияния на отклик (устойчивость к многократному изгибу) идут: двойное взаимодействие факторов - сочетание толщины и разрывной нагрузки. Так как все коэффициенты отрицательны, то с уменьшением всех факторов и взаимодействий факторов значение отклика будет возрастать, а с увеличением – убывать.

Полный факторный эксперимент относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ 4.493-89 Система показателей качества продукции (СПКП). Материалы для средств защиты рук. Номенклатура показателей. – Введ. 1989-28-12. – М. : Изд-во стандартов, 1990. – 17 с.

2. ГОСТ 8978-75 Кожа искусственная и пленочные материалы. Методы определения устойчивости к многократному изгибу (с Изменениями N 1, 2) – Введ. 1977-07-01. – М. : Изд-во стандартов, 1998. – 17 с.

3. Жуков В. К. Математическая статистика с элементами теории планирования эксперимента: учеб. пособие: Л.В. Горская, В.Н. Пиунова, В.С. Смирнова. Саратовский полит. институт, 1975, 103 с

4. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / Под ред. Э.К.Лецкого. - М.: Мир, 1977.

5. Бекряев В. И. Основы теории эксперимента. Учебное пособие. - СПб.: Изд. РГГМУ, 2001 - 266 с.

6. Васильков Ю.В. Статистические методы в управлении предприятием :учебное пособие / Ю.В. Васильков, Н. Иняц. – М. : Стандарты и качество , 2008. – 279 с.

7. Реброва, Ирина Анатолиевна. Теория планирования эксперимента [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.А. Реброва. – Электрон. дан. − Омск: СибАДИ, 2016. – Режим доступа: http://bek.sibadi.org/fulltext/esd104.pdf, свободный после авторизации.

8. Соколовская И.Ю. Полный факторный эксперимент / И.Ю. Соколовская // Методические указания для самостоятельной работы студентов. – Новосибирск: НГАВТ, 2010. – 36 с.

9. Бирюков С.В., Чередов А.И. Метрология: Тексты лекций. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2000, - 110 с.

10. Сайт «Ekonomstat». – Режим доступа: https://ekonomstat.ru/polnye-otvety-na-voprosy-k-ekzamenu-statistika/104-ponyatie-korrelyacionnoj-svyazi.html (корреляция)

11. Средства индивидуальной защиты персонала предприятий атомной промышленности и энергетики: каталог-справочник. – М., 2015 – 257 с.